

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОВНИЦЫНА
СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

В.П. КОЗЫРЕВ, А.В. СЕРГЕЕВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ M -КУБА
ОТРЕЗКАМИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОВНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МОСКВА 2008

УДК 519.86

Ответственный редактор
канд. физ. - матем. наук *М.Г. Фуругян*

Рассматривается задача о представлении n -куба отрезками и ломаными (без самопересечений) в k -мерном евклидовом пространстве D^k . Установлено, что 3- и 4-куб имеют представление отрезками с вершинами в точках с целочисленными координатами в D^2 . Доказано, что 5- и 6-куб имеют представление отрезками с вершинами в точках с целочисленными координатами в D^3 . Для всех n изучен вопрос о минимальной размерности евклидова пространства, в котором n -куб имеет представление отрезками. Установлено, что n -куб для $n \geq 1$ имеет представление ломаными в D^3 . Для этого представления дана оценка на число звеньев ломаных. Доказана возможность представления произвольного графа без петель и кратных ребер системой отрезков в D^3 , отвечающих ребрам графа.

Ключевые слова: n -мерный куб, единичный куб, граф пересечений, представление отрезками, представление ломаными.

Рецензенты:

И.Х. Сигал,
А.А. Сапоженко

Научное издание

© Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Российской академии наук, 2008

1. Введение

В работе рассматривается задача представления графов n -мерных единичных кубов Q_n ломаными и отрезками в k -мерном евклидовом пространстве D^k для разных значений k и n . Основным вопросом является нахождение наименьшей размерности евклидова пространства, в котором для данного n граф единичного куба имеет представление отрезками. Граф n -мерного единичного куба в дальнейшем будем сокращенно называть n -кубом.

Пусть S – множество, а $F = \{S_1, \dots, S_p\}$ – семейство его различных непустых подмножеств, объединение которых дает S . Граф пересечений семейства F – обозначается $\Omega(F)$ – определяется множеством $V(\Omega(F)) = F$ и тем условием, что S_i и S_j смежны тогда и только тогда, когда $i \neq j$ и $S_i \cap S_j \neq \emptyset$. Граф G называется графом пересечений на множестве S , если существует семейство F подмножеств из S , для которого $G \cong \Omega(F)$.

Известно [1], что любой простой (без петель и кратных ребер) граф есть граф пересечений. Суть подмножеств S_i играет важное значение. Так, например, проблема распознавания графа пересечений замкнутых кривых на плоскости является NP-трудной [2], в то время как аналогичная задача для интервальных графов (граф интервалов – изоморфный некоторому $\Omega(F)$ граф, где F – семейство интервалов действительной оси) имеет линейный алгоритм. Из результатов, относящихся к исследованиям графов пересечений отрезков и кривых, следует отметить необходимое [3] и эффективное достаточное [4] условия принадлежности графа к классу графов пересечений кривых на плоскости, необходимые условия принадлежности графа классу графов пересечений отрезков [5], а также результаты по нахождению графов, не имеющих представления кривыми на плоскости [6]. Широкий обзор результатов для различных представлений графов и сетей можно найти в [7].

Множества S_i принимают конкретные интерпретации в социологии, экономике, археологии и др. Вопросы, связанные с представлением принципиальных электронных схем отрезками и ломаными имеют прямое отношение к задачам компоновки СБИС. Задачи, непосредственно связанные с графами пересечений отрезков, находят применение в таких вопросах, как, например, расшифровка генетических текстов. А близкие исследуемым в данной работе понятия ящечности и кубичности используются в экологии [8,9] и социологии [10].

В данной работе рассмотрен вопрос о представлении n -куба отрезками и ломаными (без самопересечений) в k -мерном евклидовом пространстве D^k . Основная задача – найти минимальную размерность евклидова пространства, в котором n -куб можно представить отрезками. Приводится представление 3- и 4-куба отрезками на плоскости, 5- и 6-куба отрезками в пространстве D^3 . Во всех приводимых представлениях вершины отрезков имеют целочисленные координаты. Доказано, что для $n \geq 5$ n -куб не имеет представления отрезками на плоскости. Установлено, что n -куб имеет представление отрезками в D^{n-3} для $n \geq 6$. В силу последних двух фактов минимальной размерностью евклидова пространства D^k , в котором 5- и 6-куб имеют представление отрезками, является $k = 3$. Показано, что любой n -куб имеет представление ломаными без самопересечений в D^3 , для которых

оценено число звеньев. Наконец доказана возможность представления произвольного графа без петель и кратных ребер системой отрезков в D^3 , представляющих ребра графа. Ранее было известно (теорема Фари [11]), что любой плоский граф имеет также представление в D^2 .

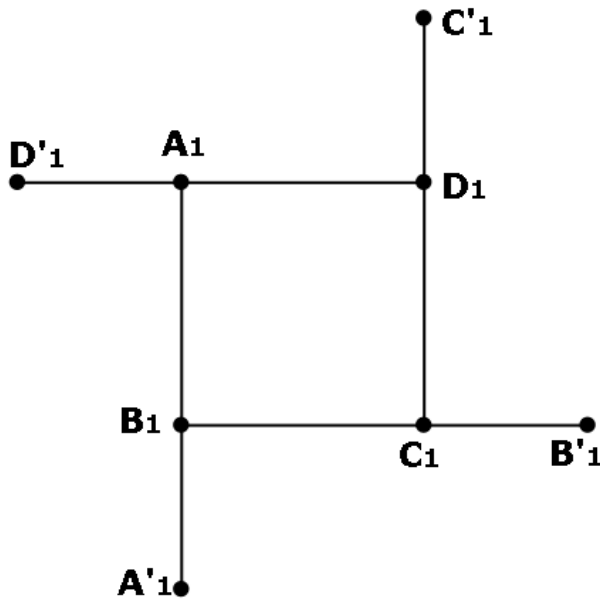
2. Основные определения и обозначения

Определение. Пусть множеством точек $T = \{\tilde{\alpha}_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n})\}$, $i = 1, \dots, 2^n$, определен n -мерный единичный куб. Граф n -мерного единичного куба (кратко – n -куб) – обозначается Q_n – определяется множеством $V(Q_n) = T$ и условием, что две вершины $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j \in V$ смежны тогда и только тогда, когда $i \neq j$, и расстояние Хэмминга между ними $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) = 1$. Если $n = 0$, то Q_0 – точка.

Представление графа отрезками. Пусть Q_n – n -куб. Тогда каждой вершине $\tilde{\alpha}_i \in V(Q_n)$ сопоставим отрезок $[a_i, b_i] = I_i$ евклидова пространства D^k , причем для любых i и j отрезки I_i и I_j пересекаются тогда и только тогда, когда $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) = 1$. Совокупность всех отрезков I_i называется представлением графа Q_n отрезками в D^k и обозначается $F(Q_n)$. Очевидно, что, если n -куб имеет представление $F(Q_n)$, то Q_n есть граф пересечений отрезков в D^k .

Представление графа ломаными. Сопоставим каждой вершине n -куба $\tilde{\alpha}_i \in V(Q_n)$ некоторую ломаную b_i без самопересечений в евклидовом пространстве D^k , причем для любых i и j ломаные b_i и b_j пересекаются тогда и только тогда, когда $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) = 1$. Совокупность всех ломаных b_i называется представлением графа n -куба ломаными в D^k и обозначается $B(Q_n)$. Очевидно, что, если n -куб имеет представление $B(Q_n)$, то Q_n есть граф пересечений ломаных в D^k .

Определение. Обозначим через $P(r, a)$ карту, изображенную на рис. 1, где $A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1, D_1D'_1$ – отрезки, для которых $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = a$, $A_1D'_1 = B_1A'_1 = C_1B'_1 = D_1C'_1 = r$ ($r \geq a$ или $r < a$), а отрезки $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ образуют квадрат.



