ОТДЕЛ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

РАЗРАБОТКА ВЫСОКОТОЧНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОТДЕЛЕ[1]

А. И. Толстых

1. Введение

Научные исследования, проводимые в отделе прикладной математической физики, ориентированы на создание и применение при решении актуальных задач, описываемых уравнениями в частных производных, численных методов, отличающихся от стандартных повышенной эффективностью. Эти методы включают в себя высокоточные дискретные модели, передовые технологии построения сеток, квазиизометрических отображений и поверхностей, а также эффективные итерационные алгоритмы решения алгебраических систем, возникающих, в частности, при дискретизации исходных уравнений.

Одним из основных направлений деятельности отдела является разработка и применение методов высокой точности (в том числе и принципиально новых) для численного решения задач механики сплошной среды. Важнейшим классом таких задач являются задачи, описываемые уравнениями Эйлера и Навье-Стокса. К этому же классу можно отнести различные вытекающие из них математические модели. Другим классом являются задачи механики твёрдого деформируемого тела.

Применение методов высокой точности во многих случаях обладает следующими преимуществами.

1. Заданная точность (например, точность инженерных приложений) может быть реализована с использованием сравнительно грубых сеток (по сравнению с сетками в случае схем невысокого порядка). Это означает помимо существенной экономии памяти компьютера ещё более существенное сокращение времени счёта. Например, уменьшение числа узлов в 2 раза в каждом из пространственных направлений обычно приводит в случае пространственных стационарных задач аэрогидродинамики к уменьшению времени счёта приблизительно в 16 раз. Таким образом, здесь речь может идти об эффективных "решателях" для инженерных задач.

2. Методы высокой точности и высокой разрешающей способности незаменимы в случаях, когда нужно описать тонкие детали решений (например, при прямом численном моделировании турбулентности или больших вихрей), точно воспроизводить волновые процессы (например, в акустических задачах) и т. д.

Создание новых вычислительных технологий в отделе тесно связано с их применением при решении конкретных задач. Примерами являются численное моделирование различных океанических процессов, описание полей течений и получение аэродинамических характеристик в задачах аэрогидродинамики, моделирование технологического процесса формообразования в условиях ползучести материала. В настоящее воемя начаты исследования в области численного моделирования акустических полей и снижения уровней шума.

Ниже приводится краткое описание теоретических разработок и их реализаций (последний раздел написан В.А. Гаранжой). В списке литературы приведена лишь часть основных публикаций по этим направлениям.

2. Методы высокого порядка, основанные на компактных аппроксимациях

1. Первое из указанных выше преимуществ стимулировало в 70-х гг. прошлого столетия разработку совершенно нового для тех лет типа разностных схем третьего порядка, основанных на простейших так называемых компактных аппроксимациях (КА) [1]. Основную идею КА можно проиллюстрировать на примере первых производных. Обычную формулу численного дифференцирования на сетке $x_j = jh,\ h = \mathrm{const}$ можно представить в виде $(u_x)_j = u'_j \approx \sum_{k=-m}^{n} a_k u_{j+k}$, где a_k суть некоторые коэффициенты, обнуляющие члены первого и более высоких порядков в разложениях Тейлора для функции $u(x)$. Применение таких формул с большим количеством коэффициентов (большим трёх) часто приводит к нежелательным

[1] Приводится по изданию «**50 лет ВЦ РАН: История, люди, достижения**». М.: ВЦ РАН, 2005. С. 81-88.

последствиям в виде неустойчивости основанных на них схем, трудностям формулировок граничных условий и т. д. Аппроксимацию первых производных можно записать и в виде

$$\sum_{k=-m1}^{n1} b_k u'_{j+k} = \sum_{k=-m}^{n} a_k u_{j+k} \text{ или } u'_j = P^{-1} Q u_j,$$

где коэффициенты b_k подбираются так, чтобы обнулить большее количество членов в ошибке аппроксимации и тем самым увеличить её порядок, а операторы P и Q являются операторами суммирования. Под компактными аппроксимациями обычно понимаются формулы такого типа с небольшим числом слагаемых в левой части (обычно с тремя слагаемыми), что позволяет реализовать трёхточечные прогонки. Преимущество компактных аппроксимаций над обычными состоит не только в достижении большего порядка точности, но и в меньших коэффициентах в погрешностях, что делает КА очень точными.

