

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Г. К. КАМЕНЕВ, Н. А. ЛЫСЕНКО,
О. П. ЛЮЛЯКИН, В. О. ПОЛЯНОВСКИЙ,
Д. А. САРАНЧА, Ю. С. ЮРЕЗАНСКАЯ

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ДЛЯ АНАЛИЗА ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МОСКВА 2015

УДК 57.02.001.57:574.4

*Ответственный редактор
канд. биол. наук В. П. Пасеков*

В работе рассматриваются различные подходы к модельному анализу колебаний численности животных на примере анализа тундровых популяций и сообществ. Наряду с традиционными подходами рассмотрена индивидуально-ориентированная модель, при этом используется метод прямого статистического моделирования, который уже давно используется для решения задач динамики разряженных газов. Особая роль отведена исследованию экологически обоснованных разностных уравнений, полученных при исследовании динамики численности леммингов. Существует бифуркационный сценарий, при котором возникают зоны стабильности с периодами, изменяющимися в порядке натурального ряда, отделенные переходными зонами. Для исследования переходных зон проводится анализ треугольного отображения. При анализе отображений и трубок траекторий используется метод множеств достижимости и диалоговые карты решений.

Ключевые слова: имитационное моделирование, дискретное отображение, метод Монте-Карло, индивидуально-ориентированные модели, метод множеств достижимости, трубки траекторий, диалоговые карты решений

Рецензенты: С. Н. Боранбаев,
Ю. В. Бибик

Научное издание

© Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Российской академии наук, 2015

Введение

«В наше время задача «информатизации» описательных наук ... внедрения методов информатики в описательные науки является одной из важнейших, может быть, самой важной проблемой близкого будущего» [1, с. 28]. Любая научная дисциплина начинала свое существование как описательная, даже такая абстрактная наука, как математика. Физика была чисто описательной наукой всего несколько столетий тому назад. Перейдя на количественную основу, она долгое время наряду с астрономией оставалась основным источником математических задач, основным полем применения математики. В последнее время положение меняется. Область приложения математики неуклонно расширяется. Появились математическая лингвистика, математическая экономика и ряд других дисциплин, широко использующих математические методы. И в биологических науках часть новых результатов получается с помощью математического моделирования.

Математические модели экологических систем являются одним из первых примеров успешного применения физико-математических методов. Подходы А. Лотки, В. Вольтерра и их последователей (Г.Ф. Гаузе, В.А. Костицына, А.Н. Колмогорова в том числе) стимулировали как биологические исследования (после их исследований биологи начали пересматривать свои теории), так и математические, предлагая новые постановки задач, новую область приложения математических идей.

Текст данного издания создан следующим образом. Разд. 4.2.1 написан В.О. Поляновским, разд. 5 и 4.3 – Г.К. Каменевым, разд. 6 – О.П. Люлякиным. Разд. 4.2.2 написан совместно Н.А. Лысенко, Д.А. Саранча, Ю.С. Юрезанской. Материал этого раздела использует текст дипломной работы Лысенко Н.А., существенно опирается на результаты его вычислительных экспериментов. Остальные разделы данного издания сформированы совместными усилиями В.О. Поляновского, Д.А. Саранча и Ю.С. Юрезанской.

1. Метод комплексных исследований

При введении точных методов в описательные науки важнейшую роль играют междисциплинарные взаимодействия. Появление «системной динамики» Дж. Форрестера [2] предоставило соответствующий инструментарий – метод создания имитационных моделей в диалоге с экспертами. Такой подход позволяет принимать к рассмотрению практически все предложения экспертов – в количественной или качественной форме, относительная простота модификации моделей такого типа позволяет проводить сравнительный анализ различных наборов исходных предположений, данных, гипотез.

Современный этап развития методов математического моделирования в эколого-биологической области во многом связан с развитием вычислительной техники и методов ее применения. Определяющую роль играет возможность детального учета свойств моделируемого объекта, возможность создания подробных имитационных моделей.

Повышение эффективности чисто имитационных технологий сдерживается ограничением численных расчетов и детальностью описания, перерастающей в «необозримость» модели.

Эти недостатки предлагается устранить в результате симбиоза имитационных и аналитических методов, с помощью комплексных исследований (КОИС), которые включают в себя всю последовательность операций: сбор, отбор, анализ и переработка исходной (биологической) информации. Обоснование и построение детальных имитационных моделей; анализ их свойств; формирование имитационной системы – набора взаимосвязанных моделей разной степени детализации, включающей в себя упрощенные модели, допускающие проведение аналитического (портретного) исследования; формулирование на их основе гипотез о ведущих механизмах исследуемого явления.

