На правах рукопис:

БЕЗРОДНЫХ Сергей Игоревич

Сингулярная задача Римана — Гильберта и ее приложение

01.01.03 — *математическая физика*

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2006

Работа выполнена в Вычислительном центре им. А.А. Дородницына Российской академии наук.

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук В.И. ВЛАСОВ.

Официальные оппоненты:

доктор физико–математических наук, профессор Б.В. ПАЛЬЦЕВ,

кандидат физико–математических наук Н.А. ЖУРА.

Ведущая организация:

Белгородский государственный университет.

Защита диссертации состоится "12" октября 2006 г. в 15 часов на заседании Диссертационного совета Д 002.017.01 при Вычислительном центре им. А.А. Дородницына Российской академии наук по адресу: 119991, Москва, ул. Вавилова д. 40, конференц–зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан "11" сентября 2006 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук С.П. ПОПОВ

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию задачи Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами и условиями роста, получению нового, удобного для вычислений представления решения и применению этих результатов к актуальной прикладной проблеме.

Актуальность темы. Задача о восстановлении аналитической в области $\mathcal{B}$ функции $\mathcal{F} = u+iv$ по заданному на границе $\partial\mathcal{B}$ соотношению между ее вещественной и мнимой частями

$$au - bv = c, \tag{1}$$

где a, b, c — заданные вещественнозначные функции, называемая задачей Римана — Гильберта, восходит к классическим работам этих авторов.

Теория этой задачи и других краевых задач для аналитических функций получила глубокое развитие в работах Ю.В. Сохоцкого, Племеля, Вольтерра, Гильберта, Карлемана, Нётера, Ф.Д. Гахова, Н.И.Мусхелишвили, Б.В.Хведелидзе, И.Н.Векуа, Н.П.Векуа, Б.В.Боярского, А.В.Бицадзе и др.

Развитие этой теории активно продолжается в настоящее время. Стимулирующим фактором для этого являются многочисленные применения задачи Римана — Гильберта к актуальным прикладным проблемам в традиционных (гидро- и аэродинамика теория упругости) и современных областях, в том числе в обратных задачах термовязкоупругости, теории рассеяния и импедансной томографии, задачах электролиза, теории нейтронных звезд и др.

Задачи Римана — Гильберта, возникающие в связи с приложениями, как правило, приходится решать в сложных областях. Для их свед́ения к задаче в канонической области, где решение выписывается явно, необходимо строить соответствующее конформное отображение. Его построение представляет собой самостоятельную трудную задачу. Даже в случае многоугольника, когда для отображения есть явное представление (в виде интеграла Кристоффеля — Шварца), возникает проблема отыскания неизвестных прообразов вершин, фигурирующих в этом интеграле.

Эта проблема значительно усложняется в типичной для приложений ситуации, когда прообразы вершин расположены крайне неравномерно и некоторые из них — очень близко друг к другу (что называют кроудингом). Проблема параметров в ситуации кроудинга является весьма актуальной и привлекает большое внимание исследователей; она нашла отражение, например, в работах R. Menikoff и C. Zemach (1980), L.N. Trefethen (1980, 1993), B.C. Krikeles и R.L. Rubin (1988), L.N. Howel и L.N. Trefethen (1990), P. Henrici (1991), T.A. Driscoll (1996), L.N. Trefethen и T.A. Driscoll (1998, 2005),

Отметим, что в приложениях (в механике, физике плазмы и др.) нередко возникает важный частный случай задачи (1) в сложной области, когда коэффициенты a, b и c кусочно–постоянны, а в точках их разрыва предписываются условия роста решения. Заметим, что условие (1) при постоянных a, b и c представляет собой уравнение прямой на плоскости $w = u + iv$. Такое наблюдение подсказывает, что решение задачи Римана — Гильберта с кусочно–постоянными коэффициентами может быть интерпретировано геометрически как конформное отображение исходной области на некоторый (не обязательно однолистный) многоугольник. Возможность такой интерпретации неявным образом была указана Риманом (1851). Отметим, что реализацией этой интерпретации в случае задачи Римана — Гильберта (с кусочно–постоянными коэффициентами) в полуплоскости было бы представление решения в виде интеграла Кристоффеля — Шварца.

Целью диссертационной работы является:

1) исследование разрешимости задачи Римана — Гильберта в полуплоскости с кусочно–гёльдеровыми коэффициентами и условиями роста в точках разрыва (сингулярной задачи Римана — Гильберта);

2) получение для функции Аппеля F_1 (обобщения гипергеометрической функции Гаусса F) формулы, являющейся аналогом формулы Якоби для F и дающей выражение для производной от произведения F_1 на некоторые биномы в виде произведения (других) биномов и линейной функции;

3) вывод при помощи найденной формулы типа Якоби для функции F_1 нового представления в виде интеграла Кристоффеля—Шварца для решения задачи Римана — Гильберта в полуплоскости с кусочно-постоянными коэффициентами a, b и c, имеющими три точки разрыва;

4) решение сингулярной задачи Римана — Гильберта в сложной области (внешности десятиугольника), возникающей при моделировании явления магнитного пересоединения в плазме;

5) построение конформного отображения указанной в п. 4 многоугольной области на каноническую, включающее решение проблемы параметров для интеграла Кристоффеля — Шварца и его обращение в аналитическом виде.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1) на основе классических подходов Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили исследована разрешимость сингулярной задачи Римана — Гильберта в полуплоскости с кусочно- гёльдеровыми коэффициентами; решение задачи выписано через интегралы типа Коши;

