ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2013, том 53, № 3, с. 417–432

УДК 519.634

О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СДВИГОВЫХ СЛОЕВ НА ОСНОВЕ СХЕМЫ С МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫМИ АППРОКСИМАЦИЯМИ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА[1)]

© 2013 г. **М. В. Липавский, А. И. Толстых, Е. Н. Чигерёв**

(119991 Москва, Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: tol@ccas.ru

Поступила в редакцию 06.06.2012 г.
Переработанный вариант 06.09.2012 г.

Приводится разностная схема для уравнений с конвективными членами, основанная на мультиоператорных аппроксимациях 9-го порядка. Рассматривается ее оптимизация, направленная на высокое разрешение мелких масштабов решений. Приводятся результаты решения тестовых задач, а также результаты численного моделирования неустойчивости сдвиговых слоев с подробным исследованием развития и характеристик возникающих вихревых структур. Библ. 14. Фиг. 12. Табл. 2.

Ключевые слова: уравнение Навье–Стокса, прямое численное моделирование, сдвиговые слои, мультиоператорная аппроксимация девятого порядка.

DOI: 10.7868/S0044466913030101

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение многих лет была накоплена значительная информация, касающаяся неустойчивости течений в сдвиговых слоях. Она связана как с линейным анализом устойчивости, так и с экспериментальными данными. В настоящее время имеется достаточно полная общая картина возникновения, динамики развития и взаимодействия вихревых структур, образовывающихся в результате потери устойчивости. Вместе с тем, достаточно точное описание тонкой структуры течений в процессе ее эволюции, по-видимому, можно получить лишь в результате прецизионного численного моделирования.

В [1] изучены численные решения задачи об образовании и развитии вихревых структур в плоскопараллельных слоях несжимаемой жидкости, полученные различными методами. Анализ результатов применения большого количества разностных схем с аппроксимациями конвективных членов до 4-го порядка точности показал, что несмотря на, казалось бы, достаточное число узлов сетки, попадающих в сдвиговые слои, все схемы при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 4 \times 10^4$ на сетке 256×256 дают ошибочное решение – образование “лишнего” вихря в системе вихрей, на которые распадаются эти слои. Это явление было обозначено как наличие “артефакта”, а его причина – как “недоразрешенность” слоев (imderresolved layers) (см. [1], [2]). Увеличение числа узлов до 512×512 привело к исчезновению артефакта и при дальнейшем удвоении решение перестало зависеть от сетки.

Результаты исследований [1], [2] стимулировали проведение численных экспериментов со схемами, основанными на компактных аппроксимациях 5-го порядка (CUD-II-5) конвективных членов (см. [3]). Оказалось, что при использовании сетки 128×128 и тех же параметрах задачи артефакт имеет место, но отсутствует в случае сетки 256×256.

Из этой ситуации можно сделать два вывода. Во-первых, следует с особой осторожностью интерпретировать численные данные, относящиеся к сложным многомасштабным явлениям

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12-01-00456) и проекта № 3.15 программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3 “Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач”.

(к числу которых принадлежит неустойчивость), если не используются сетки различного уровня подробности. Во-вторых, "разрешающая способность" методов может оказать существенное влияние на точность результатов описания такого рода явлений даже в тех случаях, когда шаги сетки кажутся вполне достаточными для этой цели.

В [1], [2], [3] исследования носили весьма ограниченный характер. Во-первых, рассматривалась лишь начальная стадия образования вихревых структур. Во-вторых, основное внимание было уделено общей картине течения при начальном возмущении в виде основной моды. В-третьих, расчеты проводились лишь при одном числе Рейнольдса ($\mathrm{Re} = 4 \times 10^4$).

Данная работа имеет две цели:

1) получить первые результаты оптимизации и применения высокоточной схемы с мультиоператорными аппроксимациями 9-го порядка и "настроенной" на точное воспроизведение мелких масштабов решений;

2) описать полную картину развития неустойчивости двумерных сдвиговых слоев несжимаемой жидкости, добившись сеточной сходимости численных решений в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса.

В контексте второй цели отличие настоящего исследования от предыдущих заключается в следующем.

(i) Полученные данные характеризуются гарантированным полным разрешением мелких масштабов течения вплоть до числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$.

(ii) Рассматривалась практически полная история течения. Если в [1], [2], [3] максимальное безразмерное время было равно 1.2, то в настоящем исследовании оно достигало в некоторых расчетах 16 единиц (тестовые расчеты проводились вплоть до времени 100).

(iii) Большое внимание было уделено описанию тонкой структуры течения, а также спектрам энергии и энстрофии.

(iv) Рассматривались случаи начальных возмущений, содержащих субгармоники.

(v) Проанализирована скорость роста возмущений на начальной, линейной стадии развития.

2. ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА

При проведении расчетов использовался один из вариантов мультиоператорных аппроксимаций высокого порядка (см. [4], [5], [6]) для дискретизации конвективных членов уравнений Навье–Стокса. Для полноты изложения напомним основную идею построения мультиоператоров. Пусть требуется аппроксимировать с высоким порядком действие Lu некоторого линейного оператора L на достаточно гладкую функцию $u(x)$ некоторым сеточным оператором, определенным на равномерной сетке $\omega_h = (jh, j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, h = \mathrm{const})$. Пусть имеется однопараметрическое семейство операторов $L_m(s)$, осуществляющих эту аппроксимацию с порядком $m \ge 1$. Зафиксируем M различных значений $s_1, s_2, \ldots, s_M$ параметра s и построим линейную комбинацию

$$L_M(s_1, \ldots, s_M) = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i L_m(s_i), \quad \sum_{i=1}^{M} \gamma_i = 1.$$

Запишем $M - 1$ условий того, что коэффициенты при $h^m, h^{m+1}, \ldots, h^{m+M-2}$ в разложении в ряд Тейлора для $L_M[u]_h$ обращаются в ноль. Здесь $[\cdot]_h$ – оператор проектирования на сетку ω_h. Если возникающая при этом линейная система для $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$ имеет решение, то L_M является мультиоператором, аппроксимирующим L с порядком $m + M - 1$. Если же $L_m(s)$ есть семейство компактных аппроксимаций оператора L, то существование мультиоператоров при любых M обычно гарантируется тем, что матрица системы является матрицей Вандермонда.

В данном случае под L будем понимать оператор производной в узлах сетки

$$[Lf]_j = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_j,$$

а под $L_m(s)$, $m = 5$, – оператор ее компактной аппроксимации 5-го порядка (см. [7]). Существуют две разновидности такого оператора: А и В. Вариант А имеет вид

$$L_5(s) = \frac{1}{h}\left[\Delta(s) + \frac{s}{2}R^{-1}(s)Q(s)\left(I + \frac{1}{12}\Delta_2\right)^{-1}\Delta_2\right], \tag{1}$$

где

$$R(s) = I + \frac{1}{6s}\Delta_0 + \frac{1}{5}\Delta_2, \quad Q(s) = I + \left(\frac{17}{60} - \frac{1}{9s^2}\right)\Delta_2.$$

Здесь использованы обозначения для сеточных операторов $\Delta_0 f_j = f_{j+1} - f_{j-1}$, $\Delta_2 f_j = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}$, $\Delta(s) = (\Delta_0 - s\Delta_2)/2$. Предыдущий опыт использования мультиоператоров был связан, главным образом, с вариантом В при $M = 5$ (аппроксимация 9-го порядка) (см. [8]). Однако сравнительно недавно исследования выявили положительные свойства мультиоператоров 9-го порядка в случае варианта А (см. [6], [7]), связанные с расширением диапазона волновых чисел, поддерживаемых сетками, для которых амплитудные и фазовые ошибки остаются малыми. Это расширение, направленное на хорошее разрешение коротковолновых составляющих точных решений, достигается в результате использования свободных параметров для оптимизации мультиоператоров. Процесс оптимизации будет описан ниже. В дальнейшем мы будем использовать этот вариант мультиоператора, обозначив его через $L_{59}(s_1, \ldots, s_5)$.