Пусть точкам $\tilde{\alpha}_i \in V(Q_n)$ ставятся в соответствие отрезки l_i . При построении представления $F(Q_n)$ обязательно выполнение условия: $l_i \cap l_j \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) = 1$. Если в процессе построения $F(Q_n)$ возникают точки пересечения отрезков l_i и l_j , такие что $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) \neq 1$, то эти точки объявляются запрещенными. Запрещенные точки будут использоваться при переходе от построения представления $F(Q_n)$ к представлению $B(Q_n)$. В связи с введением запрещенных точек определим по аналогии с представлением графа отрезками его представление отрезками с запрещенными точками.

Представление графа отрезками с запрещенными точками.

Пусть Q_n – n -куб, каждой вершине которого $\tilde{\alpha}_i \in V(Q_n)$ сопоставим отрезок $[a_i, b_i] = l_i$ евклидова пространства D^k , причем для любых i и j отрезки l_i и l_j пересекаются в незапрещенной точке тогда и только тогда, когда $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) = 1$. Совокупность всех отрезков l_i называется представлением графа Q_n отрезками с запрещенными точками в D^k и обозначается $F^*(Q_n)$.

Определение. Точка $M^*(y_1, \dots, y_m, \dots, y_n)$ евклидова пространства D^n называется проекцией по m -ой координате (далее m -проекцией) ($1 \leq m \leq n$) точки $M(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n)$ того же евклидова пространства, если $y_m = 0$, а $y_i = x_i$ для $i = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, n$.

Базовые термины теории графов, используемые в данной работе, можно найти в [1].

3. Представления n -куба отрезками в D^{n-3}

Будем строить для n -куба его представление отрезками в D^{n-3} . Для того, чтобы получить конечный результат пойдем следующим путем. Сперва опишем некоторый алгоритм построения определенной системы отрезков в D^k . Затем докажем, что система получаемых таким образом отрезков на каждом шаге алгоритма есть $F(Q_n)$ в D^{n+1} для $n \geq 0$. Используя этот факт, немного модифицировав его доказательство, получим конечный результат.

Итак, опишем вспомогательный алгоритм \mathfrak{R} построения системы отрезков в D^k для $k \geq 1$. Далее докажем, что система отрезков, которая строится на $(k+1)$ -м шаге алгоритма \mathfrak{R} , является представлением $F(Q_k)$ в D^{k+1} .

Алгоритм \mathfrak{R} построения системы отрезков в D^k .

Будем строить систему отрезков в D^k индукцией по k .

Базис индукции. Шаг 1.

Базисной системой отрезков возьмем ту, что показана на рис. 2а: имеем один отрезок в D^1 с вершинами, помеченными "0" и "1". Пометки "0" и "1" не имеют никакого отношения к двоичной нумерации, а просто пометки как, например, "А" и "В". Точки 0 и 1 имеют координаты $1(0)$ и $0(b_0)$. По сути это есть $F(Q_0)$. Отрезок на рис.2а можно интерпретировать как $F(Q_0)$.

Предположение индукции.

Пусть уже построена система отрезков в $(k+1)$ -мерном евклидовом пространстве.

Пусть в этой системе 2^k вершин помечены "0" и 2^k вершин имеют пометки "1" и других вершин нет. Кроме того, пусть вершины с пометками "0" и "1" имеют координаты $0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_k^i)$ и $1(x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i)$, где $y_0^i = b_0 \neq 0$, а $x_0^i = 0$, $i = 1, \dots, 2^k$.

Шаг индукции. Шаг $k+1$.

Перейдем в D^{k+2} . Пусть прежние точки $0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_k^i)$ и $1(x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i)$ получат в D^{k+2} координаты $0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_k^i, 0)$ и $1(x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i, 0)$, $i = 1, \dots, 2^k$. Для $i = 1, \dots, 2^k$ возьмем в D^{k+2} точки $0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_k^i, b_{k+1})$ и $1(x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i, a_{k+1})$, причем

$|a_{k+1}| \neq |b_{k+1}|$, $a_{k+1} > 0$, $b_{k+1} < 0$. При этом $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, и $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$.

В пространстве D^{k+2} точки $1(x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i, 0)$ и $0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_k^i, 0)$ будут соединены, если и только если в пространстве D^{k+1} были соединены точки с теми же координатами, кроме последней, $1(x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i)$ и $0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_k^i)$ (здесь $x_{k+1}^i = a_{k+1}$, а $y_{k+1}^i = b_{k+1}$ для всех i). Во множестве вновь полученных точек в D^{k+2} соединим две $1(x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i, x_{k+1}^i)$ и $0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_k^i, y_{k+1}^i)$ в том и только том случае, если соединены точки $1(x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i, 0)$ и $0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_k^i, 0)$.

Иначе это можно формализовать еще так. Соединим для всех $i = 1, \dots, 2^{k+1}$ точки $1(x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i, x_{k+1}^i)$ и $0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_k^i, y_{k+1}^i)$ в том и только том случае, если при замене в

координатах этих точек всех a_j и b_j ($j=1, \dots, k+1$) на 1, справедливо $\rho((y_1^i, \dots, y_k^i, y_{k+1}^i), (x_1^i, \dots, x_k^i, x_{k+1}^i)) = 0$, где ρ – расстояние Хэмминга. Шаг индукции завершен. Алгоритм \mathfrak{X} полностью описан.

Для наглядности проиллюстрируем первые шаги работы алгоритма \mathfrak{X} . На рисунке 2 а, 2 б и 2 в показаны построенные согласно \mathfrak{X} системы отрезков для $k = 1, 2, 3$.

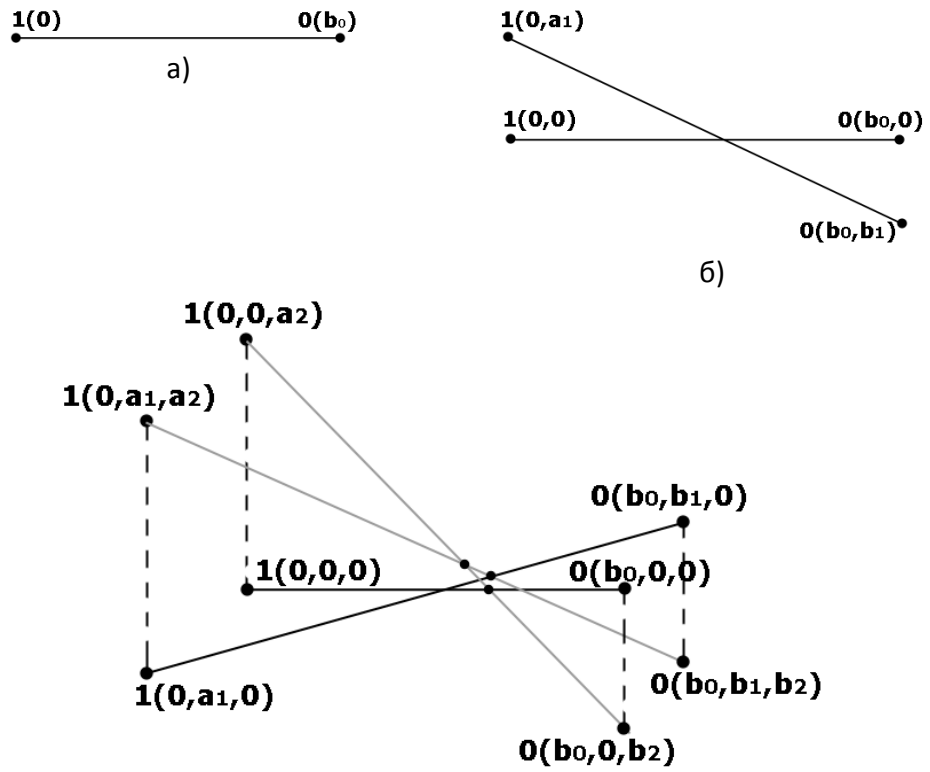
Лемма 1. Если $M^*(y_1^1, \dots, y_m^1, \dots, y_n^1)$ и $N^*(y_1^2, \dots, y_m^2, \dots, y_n^2)$ – m -проекции точек $M(x_1^1, \dots, x_m^1, \dots, x_n^1)$ и $N(x_1^2, \dots, x_m^2, \dots, x_n^2)$ евклидова пространства D^n , то m -проекция любой точки $Z(z_1, \dots, z_n)$ отрезка MN лежит на отрезке M^*N^* .