В [1] и последующих работах автора были впервые построены КА третьего порядка для разностных схем в случае уравнений гидродинамического типа. Они учитывали направления распространения возмущений, так что основанные на них разностные схемы можно отнести к категории "противопотоковых" схем, обладающих большим запасом устойчивости. Сами же формулы КА такого типа можно назвать нецентрированными компактными аппроксимациями (НКА), поскольку их коэффициенты оказываются несимметричными относительно узла $x = x_j$.

Применение компактных схем третьего порядка позволило получать достаточно точные для инженерных приложений решения уравнений Навье-Стокса при использовании машин раннего поколения типа БЭСМ-6. Полученные результаты использовались в специальных методиках для оценок аэродинамических характеристик в аэрокосмических задачах.

Широкое применение такие схемы нашли в пакете прикладных программ, разработанных в отделе в рамках исследования процессов, происходящих в океанической среде. В пакет вошли также уникальные программные комплексы для численного моделирования внутренних волн, турбулентных образований и спектров поверхностного волнения.

2. В 80-х г. прошлого столетия были продолжены исследования в области компактных аппроксимаций. Были предложены, исследованы и использованы при решении конкретных задач новые их семейства и основанные на них схемы третьего и пятого порядков. Разработанная теория нашла отражения в двух монографиях [2, 3]. Компактные схемы пятого порядка оказались особенно удачными с точки зрения их высокой точности и хорошего запаса устойчивости. В общем виде их можно представить в форме (1) с той лишь разницей, что оператор Q сам имеет вид (1), и поэтому для вычисления производных требуется не одна, а две прогонки.

Отличительной особенностью всех предложенных КА является присутствие в них параметра (назовём его s), определяющего свойство положительности или отрицательности оператора $L(s) = P^{-1}(s)Q(s)$ компактного численного дифференцирования $u'_j = L(s)u_j + O(h^m)$, $m =$ 3,5. Более того, его можно представить в виде $L(s) = L^1(s) + sL^0(s)$, где L^1 и L^0 соответственно суть кососимметричный оператор, аппроксимирующий производную u_x с m+1-м порядком, и самосопряжённый положительный оператор, определяющий вносимый схемой диссипативный механизм порядка m. При этом, например, при аппроксимации уравнения переноса $u_t + au_x = 0$ для положительности оператора $aL(s)$ следует выбрать знак s совпадающим со знаком a. Благодаря такой структуре схемы, основанные на семействах КА, с высокой точностью описывают тонкие детали решений в широком диапазоне волновых чисел, допускаемых сетками и имеющими физический смысл, и фильтруют "нефизичные" мелкомасштабные компоненты, вносимые схемой. С другой стороны, наличие диссипативного механизма делает их устойчивыми и надёжными при решении различных задач.

Для того чтобы строить схемы с положительными операторами в случае систем уравнений гиперболического типа, первоначально использовалась идея диагонализации матриц-коэффициентов при первых производных. При этом вместо скаляра s вводилась матрица, учитывающая знаки их собственных значений. В дальнейшем стала применяться более простая и универсальная идея расщепления потоков. В простейшем случае её можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть требуется аппроксимировать производную $f(u)_x$, где **f** и **u** суть векторные функции. Выбрав положительный параметр s, запишем эту аппроксимацию в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{u})_x = (L(s)(\mathbf{f} + C\mathbf{u}) + L(-s)(\mathbf{f} - C\mathbf{u}))/2,$$

где C есть положительная константа, являющаяся параметром схемы. Можно показать, что в случае линейной функции f оператор численного дифференцирования, определённый таким образом, является положительным несамосопряжённым оператором.