Создание упрощенных (аналитических) моделей осуществляется посредством совместного анализа эколого-биологической информации и результатов вычислительных экспериментов на основании редукции базовых имитационных моделей.

Метод комплексных исследований (КОИС) экологических объектов был создан в качестве инструмента интеллектуальной поддержки в междисциплинарном процессе создания и анализа математических моделей сложных иерархических систем при неполных, разноплановых и неизбежно искаженных данных о свойствах изучаемого объекта. Метод КОИС – это способ получения биологически значимых результатов с использованием всей палитры возможных математических и биофизических подходов, объединяющий формальные и неформальные методы, имитационные и аналитические подходы. Метод направлен на создание набора взаимосвязанных математических моделей, анализ которого позволяет сформулировать и обосновать гипотезы о ведущих механизмах изучаемого эколого-биологического процесса, в условиях дефицита и неизбежного искажения исходных данных [3].

Основной тезис. Большая имитационная модель, в которой каждый блок выверен со специалистами, не гарантирует правильной ее работы. Такая модель не может быть самодостаточной, это инструмент для формализации исходной биологической информации, инструмент по предварительному исследованию объекта. Для эффективного использования имитационной модели она должна быть компонентом набора взаимосвязанных моделей, состоящих из детальных имитационных и сопряженных с ними упрощенных моделей. Упрощенные модели имеют небольшое количество переменных, допускают проведение подробного портретного исследования, позволяют настраивать исходную модель на соответствующие режимы, а также выдвинуть гипотезы о ведущих механизмах изучаемого явления.

Метод КОИС сформировался в процессе моделирования тундрового сообщества. На основе экспертно оцененных зависимостей была создана имитационная модель «растительность-лемминги-песцы» (РЛП), учитывающая сезонные изменения параметров. Стремление приблизиться к большему пониманию механизмов формирования динамики численности тундровых животных привело к формированию модели популяции леммингов, определяющих характер колебаний численности животных тундрового сообщества [4, 5].

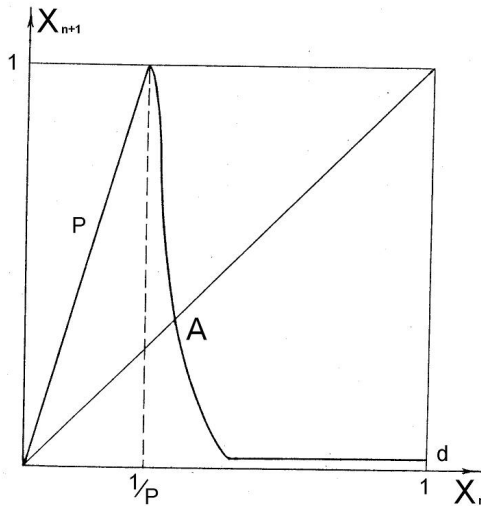


Рис. 1.1. Вид базовых дискретных уравнений $X^{t+1} = F(X^t)$. Где P – скорость прироста биомассы леммингов в благоприятный год, A – равновесная численность, d – численность леммингов в оптимальном биотопе

Анализ результатов вычислительных экспериментов с обеими взаимодополняющими моделями привел к обоснованию упрощенной модели в виде одномерного разностного уравнения (функции последования), связывающего численности леммингов в двух соседних годах [4-7], графическое представление которого дано на рис. 1.1.

Наличие таких разностных уравнений позволило определить в исходной имитационной модели области параметров, обеспечивающие динамические режимы изменения численностей популяций, близкие к наблюдаемым в природе, сформулировать гипотезы о ведущих механизмах, определяющих колебания численности тундровых животных.

Применение комплексного подхода при моделировании тундровых популяций и сообществ [4, 7] позволило сформулировать количественные гипотезы о ведущих (главных, определяющих) механизмах формирования колебаний численности тундровых животных. Как указано выше, ведущим фактором, определяющим эти колебания, является динамика численности популяции леммингов. Эта динамика, в свою очередь, определяется тремя показателями: 1) скоростью прироста биомассы в благоприятный год; 2) максимальной численностью; 3) выживаемостью в наиболее неблагоприятных условиях. Первый показатель характеризует баланс между процессами рождаемости и смертности в отсутствии "давления среды"; второй характеризует экосистему в целом и отражает коэволюцию леммингов и кормовой базы; третий характеризует адаптационные свойства леммингов в экстремальных условиях и во многом определяется локальными характеристиками, в частности рельефом местности в местах перезимовки.