Доказательство этого утверждения несложно найти в учебниках по аналитической геометрии, оно является достаточно типовым, поэтому опустим его.

Лемма 2. Пусть в результате работы алгоритма \mathfrak{X} в D^{k+1} получены точки $A_1(a_1^1, \dots, a_k^1, 0)$, $B_1(b_1^1, \dots, b_k^1, 0)$, $A_2(a_1^2, \dots, a_k^2, 0)$, $B_2(b_1^2, \dots, b_k^2, 0)$, а отрезки $[A_1, B_1]$ и $[A_2, B_2]$ пересекаются. Пусть взяты также точки $A'_1(a_1^1, \dots, a_k^1, a_{k+1}^1)$, $B'_1(b_1^1, \dots, b_k^1, b_{k+1}^1)$,

$A'_2(a_1^2, \dots, a_k^2, a_{k+1}^2)$, $B'_2(b_1^2, \dots, b_k^2, b_{k+1}^2)$, причем 1) $a_{k+1}^1 = a_{k+1}^2$; 2) $b_{k+1}^1 = b_{k+1}^2$; 3) $a_{k+1}^1 > 0$, $b_{k+1}^1 < 0$. Тогда отрезки $A'_1A'_2$ и $B'_1B'_2$ параллельны и $A'_1B'_1$ и $A'_2B'_2$ имеют пересечение в D^{k+1} .

Доказательство. Чтобы доказать, что отрезки $A'_1B'_1$ и $A'_2B'_2$ пересекаются (рис. 3) нужно показать, что они лежат в одной плоскости (то, что отрезки не параллельны, очевидно). Известно, что $\vec{a}(a_1, \dots, a_w) \parallel \vec{b}(b_1, \dots, b_w) \Leftrightarrow \exists m : a_i = m \cdot b_i \quad \forall i = 1, \dots, w$. Докажем, что для векторов $\vec{A'_1A'_2}$ и $\vec{B'_2B'_1}$ существует такое число m . Для размерности $k = 2$ утверждение леммы очевидно. Пусть оно справедливо для некоторого k , покажем его справедливость для $k + 1$. В силу предположения индукции и алгоритма \mathfrak{X} отрезки A_1A_2 и B_1B_2 параллельны в D^k . Значит, $\exists m : a_i = b_i$ для $i = 1, \dots, k$, где a_i и b_i – координаты соответственно векторов $\vec{A_1A_2}$ и $\vec{B_1B_2}$. Координаты точек A'_1 и A'_2 , так же как и координаты точек B'_1 и B'_2 , в силу построения совпадают по $(k + 1)$ -й координате. Следовательно, $a_{k+1} = a_{k+1}^1 - a_{k+1}^2 = 0 = b_{k+1}^1 - b_{k+1}^2 = b_{k+1}$ (a_{k+1} и b_{k+1} – последние координаты векторов $\vec{A'_1A'_2}$ и $\vec{B'_1B'_2}$). Кроме того, заметим, что по построению координаты точек A_1 и A'_1 , A_2 и A'_2 , B_1 и B'_1 , B_2 и B'_2 совпадают с точностью до $(k + 1)$ -й координаты. Следовательно, координаты векторов $\vec{A'_1A'_2}$ и $\vec{B'_1B'_2}$ имеют следующий вид: $\vec{A'_1A'_2}(a_1, a_2, \dots, a_k, 0)$, $\vec{B'_1B'_2}(m \cdot a_1, m \cdot a_2, \dots, m \cdot a_k, 0)$. Таким образом, очевидно, $b_i = m \cdot a_i, i = 1, \dots, k + 1$. Следовательно, $\vec{A'_1A'_2} \parallel \vec{B'_1B'_2}$ и $A'_1A'_2 \parallel B'_1B'_2$. Лемма доказана. +



в)
Рис. 2.

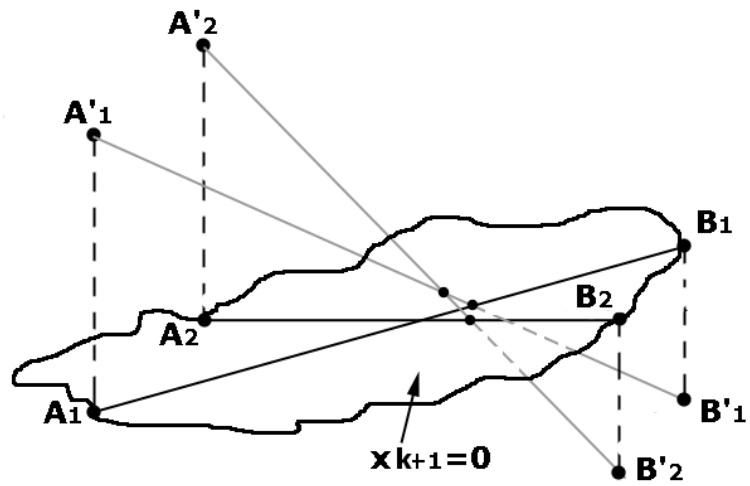


Рис. 3

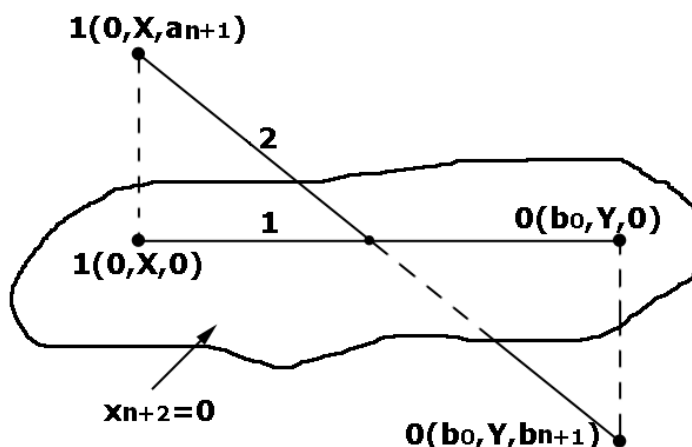


Рис. 4.

Лемма 3. Для всех $n \geq 0$ на $(n+1)$ -м шаге алгоритма \mathfrak{X} получаем $F(Q_n)$.

Доказательство проведем индукцией по n .

Базис индукции. Для $n=0$ доказательство очевидно, так как система отрезков, представленная на рис. 2 а, является $F(Q_0)$.

Предположение индукции.

Пусть для $(n+1)$ -го шага алгоритма \mathfrak{X} утверждение доказано, т.е. система отрезков, построенная алгоритмом \mathfrak{X} на $(n+1)$ -м шаге, является $F(Q_n)$ в D^{n+1} .

Шаг индукции.

Докажем, что на $(n+2)$ -м шаге алгоритма \mathfrak{X} будет построено представление $F(Q_{n+1})$ в D^{n+2} . Для этого нужно показать, что вновь построенные при переходе в D^{n+2} отрезки пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются их проекции на D^{n+1} ; показать, что каждый из этих отрезков пересекается со своим отрезком--проекцией на D^{n+1} и что никаких других пересечений в полученной системе отрезков нет.

Покажем, что после $(n+2)$ -го шага работы алгоритма \mathfrak{X} отрезок $\{1(0, x_1^i, \dots, x_n^i, a_{n+1}); 0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_n^i, b_{n+1})\}$ пересекает отрезок $\{1(0, x_1^i, \dots, x_n^i, 0); 0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_n^i, 0)\}$ (рис. 4).