Выбор пяти параметров $s_1, \ldots, s_5$ не влияет на порядок аппроксимации, однако он существенен для выполнения основного требования к мультиоператору – требованию его знакоопределенности при построении устойчивых схем.

Представим оператор $L_M(s_1, \ldots, s_M)$ в виде суммы

$$L_M(s_1, \ldots, s_M) = L_M^{(1)}(s_1, \ldots, s_M) + L_M^{(0)}(s_1, \ldots, s_M),$$

где

$$L_M^{(1)}(s_1, \ldots, s_M) = \frac{1}{2}[L_M(s_1, \ldots, s_M) + L_M(-s_1, \ldots, -s_M)]$$

есть кососимметричная, а

$$L_M^{(0)}(s_1, \ldots, s_M) = \frac{1}{2}[L_M(s_1, \ldots, s_M) - L_M(-s_1, \ldots, -s_M)]$$

есть самосопряженная части исходного оператора. При построении знакоопределенного мультиоператора учтем, что в случае базисных операторов (1) при всех M имеют место равенства

$$L_M^{(0)}(s_1, \ldots, s_M) = -L_M^{(0)}(-s_1, \ldots, -s_M), \quad L_M^{(1)}(s_1, \ldots, s_M) = L_M^{(1)}(-s_1, \ldots, -s_M),$$

таким образом, если $L_M^{(0)}(s_1, \ldots, s_M) > 0$, то $L_M^{(0)}(-s_1, \ldots, -s_M) < 0$. Поиск областей положительности L_{59} сводится к поиску области положительности действительной части Фурье-образа $L_{59}(s_1, \ldots, s_5)$. Соответствующие значения $(s_1, \ldots, s_5)$ будем называть допустимыми.

Будем также анализировать фазовые и амплитудные ошибки, возникающие при дискретизации на сетке ω_j уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const}, \tag{2}$$

с начальным условием $u(0, x) = e^{ikx}$ схемой

$$\frac{\partial u}{\partial t} + aL_{59}(s_1, \ldots, s_5) = 0.$$

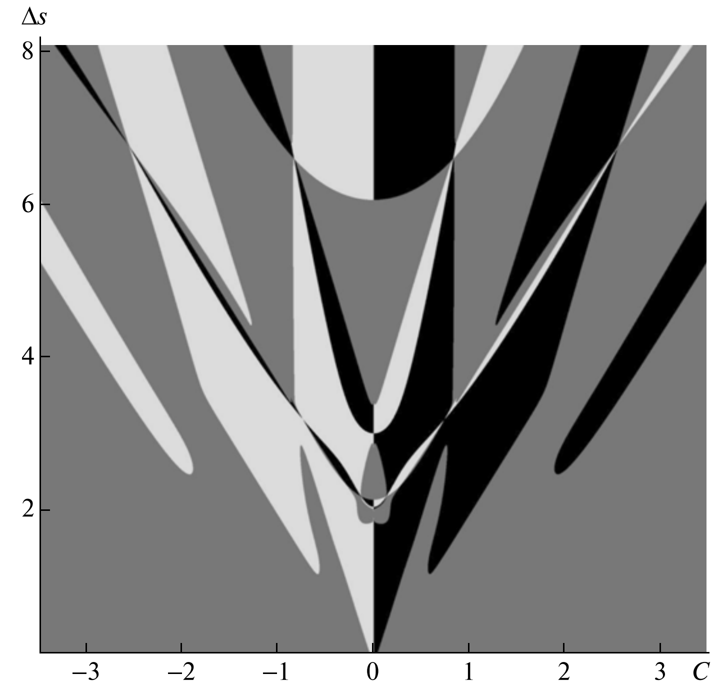
Фазовые ошибки можно характеризовать функцией

$$r(\alpha) = \frac{\operatorname{Im}\hat{L}_{59}(\alpha, s_1, \ldots, s_5)}{\alpha},$$

которая есть отношение “численной” фазовой скорости к точной фазовой скорости. Диссипация определяется функцией

$$d(\alpha) = \operatorname{Re}\hat{L}_{59}(\alpha, s_1, \ldots, s_5),$$

где через α обозначено безразмерное волновое число kh.



Фиг. 1. Области знакоопределенности мультиоператора L_{59} в координатах c и Δs. Белый цвет – положительно определенный оператор, черный – отрицательно определенный, серый – знаконеопределенный.

В дальнейшем будем искать такие наборы параметров $(s_1, \ldots, s_5)$, при которых эти ошибки оказываются в том или ином смысле малыми в возможно более широком диапазоне безразмерных волновых чисел $\alpha = kh$, $\alpha \in [0, \pi]$.

Свойства оператора L_{59} зависят от пяти параметров, поэтому полную оптимизацию следует проводить в пятимерном пространстве. Ради упрощения задачи будем считать, что распределение параметров равномерно. Тогда, определив две величины: $\Delta s = s_5 - s_1$ и $c = (s_1 + s_5)/2$, выразим через них все параметры исследуемого оператора:

$$s_1 = c - \Delta s/2, \quad s_2 = c - \Delta s/4, \quad s_3 = c, \quad s_4 = c + \Delta s/4, \quad s_5 = c + \Delta s/2.$$

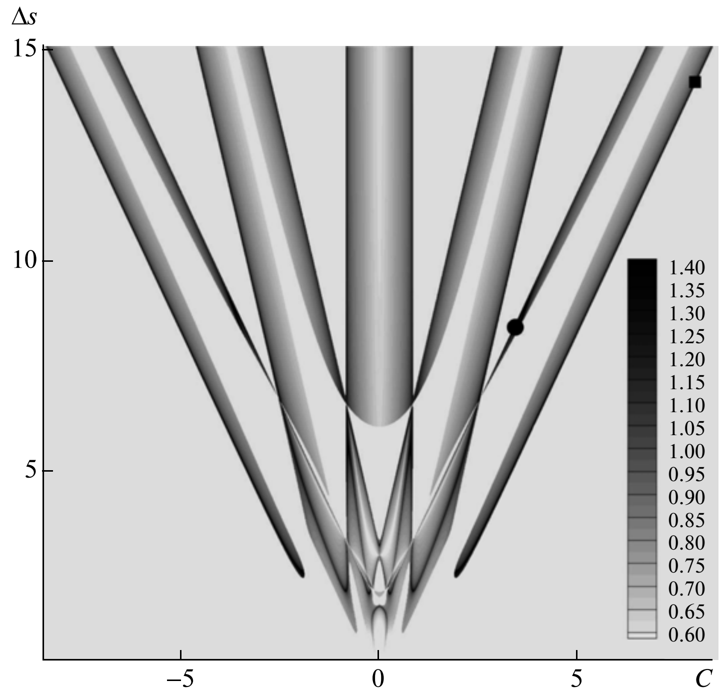
На фиг. 1–3 приводятся различные свойства исследуемого оператора в зависимости от параметров; c – ось абсцисс и Δs – ось ординат. Они получены в результате исследования функции комплексного аргумента – Фурье-образа $\hat{L}_{59}(\alpha; s_1, s_5)$.

Фиг. 1 представляет области знакоопределенности. Белый цвет соответствует положительно определенному оператору, черный – отрицательно определенному, серый – знаконеопределенному. Таким образом, допустимой областью параметров будет объединение белой и черной областей на фиг. 1.

Поскольку область G допустимых значений s_1 и s_5 определена, выбор конкретного значения из этих областей можно использовать для управления некоторыми желательными свойствами оператора. Одним из таких свойств является малость фазовых и амплитудных ошибок в как можно более широком диапазоне $\alpha \in [0, \pi]$. Возможны различные подходы к оптимизации, направленной на достижение этой цели.

В данной работе была принята следующая стратегия. Выберем малое положительное число ε такое, что для функции $r(\alpha, s_1, s_5)$, определяющей дисперсионные свойства оператора в некотором диапазоне значений $\alpha \in [0, \alpha^*]$, выполняется соотношение

$$|r(\alpha, s_1, s_5) - 1| \le \varepsilon, \tag{3}$$



Фиг. 2. Распределение критического волнового числа α^* в координатах c и Δs для дисперсии при допуске $\varepsilon = 10^{-5}$, схема L_{59}. Круглый маркер – первый набор параметров N_1 ($c = 3.409745$, $\Delta s = 8.448793$); квадратный маркер – второй набор параметров N_2 ($c = 7.9$, $\Delta s = 14.2$).