Различные варианты компактных схем приведены в [3]. Они включают в себя симметричные (центрированные) аппроксимации вторых производных для уравнений Навье-Стокса, аппроксимации производных по времени, ограничители потоков для расчёта различных течений и т.д. В зарубежных публикациях разработанные нецентрированные КА были обозначены как Compact Upwind Differencing (CUD), а различные их версии и порядки отмечались римскими и арабскими цифрами (например, CUD-II-3 для одного из вариантов схем третьего порядка).

3. Разработанные методики тщательно тестировались на модельных задачах. Основными из них были задачи Коши для уравнений Бюргерса

$$u_t + (u^2/2)_x = 0 \quad \text{или} \quad u_t + (u^2/2)_x = \nu u_{xx},$$

где ν есть коэффициент вязкости. Расчёты на разных сетках показали, что точность компактных схем на порядки превосходит точность стандартных схем даже на относительно грубых сетках. Основные расчёты, проводившиеся в отделе в течение последнего десятилетия, связаны с численным моделированием на основе уравнений Навье-Стокса в задачах несжимаемой жидкости и сжимаемого газа. Одним из примеров является трансзвуковое течение вязкого газа в статоре турбины [4]. Сравнение газодинамических полей с данными, полученными на основе схемы второго порядка показало, что использование более грубых сеток и компактных схем пятого порядка, позволяет ускорить процесс получения решений с одной и той же точностью приблизительно в 20 раз.

Более внушительные оценки получились при сравнении со стандартными схемами второго порядка в случае задачи о распространении вихрей равномерным потоком невязкого газа. Оказалось, что время счёта на персональном компьютере небольшой производительности для получения решения с некоторой фиксированной точностью в случае схемы пятого порядка составляет 20 минут. Оценки времени счёта на этом же компьютере для схемы второго порядка, полученные на основе её скорости сеточной сходимости и необходимых размеров сетки, показали, что для достижения такой же точности требуется 82 года. Различные версии компактных аппроксимаций использовались при расчёте двумерных ламинарных и турбулентных течений сжимаемого газа (стационарных и нестационарных) в задачах внешнего обтекания [5-8], а также пространственных течений [9]. В рамках проекта INTAS-1817 компактные схемы пятого порядка применялись при численном моделировании вихревых следов за совершающими посадку тяжёлыми авиалайнерами. Такие вихревые следы могут создавать серьёзные проблемы с точки зрения безопасности полётов других самолётов.

В качестве развития идеи нецентрированных аппроксимаций были разработаны высокоточные компактные аппроксимации [10] на основе конечно-объёмного подхода. Для этих схем был доказан ряд законов геометрического сохранения, что позволило резко увеличить точность моделирования для задач со сложной геометрией. На основе данного подхода было успешно проведено численное моделирование пространственных нестационарных течений жидкости в реакторах смешения с активными элементами.

Компактные схемы пятого порядка использовались для численного моделирования течений несжимаемой жидкости. Рассматривались как задачи обтекания [11], так и задачи о потере устойчивости, предъявляющие особо жёсткие требования точности и "робастности" схемы. Последние представляют особый интерес, поскольку позволяют исследовать эволюцию вихревых образований, процессы турбулизации и генерацию звука. Первые результаты в этом направлении были представлены в [12], а их продолжение — в [13]. Бурное увеличение быстродействия и памяти компьютеров позволили в последнее время продолжить эти исследования и осуществить прямое численное моделирование как двумерных, так и трёхмерных течений. От многих других исследований в этом направлении полученные данные отличатся гарантированной высокой точностью описания мельчайших деталей течения.