Отрезок $\{1(0, x_1^i, \dots, x_n^i, 0); 0(y_0^i, y_1^i, \dots, y_n^i, 0)\}$ (далее – отрезок 1) – $(n+2)$ -проекция отрезка (далее – отрезок 2)

$\{1(0, x_1^i, \dots, x_n^i, a_{n+1}); 0(b_0, y_1^i, \dots, y_n^i, b_{n+1})\}$. Так как $a_{n+1} > 0$, а $b_{n+1} < 0$, то на

отрезке 2 найдется точка $X(x_{n+1}, x_{n+2})$, где $x_{n+2} = 0$. На отрезке 1 в силу леммы 1 найдется

точка X^* – $(n+2)$ -проекция точки X . Очевидно, что X^* имеет координаты $X^*(x_{n+1}, 0)$.

Следовательно, точки X и X^* совпадают, а значит, отрезки 1 и 2 пересекаются.

Таким образом, каждый отрезок 2, порожденный в результате работы алгоритма \mathfrak{X} очередным переходом в пространство большей размерности (в частности D^{n+2}), будет

пересекать один (соответствующий ему) отрезок 1.

Покажем, что отрезок 2, построенный на $(n+2)$ -м шаге, не пересекает ни одного из отрезков, пересекающих соответствующий отрезок 1.

Заметим, что до $(n+2)$ -го шага на отрезке 1 уже имеется n точек пересечения с другими отрезками (следует из предположения индукции). i -я такая точка пересечения, легко видеть, в силу устройства алгоритма \mathfrak{X} делит отрезок 1 в отношении $a_i : b_i$, считая от вершины с пометкой 1. Но a_i и b_i все различны. Следовательно, точка пересечения построенного на $(n+2)$ -м шаге отрезка 2 не совпадает ни с одной из других, уже имеющих на отрезке 1, точек пересечений, а других точек пересечения быть не может. Значит построенный на $(n+2)$ -м шаге отрезок 2 действительно не пересекает ни один из отрезков, которые пересекают 1. Это в свою очередь означает, что отрезок 2 не пересекает вообще ни одного отрезка, вершины которого имеют в D^{n+2} нулевое значение по последней координате, кроме соответствующего ему 1 (то есть те отрезки, которые были построены до $n+2$ шага алгоритма \mathfrak{X}).

Осталось доказать, что отрезки 2, порожденные на $(n+2)$ -м шаге, пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются соответствующие им отрезки 1.

Докажем, что, если отрезки 1 не пересекаются, то не пересекаются и отрезки 2. Пусть это не так и отрезки 2 имеют точку пересечения $M^*(x_{n+1}, x_{n+2})$. Это значит, что в силу

леммы 1 на обоих отрезках 1 найдутся точки $M(x_{n+1}, 0)$. Но эта точка принадлежит сразу обоим отрезкам 1, что противоречит исходному предположению. Следовательно, отрезки 2, соответствующие непересекающимся отрезкам 1, не пересекаются.

Осталось показать, что, если отрезки 1 пересекаются, то и соответствующие им отрезки 2, построенные по алгоритму \mathfrak{X} , тоже пересекаются. А это уже было показано в лемме 2. Таким образом, лемма 3 полностью доказана. \dagger

Следовательно верна

Теорема 1. Для любого $n \geq 0$ n -куб Q_n имеет представление отрезками в D^{n+1} .

Следствие. Для любого $n \geq 6$ n -куб Q_n имеет представление отрезками в D^{n-3} . Для $n = 5$ и $n = 4, 3$ n -куб имеет представление отрезками в D^3 и D^2 соответственно.

Доказательство. Для доказательства того, что для Q_n при $n = 5$ и $n = 4, 3$ существуют представления отрезками в D^3 и D^2 соответственно, приведем эти представления $F(Q_n)$.

Поставим каждой вершине α_i n -куба в соответствие отрезок l_{α_i} в D^k , $i = 1, \dots, 2^n$

Причем отрезки l_{α_i} и l_{α_j} пересекаются тогда и только тогда, когда $\rho(\alpha_i, \alpha_j) = 1$.

Рассмотрим случай $n = 3$. Поставим каждой вершине α_i

3-куба в соответствие отрезок l_{α_i} в D^2 , $i=1,\dots,2^3$. Причем выберем отрезки

следующим образом:

$$l_0 = \{(0,1);(2,0)\},$$

$$l_1 = \{(2,0);(0,-1)\},$$

$$l_{11} = \{(0,-1);(-2,0)\},$$

$$l_{10} = \{(-2,0);(0,1)\},$$

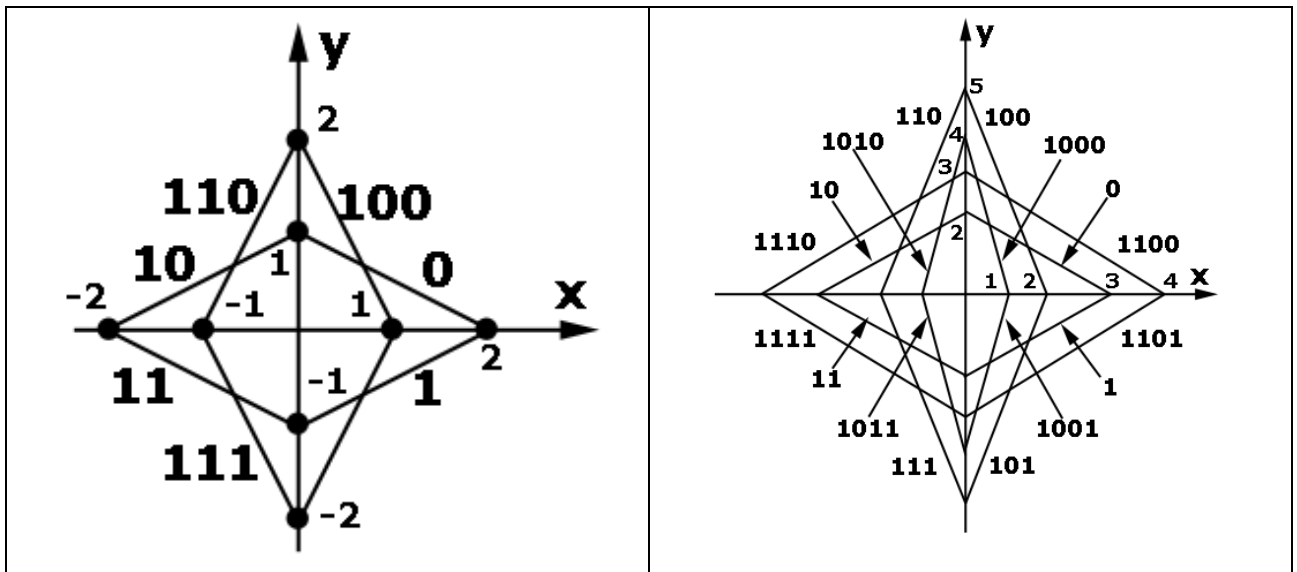
$$l_{100} = \{(0,2);(1,0)\},$$

$$l_{101} = \{(1,0);(0,-2)\},$$

$$l_{111} = \{(0,-2);(-1,0)\},$$

$$l_{110} = \{(-1,0);(0,2)\}.$$

Легко убедиться, что система этих отрезков является представлением $F(Q_3)$ в D^2 , – обратиться к рис. 5 (отрезки l_i на нем обозначены просто значением индекса i в двоичном представлении).



Приведем аналогичную систему отрезков в D^2 для Q_4 . Для

4-куба это будут отрезки (отметим, что такое представление не является единственным):

$$l_0 = \{(0,2);(3,0)\}, l_1 = \{(3,0);(0,-2)\}, l_{11} = \{(0,-2);(-3,0)\}, l_{10} = \{(-3,0);(0,2)\},$$

$$l_{100} = \{(0,5);(2,0)\}, l_{101} = \{(2,0);(0,-5)\}, l_{111} = \{(0,-5);(-2,0)\}, l_{110} = \{(-2,0);(0,5)\},$$

$$l_{1000} = \{(0,4);(1,0)\}, l_{1001} = \{(1,0);(0,-4)\},$$

$$l_{1011} = \{(0,-4);(-1,0)\}, l_{1010} = \{(-1,0);(0,4)\},$$

$$l_{1100} = \{(0,3);(4,0)\}, l_{1101} = \{(4,0);(0,-3)\},$$

$$I_{1111} = \{(0,-3);(-4,0)\}, I_{1110} = \{(-4,0);(0,3)\}.$$

В том, что система приведенных отрезков в D^2 представляет собой $F(Q_4)$, легко убедиться, воспользовавшись рис. 6.