а для функции $d(\alpha, s_1, s_5)$, отвечающей за диссипативные свойства оператора, выполняется соотношение

$$0 \le d(\alpha, s_1, s_5) \le \varepsilon \tag{4}$$

при $\alpha \in [0, \alpha^*]$. Здесь α^* в обоих случаях – некоторое значение безразмерного волнового числа, различное для каждого из неравенств (3) и (4) и зависящее от ε. Будем искать такие пары s_1, s_5, чтобы равенства (3) и/или (4) выполнялись для как можно большего значения α^*.

На фиг. 2 представлено распределение α^* для (3) в зависимости от c и Δs при $\alpha = 10^{-5}$. Видно, что оптимальные значения α^* сосредоточены в довольно узких областях. На фиг. 3 показано распределение α^* для (4).

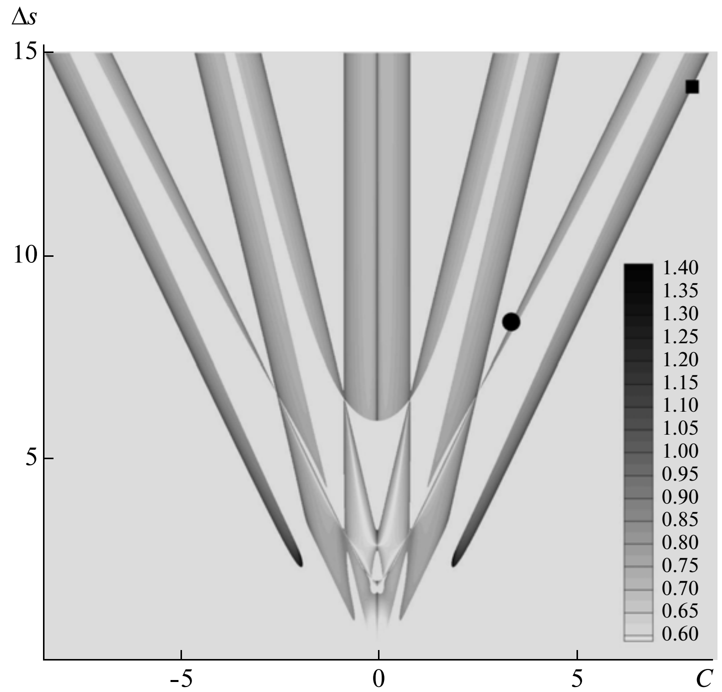
На этих фигурах круглыми маркерами обозначены точки, соответствующие первому набору параметров N_1, для которого $c = 3.409745$, $\Delta s = 8.448793$. При определении этого набора параметров учитывалась только знакоопределенность и дисперсионные свойства оператора. Для второго набора параметров (N_2, $c = 7.9$, $\Delta s = 14.2$), кроме перечисленных, учитывались и диссипативные свойства оператора. Этот набор параметров обозначен на фиг. 2 и 3 квадратными маркерами. В этом случае искался компромисс между дисперсионными и диссипативными свойствами оператора.

При дискретизации уравнений Навье–Стокса использовался принцип расщепления потоков. В случае уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0,$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$ есть векторы, полудискретная мультиоператорная схема имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}[L_{59}^{+}(\mathbf{f}(\mathbf{u}) + C\mathbf{u}) + L_{59}^{-}(\mathbf{f}(\mathbf{u}) - C\mathbf{u})] = 0,$$



Фиг. 3. Распределение критического волнового числа α^* в координатах c и Δs для диссипации при допуске $\varepsilon = 10^{-5}$, схема L_{59}. Круглый маркер – первый набор параметров N_1 ($c = 3.409745$, $\Delta s = 8.448793$); квадратный маркер – второй набор параметров N_2 ($c = 7.9$, $\Delta s = 14.2$).

где C – диагональная матрица с положительными элементами. Эту схему можно записать также в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L_{59}^{(1)}\mathbf{f}(\mathbf{u}) + CL_{59}^{(0)}\mathbf{u} = 0, \tag{5}$$

где индексы (1) и (0) обозначают, соответственно, кососимметричную и самосопряженную составляющие оператора L_{59}.

Второе слагаемое в левой части есть аппроксимация 10-го порядка производной. Третье слагаемое в левой части в силу $L_{59}^{(0)} > 0$ есть некоторый диссипативный механизм.

В конвективных членах уравнения Навье–Стокса (7) для дискретизации производных по x и y использовались мультиоператоры L_{59}^{x} и L_{59}^{y} соответственно.

Интегрирование по времени выполнялось семистадийным методом Бутчера шестого порядка точности (разновидность метода Рунге–Кутты) (см. [9]).

3. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

3.1. Уравнение Бюргерса

В качестве первой тестовой задачи будем решать уравнение Бюргерса без вязкости с периодическими граничными условиями и гладкими начальными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = 0, \quad u(-1) = u(1), \quad u(0, x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(\pi x), \quad x \in [-1, 1]. \tag{6}$$

В такой постановке эта задача имеет гладкое решение до момента времени $t = 2/\pi$. Для уравнения Бюргерса (6) матрица C в (5) превращается в константу, и в настоящем тесте было принято $C = 0$. Таким образом, в этом тесте значимыми были только дисперсионные свойства. Мы будем срав-

Таблица 1

Вариант	$N1$		$N2$	
N	d_N	p_N	d_N	p_N
8	1.7e–002		1.6e–002	
16	1.4e–003	3.62	1.2e–003	3.74
32	7.0e–006	7.60	1.3e–005	6.54
64	3.2e–009	11.10	4.0e–008	8.35
128	1.4e–012	11.15	5.0e–011	9.65
256	1.2e–014	6.85	4.9e–014	9.98

нивать численное решение u с точным u^{ex} в момент времени $t = 0.3$. В табл. 1 приводятся отличия численного решения от точного d_N и порядок сходимости p_N. Здесь

$$d_N = \max_{0 \le j \le N} \left| u_j - u_j^{ex} \right|, \quad p_N = \log_2 \frac{p_N}{p_{N/2}},$$

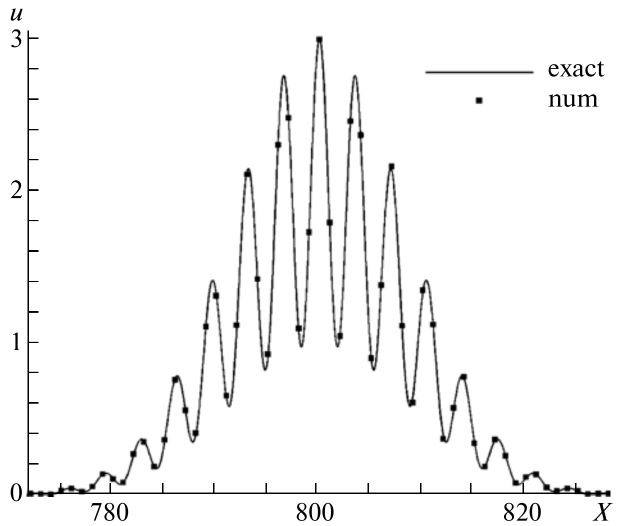
N – число шагов расчетной сетки на всем интервале $x \in [-1, 1]$. $N1$ обозначает схему с параметрами $c = 3.409745$, $\Delta s = 8.448793$, которые выбирались только из условия знакоопределенности мультиоператора и минимизации дисперсионных ошибок. Параметры варианта $N2$ ($c = 7.9$, $\Delta s = 14.2$) оптимизировались исходя из знакоопределенности мультиоператора и компромисса между минимизацией дисперсионных и диссипативных ошибок.

Вариант $N1$ показывает заметно большую точность по сравнению с вариантом $N2$, что соответствует более точной оптимизации дисперсионных свойств мультиоператора. Падение порядка сходимости при больших N обусловлено влиянием ошибок машинной арифметики. Расчеты проводились с двойной точностью – до 15-ти десятичных знаков.