Полученные выводы хорошо согласуются с одной из распространенных гипотез о том, что формирует колебания численности популяций не какой-то отдельно взятый фактор, а некоторая их комбинация [8-11]. Полученные количественные соотношения, связывающие обобщенные показатели с характеристиками динамики численности, могут быть использованы в процедурах оценки параметров реальных популяций, таких, как плодовитость, смертность и т.д.

Разностные уравнения могут служить простым инструментарием для прогноза возможной численности леммингов и песцов. В то же время для адаптации такого подхода к изучению различных регионов тундры, для анализа кардинальных

изменений ее свойств, в частности вследствие антропогенных воздействий (изменений климата и т.д.), необходимо использовать полную имитационную модель.

2. Биологические предпосылки модели

Ф.Б. Чернявский сформулировал гипотезу о многофакторной модели циклов [12], которая заключается в следующем.

Обычно экологи для объяснения феноменологии и механизмов популяционных циклов мелких грызунов используют два методологических подхода: один предусматривает поиск единого механизма, лежащего в основе циклов, другой допускает возможность взаимодействия ряда факторов. Согласно современным представлениям о структуре и функционировании сообществ и экосистем, взаимодействие факторов в динамике численности популяций – скорее правило, чем исключение. Значит, численность большинства животных-фитофагов регулируется за счет внутрипопуляционных механизмов и отражает многочисленные биоценотические связи.

Огромный репродуктивный потенциал леммингов (реализуемый, в частности, за счет подснежного размножения), позволяющий им существовать в суровых условиях тундры, обуславливает наличие того или иного механизма контроля над численностью. Без этого достаточно скудный растительный покров тундры мог бы исчезнуть бесследно. Такого, как мы знаем, не происходит. Ряд внешних факторов в фазе пика значительно повышает смертность в популяциях леммингов, а адаптивные механизмы внутрипопуляционной регуляции (эндокринные и, возможно, генетические) воздействуют на все демографические параметры. В итоге численность грызунов периодически пульсирует с примерно равными промежутками между пиками. С точки зрения изложенных представлений, популяционные циклы – это результат многоуровневых адаптивных реакций и связей, явление, в котором организменные

и популяционные механизмы связаны с процессами, происходящими в биоценозе [12].

Из сказанного выше следует, что колебания численности леммингов зависят от многих факторов. В данной работе определена совокупность биологически значимых параметров, от которых зависят колебания численности леммингов.

Ряды численности леммингов наиболее полно представлены в работе [13]. Как можно видеть из рисунков, для популяции леммингов характерны колебания численности. Изучение этого явления затрудняется тем, что этот объект недостаточно исследован, среди биологов нет единого мнения по поводу формирования колебаний численности леммингов.

На основе анализа рядов динамики численности леммингов можно сказать следующее: популяция устойчива во времени; для популяции характерны колебания численности; наблюдаются регулярные колебания численности леммингов (расстояние между пиками численности сравнительно постоянно); наблюдаются регулярные пики численности леммингов в среднем от 2 до 5 лет. На п. Таймыр вспышки численности леммингов наблюдаются с регулярным периодом раз в 3 года; наблюдаются нерегулярные колебания численности леммингов (колебания напоминают стохастический процесс).

3. Методы моделирования экологических объектов. Описание имитационной модели «растительность–лемминги–песцы»

Основная особенность тундровой экосистемы – это сезонность. Выделяется три сезона (табл. 3.1). Переключение сезонов отражено на рис. 3.1.

Имитационная модель сообщества «растительность – лемминги – песцы» строится с помощью метода системной динамики Дж. Форрестера. Имитационная диаграмма для данной модели представлена на рис. 3.2. Здесь a_i , b_i , c_i – параметры подсистемы растительности, леммингов и песцов соответственно, g_i – экспертно оцененные функции. R_X , D_X , M_X –

функции, определяющие скорости прироста, отчуждения и естественного отмирания соответственно на каждом трофическом уровне X .