Теперь построим представление $F(Q_5)$ в D^3 . Пусть в D^2 уже имеется $F(Q_4)$, приведенное выше. Каждую вершину отрезков $F(Q_4)$ обозначим V_{10} , если ее координата по оси ординат равна нулю, то есть $V_{10}(x,0)$, и обозначим вершину V_{01} , если нулю равна абсцисса этой точки, то есть $V_{01}(0,y)$. Каждой точке $V_{10}(x,0)$ и $V_{01}(0,y)$ из D^2 поставим в однозначное соответствие точки $V_{100}(x,0,0)$ и $V_{010}(0,y,0)$ в D^3 соответственно. Соединим $V_{100}(x,0,0)$ и $V_{010}(0,y,0)$, если и только если в $F(Q_4)$ соединены точки $V_{10}(x,0)$ и $V_{01}(0,y)$. Каждым $V_{100}(x,0,0)$ и $V_{010}(0,y,0)$ в D^3 ставим в однозначное соответствие точки $V_{100}^+(x,0,z)$, где $z > 0$, и $V_{010}^-(0,y,z)$, где $z < 0$. Соединим $V_{100}^+(x,0,z)$ и $V_{010}^-(0,y,z)$, если и только если соединены соответствующие точки $V_{100}(x,0,0)$ и $V_{010}(0,y,0)$.

Таким образом, поставим каждой вершине $V(x,y)$ отрезка из $F(Q_4)$ в соответствие точку $V(x,y,0)$ в D^3 . Получим точки с координатами:

$$(0,2,0), (3,0,0), (0,-2,0), (-3,0,0); (0,3,0), (4,0,0), (0,-3,0), (-4,0,0); \\ (0,4,0), (1,0,0), (0,-4,0), (-1,0,0); (0,5,0), (2,0,0), (0,-5,0), (-2,0,0).$$

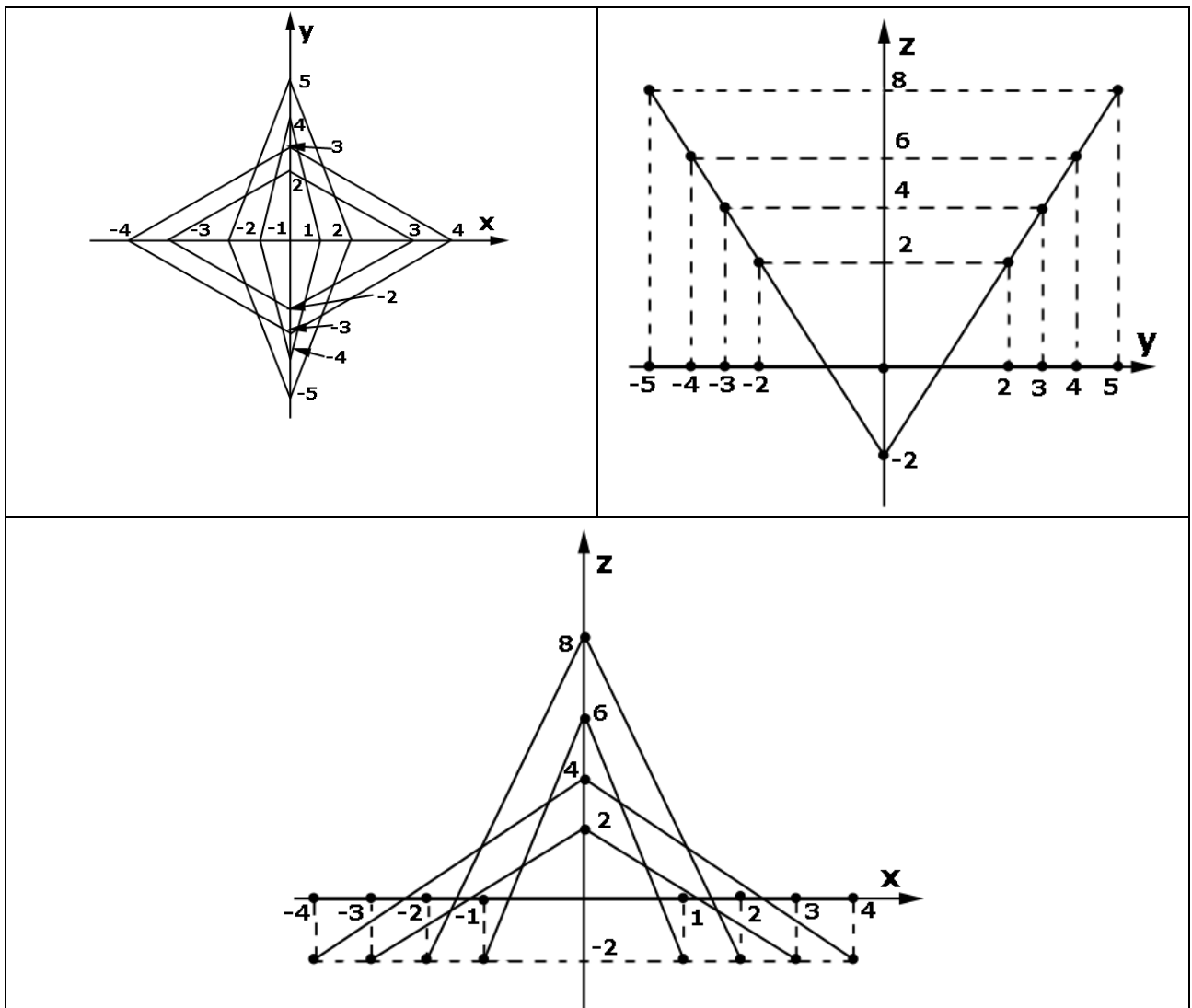
Этим точкам однозначно сопоставим соответственно точки со следующими координатами:

$$(0,2,2), (3,0,-2), (0,-2,2), (-3,0,-2); (0,3,4), (4,0,-2), (0,-3,4), (-4,0,-2); \\ (0,4,6), (1,0,-2), (0,-4,6), (-1,0,-2); (0,5,8), (2,0,-2), (0,-5,8), (-2,0,-2).$$

Соединим все перечисленные точки по правилам, описанным выше. Если один из полученных отрезков имеет своей проекцией на плоскость xu отрезок I_{α} , принадлежащий

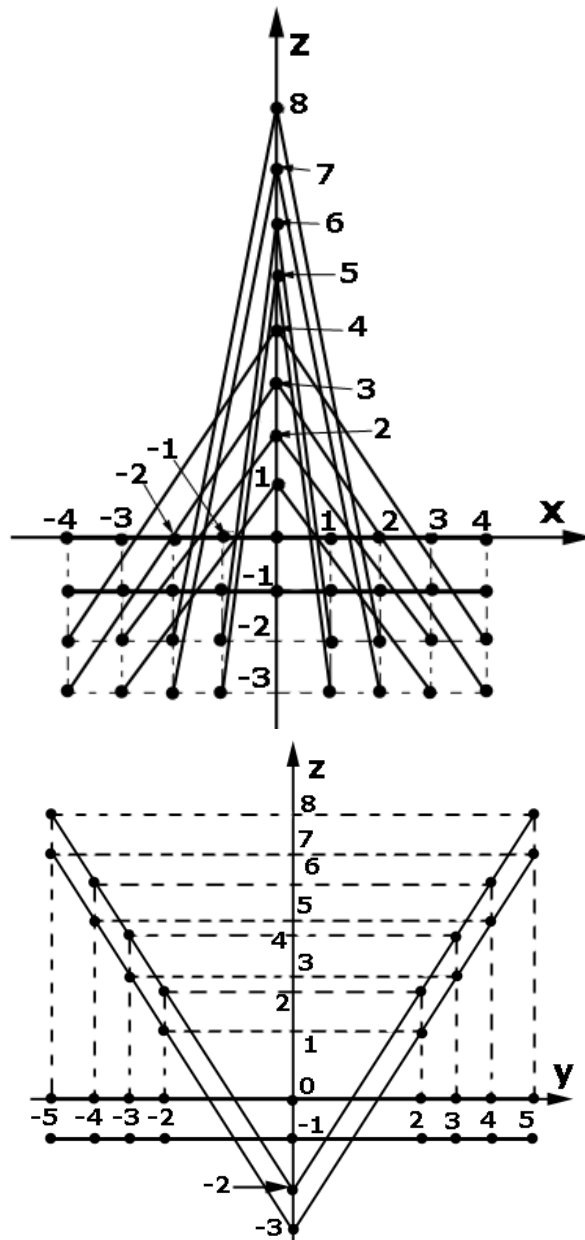
$F(Q_4)$, то пометим его как I_{β} , причем $\rho(\alpha, \beta) = 1$, и первый символ в β является единицей.