2) получена указанная в п. 2 целей работы формула типа Якоби для функции Аппеля F_1;

3) с помощью этой формулы решение сингулярной задачи Римана — Гильберта в полуплоскости с кусочно-постоянными коэффициентами, имеющими три точки разрыва, преобразовано к виду интеграла Кристоффеля — Шварца; такое представление дает геометрическую интерпретацию решения задачи как конформного отображение полуплоскости на некоторый (не обязательно однолистный) многоугольник и доставляет удобный аппарат для его вычисления;

4) решена сингулярная задача Римана — Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами во внешности десятиугольника, возникающая при моделировании явления пересоединения магнитного поля в плазме; проведена численная реализация решения и представлена динамика картины магнитного поля вблизи токовой конфигурации в зависимости от параметров модели; найдены формулы для физически значимых характеристик поля;

5) построено необходимое для решения задачи, указанной в п. 4, конформное отображение исходной многоугольной области на полуплоскость; при этом решена проблема параметров для обратного отображения, представляемого интегралом Кристоффеля — Шварца, с использованием найденных асимптотик для неизвестных параметров этого интеграла; интеграл Кристоффеля — Шварца обращен в аналитическом виде.

Приемы, использованные в п. 5 для построения конформного отображения, допускают обобщение на широкий класс многоугольных областей.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области математической физики и ее приложений. Они могут быть использованы как в теоретических исследованиях, так и при решении прикладных задач.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах Вычислительного центра им. А.А.Дородницына РАН (рук. — А.А.Абрамов, Б.В.Пальцев, Ю.Д.Шмыглевский), Института прикладной математики им. М.В.Келдыша (рук. — А.В.Забродин), Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга при МГУ им. М.В.Ломоносова (рук. — Б.В.Сомов), Белгородского госуниверситета (рук. — А.П.Солдатов), а также на международной конференции *"International Conference on Functional Analysis and its Applications Dedicated to the* 110^{th} *Anniversary of Stephan Banach"* (Украина, Львов, 2002), на международной конференции *"Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования"*, посвященной 80–летию Л.Д.Кудрявцева (Москва, 2003), на Крымской осенней математической школе–симпозиуме (Украина, Севастополь, 2004, 2005), на международной конференции *"Computational Methods and Function Theory"* (Finland, Joensuu, 2005), на международной конференции *"Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания"* (Обнинск, 2006), на международной конференции *"Тихонов и современная математика"* (Москва, 2006) и на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ; их список приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Общий объем работы составляет 164 страницы, включая 18 рисунков и одну таблицу. Список литературы содержит 131 наименование.

Обзор содержания диссертации

Во **введении** к диссертации отмечена актуальность тематики, указаны цели работы и кратко изложено ее содержание. Кроме того, приведен список обозначений, дано определение одного специального класса односвязных областей, а также изложены некоторые сведения о сходимости конформного отображения последовательности областей.

Первая глава посвящена сингулярной задаче Римана — Гильберта в полуплоскости. Основными результатами главы являются: 1) установленная разрешимость сингулярной задачи Римана — Гильберта с кусочно-гёльдеровыми коэффициентами и полученное представление ее решения через интегралы типа Коши; 2) найденная формула типа Якоби для функции Аппеля и выведенное на ее основе представление в виде интеграла Кристоффеля — Шварца для решения сингулярной задачи Римана — Гильберта в полуплоскости с кусочно-постоянными коэффициентами, имеющими три точки разрыва.

Параграф 1 главы I содержит вводный материал о задаче Римана — Гильберта в односвязной области и методах ее решения. Отмечено, что в настоящей работе используется подход, основанный на использовании конформного отображения для перехода к аналогичной задаче Римана — Гильберта в канонической области с последующим сведением к задаче сопряжения, решение которой строится через интегралы типа Коши.

В связи с этим даны краткие сведения об отображении прямолинейных многоугольников при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца и круговых многоугольников на основе уравнения Шварца, а также о приближенных методах конформного отображения типа метода Теодорсона — Гаррика и вариационных методах.

В параграфе 2 главы I изложены используемые в дальнейшем свéдения из теории гипергеометрической функции Гаусса $F(a,b;c;z)$ и ее обобщения — функции Аппеля $F_1(a_1,a_2,b;c;z_1,z_2)$. Отмечено, что функция $F(a,b;c;z)$ представима в виде следующего ряда, называемого гипергеометрическим:

$$F(a,\, b;\, c;\, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,k!}\,z^k, \quad |z|<1\,, \quad (a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\,, \qquad (2)$$

и для нее справедливо интегральное представление Эйлера

$$F(a,\, b;\, c;\, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int\limits_0^1 \frac{t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}}{(1-t\,z)^a}\,dt. \qquad (3)$$

Приведены также формулы аналитического продолжения гипергеометрической функции в окрестности особых точек $z=1$ и $z=\infty$. В формулах (2) и (3) фигурирует Гамма–функция $\Gamma(s)$; в формуле (3) предполагается, что $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$.

Кроме того, в §2 получен ряд соотношений между ассоциированными гипергеометрическими функциями. Примером такого соотношения является следующее:

$$(c-1)\,F(a,b-1;c-1;z) + (1+a-c)\,F(a,b;c;z) + \\ + a\,(z-1)\,F(a+1,\, b;\, c;\, z) = 0.$$

Эти соотношения затем использовались в §4 при выводе формулы типа Якоби для функции F_1.