3. Мультиоператорные аппроксимации и схемы произвольного порядка для параллельных вычислений

1. На конференции по параллельным вычислениям в Манчестере в 1998 г. был впервые доложен совершенно новый принцип построения схем произвольного порядка [14]. Он основан на следующем свойстве компактных аппроксимаций: коэффициенты перед степенями шага *h* в погрешностях аппроксимаций для оператора $L(s) = P^{-1}(s)Q(s)$ являются полиномами от s, степени которых возрастают со степенями h. Основываясь на этом свойстве, можно показать, что если $L(s)u_j = (u_x)_j + O(h^m)$, то выбрав M различных значений параметра s, всегда однозначным образом можно найти в аналитической форме такие коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_M$, что имеет место оценка

$$L_M u_j = \left(\sum_{i=1}^{M} \gamma_1 L(s_i)\right) u_i = (u_x)_j + O(h^{m+M-1}).$$

Было показано, что эти коэффициенты являются решением линейной системы с матрицей Вандермонда, образованной степенями s_i. Оператор L_M естественно назвать мультиоператором, а операторы $L(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, M$, можно рассматривать как базисные. Из структуры мультиоператора видно, что вычисление его действия на известную сеточную функцию можно осуществить на M процессорах, каждый из которых синхронно с остальными вычисляет его действие со "своим" значением s_i. Таким образом, взяв простейший оператор $L(s)$, можно образовать мультиоператор и повысить порядок точности до желаемого простым увеличением числа процессоров. Некоторое ограничение на число M накладывает ухудшение обусловленности матрица Вандермонда с его ростом (происходит увеличение абсолютных значений коэффициентов). Это ухудшение можно компенсировать выбором нулей полинома Чебышёва в качестве значений s_i, так что

$$s_i = \left(s_{\min} + s_{\max} + (s_{\min} - s_{\max})\cos\frac{(2n+1)\pi}{2M}\right)\Big/ 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M-1,$$

где $s_{\min}$ и $s_{\max}$ являются задаваемыми параметрами.

Теоретические исследования мультиоператоров [15, 16] показали, что при надлежащем выборе $s_{\min}$ и $s_{\max}$ они наследуют основные свойства базисных операторов: знакоопределённость ($L_M > 0$ или $L_M < 0$) и изменение положительности на отрицательность (или наоборот) при изменении всех знаков в s_i. Это позволяет строить высокоточные противопотоковые мультиоператорные схемы для уравнений механики жидкости и газа. В последнее время мультиоператорная схема седьмого порядка, основанная на базисных операторах третьего порядка, была реализована на кластере ВЦ РАН с использованием пяти процессоров. Она позволила на очень подробных сетках (до четырёх миллионов узлов) осуществить прямое численное моделирование турбулентности, возбуждаемое неустойчивостью сдвиговых слоёв несжимаемой жидкости с полным разрешением мелких масштабов. Созданная анимация позволила наблюдать каскад передачи энергии к большим волновым числам.

При построении мультиоператоров существенно использовалась зависимость базисных операторов от параметра, определяющего их "ориентацию" (против потока или по потоку). В то же время существуют центрированные компактные аппроксимации производных, основанные на симметричных формулах. Они имеют ту же форму $P^{-1}Q$ с той лишь разницей, что операторы P и Q содержат только численные коэффициенты. В [17] был предложен способ построения мультиоператоров и в этом случае. Он состоит в искусственном введении параметра в эти операторы. При этом базисные операторы оказываются более низкого порядка, чем первоначальные, но зато открывается возможность повышения их порядка до желаемого путём фиксации значений введённого параметра и образования их линейных комбинаций с найденными коэффициентами. Такие мультиоператоры могут быть использованы при аппроксимации членов с вязкостью в уравнениях Навье-Стокса, а также при решении задач эллиптического типа (например, задач теории упругости).

