

РГБ ОЛ

- 3 MAR 1997

Вычислительный центр
Российской Академии наук

На правах рукописи

Широбоков Дмитрий Алексеевич

**Применение компактных схем пятого
порядка точности для расчета
течений вязкого газа**

Специальность 01.01.07
вычислительная математика

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Москва 1996

Работа выполнена в Вычислительном центре РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
профессор Толстых А.И.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических
наук, профессор Марков А.А.

кандидат физико-математических
наук, доцент Кривцов В.М.

Ведущая организация: Московский физико-технический
институт

Защита диссертации состоится "20" *марта* 1997
г. в 14 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета
Д002.32.01 при Вычислительном центре РАН по адресу:
117967, ГСП 1, Москва, ул. Вавилова, дом 40

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан "18" 02 1997 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук



Терентьев Е.Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

При выборе численного метода для решения как вязких, так и невязких задач динамики жидкости и газа важное значение имеет разностная схема, используемая для аппроксимации конвективных членов этих уравнений. Применение для этих целей схем с высоким (выше второго) порядком аппроксимации позволяет строить более экономичные методы, правильно описывающие мелкомасштабные детали течений. Создание и апробация новых численных алгоритмов, основанных на высокоточных схемах, является одним из главных направлений в развитии вычислительных методов в газовой динамике. Одним из классов таких схем являются схемы, основанные на аппроксимациях Падэ, или компактные схемы. Наряду с высокой точностью схемы обладают диссипативным механизмом, что позволяет использовать их для описания резко меняющихся решений. Следует отметить, что другие классы высокоточных неосциллирующих схем (TVD, ENO) активно разрабатываются и используются в прикладных задачах.

Разработка новых компактных схем анализ их аппроксимационных и других свойств дает возможность создавать более эффективные численные методы для определенных классов задач газовой динамики. Проверка схемы на простых тестовых задачах позволяет не только сравнить ее с существующими, но и способствует развитию численных методов, учитывающих преимущества данной схемы.

Как трех, так и двумерные задачи о течении вязкого газа между лопатками турбины широко исследуются как экспериментальными, так и вычислительными методами. Из-за значительной сложности подобные задачи решаются, как правило, в упрощенной постановке и требуют значительных вычислительных ресурсов. Численные методы на основе компактных аппроксимаций, используемые для решения таких задач,

являются более экономичными и точными чем традиционные.

Цель работы

1) Разработка эффективных численных методов, основанных на высокоточных компактных аппроксимациях, для решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа применительно к стационарным и нестационарным задачам.

2) Изучение свойств компактных аппроксимаций пятого порядка точности, представляющих собой двухпараметрическое семейство, оператор которых имеет определенную структуру. Аprobация этих компактных схем на известных тестовых одномерных нестационарных задачах для сравнения их эффективности и точности с ранее применявшимися схемами.

3) Исследование вопроса о наиболее эффективном предобуславливателе и методов его обращения применительно к стационарным задачам, для решения которых используется неявная схема.

4) Решение задачи о нестационарном двумерном сверхзвуковом обтекании прямоугольного препятствия невязким газом методом, основанном на использовании компактных аппроксимаций, для оценки целесообразности использования таких аппроксимаций в сочетании с методом расщепления потоков и методикой ограничения потоков для решения подобных задач.

5) Создание численного алгоритма, использующего компактные схемы пятого порядка точности при аппроксимации конвективных членов, для решения задачи о трехмерном ламинарном течении вязкого газа в межлопаточном канале статора турбины.

6) Определение особенностей реализации таких компонент численного метода, используемого для решения данной задачи, как метод расщепления потоков, метод Гаусса-Зейделя, постановка граничных условий разного типа, для использования подобного метода при решении других задач динамики вязкого газа. Разработка многосеточного метода для этой зада-

чи с целью повышения скорости сходимости итераций метода коррекции дефекта.

7) Проведение нескольких расчетов трехмерных и двумерных течений для выяснения особенностей работы численного метода при разных числах Рейнольдса, перепадах давления, различной геометрии расчетной области, на сетках с различным сгущением и косизной.