В §2 приведен также ряд для функции Аппеля $F_1(a_1,a_2,b;c;z_1,z_2)$, являющийся обобщением ряда (2) на случай двух комплексных переменных z_1 и z_2, а также следующее интегральное представление:

$$F_1(a_1, a_2; b; c; z_1, z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(b)} \int\limits_0^1 \frac{t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_1\,t)^{a_2}\,(1-z_2\,t)^{a_2}}\,dt, \quad (4)$$

обобщающее представление Эйлера (3).

Параграф 3 главы I посвящен сингулярной задаче Римана — Гильберта в полуплоскости

$$\mathbb{H}^+ := \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta > 0\}, \qquad \zeta = \xi + i\eta,$$

с кусочно-гёльдеровыми коэффициентами и условиями роста решения в точках разрыва коэффициентов (предполагается, что коэффициенты задачи могут иметь разрыв и в бесконечно удаленной точке, а общее число точек разрыва конечно).

Заметим, что краевое условие (1) задачи Римана — Гильберта можно переписать в виде $\operatorname{Re}(h\mathcal{F}) = c$, где $h := a+ib$, $\mathcal{F} = u+iv$. В дальнейшем будем использовать краевое условие в этой форме, называя функции h и c коэффициентами рассматриваемой краевой задачи.

Перейдем к формулировке задачи Римана — Гильберта в $\mathbb{H}^+$, приведенной в §3 главы I. Пусть заданные на $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}^+$ комплексная $h(\xi)$ и вещественная $c(\xi)$ функции являются кусочно-гёльдеровыми с разрывами первого рода в точках ξ_k, $k = \overline{0, K}$, (здесь $\xi_0 := \infty$), причем $h(\xi)$ отлична от нуля. На каждом из участков непрерывности выберем произвольным образом ветвь аргумента функции $h(\xi)$ и обозначим через δ_k деленные на π скачки функции $\arg h(\xi)$ в точках разрыва:

$$\delta_k := \frac{\arg h\,(\xi_k+0) - \arg h\,(\xi_k-0)}{\pi}, \qquad k = \overline{1, K}, \quad (5)$$

а для бесконечно удаленной точки полагаем

$$\delta_0 := \frac{\arg h\,(+\infty) - \arg h\,(-\infty)}{\pi}. \quad (6)$$

Через α_k и $\varkappa_k$ обозначим соответственно дробные и целые части величин δ_k:

$$\alpha_k := \{\delta_k\}, \qquad \varkappa_k := [\delta_k], \qquad k = \overline{0, K}. \quad (7)$$

Введем также обозначение для скачков функции $g(\xi) := c(\xi)/h(\xi)$

$$\sigma_k := \frac{c(\xi_k + 0)}{h(\xi_k + 0)} - \frac{c(\xi_k - 0)}{h(\xi_k - 0)}, \qquad k = \overline{0, K}. \tag{8}$$

Пусть, кроме того, $n_\circ, n_1, \ldots, n_K \in \mathbb{Z}^+$ — заданные неотрицательные целые числа.

Отдельно рассмотрим два случая:

I) когда соотношения $n_k = 0,\ \alpha_k = 0,\ \sigma_k \neq 0$ одновременно не выполняются ни при каком $k = \overline{0, K}$, т.е.

$$\nexists\, k = \overline{0, K}: \qquad n_k = 0, \qquad \alpha_k = 0, \qquad \sigma_k \neq 0\,; \tag{9}$$

II) когда указанные соотношения одновременно выполняются хотя бы для одного k, т.е.

$$\exists\, k = \overline{0, K}: \qquad n_k = 0, \qquad \alpha_k = 0, \qquad \sigma_k \neq 0\,. \tag{10}$$

I) В предположении (9) сформулируем рассматриваемую в дальнейшем задачу Римана — Гильберта: найти аналитическую в полуплоскости $\mathbb{H}^+$ и непрерывную в $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\xi_k\}$ функцию $\mathcal{P}^+(\zeta)$, т.е.

$$\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+ := \mathcal{A}\,(\mathbb{H}^+) \cap C\left(\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\xi_k\}\right), \tag{11}$$

удовлетворяющую на вещественной оси краевому условию

$$\operatorname{Re}\bigl[h(\xi)\, \mathcal{P}^+(\xi)\bigr] = c(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}, \tag{12}$$

а в точках ξ_k — условиям роста:

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{O}\bigl[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}\bigr], & \text{если } n_k \neq 0; \\ \mathcal{O}(1), & \text{если } n_k = 0; \end{cases} \quad \zeta \to \xi_k \ \ (k = \overline{1, K}), \tag{13}$$

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}\bigl(\zeta^{\alpha_\circ + n_\circ}\bigr), \quad \zeta \to \infty. \tag{14}$$

Сформулированную задачу (11)–(14) естественно называть *сингулярной задачей Римана — Гильберта*

II) Предположим, что для одной или нескольких точек ξ_k, которые обозначим ξ_{k_m}, одновременно выполняются равенства

$$n_{k_m} = 0, \qquad \alpha_{k_m} = 0, \qquad \sigma_{k_m} \neq 0\,, \tag{15}$$

т.е. имеет место случай II. Тогда в каждой конечной точке ξ_{k_m} требование (13), которое при $\alpha_{k_m} = n_{k_m} = 0$ означало бы $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(1)$, $\zeta \to \xi_{k_m}$, заменяется на следующее:

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}\big[\ln(\zeta - \xi_{k_m})\big], \qquad \zeta \to \xi_{k_m}, \tag{16}$$

а если условие (15) выполняется в точке $\xi_{k_0} = \xi_0$, то соотношение (14), которое при $\alpha_{k_\circ} = n_{k_\circ} = 0$ означало бы $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(1)$, $\zeta \to \infty$, заменяется на следующее:

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}\big(\ln\zeta\big), \quad \zeta \to \infty. \tag{17}$$

Назовем каноническим решением задачи Римана — Гильберта функцию $\mathcal{X}^+(\zeta)$, которая удовлетворяет однородному краевому условию (12), нигде в $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\xi_k\}$ не обращается нуль, а в конечных точках ξ_k, $k = \overline{1, K}$, подчиняется условиям роста (13).

В §3 показано, что каноническое решение $\mathcal{X}^+$ имеет вид

$$\mathcal{X}^+(\zeta) = \prod_{k=1}^{K} (\zeta - \xi_k)^{-\varkappa_k - n_k}\, e^{\mathcal{M}^+(\zeta)}, \tag{18}$$

где через $\mathcal{M}(\zeta)$ обозначен модифицированный интеграл типа Коши:

$$\mathcal{M}^\pm(\zeta) := \frac{\zeta - \delta}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Theta(t)\, dt}{(t-\delta)\,(t-\zeta)}, \qquad \zeta \in \mathbb{H}^\pm, \tag{19}$$

свойства которого (в том числе асимптотики при $\zeta \to \xi_k$, $k = \overline{0, K}$) также исследованы в §3.

С учетом поведения $\mathcal{M}^+$ на бесконечности из формулы (18), вытекает следующая асимптотика функции $\mathcal{X}^+(\zeta)$:

$$\mathcal{X}^+(\zeta) = \mathcal{O}^*\big(\zeta^{\alpha_\circ + n_\circ - \varkappa}\big), \qquad \zeta \to \infty. \tag{20}$$

Фигурирующее здесь целое число $\varkappa$, определяемое по формуле

$$\varkappa := n_\circ - \varkappa_\circ + \sum_{k=1}^{K} (\varkappa_k + n_k), \tag{21}$$

называем *индексом задачи.*

Разрешимость однородной задачи Римана — Гильберта устанавливает следующая

Теорема 1. (i) *Если индекс $\varkappa$, определяемый по формуле (21), неотрицателен, то решение $\Psi^+ \in \mathcal{H}^+$ однородной задачи Римана — Гильберта*

$$\operatorname{Re}\left[h(\xi)\,\Psi^+(\xi)\right] = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}, \tag{22}$$

с условиями роста

$$\begin{aligned} \Psi^+(\zeta) =& \mathcal{O}\left[(\zeta-\xi_k)^{\alpha_k - n_k}\right], \qquad \zeta \to \xi_k, \qquad k = \overline{1, K}, \\ \Psi^+(\zeta) =& \mathcal{O}\left(\zeta^{\alpha_0 + n_0}\right), \qquad \zeta \to \infty, \end{aligned} \tag{23}$$

где n_k — произвольные неотрицательные целые числа, имеет следующий вид:

$$\Psi^+(\zeta) = \prod_{k=1}^{K} (\zeta - \xi_k)^{-\varkappa_k - n_k}\, e^{\mathcal{M}^+(\zeta)}\, P_\varkappa(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{H}^+; \tag{24}$$

здесь функция $\mathcal{M}^+(\zeta)$ дается равенством (19), $P_\varkappa(\zeta)$ — произвольный многочлен степени $\varkappa$ с вещественными коэффициентами, а числа α_k и $\varkappa_k$ определяются из (7).

(ii) *При $\varkappa < 0$ однородная задача Римана — Гильберта (22), (23) в классе $\mathcal{H}^+$ не имеет решений, кроме тривиального $\Psi^+(\zeta) \equiv 0$.*

Разрешимость неоднородной задачи Римана — Гильберта устанавливает следующая

Теорема 2. I) *Пусть выполняется условие (9). Тогда справедливы утверждения:*

(i) *Если индекс $\varkappa$, определяемый по формуле (21), неотрицателен, то решение $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$ задачи Римана — Гильберта (12)–(14) имеет вид*

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{X}^+(\zeta)\left[P_\varkappa(\zeta) + \frac{\mathcal{S}(\zeta)}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{c(t)\,dt}{\mathcal{S}(t)\,h(t)\,\mathcal{X}^+(t)\,(t-\zeta)}\right], \tag{25}$$

где $P_\varkappa(\zeta)$ — произвольный полином степени $\varkappa$ с вещественными коэффициентами, $\mathcal{X}^+(\zeta)$ — каноническое решение задачи, определяемое *равенством*

$$\mathcal{X}^+(\zeta) = \prod_{k=1}^{K} (\zeta - \xi_k)^{-\varkappa_k - n_k} e^{\mathcal{M}^+(\zeta)}, \tag{26}$$

а $\mathcal{M}^+(\zeta)$ *и* $\mathcal{S}(\zeta)$ *даются формулами (19) и*

$$\mathcal{S}(\zeta) := (\zeta - \lambda)^{2\{\varkappa/2\}} (\zeta^2 + 1)^{[\varkappa/2]}; \tag{27}$$

здесь $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}$.