Полученная система отрезков представляет собой $F(Q_5)$. Для наглядности приведем проекции $F(Q_5)$ на плоскости xu , xz и uz (рис.7).



Наконец опишем получение представления $F(Q_6)$ в D^3 . Для этого все отрезки, составляющие уже полученное представление $F(Q_5)$, перенесем параллельно на вектор $\vec{a}(0,0,-1)$. Полученная система отрезков в совокупности с составляющими представление $F(Q_5)$ при аналогичном случае для 5-куба именовании отрезков будет представлением $F(Q_6)$. Для наглядности воспользуемся проекциями на три плоскости (рис. 8, 9). Проекция на плоскость xu будет иметь тот же вид, что и на рис. 7, поэтому она не приводится.

(20,340)em:graph zx6.bmp,11cm,10cm



Легко, используя уравнения прямых на плоскости, проверяется, что в приведенных представлениях $F(Q_5)$ и $F(Q_6)$ не возникает ошибочных пересечений отрезков, т.е. пересекаются лишь отрезки l_{α}^{\square} и l_{β}^{\square} , для которых $\rho(\alpha, \beta) = 1$.

Таким образом, показано, что для Q_6 существует представление отрезками $F(Q_6)$ в D^3 . Следовательно, если вместо системы отрезков, изображенной на рис. 2 а, в качестве базиса в лемме 3 взять $F(Q_6)$ в D^3 , то, очевидно, в ходе аналогичных рассуждений получим, что Q_n имеет представление отрезками в D^{n-3} , $n \geq 6$.

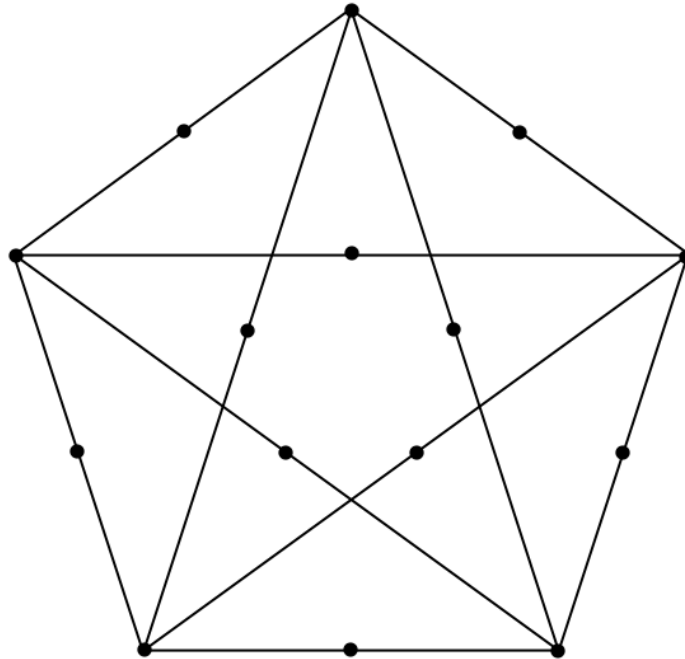
Рассмотрим теперь вопрос минимальности размерности евклидова пространства, в котором n -куб имеет представление отрезками.

Теорема 2. Пусть $\mu(n) = \min_{F(Q_n) \in D^k} k$ – минимальная из возможных размерностей D^k , в

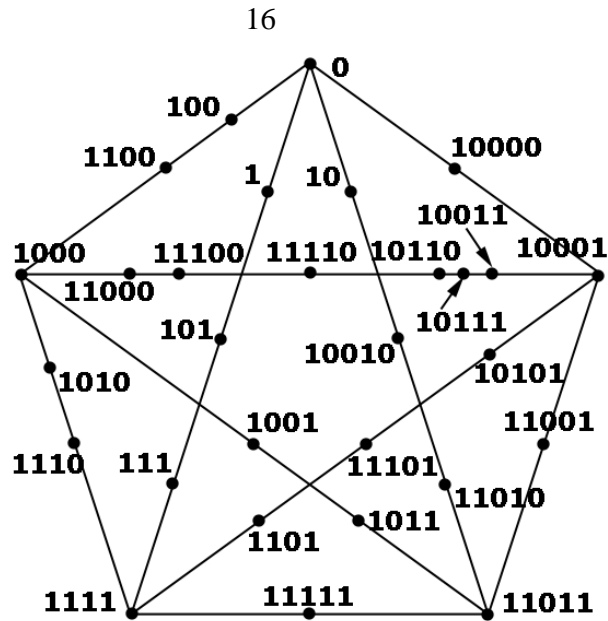
котором существует представление $F(Q_n)$. Тогда $3 \leq \mu(n) \leq n - 3$, при $n \geq 6$, причем $\mu(5) = \mu(6) = 3$.

Доказательство. В силу следствия из теоремы 1 сразу получаем неравенство $\mu(n) \leq n - 3$. 5- и 6-куб имеют по теореме 1 представление $F(Q_n)$ в D^3 . Так как 5-куб является подграфом для любого n -куба при $n \geq 5$, то для того, чтобы полностью доказать теорему, достаточно показать, что $\mu(5) = 3$. Иначе говоря, достаточно показать, что 5-куб не имеет представления отрезками в D^2 .

Известно [12], что полный подразбитый граф K_5 (рис. 10) не имеет представления отрезками в D^2 .



Если покажем, что 5-куб содержит своим подграфом граф, гомеоморфный подразбитому полному графу K_5 , то тем самым будет доказано, что 5-куб не имеет представления $F(Q_5)$ в D^2 . Ниже на рис. 11 представлен подграф 5-куба, гомеоморфный графу, представленному на рис. 10.



Таким образом, теорему 2 можно считать полностью доказанной. +

4. Представления n -куба ломаными в D^3

Докажем, что каждый n -куб имеет представление ломаными без самопересечений в D^3 , и оценим число звеньев ломаных представления $V(Q_n)$. Под совмещением карт P_i далее понимается их определяемое контекстом взаимное расположение в пространстве D^k .

Лемма 4. В результате совмещения в D^2 $h = 2^{n-2}$ карт $P_i = P(r_i, a_i)$, $i = 1, \dots, h$, можно получить представление $F^*(Q_n)$ для каждого n .

Доказательство. проведем индукцией по n .

Базис индукции. Легко видеть, что карта $P(r, a)$ (рис. 1) является представлением $F(Q_2)$, а также одновременно и представлением $F^*(Q_2)$. Значит, $h = 2^{2-2} = 1$. Число карт P_i , использованных при построении $F^*(Q_2)$, равно единице (собственно карта P). Следовательно, базис индукции обоснован.