Научная новизна

Впервые проведены тестовые расчеты для новых компактных схем пятого порядка точности. Реализован метод расщепления потоков, ранее не использовавшийся применительно к компактным аппроксимациям. Испытан метод коррекции дефекта в стационарной задаче, где для аппроксимации правой части использовались компактные схемы. Разработана программа для расчета трехмерных течений в статоре турбины, основанная на высокоточных схемах, проведены расчеты течений газа на различных режимах и сетках разной подробности. Разработан и апробирован многосеточный ускоритель впервые применительно к данному методу. Проведено сравнение с экспериментальными данными.

Научно-практическая ценность работы

Проведено сравнение методов, основанных на новом классе компактных аппроксимаций, с ранее известными схемами. В результате расчетов подтверждена высокая точность применявшихся схем и возможность их применения для расчета разрывных течений. Созданная программа расчета трехмерных ламинарных течений реализует достаточно экономичный алгоритм и может быть использована в прикладных расчетах. Нарботанный опыт в постановке граничных условий, реализации обращения предобуславливателя, использования многосеточного ускорителя может применяться при решении других задач газовой динамики.

Апробация работы

Материалы, отражающие содержание диссертации, опубликованы в работах [1-3] и докладывались на конференциях

На конференции First Asian Computational Fluid Dynamics Conference, Hong Kong, 1995

На XXXIX научной конференции МФТИ, Долгопрудный, 1996

Объем и структура работы

Диссертация изложена на 104 страницах и состоит из введения, трех глав, выводов, списка литературы из 32 наименований и 48 рисунков.

Содержание работы

Во введении рассмотрены основные свойства, присущие нецентрированным компактным аппроксимациям и особенности численных методов, основанных на этих аппроксимациях, проанализированы подходы к постановке и решению задачи о течении в статоре турбины, изложено краткое содержание диссертации.

В первой главе рассматривается семейство компактных схем пятого порядка точности и их свойства. Также анализируются особенности практической реализации численных методов, основанных на использовании таких аппроксимаций.

В разделе 1.1 рассматривается семейство компактных операторов, т.е. таких операторов, которые являются комбинацией трехточечных и обратных к трехточечным операторов. Для коэффициентов подобной комбинации записывается линейная система, решения которой и определяют компактный оператор, аппроксимирующий на равномерной сетке первую производную с пятым порядком точности. Показывается, что два семейства компактных схем, предложенные ранее А.И.Толстых соответствуют некоторым решениям данной системы. Рассматриваются

вопросы устойчивости и точности аппроксимации схем из этих двух семейств.

В разделе 1.2 рассматриваются варианты постановки граничных условий для трехточечных обращаемых операторов. Наряду с условиями низкого порядка точности обсуждается возможность использования многоточечных аппроксимаций в приграничных точках, что необходимо для сохранения формального порядка схемы.

В разделе 1.3 на примере линейного уравнения переноса проводится сравнение дисперсионно-диссипативных свойств рассматриваемых схем с ранее предложенными компактными схемами третьего и пятого порядка точности. Приводятся графики анализируемых характеристик.

В разделе 1.4 рассматриваются другие решения вышеупомянутой линейной системы, которые представляют собой двухпараметрическое семейство компактных аппроксимаций пятого порядка. Практический интерес, однако, представляют только положительные операторы, так как схема, основанная на таких операторах, является устойчивой. Для определения этих операторов был проведен численный эксперимент, в котором анализировалась диссипация оператора при различных значениях параметров.

В разделе 1.5 рассматривается вопрос о выборе знака параметра компактной нецентрированной схемы, при ее применении для аппроксимации нелинейных гиперболических уравнений и систем. Наряду с традиционной диагонализацией соответствующих матриц, что приводит к использованию матричных прогонок при вычислении действия компактного оператора, рассматривается метод расщепления потоков, когда действие оператора вычисляется для двух значений параметра от некоторых линейных комбинаций. При этом используются скалярные прогонок, что делает этот метод более экономичным. Здесь же рассматривается консервативная форма записи компактных аппроксимаций в виде разности потоков в полупространствах

узлах. Величины этих потоков выражаются через комбинации трехточечных и обратных к ним операторов.