2. Остановимся на последних результатах в области компактных аппроксимаций и построенных на их основе мультиоператоров. Было обнаружено новое семейство КА, в котором операторы P являются двухточечными "односторонними" операторами [18]. Их можно определить формулами для "левых" или "правых" операторов

$$Pu_j = u_j + c(u_j - u_{j-1}) \quad \text{или} \quad Pu_j = u_j + c(u_{j+1} - u_j),$$

в которых $0 < c < 1$ является параметром. Такие КА обладают рядом достоинств. Во-первых, обращение двухточечных операторов требует на порядок меньшее количество арифметических операций, чем трёхточечных. Во-вторых, они позволяют получить односторонние аппроксимации, существенные при конструировании граничных операторов для любого типа компактных схем. Фиксируя набор параметров c_1, $c_2, \ldots, c_M$ и используя операторы $P^{-1}(c_i)Q(c_i)$ из нового семейства в качестве базисных, можно построить мультиоператорные аппроксимации производных и схемы с положительными операторами. Были предложены варианты таких мультиоператоров.

Существенным расширением понятия компактных аппроксимаций является предложенное в [18] увеличение порядка известных формул численного анализа. Пусть имеется некоторая приближённая формула невысокого порядка $(Lu)_j \approx L_h u_j$, где $(Lu)_j$ может быть одним из часто используемых функционалов (например, среднее значение, экстраполяция на один шаг, формула трапеций или Симпсона для интеграла по отрезку длиной h или $2h$ и т.д.). Введём операторы $P^{-1}L_h$ или $L_h + P^{-1}Q$, зависящие от параметра, которые можно рассматривать как мультипликативные и аддитивные поправки к оператору L_h. Подберём коэффициенты в *P* и *Q*, обеспечивающие максимальный порядок аппроксимации этих новых операторов. Если желательно увеличить его до назначенного, зафиксируем необходимое количество параметров (это могут быть параметры s, c или искусственно введённые параметры). Решив линейные системы и определив коэффициенты линейных комбинаций, образуем мультиоператоры, обеспечивающие заданный порядок.

В заключение отметим, что для реализации очень высоких порядков мультиоператорных аппроксимаций разрядность арифметики в случае 32-разрядных процессоров оказывается недостаточной. В этом случае может быть полезна разработанная в отделе компьютерная программа, увеличивающая точность машинной арифметики [19].

4. Бессеточный метод, основанный на применении радиальных базисных функций в режиме разностных схем

1. Достижение высокого порядка сеточной сходимости в случае схем любого типа основано на гладкости тех функций, к которым применяются сеточные операторы. Это означает, что метрические коэффициенты, возникающие при переходе к той или иной сетке в расчётной плоскости должны иметь достаточную степень гладкости. В случае сложных геометрических форм областей в физической плоскости построение сеток, удовлетворяющих этому требованию, может стать отдельной весьма сложной задачей. Некоторой альтернативой в таких случаях может служить использование так называемых бессеточных методов. В классе аппроксимаций интерполяционного типа популярность в недавнее время приобрели радиальные базисные функции **(**РБФ**)**, т.е. функции вида $\phi(\|x - x_k\|)$**,** где $\|\cdot\|$ — эвклидова норма. Другими словами РБФ — это функции, аргументами которых являются расстояния точки x**,** (вообще говоря, в *n*-мерном пространстве) до произвольно расположенных точек x_k, $k = 1, 2, \ldots, K$. Линейная комбинация РБФ с обычными условиями интерполяции для аппроксимируемой функции приводит к РБФ-интерполянту, который может быть использован для дискретизации уравнений в частных производных. При этом приходится решать линейную систему для определения коэффициентов интерполяции.