(ii) *Если* $\varkappa = -1$, *то единственным решением* $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$ *рассматриваемой задачи является функция*

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \frac{\mathcal{X}^+(\zeta)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{c(t)\,dt}{h(t)\,\mathcal{X}^+(t)\,(t-\zeta)}. \tag{28}$$

Если $\varkappa < -1$ *и выполняются условия*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{t^k c(t)\,dt}{h(t)\,\mathcal{X}^+(t)} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, |\varkappa| - 2, \tag{29}$$

то единственное решение задачи из $\mathcal{H}^+$ *дается формулой (28). Если же* $\varkappa < -1$ *и условия (29) не выполнены, то эта задача в классе* $\mathcal{H}^+$ *не имеет решений.*

II) *Пусть выполняется условие (10). Тогда в конечных точках* ξ_{k_m}, *где одновременно выполняются соотношения (15), условие (13) в постановке задачи следует заменить на (16), а представления (25) при* $\varkappa \geq 0$ *и (28) при* $\varkappa < 0$ *для решения* $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$ *сохраняются. Если же (15) имеет место для* $\xi_{k_0} = \infty$, *то условие (14) следует заменить на (17), представление (28) при* $\varkappa < 0$ *сохраняется, а функцию* $\mathcal{S}(\zeta)$ *в представлении (25) при* $\varkappa \geq 0$ *для решения следует определять равенством*

$$\mathcal{S}(\zeta) := (\zeta - \lambda)^{2\{\varkappa/2\}} (\zeta^2 + 1)^{[\varkappa/2]} (\zeta - \widetilde{\lambda}); \quad \lambda,\ \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}, \quad \lambda \neq \widetilde{\lambda}. \tag{30}$$

В параграфе 4 главы I рассмотрен частный случай изученной в §3 задачи Римана — Гильберта, когда ее коэффициенты кусочно-постоянны, т.е.

$$h(\xi) = h_k, \quad \xi \in (\xi_k, \xi_{k+1}); \qquad c(\xi) = c_k, \quad \xi \in (\xi_k, \xi_{k+1}). \tag{31}$$

В первой части §4 даны представления решения через интегралы типа Коши и установлена разрешимость данной задачи. Эти результаты сформулированы в теореме 3, которая, по существу, является уточнением теоремы 2 для рассматриваемого частного случая.

Вторая часть параграфа 4 посвящена преобразованию решения сингулярной задачи Римана — Гильберта в полуплоскости с кусочно-постоянными коэффициентами, имеющими три точки разрыва, к виду интеграла Кристоффеля — Шварца.

Каноническое решение $\mathcal{X}^+(\zeta)$ для рассматриваемой в этом параграфе задачи Римана — Гильберта имеет вид

$$\mathcal{X}^+(\zeta) = e^{i\Theta_2}(\zeta - \xi_1)^{\alpha_1 - n_1}(\zeta - \xi_2)^{\alpha_2 - n_2}, \tag{32}$$

где $\Theta_2 := \pi/2 - \arg h_2$, а общее решение $\Psi^+(\zeta)$ однородной задачи (т.е. при $c \equiv 0$) дается формулой

$$\Psi^+(\zeta) = e^{i\Theta_2}(\zeta - \xi_1)^{\alpha_1 - n_1}(\zeta - \xi_2)^{\alpha_2 - n_2} P_\varkappa(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{H}^+; \tag{33}$$

здесь $P_\varkappa(\zeta)$ — произвольный многочлен степени $\varkappa$ с вещественными коэффициентами.

Частное решение $\mathcal{N}^+(\zeta)$ неоднородной задачи Римана — Гильберта может быть представлено в виде

$$\mathcal{N}^+(\zeta) = \sum_{k=0}^{2} \mathcal{N}_k^+(\zeta), \qquad \mathcal{N}_k^+(\zeta) = \mathcal{X}^+(\zeta)\,\mathcal{F}_k^+(\zeta), \tag{34}$$

где $\mathcal{F}_k^+(\zeta)$ даются равенством

$$\mathcal{F}_k^+(\zeta) = \frac{h_k(\zeta - \lambda_k)^\varkappa}{c_k \pi i} \int_{\mathcal{L}_k} \frac{(t - \lambda_k)^{-\varkappa}}{\mathcal{X}^+(t)(t - \zeta)}\, dt; \tag{35}$$

здесь $\mathcal{L}_0 := (-\infty, \xi_1)$, $\mathcal{L}_1 := (\xi_1, \xi_2)$, $\mathcal{L}_2 := (\xi_2, +\infty)$, $\lambda_0 = \lambda_2 \in \mathcal{L}_1$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus [\xi_1, \xi_2]$. Подчеркнем, что фигурирующие в (35) интегралы могут быть выражены через функцию Аппеля F_1, определяемую из (4).

Преобразование общего решения $\mathcal{P}^+(\zeta) = \Psi^+(\zeta) + \mathcal{N}^+(\zeta)$ неоднородной задачи Римана — Гильберта к виду интеграла Кристоффеля — Шварца осуществлено путем дифференцирования и нахождения первообразной. Такое преобразования отдельно проведено для решения $\Psi^+(\zeta)$ однородной задачи и (что является значительно более трудным вопросом) для частного решения $\mathcal{N}^+(\zeta)$ неоднородной задачи.