3.2. Акустический тест

Для проверки работы схемы в случае коротких гармоник используем тест из [10]. Требуется получить решение уравнения переноса (2) при $a = 1$ в момент времени $t = 800$ с начальными данными в виде волнового пакета

$$u(0, x) = [2 + \cos(\beta x)]\exp\left[-\left(\frac{x}{10}\right)^2 \ln 2\right],$$



Фиг. 4. Решение уравнения переноса для волнового пакета в момент времени $t = 800$, $\beta = 1.8$. Сплошная линия – точное решение; квадратные маркеры – численное решение.

используя шаг по пространственной координате $h = 1$. Число β фактически является волновым числом kh (в [10] полагалось $\beta = 1.7$). Согласно точному решению, волновой пакет в любой момент времени $t > 0$ сохраняет свою первоначальную форму, перемещаясь в положительном направлении оси x со скоростью a. Однако схемы невысокого порядка в силу накопления больших фазовых и, возможно, амплитудных ошибок при назначенных значениях β и h не дают правильного положения и формы пакета.

Использовался набор параметров, соответствующий варианту $N1$ (оптимизация дисперсионных свойств $c = 3.409745$, $\Delta s = 8.448793$). Было получено хорошее совпадение с точным решением вплоть до значения $\beta = 1.8 > \pi/2$.

На фиг. 4 представлено точное решение (сплошная линия) и численное (квадратные маркеры). Для выбранного значения β различия визуально не заметны.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Будем рассматривать задачу о течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной области $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Уравнения Навье–Стокса запишем в переменных ω – вихрь, Ψ – функция тока:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega u) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega v) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega, \\ \Delta\Psi = -\omega.\end{gathered} \tag{7}$$

Компоненты скорости u и v связаны с вихрем и функцией тока соотношениями

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega, \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

По обоим направлениям будем предполагать периодичность решения. В начальный момент времени зададим распределение компонент скорости следующим образом:

$$\begin{gathered} u = \mathrm{th}\left[\rho\left(y - \frac{1}{4}\right)\right] \quad \text{при} \quad y \le \frac{1}{2}, \\ u = \mathrm{th}\left[\rho\left(\frac{3}{4} - y\right)\right] \quad \text{при} \quad y > \frac{1}{2}, \\ v = \sum_k \delta_k \sin(2\pi l_k x). \end{gathered} \tag{8}$$

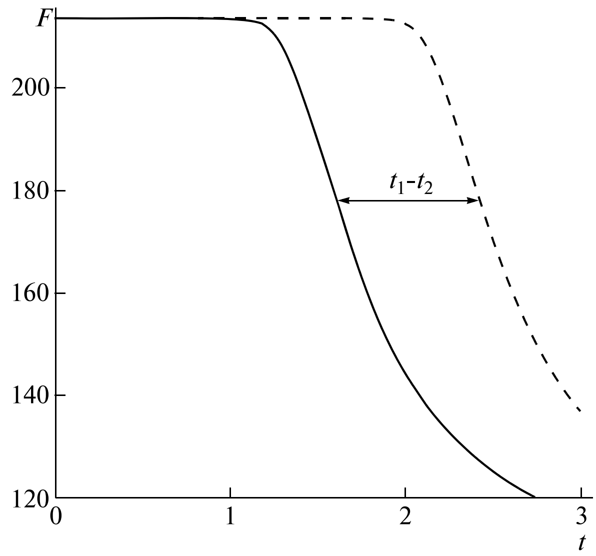
Здесь ρ и δ_k – некоторые параметры, регулирующие ширину сдвиговых слоев и амплитуды начального возмущения соответственно, $l_k > 0$ – целые числа, обозначающие номера гармоник возмущения. Такая постановка задачи использовалась в [1] и [2]. Во всех расчетах было принято $\rho = 80$, $\delta = 0.05$, если не оговорено отдельно.

Такое начальное поле можно интерпретировать как два слоя вихревой пелены или как плоскую струю.

Эта нестационарная задача интересна, в частности, тем, что с течением времени решение становится все сложнее, появляются новые мелкие детали и требуются все более подробные сетки для ее решения.

Для устойчивого счета необходим некоторый “схемный” диссипативный механизм, поэтому во всех расчетах, описываемых в настоящем параграфе, применялся “компромиссный” вариант схемы $N2$ с параметрами $c = 7.9$, $\Delta s = 14.2$. Поскольку ω в (7) – скалярная величина, вместо диагональной матрицы C из (5) использовались скалярные константы расщепления потоков по x и по y, C_x и C_y соответственно, которые вычислялись по формулам $C_x = |\max u|$, $C_y = |\max v|$. Здесь максимумы брались по всей расчетной области, а через u, v обозначались компоненты скорости на предыдущем временно́м слое.

Некоторую возможность оценить точность методики дает сравнение с линейной теорией на ранних стадиях развития малых возмущений. Ее результаты представлены, в частности, в [11].



Фиг. 5. Зависимость энстрофии от времени. Амплитуда начального возмущения 10^{-3} – сплошная линия; 10^{-5} – штриховая линия.

В отличие от настоящей работы, в [11] рассматривалось развитие возмущений в сдвиговом слое в неограниченной области. Проводился линейный анализ устойчивости решений уравнений Эйлера с начальным возмущением вида

$$\hat{u}e^{i(\alpha x - \omega t)}, \tag{9}$$

где через x обозначалась безразмерная координата, направленная вдоль сдвигового слоя, через $\hat{u}$ – некоторая функция поперечной координаты y, через α – безразмерное волновое число, через $\omega_i = \mathrm{Im}(\omega)$ – скорость роста амплитуды возмущения.

В силу периодичности постановки задачи (7), (8) можно задавать только такие гармонические начальные возмущения, при которых в расчетную область помещается целое число волн. С учетом различий в обезразмеривании задание в этой формулировке гармонического начального возмущения с числом l_k полных длин волн на расчетную область соответствует безразмерному волновому числу из (9):

$$\alpha = \frac{4\pi l_k}{\rho}, \tag{10}$$

где ρ – параметр, регулирующий толщину сдвигового слоя (8).

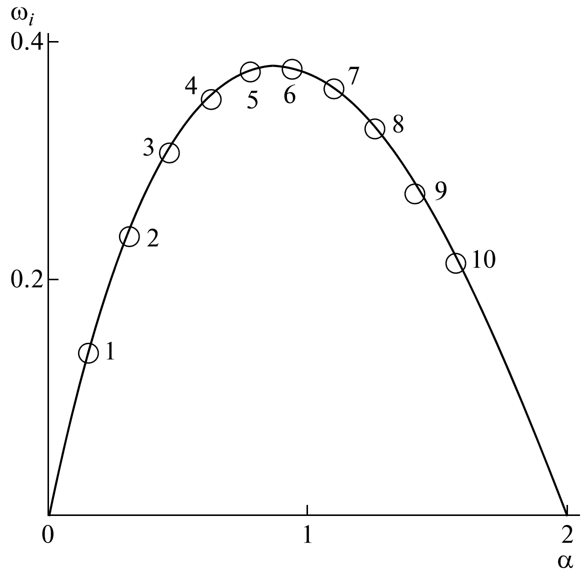
Рассмотрим развитие возмущений при двух различных значениях начальной амплитуды: $\delta = \delta_1$ и $\delta = \delta_2 > \delta_1$. В первом случае момент времени t_1 видимого изменения энстрофии $F = 1/2\int\omega^2 dV$ наступает позже, чем во втором случае (момент времени t_2) (см. фиг. 5). Этот сдвиг по времени объясняется тем, что в первом случае необходимо время для роста амплитуды возмущения от значения δ_1 до значения δ_2. Предполагая экспоненциальный закон роста амплитуды на линейной стадии, можно записать следующее:

$$\delta_2 = \delta_1 e^{\omega_i(t_1 - t_2)}.$$

Отсюда получаем

$$\omega_i = \frac{1}{t_1 - t_2}\ln\frac{\delta_2}{\delta_1}. \tag{11}$$

На фиг. 6 сплошной линией представлена зависимость скорости роста амплитуды ω_i от безразмерного волнового числа α согласно линейной теории (см. [11]). В расчетах α может принимать



Фиг. 6. Скорость роста начального возмущения в зависимости от безразмерного волнового числа. Линейная теория – сплошная линия; численный расчет – круглые маркеры; числа – номера гармоник начального возмущения.