2. Если РБФ вследствие своей высокой точности нашли широкое применение в теории и практике аппроксимаций, то их использование при решении уравнений в частных производных оказалось сравнительно редким. Основными подходами здесь являются методы коллокации и граничных элементов с использованием всех K узлов в расчётной области. Основная трудность здесь состоит в плохой обусловленности системы для РБФ-коэффициентов в случае большого числа K. Чтобы преодолеть эту трудность, но в тоже время сохранить достоинства РБФ-аппроксимадий, в отделе была разработана новая методика применения РБФ. Вместо глобальной интерполяции было предложено для каждого узла x_j выбрать K_j соседей, образующих множество точек, для которых строится "свой" интерполянт с последующей аппроксимацией производных в рассматриваемом уравнении [20]. При этом возникает полнейшая аналогия с конечно-разностными схемами, а само множество точек может быть названо шаблоном. Разница состоит лишь в том, что вместо полиномиального базиса используются РБФ. Предложенный подход позволяет аппроксимировать производные в уравнениях в декартовой системе координат с нужным расположением узлов либо во всей области, либо в её части. В последнем случае в остальной части можно использовать разностные схемы в рамках методики разделения областей. Получаемые аппроксимации могут быть достаточно точными. Например, для некоторых классов функций показана экспоненциальная сходимость интерполянтов к интерполируемым функциям.

Предложенный РБФ-метод был использован при решении задач механики твёрдого деформируемого тела. Во всех случаях использовались популярные РБФ вида

$$\phi(\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_k\|) = ((x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + 1)^{1/2}$$

(multiquadrics). Точность получаемых решений оказалась выше, чем в случае стандартных конечно-элементных методов с тем же количеством степеней свободы. Рассматривались задачи о деформации балок и оболочек с достаточно сложными формами границ расчётных областей [21]. В рамках проекта INTAS-1150 методика применялась для решения задачи формообразования в условиях ползучести с циклами нагружение-разгрузка.

Были исследованы также шаблоны, обеспечивающие устойчивость РБФ-схем в случае уравнений с конвективными членами. После тестирования на модельных задачах методика была использована для решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа [22]. В качестве основной рассматривалась задача об обтекании крылового профиля в условиях нарастающего на его поверхности льда. В этом случае форма твёрдой границы может стать нерегулярной, что делает затруднительным построение сеток для схем высокого порядка. При расчётах применялся принцип декомпозиции областей, при котором в окрестности носовой части уравнения аппроксимировались на основе РБФ-методики, а в остальной части использовалась КА-схема со стандартной сеткой типа *C*. Для определения количества воды, попадающей на элементы поверхности, использовалась специально разработанная модель высокого уровня для течения двухфазного воздушно-капельного потока [23].

5. Численные методы линейной алгебры, параллельные вычисления и геометрическое моделирование

В секторе "Центр суперкомпьютерных и массивно-параллельных приложений" отдела в последние годы активно ведётся разработка высокоточных методов моделирования с использованием параллельных вычислений, алгоритмов решения больших жёстких систем алгебраических уравнений, параллельных методов линейной алгебры. Большое внимание уделяется построению расчётных сеток на основе теории квазиизометричных отображений, а также вариационным методам в задачах геометрического моделирования.

К основным научным результатам в этих направлениях можно отнести следующие.

1. Для решения пространственных задач фильтрации в случае, когда имеют место большие скачки проницаемости среды, была предложена схема аппроксимации уравнений фильтрации с отклонением от закона Дарси [24]. Были доказаны свойства геометрического сохранения и условие кусочного тестирования при использовании сильно искажённых гексаэдральных элементов. В численных экспериментах предложенная методика позволила получить результаты, существенно более точные по сравнению с

методами смешанных конечных элементов с тем же числом степеней свободы. Этот подход был успешно применён для моделирования течения газа вблизи скважин.

2. Был предложен прицчипиально новый метод построения предобуславливателей для решения СЛАУ с симметричными положительно-определёнными матрицами методом сопряжённых градиентов [25-27]. Как известно, классические оценки сходимости МСГ используют в качестве меры спектральное число обусловленности. Было показано, что на самом деле скорость сходимости зависит от всех собственных значений матрицы и выражается через специальную квазивыпуклую меру качества матрицы. Главным преимуществом этой меры является коструктивность, т. е. удаётся сформулировать и решить задачу о выборе оптимального переобуславливателя в классе неполных факторизаций. При этом удалось доказать, что процедура построения предобуславливателя устойчива для положительно определённых матриц и для них не требуется диагонального преобладания.