Техническим средством, позволившим осуществить указанное преобразование функции $\mathcal{N}^+(\zeta)$, является найденная в п. 4.3 формула типа Якоби для функции Аппеля (4); эта формула имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw}\Big[w^{c-a-1}\,(w-1)^{1+b-c}\,(w-z)^a\,F_1\,(1,\,a;\,b;\,c;\,w,\,z)\Big] &= \\ = w^{c-a-2}\,(w-1)^{b-c}\,(w-z)^{a-1}\,\big[\mathcal{K}(w-z) + \Omega\,w\big], \end{aligned} \tag{36}$$

где величины $\mathcal{K}$ и Ω даются равенствами

$$\mathcal{K} := (1+a-c)\,F(a,\,b;\,c;\,z), \qquad \Omega := a(\zeta-1)\,F(a+1,\,b;\,c;\,z). \tag{37}$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Решение $\mathcal{P}^+(\zeta)$ рассмотренной в теореме 2 сингулярной задачи Римана — Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами $h(\xi)$ и $c(\xi)$ представимо в случае трех точек разрыва $\xi_0 = \infty$, ξ_1 и ξ_2 в виде интеграла Кристоффеля — Шварца*

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = e^{i\Theta_2}\int_{\zeta_0}^{\zeta}(t-\xi_1)^{\alpha_1-n_1-1}\,(t-\xi_2)^{\alpha_2-n_2-1}\,R\,(t)\,dt\; + w_0; \tag{38}$$

где $R(t)$ — многочлен с вещественными коэффициентами

В диссертации получен явный вид многочлена $R(t)$, а также указаны константы ζ_0 и w_0. Выражения для этих величин не приводятся в силу их громозкости.

Вторая глава посвящена решению сингулярной задачи Римана — Гильберта во внешности десятиугольника с кусочно-постоянными коэффициентами и заданным на бесконечности условием роста; такая задача возникает при моделировании явления пересоединения магнитного поля в плазме.

В параграфе 1 главы II изложены основные положения (двумерной) модели пересоединения магнитного поля во внешности токовой конфигурации, состоящей из токового слоя и присоединенных к нему четырех ударных МГД–волн; токовый слой и ударные волны, считающиеся бесконечно тонкими, изображаются в виде симметричной системы прямолинейных разрезов на комплексной плоскости. Десятиугольная область, в которой рассматривается магнитное поле, является внешностью этой системы разрезов. Используемая в диссертации модель предложена в работе С.А.Марковского и Б.В.Сомова (1988); она является обобщением моделей, предложенных в работах С.И. Сыроватского (1971) и Робертса и Приста (1975).

В параграфе 2 главы II описанно сведение изложенной в §1 математической модели к задаче Римана — Гильберта с кусочно–постоянными коэффициентами в указанной десятиугольной области и условием линейного роста решения на бесконечности.

Эта задача Римана—Гильберта, в свою очередь, сведена к аналогичной задаче в четверти исходной области (в первом квадранте Ω_{I} с разрезом Γ_1), обозначаемой через G, относительно функции $\mathcal{F}(z)$. Область G определяется тремя параметрами R, r и α и задается соотношением: $G = \Omega_{\mathrm{I}} \setminus \Gamma_1$, где

$$\Omega_{\mathrm{I}} := \left\{ z : \operatorname{Im} z > 0,\ \operatorname{Re} z > 0 \right\}, \quad \Gamma_1 := \left\{ z : z = R + t\,r\,e^{i\pi\alpha},\ \ t \in [0,1] \right\}.$$

Далее в §2 дан подход к решению задачи. Функцию $\mathcal{F}$ предлагается искать в виде суперпозиции $\mathcal{F}(z) = \mathcal{P}^{+} \circ \Phi(z)$ конформного отображения $\zeta = \Phi(z)$ области G на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}^{+}$ и решения $\mathcal{P}^{+}(\zeta)$ соответствующей задачи Римана — Гильберта в $\mathbb{H}^{+}$. При этом указаны основные трудности, возникающие при построении конформного отображения (связанные с решением проблемы параметров для интеграла Кристоффеля — Шварца и его обращением), а также изложен способ их преодоления. Нахождению конформного отображения $\Phi(z)$ посвящены §§3–6; функция $\mathcal{P}^{+}(\zeta)$ строится в §7.

В параграфе 3 главы II выписано представление в виде интеграла Кристоффеля — Шварца для конформного отображения $z = \Phi^{-1}(\zeta)$ верхней полуплоскости на (пятиугольную) область G. Отображение Φ^{-1} подчинено нормировке

$$\Phi^{-1}(\infty) = \infty, \qquad \Phi^{-1}(0) = 0, \qquad \Phi^{-1}(1) = R + re^{i\pi\alpha}, \tag{39}$$

а указанный интеграл имеет вид

$$\Phi^{-1}(\zeta) = \mathcal{K} \int_0^{\zeta} t^{-1/2}\,(t-\lambda)^{-\alpha}\,(t-1)\,(t-\tau)^{\alpha-1}\,dt. \tag{40}$$

Представление (40) содержит неизвестные параметры: величины λ и τ — прообразы двух вершин многоугольника G, а также предынтегральный множитель $\mathcal{K}$.