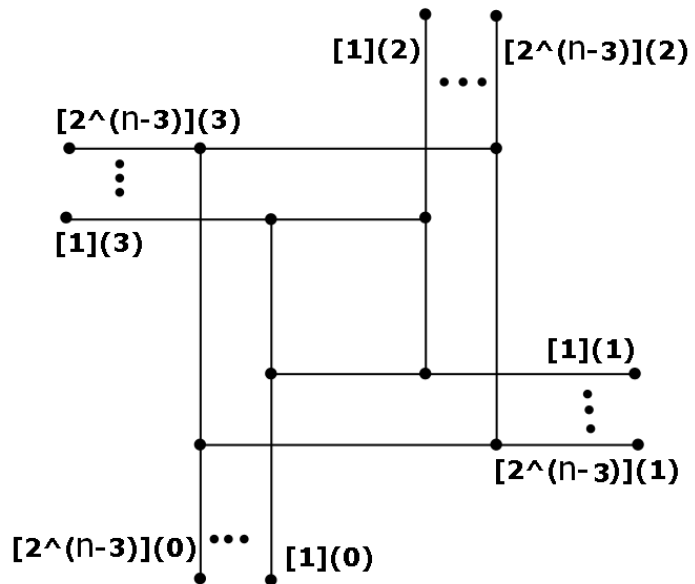
Предположение индукции. Пусть для $(n-1)$ -куба в результате совмещения $h = 2^{n-3}$ карт P_i в D^2 построено представление $F^*(Q_{n-1})$. На рис. 12 изображены 2^{n-3} совмещенные карты P_i . Отрезки обозначены двумя значениями: в квадратных скобках – порядковый номер карты P_i , которому он принадлежит, в круглых скобках – порядковый номер отрезка в карте P_i .

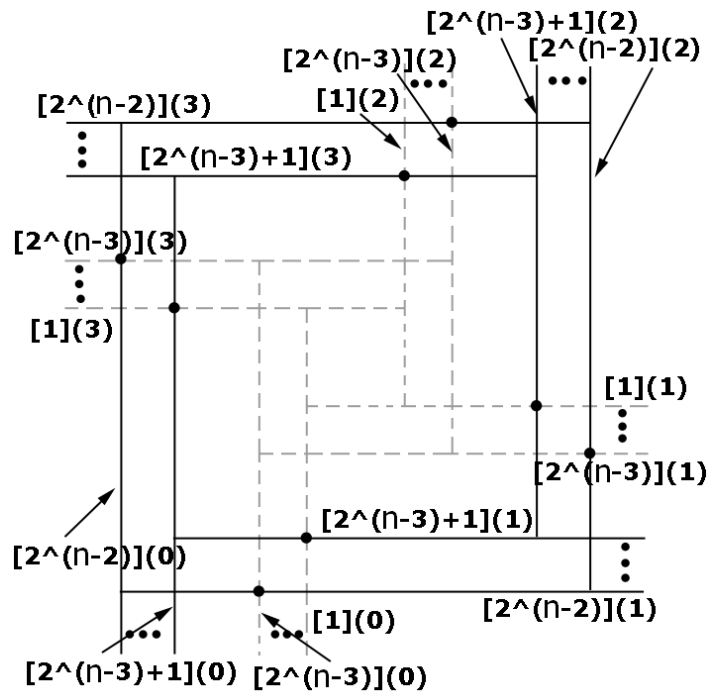
Шаг индукции. Покажем, что для n -куба утверждение леммы также справедливо. По предположению индукции имеем представление $F^*(Q_{n-1})$. Возьмем вторую аналогичную изображенной на рис. 12 совокупность карт $P_i - F^*(Q_{n-1})$ и опишем ее вокруг $F^*(Q_{n-1})$,

как показано на рис. 13 (пунктиром выделено исходное представление $F^*(Q_{n-1})$). Все возникшие точки пересечения отрезков из $F'^*(Q_{n-1})$ и $F^*(Q_{n-1})$, кроме тех, которые образовались в результате пересечения отрезков одинаковых порядковых номеров в соответствующих картах P_i , запрещенные. Полученную систему отрезков, состоящую из отрезков $F'^*(Q_{n-1})$ и $F^*(Q_{n-1})$ с указанными запрещенными точками, обозначим $F^{**}(Q_{n-1})$.

Легко видеть, что $F^{**}(Q_{n-1})$ есть представление $F^*(Q_n)$. Так как число карт P_i в $F^*(Q_{n-1})$ и $F'^*(Q_{n-1})$ по предположению индукции равно 2^{n-3} , то число использованных карт P_i для $F^{**}(Q_{n-1})$ равно $2 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-2}$. Шаг индукции завершен.

Лемма полностью доказана. †





Замечание. Число a_n запрещенных точек в $F^*(Q_n)$ для $n \geq 4$ определяется из соотношения $a_n = 2^{n-1} \cdot (2^{n-2} + 1 - n)$.

Доказательство. Очевидно, что число запрещенных точек a_n каждого отрезка в $F^*(Q_n)$ одинаково. Всего точек пересечения отрезка $[i][j]$ с другими отрезками из $F^*(Q_n)$ равно $2^{n-2} + 1$. Так как $F^*(Q_n)$ – представление отрезками с запрещенными точками для n -куба, то число незапрещенных точек равно n . Таким образом, число запрещенных точек на любом отрезке $[i][j]$ равно $2^{n-2} + 1 - n$. Если сложить количество запрещенных точек каждого отрезка $[i][j]$, для которых $j \in \{1, 3\}$, получим общее число запрещенных точек в $F^*(Q_n)$. Следовательно, $a_n = 2^{n-1} \cdot (2^{n-2} + 1 - n)$. +

Пусть никакие отрезки $F^*(Q_n)$ не продолжают за отрезки $[2^{n-2}](0)$, $[2^{n-2}](1)$, $[2^{n-2}](2)$ и $[2^{n-2}](3)$, а имеют на них одну из своих концевых точек. Для каждого отрезка $[i](j)$ обозначим все точки пересечения (в том числе и запрещенные), лежащие на нем через $Y_t^{[i](j)}$ ($t = 1, \dots, 2^{n-2} + 1$), начиная с концевой вершины, лежащей на одном из отрезков $[2^{n-2}](0)$, $[2^{n-2}](1)$, $[2^{n-2}](2)$, $[2^{n-2}](3)$, по направлению к противоположной концевой вершине, причем вместо $Y_t^{[i](j)}$ будем обозначать точку как $V_t^{[i](j)}$, если она запрещенная, и $P_t^{[i](j)}$ – в противном случае.

Пусть $F^*(Q_n)$ находится в плоскости α . Введем оси координат xuz следующим образом: ось Ox – в плоскости α параллельно отрезку $[1](0)$, ось Oy – в плоскости α параллельно отрезку 1, ось Oz – перпендикулярно плоскости α . Одно из направлений оси Oz выберем как положительное, другое – как отрицательное. Если два отрезка ($[i_1][j_1]$)

и $([i_2][j_2])$ пересекаются в запрещенной точке, то заменим точку $V_t^{[i_1][j_1]}(x, y, 0)$ на точку $L_t^{[i_1][j_1]}(x, y, -1)$, а точке $V_t^{[i_2][j_2]}$ оставим ее прежние координаты. Соединим точки $\Upsilon_t^{[i](j)}\Upsilon_{t+1}^{[i](j)}$, где $\Upsilon_m^{[i](j)} = \{V_m^{[i](j)}, P_m^{[i](j)}\}$, $m = t, t+1$, $t = 1, \dots, 2^{n-2}$.

В результате каждому отрезку $[i](j)$ мы поставили в соответствие ломаную $b^{[i](j)}$, причем $b^{[i_1][j_1]} \cap b^{[i_2][j_2]} \Leftrightarrow \exists t : P_t^{[i_1][j_1]} \equiv [i_1][j_1] \cap [i_2][j_2]$.

Таким образом, по представлению $F^*(Q_n)$ в D^2 построено представление $B(Q_n)$, и справедлива

Теорема 3. Любой n -куб имеет представление ломаными без самопересечений $B(Q_n)$ в D^3 , причем число звеньев ломаных из $B(Q_n)$ не превосходит $\Phi = 3 \cdot 2^{n-2} - 3n + 4$.

Доказательство. В силу описанного выше построения представления $B(Q_n)$ для доказательства теоремы необходимо лишь обосновать последнюю ее часть. Покажем, что число звеньев каждой ломаной из $B(Q_n)$ не превосходит $\Phi = 3 \cdot 2^{n-2} - 3n + 4$.