В разделе 1.6 рассматриваются неявные схемы, основанные на рассматриваемых ранее компактных аппроксимациях. Использование таких схем часто оказывается более предпочтительным при решении как стационарных, так и нестационарных нелинейных гиперболических систем. Из-за большой заполненности матрицы линейного оператора при использовании компактных аппроксимаций целесообразно применять итерационные методы для их обращения. Одним из таких методов является метод коррекции дефекта. Этот метод, основанный на использовании аппроксимаций низкого порядка в предобуславливателе, рассматривается для стационарного и нестационарного случаев. На примере линейного одномерного уравнения проводится сравнение скорости сходимости метода коррекции дефекта для различных компактных схем при применении различных предобуславливателей (анализируются соответствующие спектральные радиусы).

Во второй главе анализируются результаты численных расчетов ряда тестовых задач. Для аппроксимации пространственных производных в которых используются исследуемые компактные схемы.

В разделе 2.1 рассматривается метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности, использовавшийся для аппроксимации по времени при решении нескольких нестационарных задач. Высокая точность этого метода позволяет исключить негативное влияние схемной вязкости на получаемое решение. Здесь же рассматривается методика ограничения потоков, которая позволяет практически полностью устранить нефизические осцилляции, возникающие вблизи разрывов.

В разделе 2.2 решается одномерное нестационарное уравнение Бюргерса. Начальные условия являются разрывными. Приводятся решения, полученные с использованием методики ограничения потоков и без нее. Также рассматривается одномерная не-

стационарная задача Римана о распаде разрыва. Для аппроксимации конвективных членов используются компактные схемы. Сравняются распределения плотности, полученные при применении и не использовании методики ограничения потоков.

В разделе 2.3 рассматривается двумерная задача о нестационарном обтекании прямоугольного уступа сверхзвуковым потоком невязкого газа. Начальными условиями является невозмущенный равномерный поток с числом Маха $M = 3$. При расчете используются компактные аппроксимации в сочетании с методом ограничения потоков. Проводится сравнение результатов, проведенных на сетках разной подробности. Изменение поля плотности с течением времени дает представление о динамике ударной волны.

В разделе 2.4 рассматривается стационарное решение уравнения Бюргерса с вязкими членами. Для этого уравнения существует такое точное аналитическое решение, которое имеет область, где градиент решения значителен. Сравнение точного и численного решений позволяет оценить точность различных разностных схем на примере этого уравнения. Проводится сравнение результатов численных экспериментов для компактных схем пятого порядка с аналогичными результатами для других схем при различном числе точек, попадающих в область резкого изменения решения.

В третьей главе рассматривается решение стационарной задачи о трехмерном течении вязкого газа в статоре турбины.

В разделе 3.1 рассматриваются трехмерные уравнения Навье-Стокса, записанные в криволинейной системе координат в консервативной форме.

В разделе 3.2 рассматривается геометрия расчетной области, заключенной между двумя лопатками статора турбомшины. На границах расчетной области ставятся несколько типов граничных условий. Приводится подробное описание этих условий в предположении, что твердые поверхности являются охлаждаемыми, а газодинамические параметры на входе в ста-

тор и выходе из него полагаются зависимыми от расстояния до оси статора. Условия на выходе различаются для до и сверхзвуковых областей течения.

В разделе 3.3 рассматривается способ построения сетки в расчетной области. Так как в рассматриваемых в данной работе вариантах боковые поверхности области являются цилиндрическими, задача построения трехмерной сетки сводится к построению двумерных сеток. Такое построение осуществляется с помощью параболического генератора. Этот генератор позволяет эффективно управлять сгущением сетки, что важно для разрешения пограничных слоев, не нарушая при этом ортогональность сетки вблизи границы.

В разделе 3.4 рассматриваются аппроксимации конвективных и вязких членов уравнений Навье-Стокса. Часть конвективных членов аппроксимируется в консервативной форме с помощью нецентрированных компактных схем пятого порядка точности. Тогда как члены, связанные с давлением, аппроксимируются по центрированной компактной схеме четвертого порядка точности. Описывается способ выбора константы, используемой в методе расщепления потоков. Здесь же рассматриваются особенности реализации прогонок на периодических границах в уравнениях для компонент импульса.

В разделе 3.5 рассматриваются детали реализации метода коррекции дефекта применительно к данной задаче. Для обращения предобуславливателя, структура которого подробно описывается для внутренних и для граничных точек области, используется метод Гаусса-Зейделя.

В разделе 3.6 рассматривается двухсеточный вариант многосеточного метода для ускорения сходимости итераций метода коррекции дефекта в данной задаче. Приводятся операторы проектирования невязки и приближения к решению на грубую сетку и интерполяционный (линейная интерполяция) оператор для получения поправки на мелкой сетке.