только дискретные значения (10). Для этих значений круглыми маркерами обозначены скорости роста возмущений, полученные из численного расчета по формуле (11).

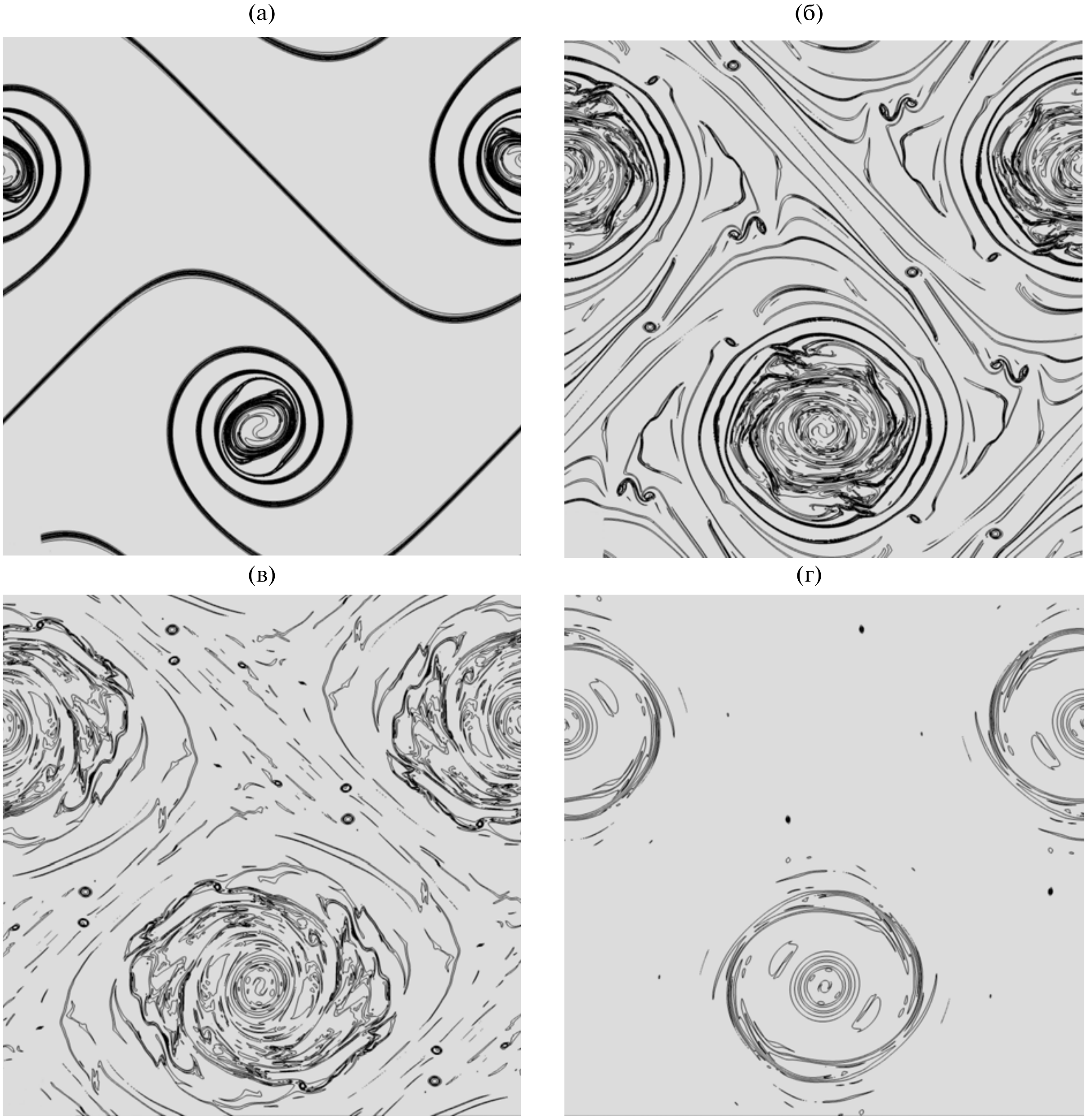
Как видно из фиг. 6, наблюдается очень хорошее согласие расчетных данных и предсказания линейной теории для первых 10 неустойчивых мод. Две последние неустойчивые моды должны обладать малой скоростью роста и в настоящей работе не рассматриваются.

Расчеты проводились на больших интервалах времени как при конечных, так и при бесконечном значениях числа Рейнольдса. В последнем случае роль вязкости играет диссипативный механизм схемы, пропорциональный h^m, где m – порядок схемы ($m = 7, 9$). При уменьшении h, что соответствует уменьшению схемной диссипации, появляются все более мелкие масштабы, разрешаемые сеткой, и сеточная сходимость отсутствует. В случае конечных значений Re, для которых проводились расчеты ($\mathrm{Re} = 4 \times 10^3$–$4 \times 10^5$) при достаточно подробных сетках, численные решения переставали зависеть от h, описывая таким образом все детали течений. Максимальное число Рейнольдса, для которого удалось получить сеточную сходимость при увеличении числа узлов до 2048×2048, оказалось равным 4×10^5. Общий сценарий развития течения во времени удобно проиллюстрировать на примере случая $\mathrm{Re} = \infty$.

На фиг. 7 представлены изолинии завихренности течения невязкой жидкости ($\mathrm{Re} = \infty$) в разные моменты времени.

Фиг. 7а–7г относятся к моментам времени t, равным соответственно 1.3, 3.6, 5 и 16. В момент времени $t = 1.3$ первоначальная вихревая пелена сворачивается в спирали, в центрах которых начинают формироваться большие вихри. В момент времени $t = 3.6$ большие вихри уже сформированы, вихревые нити растягиваются, утончаются и происходит вторичное сворачивание вихревых нитей с образованием вихрей большой интенсивности, но малого размера. В момент времени $t = 5$ большие вихри несколько уменьшают интенсивность, сохраняя запутанную внутреннюю структуру. Малые вторичные вихри к этому времени меняются мало. Интенсивность вихревых нитей между вихрями значительно уменьшается. К моменту времени $t = 16$ вся завихренность собирается в большие вихри круглой формы с характерной внутренней структурой. Остается несколько малых вторичных вихрей, которые сохраняют большую интенсивность, но уменьшаются в размерах.