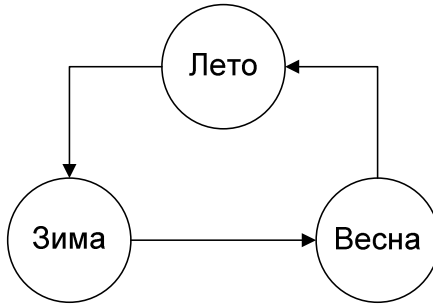


Рис. 3.1. *Диаграмма состояний, отражающая переключение между сезонами в модели «растительность–лемминги–песцы» (табл. 3.1)*

Математическая модель, формализующая имитационную диаграмму (Рис. 3.3), имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = R_V - M_V - D_V, \\ \frac{dL}{dt} = R_L - M_L - D_L, \\ \frac{dR}{dt} = R_F - M_F - D_F. \end{cases} \quad (3.1)$$

Недостающая информация представлена в виде экспертных функций.

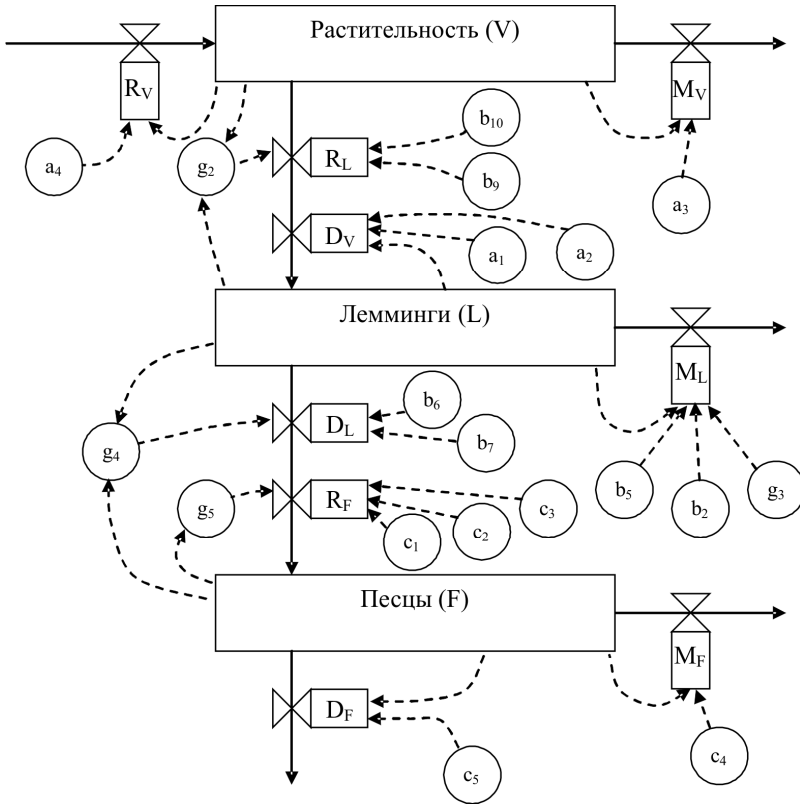


Рис. 3.2. Имитационная диаграмма модели «растительность–лемминги–песцы»

В имитационной модели используются 4 экспертные функции [8]. Функция g_2 формализует снижение рождаемости у леммингов при снижении удельного количества корма. Функция g_3 формализует изменение годовой смертности леммингов. В июне происходит сход снежного покрова и подтопление нор, в результате чего наблюдается повышенная смертность (пик на графике).

Функция g_4 отражает снижение рождаемости песцов при снижении удельной численности леммингов. Функция g_5 от-

ражает снижение рождаемости у песцов при повышении их численности.

С помощью имитационной модели сообщества «растительность – лемминги – песцы» получены трехлетние циклы колебания численности (Рис. 3.3), которые соответствуют динамике на п. Таймыр.