На основе этого теоретического подхода была решена задача поиска оптимального параллельного предобуславливателя [28, 29]. Численное решение больших жёстких СЛАУ, возникающих в самых разных областях, в том числе в задачах механики, продемонстрировало эффективность и устойчивость параллельного метода решения.

3. Был предложен [30-32] вариационный метод построения многомерных квазиизомет- ричных отображений, а также построения квазиизометричных координат на многообразиях ограниченной кривизны в смысле А.Д. Александрова. На основе теории существования для поливыпуклых функционалов для этого вариационного принципа была доказана теорема существования. Впервые было показано, что вариационный метод позволяет получать взаимнооднозначные многомерные квазиизометричные отображения. На основе этого подхода был предложен метод построения расчётных сеток с прецизионным управлением формой, размером и ориентацией ячеек [33, 34]. Этот метод был успешно применён в сложных задачах САПР и машинной геометрии, таких как реконструкция и оптимальная параметризация поверхностей, распластывание сложных поверхностей в задачах штамповки и вычислительной анатомии.

4. Был предложен новый метод решения нелинейных систем алгебраических уравнений и конечномерных вариационных задач [35, 36]. Было показано, что при использовании предо- бусловленных итерационных методов спуска не нужно точно обращать предобуславливатель. Чем больше некая мера нелинейности задачи, тем с большей ошибкой можно решать задачу обращения предобуславливателя. Было показано, как связать меру нелинейности задачи с критерием остановки метода сопряжённых градиентов для внутренних итераций.

5. Были построены быстрые приближённые методы решения СЛАУ с плотными матрицами большой размерности. При этом плотная матрица локально приближается матрицей малого ранга или разрежённой матрицей, что позволяет решать системы с плотными матрицами с сотнями тысяч неизвестных.

Литература

1. *Толстых А. И.* О методе численного решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 3. С. 48-51.
2. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.
3. *Tolstykh A.I.* High accuracy non-centered compact difference schemes for fluid dynamics applications. Singapore: World Scientific, 1994.
4. *Tolstykh A.I, Lipavskii M.V.* On Performance of Methods with Third-and Fifth-Order Compact Upwind Differencing // J. Comput. Phys. 1998. V. 140. P. 205-232.
5. *Савельев А.Д., Толстых А.И.* Численные алгоритмы для течений вязкого газа, основанные на компактных аппроксимациях третьего порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27, № 11. С. 1709-1724.
6. *Савельев А.Д.* Неявный метод расчёта турбулентных течений вязкого сжимаемого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 3. С. 522-533.
7. *Савельев А.Д.* О влиянии задней кромки каверны на интенсивность пульсаций потока. // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 79-89.

8. *Савельев А.Д.* Расчёты течений вязкого газа на основе (q –ν)-модели турбулентности. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43, № 4. С. 591-602.

9. *Толстых А.И., Широбоков Д.А.* О разностных схемах с компактными аппроксимациями пятого порядка для пространственных течений вязкого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36, № 4. С. 71-85.

10. *Гаранжа В.А., Коньшин В.Н.* Численные алгоритмы для течений вязкой несжимаемой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка аппроксимации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39, № 8. С. 1378-1392.

11. *Гаранжа В.А., Толстых А.И.* О численном моделировании нестационарных отрывных течений несжимаемой жидкости на основе компактных аппроксимаций пятого порядка // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312, № 2. С. 311-314.

12. *Tolstykh A.I., Chigerev E.N.* On thin layers numerical simulation // J. Comput. Phys. 2001. V. 166. P. 205-232.

13. *Липавский М.В., Чигерёв Е.Н.* Численное исследование вихревых движений с помощью нецентрированных компактных аппроксимаций. М.: ВЦ РАН, 2004.

14. *Tolstykh A.I.* Multioperator high-order compact upwind methods for CFD parallel calculations // Parallel Computational Fluid Dynamics, Elsevier, Amsterdam (1998). P. 383-390.