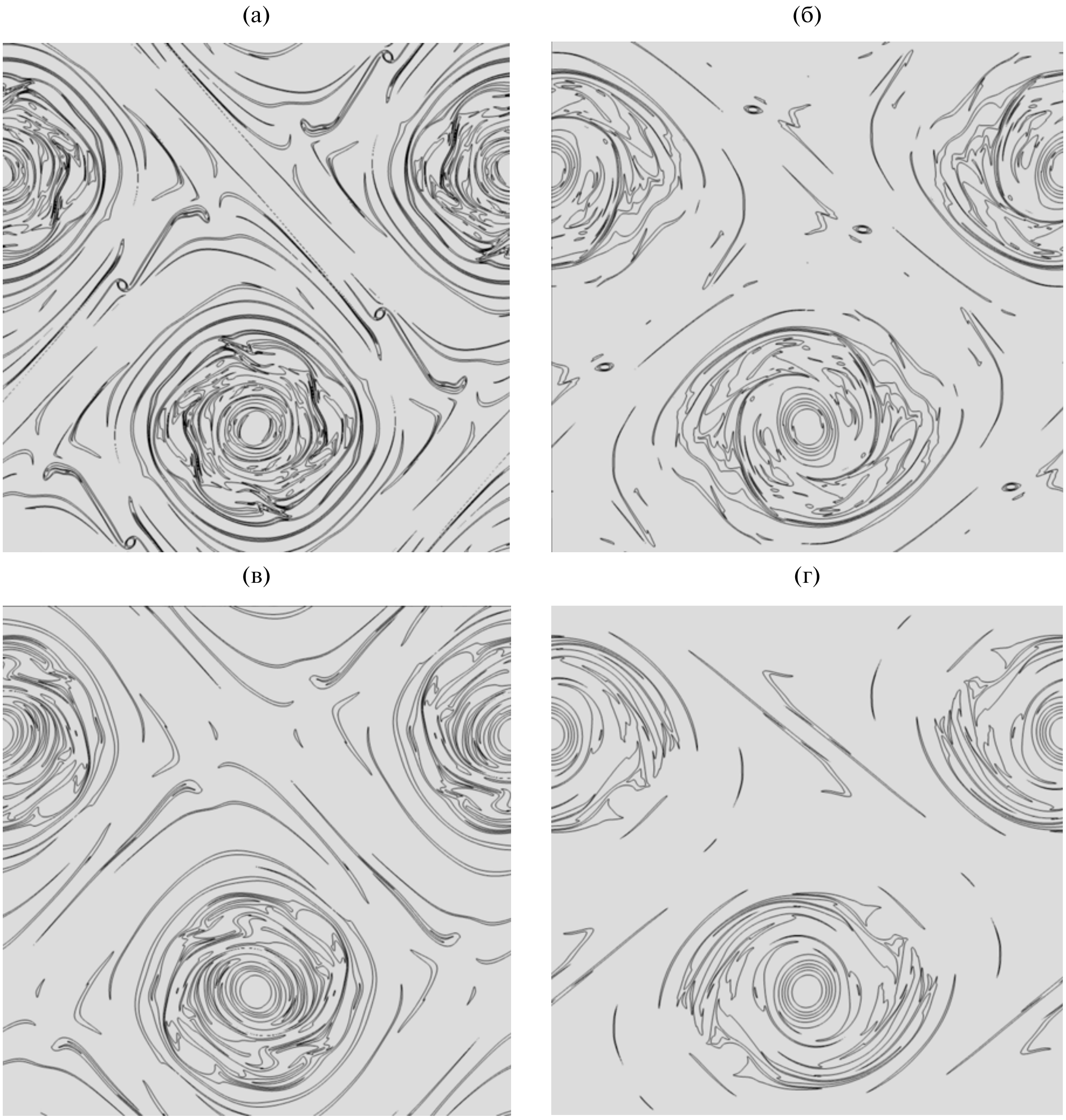
В случае конечных чисел Re общая картина развития остается той же, однако происходит диссипация мелкомасштабных вихревых образований. Картину исчезновения “точечных” вихрей можно проиллюстрировать, уменьшая число Рейнольдса.



Фиг. 7. Эволюция завихренности со временем t. Невязкое течение: а) $t = 1.3$; б) $t = 3.6$; в) $t = 5$; г) $t = 16$.

Расчеты проводились в широком диапазоне чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} < 10^6$. При $\mathrm{Re} = 10^6$ наблюдалось заметное уменьшение различия решений при удвоении числа узлов сетки, но создавалось впечатление, что максимально подробная сетка 2048×2048 недостаточна для полного разрешения всех масштабов. Здесь можно говорить о “почти полном” разрешении. Напротив, при $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$ имеет место полное разрешение, при котором распределения завихренности на различных подробных сетках практически не отличаются. Сравнивая результаты этих расчетов, можно отметить, что основные отличия картин завихренности для случаев $\mathrm{Re} = \infty$, $\mathrm{Re} = 10^6$ и $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$ становятся особенно заметными при $t \geq 3.6$. На фиг. 8а, 8б приведены уровни завихренности для $\mathrm{Re} = 10^6$ в моменты времени $t = 3.6$ и $t = 5$, на фиг. 8в, 8г – для $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$ в те же моменты времени. Как видно, картины завихренности заметно упрощаются (т.е. исчезают изолинии большей интенсивности) при уменьшении числа Re, что говорит о диссипации самых мелких структур.

В частности, “точечные” вихри, достаточно интенсивные при $\mathrm{Re} = \infty$, при $\mathrm{Re} = 10^6$ имеют вид небольших колец из нитей меньшей интенсивности. Они вовсе исчезают при $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$.



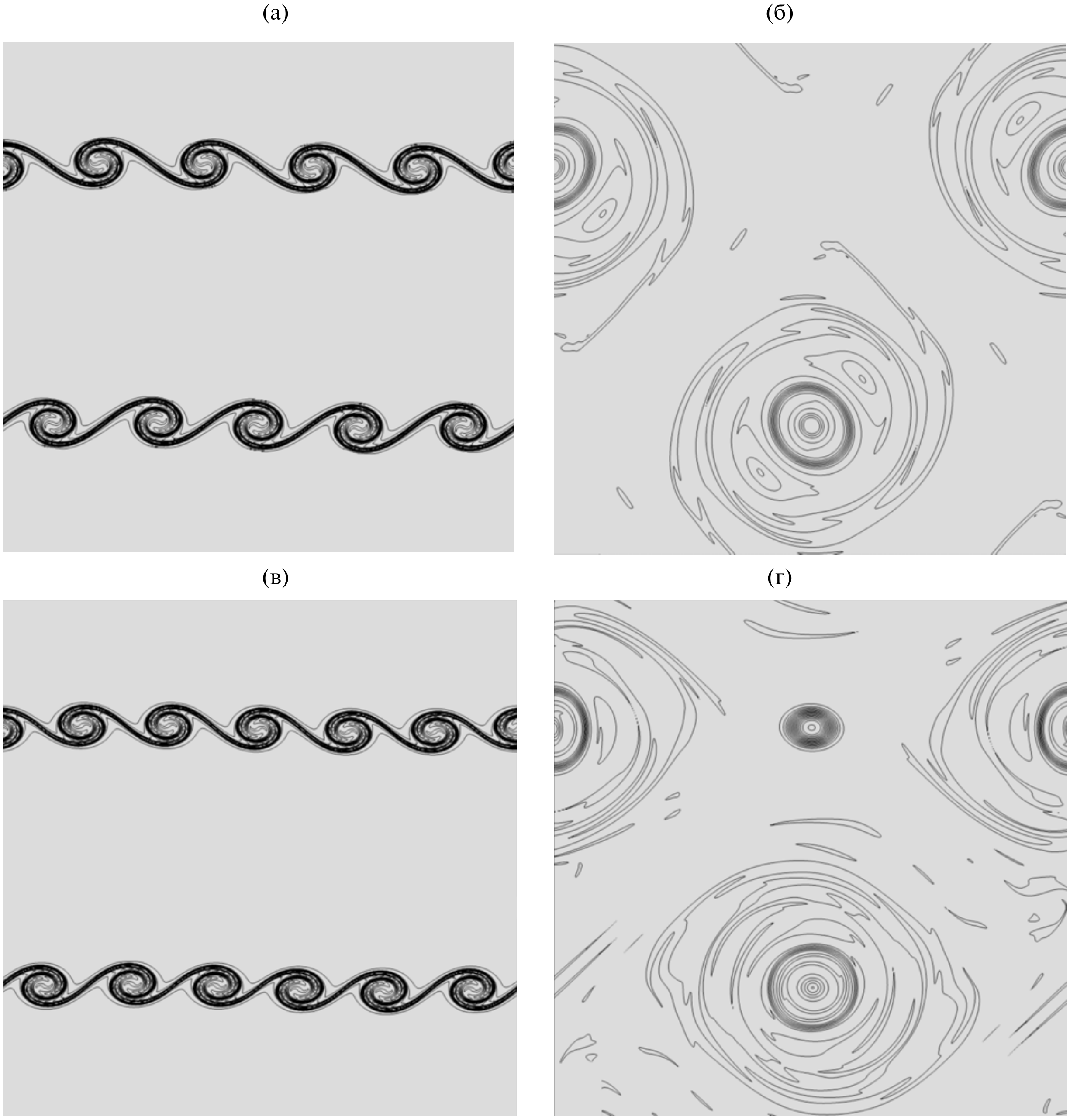
Фиг. 8. Эволюция завихренности со временем t: а) $\mathrm{Re} = 10^6$, $t = 3.6$; б) $\mathrm{Re} = 10^6$, $t = 5$; в) $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$, $t = 3.6$; г) $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$, $t = 5$.