В силу замечания к лемме 4 число запрещенных точек представления $F^*(Q_n)$ равно $a_n = 2^{n-1} \cdot (2^{n-2} + 1 - n)$. Как было показано, число запрещенных точек на отдельном отрезке $F^*(Q_n)$ равно $\Psi = 2^{n-2} + 1 - n$. Число звеньев каждой ломаной из $B(Q_n)$ будет не больше, чем $\Phi = \Psi \cdot 2 + \Psi + 1 = 3 \cdot \Psi + 1$. Это легко понять, если принять во внимание тот факт, что все точки отрезков $F^*(Q_n)$, лежащие между запрещенными точками, принадлежат, можно считать, одному звену ломаной представления $B(Q_n)$. В результате получаем, что $\Phi = 3 \cdot (2^{n-2} + 1 - n) + 1 = 3 \cdot 2^{n-2} - 3n + 4$. Что и требовалось доказать. +

5. Прямолинейное представление произвольного графа

Пусть $G(V, E)$ – граф без петель и кратных ребер. Прямолинейным представлением G в D^3 , обозначение $H(G)$, называется назначение вершинам $V(G)$ точек D^3 и ребрам $E(G)$ прямолинейных отрезков таким образом, что несмежным ребрам соответствуют непересекающиеся отрезки. Известно [12], что любой плоский граф допускает прямолинейное представление в D^2 (это теорема Фари). Здесь доказывается

Теорема 4. Любой граф G допускает прямолинейное представление $H(G)$ в D^3 .

Доказательство. Достаточно провести доказательство для полного графа K_n , $|V| = n$, так как представление $H(G)$ произвольного графа G может быть получено из представления $H(K_n)$ с помощью удаления отрезков, которые представляют ребра, не входящие в G . Вершины K_n представляем точками

$A_i(R \cos(i-1)\varphi, R \sin(i-1)\varphi, h_i)$, $1 \leq i \leq n$, которые определяются точками окружности радиуса R плоскости xOy , получаемыми сдвигом на угол $\varphi = 2\pi \cdot n^{-1}$ и

числами $h_1 < h_2 < \dots < h_n$. Точку A_1 соединяем отрезками с точками A_2, \dots, A_n и независимо от значений $\{h_i\}$ эти отрезки не пересекаются. Соединяя

A_i ($2 \leq i \leq n-1$) с остальными точками A_{i+1}, \dots, A_n , можем получить пересекающиеся отрезки. Опишем преобразование чисел $\{h_i\}$, которое переводит пересекающиеся отрезки в непересекающиеся.

Пусть $[A_i, A_j], [A_p, A_q]$ – первая пара пересекающихся отрезков. Ясно, что пары, для которых верно любое из неравенств $i < j < p < q$, $i < j = p < q$, $i < p < q < j$ или $p < i < j < q$ не могут пересекаться. Пересечение двух отрезков возможно только при $i < p < j < q$. Покажем, как найти изменение Δh_q координаты h_q , чтобы отрезок $[A_p, A_q]$ не пересекался с $[A_i, A_j]$, где $A_q'(R \cos(p-1)\varphi, R \sin(p-1)\varphi, h_q + \Delta h_q)$. Для этого проведем через отрезок $[A_i, A_j]$ и точку A_p плоскость Π , а через точку A_q проведем плоскость Π' , параллельную Π ; пусть $h(\Pi, \Pi')$ – расстояние между ними. Выбор $\Delta h_q > h(\Pi, \Pi')$ обеспечивает непересекаемость отрезков $[A_i, A_j]$ и $[A_p, A_q']$. Если точки A_p и A_q расположены по одну и ту же сторону относительно плоскости Π , то отрезки $[A_i, A_j]$ и $[A_p, A_q]$ не пересекаются. В этом случае, как и в случае получения пары $[A_i, A_j], [A_p, A_q']$ переходим к такому же анализу на пересекать отрезков $[A_i, A_j], [A_p, A_{q+1}']$. Построение прямолинейного представления графа K_n заканчивается рассмотрением пары $[A_{n-3}, A_{n-1}], [A_{n-2}, A_n]$.

Замечание. Полный граф, у которого часть ребер или все ребра подразбиты, допускает прямолинейное представление как и полный граф, у которого между частью пар вершин или всеми парами вершин проведены дополнительно простые цепи.

Отметим, что полные графы K_n и K_n' , в котором каждая пара вершин соединена дополнительно простой цепью, представляются отрезками в D^2 . Но графы K_n^* , $n \geq 5$ (как и графы $K_{p,q}$, $p \geq 3, q \geq 3$), каждое ребро которых подразбито, не имеют представления отрезками в D^2 .

6. Заключение

В работе рассмотрен вопрос о представлении n -куба отрезками и ломаными (без самопересечений) в k -мерном евклидовом пространстве D^k . Установлено, что 3- и 4-куб имеют представление отрезками с вершинами в точках с целочисленными координатами в D^2 . Также доказано, что 5- и 6-куб имеют представление отрезками с вершинами в точках с целочисленными координатами в D^3 . Показано, что для 5- и 6-куба D^3 является пространством минимальной размерности, в котором существует представление $F(Q_n)$. Также доказано, что n -куб при $n \geq 5$ не имеет представления отрезками и ломаными в D^2 . Для n -куба при $n \geq 6$ получена оценка на размерность D^k , в котором наверняка существует

представление $F(Q_n)$: n -куб имеет представление отрезками в D^{n-3} .

Рассмотрена также задача о представлении n -куба ломаными в D^k . Установлено, что n -куб для любого $n \geq 1$ имеет представление ломаными в D^3 . Кроме того, дана оценка на число звеньев ломаных представления $B(Q_n)$ – оно не превосходит $3 \cdot 2^{n-2} - 3n + 4$. В завершение работы доказывается возможность представления произвольного графа без петель и кратных ребер системой отрезков в D^3 , представляющих ребра графа.

Литература

1. *Дистель Р.* Теория графов, Новосибирск: изд-во Института математики РАН, 2002.
2. *Kratochvil J.* String graphs. II. Recognizing string graphs is NP-hard, J. Combin. Theory. Ser. B 52. 1991. P.67-78.
3. *Калинин В.Б.* Графы пересечений кривых на плоскости, Деп. в ВИНТИ 3001-В97, 1997.
4. *Калинин В.Б.* Достаточное условие представимости графа графом пересечений кривых в R^2 . Моделирование и опт. выч. систем и процессов. Межвуз. тематический сб. Ярославль: ЯрГУ, 1988.
5. *Pach J. and Solymosi J.*, Crossing Patterns of Segments, J. Combin. Theory Ser. A 96. 2001. P.316-325.
6. *Ehrlich G., Even S., and Tarjan R. E.* Intersection graphs of curves in the plane, J. Combin. Theory Ser. B 21. 1976. P.8-20.
7. *Козырев В.П., Юшманов С.В.*, Представления графов и сетей. Итоги науки и техники. Сер. теория вероятности, мат. стат., теор. киберн. ВИНТИ, 1990, С.129-196.
8. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями в социологических, биологических и экономических задачах, М.: Наука, 1986.
9. *Roberts F.S.* Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space, Theory and Applications of Graphs, Alavi Y. and Lick D. (eds.) Springer, New-York, 1978. P.477-490.
10. *Freeman L.C.* Spheres, cubes, and boxes: graph dimensionality and network structure, Soc. Networks, 5. No. 2. 1983. P.139-156.
11. *Коннов В.В., Клековкин Г.А., Коннова Д.П.* Геометрическая теория графов, М.: Народное образование, 1999.
12. *Alon N., Katchalski M. and Scheinerman E.R.* Not all graphs are segment T-graphs. European J. Combin. 11. 1990. P.7-13.

Содержание

1. Введение	3
2. Основные определения и обозначения.....	4
3. Представления n-куба отрезками в D^{n-3}	6
4. Представления n-куба ломаными в D^3	16
5. Прямолинейное представление произвольного графа	19
6. Заключение	20
Литература	21