15. *Толстых А.И.* Построение схем заданного порядка с линейными комбинациями операторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 8. С. 1206-1220.

16. *Липавский М.В., Толстых А.И.* Мультиоператорные компактные схемы 5-го и 7-го порядков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 7. С. 1018-1034.

17. *Толстых А.И.* Об интегроинтерполяционных схемах заданного порядка и других приложениях мультиоператорного принципа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 11. С. 1712-1726.

18. *Толстых А.И.* Об одном семействе компактных аппроксимаций и основанных на них мультиоператорных аппроксимациях заданного порядка // ДАН. 2005. Т. 403, № 2. С. 172-177.

19. *Липавский М.В.* Пакет арифметики высокой точности QUAD. М.: ВЦ РАН, 2001.

20. *Tolstykh A.I.* On using RBF-based differencing formulas for unstructured and mixed structured- unstructured grid calculations // In Proceedings of 16th IMACS World Congress. Lausanne, 2000.

21. *Tolstykh A.I., Shirobokov D.A.* On using radial basis functions in a "finite difference mode" with applications to elasticity problems // Comput. Mech. 2003. V. 33. P. 68-79.

22. *Толстых А.И., Широбоков Д.А.* Бессеточный метод на основе радиальных базисных функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, № 8. С. 1498-1505.

23. *Стасенко А.Л., Толстых А.И., Широбоков Д.А.* Динамика деформируемых капель у поверхности крыла в вязком воздухе // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 180-189.

24. *Garanzha V.A., Konshin V.N., Lyons S.L., Papavassiliou D.V. and Qin G.* Validation of non-Darcy well models using direct numerical simulation in "Numerical Treatment of Multiphase Flows in Porous Media" / Eds. Chen, Ewing and Shi. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, 2000. V. 552. P. 156-169.

25. *Kaporin I.E.* High quality preconditioning of a general symmetric positive matrix based on its $U^T U + + U^T R + R^T$ U-decomposition // Numerical Linear Algebra Appl. 1998. V. 5. P. 484-509.

26. *Axelsson O. and Kaporin I.* On the sublinear and superlinear rate of convergence of conjugate gradient methods // Numerical Algorithms. 2000. V. 25. P. 1-22.

27. *Kaporin I.E.* Using the Modified 2nd Order Incomplete Cholesky Decomposition as the Conjugate Gradient Preconditioning // Numerical Linear Algebra with Applications. 2002. V. 9. P. 401-408.

28. *Капорин И.Е., Коньшин И.Н.* Параллельное решение симметричных положительно-определённых систем на основе перекрывающегося разбиения на блоки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41, № 4. С. 515-528.

29. *Kaporin I.E., Konshin I.N.* A parallel block overlap preconditioning with inexact submatrix inversion for linear elasticity problems // Numerical Linear Algebra with Applications. 2002. V. 9. P. 141-162.

30. *Гаранжа В.А., Капорин И.Е.* Регуляризация барьерного вариационного метода построения расчётных сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 9. С. 1489-1503.

31. *Гаранжа В.А.* Барьерный метод построения квазиизометричных сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 11. С. 1685-1705.

32. *Гаранжа В.А.* Управление метрическими свойствами пространственных отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 6.

33. *Garanzha V.A.* Variational principles in grid generation and geometric modelling: theoretical justifications and open problems // Numerical Linear Algebra with Applications. 2004. V. 11. № 5, 6. P. 535-564.

34. *Garanzha V.A.* Barrier variational generation of quasi-isometric grids // Numer. Linear Algebra Appls. 2001. V. 8. P. 329-353.

35. *Axelsson O. and Kaporin I.* A survey of Newton type methods for solving nonlinear boundary value problems // Hellenic European Research on Mathematics and Information Science. 2000. V. 1. P. 93-108.

36. *Капорин И.Е.* Использование внутренних итераций метода сопряжённых градиентов при решении больших разрежённых нелинейных задач оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. С. 802-807.