Рассмотрим картины завихренности в случае, когда начальное возмущение содержит субгармоники l_k, $k > 1$. Прежде всего заметим, что при задании начального распределения скоростей в виде (8) определяемое ими начальное поле завихренности Ω_0 обладает симметрией вида

$$\Omega_0\left(x + \frac{1}{2}, 1 - y\right) = -\Omega_0(x, y) \tag{12}$$

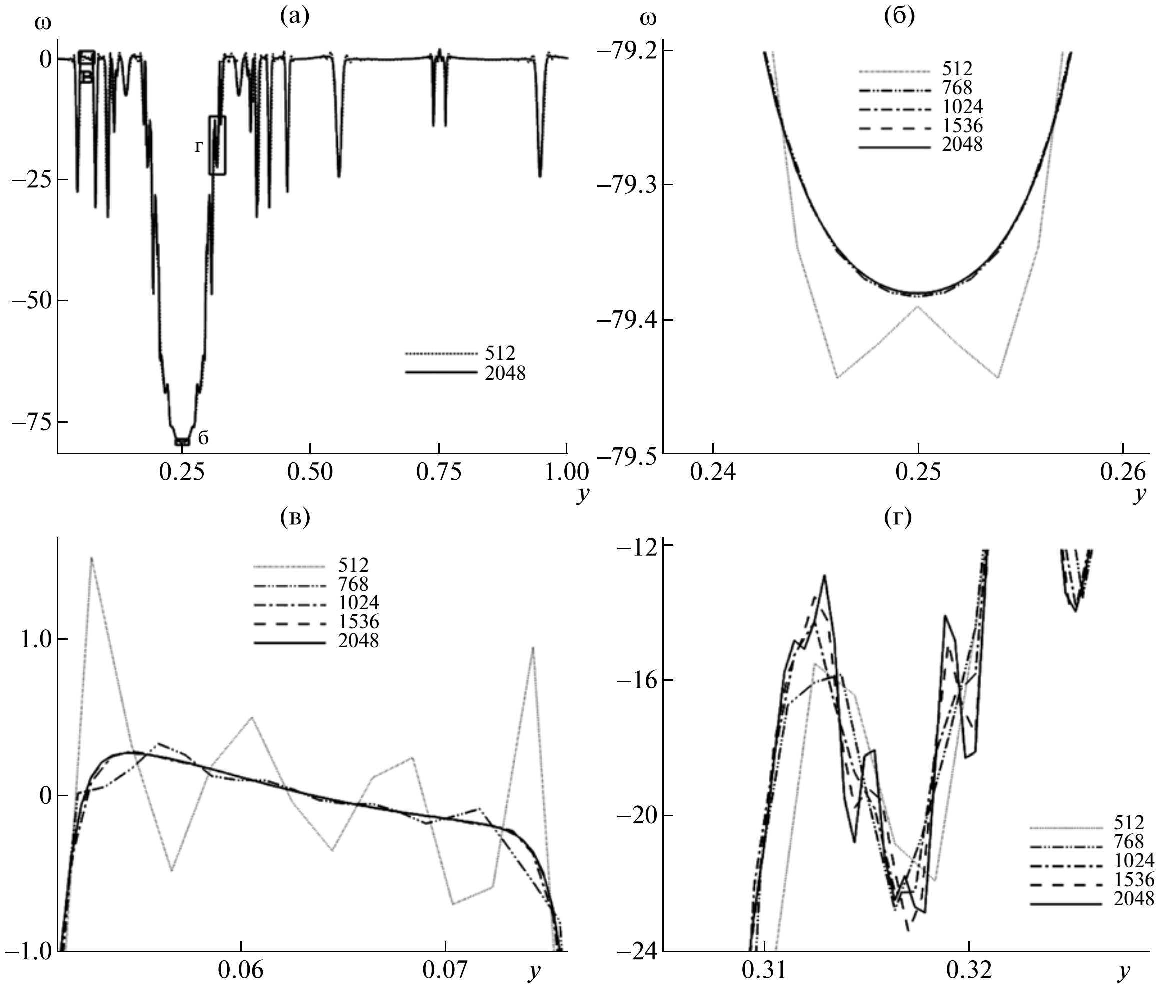
в случае, если все гармоники с номерами l_k в (8) являются нечетными. Если же хотя бы одна гармоника четна, то такая симметрия отсутствует. Свойство симметрии сохраняется на протяжении всего расчета, и от него зависит конечное состояние поля течения.

На фиг. 9а, 9б представлены изолинии завихренности течения при задании в начальный момент основной гармоники l_1 и субгармоники l_5 с одинаковыми амплитудами. В этом случае на-



Фиг. 9. Эволюция завихренности со временем t: а) субгармоника l_5, $t = 0.4$; б) субгармоника l_5, $t = 9$; в) субгармоника l_6, $t = 0.4$; г) субгармоника l_6, $t = 9$.

чальное распределение завихренности обладает свойством (12). Фиг. 9а относится ко времени $t = 0.4$, фиг. 9б – ко времени $t = 9$. На фиг. 9в, 9г – то же в те же моменты времени, но с начальными модами l_1 и l_6, при которых свойство (12) отсутствует. В обоих случаях рассматривалось невязкое течение. В момент времени $t = 0.4$ в обоих вариантах образовались дорожки вихрей, соответствующие субгармоникам. Основная мода l_1 никак не проявилась. Это является следствием разных скоростей роста возмущений для различных мод. Моды l_5 и l_6 – самые быстрорастущие (см. фиг. 6). К моменту времени $t = 9$ оба варианта характеризуются установившейся структурой локализованных вихрей, обладающих разными свойствами симметрии. В варианте с l_5 – это одинаковые вихри, расположенные в “шахматном” порядке. В варианте с l_6 в нижней части поля находится цепочка одинаковых вихрей, а в верхнем – цепочка чередующихся вихрей двух разных видов.



Фиг. 10. Сходимость при уменьшении шага сетки; завихренность в центральном вертикальном сечении: а) вся область; б), в), г) фрагменты.

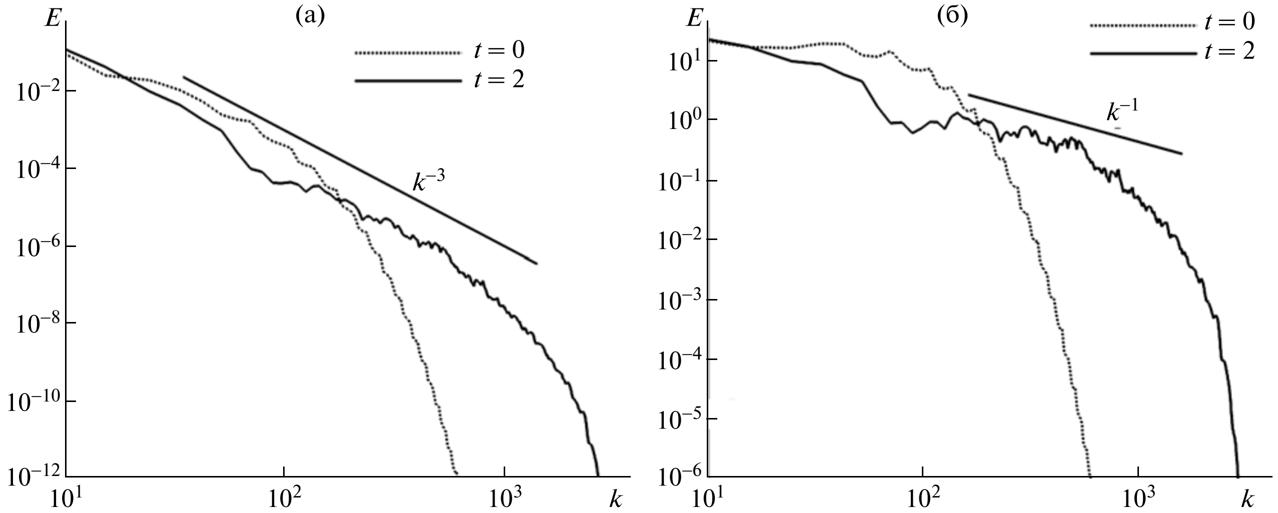
Оценим разрешения всех масштабов движения при $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$. На фиг. 10а изображена общая картина распределения завихренности в центральном вертикальном сечении $x = 0.5$. Для наглядности на этом графике приведены данные только для двух расчетных сеток: 512×512 и 2048×2048. Буквами на рисунке обозначены области, которые представлены на следующих рисунках в увеличенном виде.