В разделе 3.7 обсуждаются результаты численных расчетов

задачи о течении в статоре турбины для нескольких случаев. Проводится сравнение численных решений двумерной задачи, полученных на сетках разной подробности, с экспериментальными данными. Трехмерные случаи различаются геометрией расчетной области (что влияет на косизну используемых сеток), перепадом давления на входе и выходе (рассматриваются как течения со сверхзвуковыми зонами, так и полностью дозвуковые), числом Рейнольдса. Для всех вариантов приводится способ обезразмеривания уравнений. Для первого варианта число Рейнольдса 10^4 , перепад давлений 0.5 проводится сравнение распределений давления, полученных при использовании различных компактных схем для аппроксимации конвективных членов и на сетках разной подробности. Приводятся изолинии различных газодинамических параметров в различных сечениях, дающие представление о распределении давления на поверхности лопаток и характеристиках пограничных слоев. Вектора скорости в сечении близком к базовой поверхности иллюстрируют вихрь, образующийся вблизи передней кромки лопатки. На примере второго варианта, отличающегося от первого меньшим перепадом давления (0.7), испытывался двухсеточный метод, использовавшийся для ускорения сходимости. Приводится история сходимости при использовании этого метода и без него. Следующий расчет проведен для другой геометрии, более сложной с вычислительной точки зрения из-за значительной косизны сетки. Кроме этого высокое число Рейнольдса порядка 10^6 потребовало меньшего пространственного шага в пристеночных областях. Приводятся история сходимости и изолинии газодинамических параметров.

В конце работы приводятся выводы, которые состоят в следующем

1. Предложено двухпараметрическое семейство компактных схем пятого порядка точности, включающее в себя схемы, полученные А.И.Толстых. Приведены значения параметров, при

которых компактные операторы являются положительными, а схемы, основанные на их использовании, устойчивыми. Исследованы аппроксимационные и дисперсионно-диссипативные свойства этих схем. Наличие диссипативного механизма в коротковолновом диапазоне позволяет применять схемы при расчете разрывных решений без использования монотонизаторов типа искусственной диссипации.

2. На примере одномерного линейного уравнения проанализирована эффективность применения метода коррекции дефекта, когда в правой части используются исследуемые компактные аппроксимации.

3. Проведены численные эксперименты для одномерного вязкого уравнения Бюргерса. Они показали более высокую точность исследуемых компактных схем по сравнению как с традиционно используемыми полиномиальными схемами второго порядка точности, так и компактной схемой третьего порядка. На примере одномерных нестационарных тестовых задач подтверждена возможность схем адекватно описывать разрывные решения.

4. Решена двумерная нестационарная тестовая задача об обтекании прямоугольного уступа сверхзвуковым потоком, которая показывает возможность использования компактных схем при больших числах Маха. Малая диссипация схемы не приводит к "размазыванию" решения.

5. Исследуемые компактные схемы применялись при решении задачи о ламинарном течении вязкого газа в статоре турбины. Проведен расчет для двумерной задачи, для которой существуют экспериментальные данные. Сравнение результатов показывает, что удовлетворительная точность может быть достигнута даже на довольно грубой сетке.

6. Проведены расчеты трехмерных течений для двух форм лопаток. В полученных решениях отсутствуют схемные осцилляции. Следует также отметить близость распределений давления для решений, полученных на подробной и в два раза

более грубой сетках. Это подтверждает возможность использования сеток с малым числом узлов при проведении инженерных расчетов. Использование многосеточного ускорителя дает возможность ускорить сходимость примерно в два раза. Второй случай показывает возможность получения удовлетворительных результатов на сетке со значительной косизной.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах

[1] Tolstykh A.I. Shirobokov D.A. Fifth-order compact upwinding method and its application to three-dimensional compressible Navier-Stokes equations // Proceedings of the First Asian CFD Conference, 1995

[2] Tolstykh A.I. Shirobokov D.A. Fifth-order compact upwinding method and its application to three-dimensional compressible Navier-Stokes equations // CFD Journal, N5, 1996

[3] Толстых А.И. Широбоков Д.А. О разностных схемах с компактными аппроксимациями пятого порядка для пространственных течений вязкого газа // Ж. выч. мат. и мат. физ. т.36, N4, 1996