В §3 сформирована система нелинейных уравнений относительно прообразов λ и τ:

$$I_2(\lambda,\tau)/I_1(\lambda,\tau) = \rho, \qquad I_3(\lambda,\tau) = 0; \tag{41}$$

здесь $\rho = r/R$ — относительная длина разреза Γ_1. Левые части уравнений (41) записаны в терминах интегралов гипергеометрического типа $I_j(\lambda,\tau)$, определяемых по формуле

$$I_j = \int_{\Lambda_j} |f(t)|\,dt,$$

где $\Lambda_1 = (0,\lambda)$, $\Lambda_2 = (\lambda,1)$, $\Lambda_3 = (\lambda,\tau)$, а $f(t)$ — подынтегральная функция в (40).

Далее в §3 изложен подход к решению этой системы, основанный на сочетании метода продолжения по параметру и метода Ньютона. После вычисления λ и τ множитель $\mathcal{K}$ находится по формуле $\mathcal{K} = R/I_1(\lambda,\tau)$.

Для эффективного решения системы нелинейных уравнений (41) требуется с высокой степенью точности вычислять интегралы $I_j(\lambda,\tau)$, а также иметь хорошее начальное приближение для искомых величин λ и τ.

В параграфе 4 главы II изложен аналитический метод вычисления интегралов гипергеометрического типа I_j, фигурирующих в системе уравнений для λ и τ. Этот метод дает представление для таких интегралов в виде экспоненциально сходящихся рядов, коэффициенты которых выписаны явно через гипергеометрические функции. В качестве примера приведем одно из полученных представлений для интеграла $I_2(\lambda, \tau)$:

$$I_2(\lambda,\tau) = \frac{(1-\lambda)^{2-\alpha}}{\lambda^{1/2}(\tau-\lambda)^{1-\alpha}} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n}{n!}\,\varepsilon_1^n\,\frac{F(1/2, n-\alpha+1; n-\alpha+3; -\varepsilon_2^{-1})}{(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)}, \tag{42}$$

где величины ε_j даются формулами

$$\varepsilon_1 = \frac{1-\lambda}{\tau-\lambda}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\lambda}{1-\lambda}. \tag{43}$$

Заметим, что из нормировки (39) и принципа соответствия границ при конформном отображении для λ и τ вытекают неравенства $0 < \lambda < 1$ и $1 < \tau$, откуда следует, что параметр ε_1 лежит в интервале $(0,1)$. Таким образом, ряд (42) сходится при всех допустимых значениях λ и τ. Для вычисления гипергеометрических функций, фигурирующих в (42), в различных диапазонах изменения параметра ε_2 используется ряд (2) или формулы аналитического продолжения функции $F(a,b;c;z)$.

Параграф 5 главы II посвящен нахождению асимптотик для величин λ и τ в зависимости от геометрических параметров $\rho = r/R$ и α многоугольника G и построению на основе этих асимптотик начальных приближений для λ и τ.

Основным аппаратом, применяемым для получения результатов §5, является теория конформного отображения сингулярно деформируемых областей[1] ("теория деформирования"); в §5 приведены используемые в диссертации положения этой теории.

[1] *В.И. Власов* О вариации отображающей функции при деформировании области // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, №6. — С. 1299–1302.

В.И. Власов Краевые задачи в областях с криволинейной границей. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1987. — 272 с.

В этом параграфе найдены асимптотики для λ и τ при $\rho \to 0$:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - c_\lambda^{(1)}\rho - c_\lambda^{(2)}\rho^2 - \mathcal{O}(\rho^3), \\ \tau &= 1 + c_\tau^{(1)}\rho + c_\tau^{(2)}\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3), \end{aligned} \qquad \rho \to 0, \tag{44}$$

при $\rho \to \infty$

$$\begin{aligned} \lambda &= \rho^{-2/(1-2\alpha)}\, C_\lambda^{(0)} \left[1 + C_\lambda^{(1)}\rho^{-1} + \mathcal{O}\Big(\rho^{-2/(1-2\alpha)}\Big)\right], \\ \tau &= C_\tau^{(0)} + C_\tau^{(1)}\rho^{-1} + \mathcal{O}\big(\rho^{-2}\big), \quad \rho \to \infty, \end{aligned} \tag{45}$$

и следующие асимптотики: $\lambda = \mathcal{O}(1)$, $\tau - 1 = \mathcal{O}(\alpha)$, $\alpha \to 0$. Для коэффициентов $c_\lambda^{(j)}$, $c_\tau^{(j)}$ и $C_\lambda^{(j)}$, $C_\tau^{(j)}$, фигурирующих в соотношениях (44) и (45), получены явные формулы.

На основе этих асимптотик предложены начальные приближения для λ и τ, используемые при решении указанной выше системы нелинейных уравнений. Результаты параграфа 5 сформулированы в виде предложений 2–4.

В параграфе 6 главы II изложен метод обращения интеграла Кристоффеля — Шварца, позволяющий получить искомое отображение $\Phi(z)$ в виде набора экспоненциально сходящихся степнных разложений с явно выписанными коэффициентами; множества сходимости разложений покрывают в совокупности всю область G. Метод основан на теории деформирования. Изложена его общая схема, а также приведен пример формул для коэффициентов разложения вблизи одной из вершин (аналогичные формулы для коэффициентов всех разложений не приводятся в силу их громозкости). Этим параграфом завершается построение конформного отображения $\Phi(z)$ области G на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}^+$.