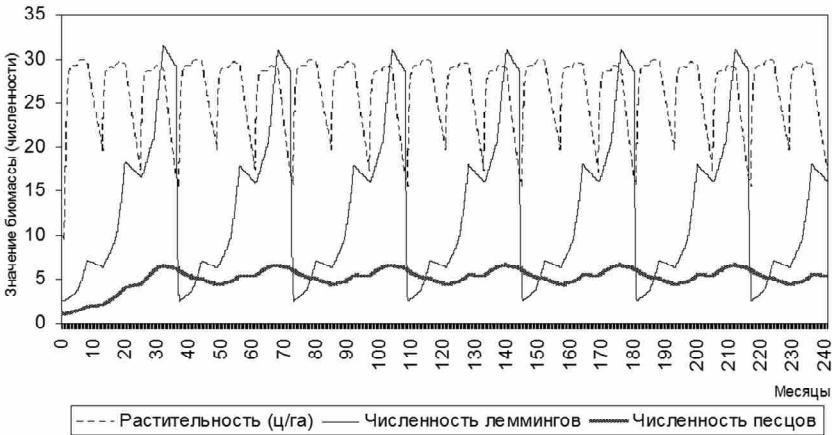


Рис. 3.3. Трехлетние колебания численности леммингов в модели «растительность – лемминги – песцы»

В результате проведенных исследований удалось построить набор взаимосвязанных моделей. Основа набора – подробные имитационные модели, построенные во взаимодействии с биологами. Анализ результатов вычислительных экспериментов с взаимодополняющими моделями сообщества «растительность-лемминги-песцы» (РЛП) и популяции леммингов (рис. 3.4), привел к обоснованию упрощенных моделей в виде дискретных уравнений. С помощью дискретных уравнений $X^{t+1} = F(X^t)$, связывающих численности леммингов X^t в двух соседних годах, удается воспроизвести временную динамику, качественно близкую к динамике численностей реальных популяций леммингов [14-17]. На рис. 1.1 представлен вид дискретных уравнений, связывающих численности

леммингов в двух соседних годах, полученных в результате анализа моделей тундровых популяций и сообществ. Эти уравнения легли в основу построения функций дискретных отображений только в целях изучения свойств дискретных отображений.

В результате проведенных исследований тундрового сообщества «растительность-лемминги-песцы» [18] получаем разностное уравнение, связывающее численности леммингов в двух соседних годах, с помощью которого удалось воспроизвести временную динамику, качественно близкую к динамике численностей реальных популяций леммингов.

Для нормированной переменной $\tilde{L} = L/L_{max}$ оно имеет вид

$$\tilde{L}_{n+1} = \begin{cases} P\tilde{L}_n, & \tilde{L}_n \leq 1/P, \\ 1 - r(\tilde{L}_n - 1/P), & 1/P < \tilde{L}_n \leq 1/P + (1-d)/r, \\ d, & 1/P + (1-d)/r < \tilde{L}_n \leq 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь P – прирост биомассы леммингов в благоприятный год; величина d – нормированная биомасса леммингов в оптимальном биотопе, коэффициент r – характеризует изменение биомассы леммингов в условиях нехватки кормов в весенний период.

В качестве некоторого приближения к полученной упрощенной модели рассмотрим уравнение вида

$$x^{t+1} = F_1(x^t) \equiv \begin{cases} 2x^t, & 0 \leq x^t \leq 0.5, \\ d, & (0 < d < 1) \quad 0.5 < x^t \leq 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для (3.3) имеет место утверждение 3.1.

Утверждение 3.1. Для уравнения (3.3) при уменьшении параметра d от 1 до 0 последовательно появляются глобально устойчивые циклы периода n , где n последовательно пробегает все натуральные числа.



Рис. 3.4. Сопоставление экспериментальных данных (*n*-ов Таймыр) и расчета динамики численности с помощью разностного уравнения (3.2)

Доказательство данного утверждения приведено в работе [19]. В утверждении рассмотрен случай разрывной функции $X^{t+1} = F_1(X^t)$. Теперь устраним разрыв. В окрестности точки разрыва соединим левую и правую части графика функции F_1 отрезком прямой, т.е. вернемся к формуле (3.2). При этом при аналогичном сценарии динамические режимы становятся более разнообразными.

Результаты вычислительных экспериментов, проведенных с уравнением (3.2) при $P = 2$ и $r = 100$, приведены на бифуркационной диаграмме рис. 3.5 [19]. Характер динамических режимов исследовался при изменении параметра d от 1 до 0. На рис. 3.5 можно выделить зоны стабильности, которые отделены переходными зонами со сложными режимами (черные вертикальные полосы).

Имеет место следующее утверждение 3.2.