Фиг. 10б соответствует фрагменту “б”. В эту область попадает центр большого вихря. Для адекватного представления здесь оказалось достаточно сетки 768×768, в то время как сетка 512×512 дает нефизические немонотонности.

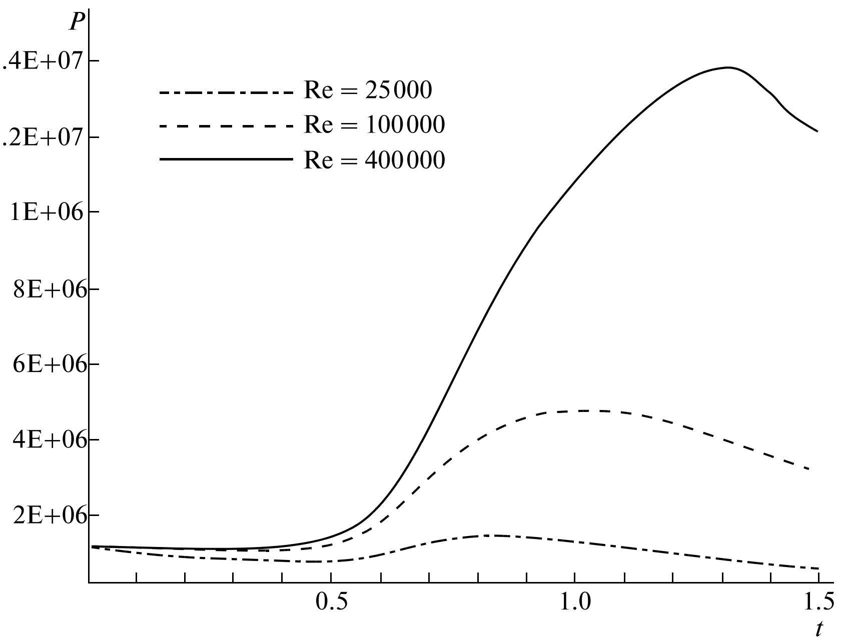
В области, изображенной на фиг. 10в, сетка 768×768 показывает уже не столь хорошие результаты, и слабая зависимость от пространственного шага требует, как минимум, сетки 1024×1024.

Наиболее требовательна к размеру сетки область “г” (фиг. 10г). Здесь на сетке 1536×1536 появляются новые детали течения (выглядящие на этом графике как немонотонности). И лишь в случае сетки 2048×2048 можно говорить о достижении с некоторой точностью сеточной сходимости. Заметим, что в случае решений для $\mathrm{Re} = \infty$ увеличение числа узлов не приводит к сходимости – появляются все новые и новые детали, соответствующие меняющимся диссипативным членам девятого порядка при уменьшении шага h.

Имея в виду сравнения с теорией однородной двумерной турбулентности, оценим спектры энергии $E(k)$ и энстрофии $F(k)$. Согласно теоретическим оценкам (см. [12]), в двумерной свободно вырождающейся турбулентности на инерционном интервале волновых чисел энергетический спектр должен быть близок к $E(k) \sim k^{-3}$, а спектр энстрофии – к $F(k) \sim k^{-1}$.



Фиг. 11. а) спектр энергии; б) спектр энстрофии.



Фиг. 12. Зависимость палинстрофии от времени.

На фиг. 11а представлены энергетические спектры, а на фиг. 11б – спектры энстрофии в начальный момент времени (пунктирная линия) и при $t = 2$ (сплошная линия). Видно, что ко времени $t = 2$ образуется инерционный интервал волновых чисел, в котором спектральная плотность энергии близка к $E(k) \sim k^{-3}$, а спектральная плотность энстрофии – к $F(k) \sim k^{-1}$.

Другим параметром, подходящим для сравнения, является так называемая палинстрофия $P = \int |\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{U}|^2 dV$ (см. [13], [14]). Здесь $\mathbf{U}$ – вектор скорости. Согласно теоретическим оценкам (см. [14]), палинстрофия достигает максимума в некоторый момент времени $t_{\max} \sim \lg \mathrm{Re}$. На фиг. 12 представлена зависимость палинстрофии от времени для трех различных чисел Рейнольдса. По этим зависимостям можно найти моменты времени $t_{\max}$, соответствующие максимальным значениям палинстрофии для каждого числа Рейнольдса. В таблицу 2 сведены найденные значения $t_{\max}$ и $\lg \mathrm{Re}$ для этих расчетов.

Таблица 2

Re	2.5×10^4	10^5	4×10^5
lg Re	4.4	5.0	5.6
$t_{\max}$	0.83	1.02	1.31

Как следует из таблицы, линейная зависимость приблизительно имеет место для первых двух значений Re с некоторым отклонением для $\mathrm{Re} = 4 \times 10^5$. В целом можно констатировать неплохое соответствие результатов расчетов теории двумерной турбулентности.

Представленные выше численные результаты подтверждают теоретические оценки точности и разрешающей способности мультиоператорных схем. Они могут служить эффективным инструментом при численном исследовании некоторых важных классов задач. К ним можно отнести задачи, характеризующиеся широким диапазоном масштабов деталей решений, требующих точного описания. В частности, таковыми являются задачи прямого численного моделирования турбулентности и задачи об источниках аэродинамического шума.

В заключение отметим, что предложенная методика, основанная на мультиоператорных аппроксимациях высокого порядка с оптимизацией фазовых и амплитудных ошибок, позволяет значительно улучшить разрешение мелких деталей сложных вихревых течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brown D.L., Minion M.L.* Performance of under-resorved two-dimensional incompressible flow simulations // J. Comput. Phys. 1995. V. 122. P. 165–183.
2. *Minion M.L., Brown D.L.* Performance of under-resorved two-dimensional incompressible flow simulations. II // J. Comput. Phys. 1997. V. 138. P. 734–765.
3. *Tolstykh A.I., Chigirev E.N.* On thin shear layers numerical simulation // J. Comput. Phys. 2001. V. 166. P. 152–158.
4. *Толстых А.И.* Мультиоператорные схемы произвольного порядка, использующие нецентрированные компактные аппроксимации // Докл. АН. 1999. Т. 366. № 3. С. 319–322.
5. *Толстых А.И.* О построении схем заданного порядка с линейными комбинациями операторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1206–1220.
6. *Толстых А.И.* О мультиоператорном методе построения аппроксимаций и схем произвольно высокого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 56–73.
7. *Tolstykh A.I.* Development of arbitrary-order multioperators-based schemes for parallel calculations. 1: Higher-than-fifth-order approximations to convection terms // J. Comput. Phys. 2007. V. 225. P. 2333–2353.
8. *Липавский М.В., Толстых А.И., Чигерёв Е.Н.* О схеме с мультиоператорными аппроксимациями 9-го порядка для параллельных вычислений и о ее применении в задачах прямого численного моделирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 8. С. 1433–1452.
9. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
10. *Tam C.K.W.* Problem 1-aliasing // Fourth Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on benchmark problems, NASA/CP-2004–212954 2004. P. 3.
11. *Sandham N.D., Reynolds W.C.* Three-dimensional simulation of large eddies in the compressible mixing layer // J. Fluid Mech. 1991. V. 224. P. 133–158.
12. *Фрик П.Г.* Турбулентность: подходы и модели. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
13. *Фриш У.* Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. М.:ФАЗИС, 1998.
14. *Lesieur M.* Turbulence in Fluids. Kluwer, Dordrecht, 1990.