В параграфе 7 главы II сформулирована и решена задача Римана — Гильберта в $\mathbb{H}^+$ для функции $\mathcal{P}^+(\zeta) \in C(\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\infty\})$ с краевым условием

$$\operatorname{Re}\big[h(\xi)\,\mathcal{P}^+(\xi)\big] = c(\xi), \qquad \mathbb{R} \setminus \{\lambda, \tau, \infty\}$$

и условием роста

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = -2i\gamma\mathcal{K}\sqrt{\zeta} + o(1), \quad \zeta \to \infty.$$

Коэффициенты $h(\xi)$ и $c(\xi)$ даются равенствами

$$h(\xi) = \begin{cases} e^{-i\pi/2}, & \xi \in (-\infty, \lambda), \\ -ie^{i\pi\alpha}, & \xi \in (\lambda, \tau), \\ e^{i\pi}, & \xi \in (\tau, +\infty); \end{cases} \qquad c(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in (-\infty, \lambda), \\ -\beta, & \xi \in (\lambda, \tau), \\ 0, & \xi \in (\tau, +\infty); \end{cases} \tag{46}$$

величины λ, τ и $\mathcal{K}$ — параметры интеграла (40), а γ и β — вещественные числа, являющиеся параметрами модели.

В начале §7 для нахождения $\mathcal{P}^+$ применены результаты главы I, с помощью которых для функции $\mathcal{P}^+$ получено представление в виде интеграла Кристоффеля — Шварца

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = -i\gamma\mathcal{K} \int\limits_{\lambda}^{\zeta} \frac{(t-\lambda)^{\alpha-1}}{(t-\tau)^{\alpha+1/2}}(t-p)\,dt - \frac{\beta}{\sin\pi\alpha},$$

$$p = \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{\sqrt{\tau-\lambda}}{\pi^{3/2}\mathcal{K}}\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma\Big(\alpha+\frac{1}{2}\Big) + 2\alpha(\tau-\lambda) + \lambda.$$

Затем дана геометрическая интерпретация решения $\mathcal{P}^+$ задачи Римана — Гильберта как конформного отображения полуплоскости $\mathbb{H}^+$ на некоторую бесконечную четырехугольную область $\mathcal{W}$. Исследована зависимость этой области (являющейся областью годографа магнитного поля) от параметров модели.

Далее для функции $\mathcal{P}^+$ получены представления в виде степенных разложений (с явно выписанными коэффициентами), дающие удобный аппарат для вычисления $\mathcal{P}^+$. В §7 изложены также все этапы алгоритма вычисления решения $\mathcal{F}$ исходной задачи Римана — Гильберта в G в виде суперпозиции $\mathcal{F}(z) = \mathcal{P}^+ \circ \Phi(z)$, а в завершение этого параграфа получены формулы для физически значимых характеристик магнитного поля: найдены выражения для полного тока и скорости пересоединения.

Параграф 8 главы II посвящен численной реализации полученного решения. Продемонстрировано, что построенный метод решения рассматриваемой задачи Римана — Гильберта в многоугольнике является эффективным. В частности, для параметров λ, τ, $\mathcal{K}$ отображения (40) была достигнута относительная точность не хуже 10^{-11}.

Список публикаций по теме диссертации

1. *Безродных С.И.* О задаче Римана — Гильберта с условиями роста // Spectral and Evalution Problems: Proceedings of the XV Crimean Autumn Mathematical School–Symposium. Vol. 15. P. 112–118. — Simferopol: Black Sea Brunch of Moscow State University, 2005.

2. *Безродных С.И.* Соотношение типа Якоби для обобщенной гипергеометрической функции // Международная конференция "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания". Обнинск, 14–18 мая 2006 г. Тезисы докладов. С. 18–19.

3. *Безродных С.И.* Задача Римана — Гильберта в областях сложной формы и ее приложение // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 10–15 июля 2006 г. Тезисы докладов. С. 23.

4. *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана — Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2002. №3. Т. 42. С. 277–312.

5. *Безродных С.И., Власов В.И.* Сингулярная задача Римана — Гильберта в сложных областях // Spectral and Evalution Problems: Proceedings of the XV Crimean Autumn Mathematical School–Symposium. Vol. 16. P. 112–118. — Simferopol: Black Sea Brunch of Moscow State University, 2006.

6. *Безродных С.И., Власов В.И.* Сингулярная задача Римана — Гильберта на многоугольниках и ее приложение // Международная конференция "Тихонов и современная математика". Москва, 19–25 июня 2006 г. Тезисы докладов. С. 41.

7. *Bezrodnykh S.I.* The singular Riemann — Hilbert problem with discontinuous coefficients and application // International Conference "Computational Methods and Function Theory." Joensuu, Finland, June 13-17, 2005. Book of Abstracts P. 16.

8. *Vlasov V.I., Bezrodnykh S.I.* An analytic–numerical method for the Riemann — Hilbert problem in a polygon // International Conference on Functional Analysis and its Applications dedicated to the 110th anniversary of Stephan Banach, Lviv, Ukraine, May 28-31, 2002. — Lviv, Lviv National University, 2002. P. 210.

Заказ №417. Объем 1 п.л. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ООО «Петроруш».

г. Москва, ул. Палиха-2а, тел. 250-92-06

www.postator.ru