Утверждение 3.2. Для уравнения (3.2) при изменении параметра d от 1 до 0 последовательно появляются зоны стабильности, которые отделены переходными зонами со сложными режимами. Внутри зон стабильности период траекторий

постоянный, при переходе от одной зоны стабильности к другой период изменяется в порядке натурального ряда. В каждой из переходных зон при небольшом изменении параметров период траекторий значительно изменяется («стохастическое поведение»), при этом существуют периодические траектории с периодом большим любого наперед заданного натурального числа. При этом «ширину» переходных зон можно сделать как угодно малой при стремлении параметра r к бесконечности.

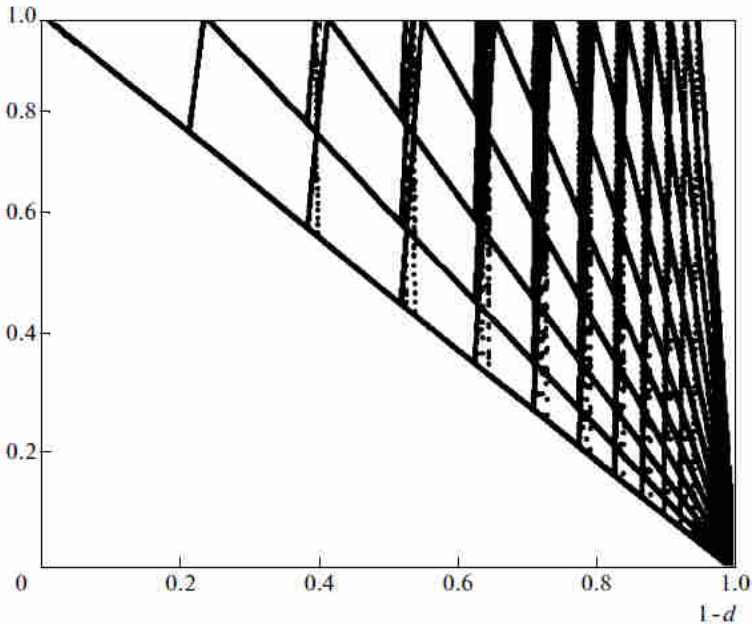


Рис. 3.5. Результаты вычислительных экспериментов с моделью (3.2) – зависимость траекторий модели от величины $1 - d$. По оси абсцисс отложена величина $1 - d$. Вертикальное сечение графика при выбранном значении d представляет собой точки траектории

Период траектории при данном d визуально определяется на рис. 3.5 следующим образом: проводится вертикаль от некоторого фиксированного значения на оси абсцисс, количе-

ство пересечений этой вертикали с траекторией определяет период траектории при данном d .

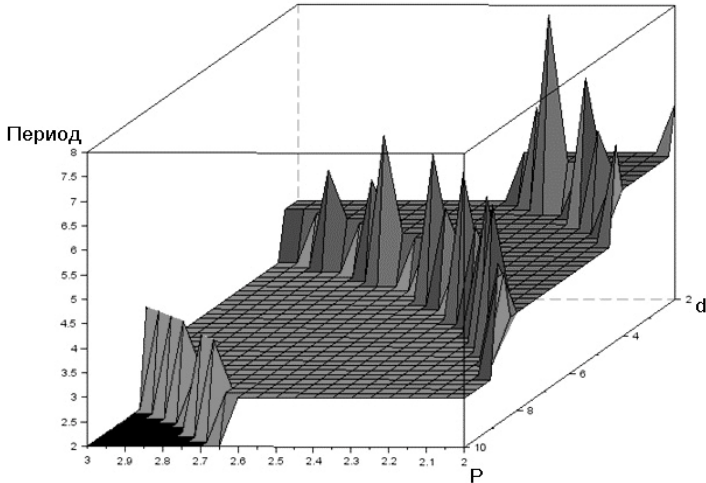


Рис. 3.6. Зависимость периода цикла от параметров P и d разностного уравнения с переходной зоной

На рис. 3.6 приведена зависимость периода цикла от параметров P и d . На рисунке видны горные хребты. Это хребты больших периодов [20].

4. Анализ разностных уравнений

Рассматриваем невогнутое одномерное унимодальное отображение (ОУО) отрезка $[0,1]$ на себя $X^{t+1} = F(X^t)$.

Функция F монотонно возрастает на отрезке $[0, D]$ ($D < 1$), при этом $F(X^t) > X^t$ достигает максимального значения $F(D) = 1$ в точке D и затем убывает, проходя через равновесную точку (положение равновесия (ПР)) $A = F(A)$ не равную $(0,0)$.

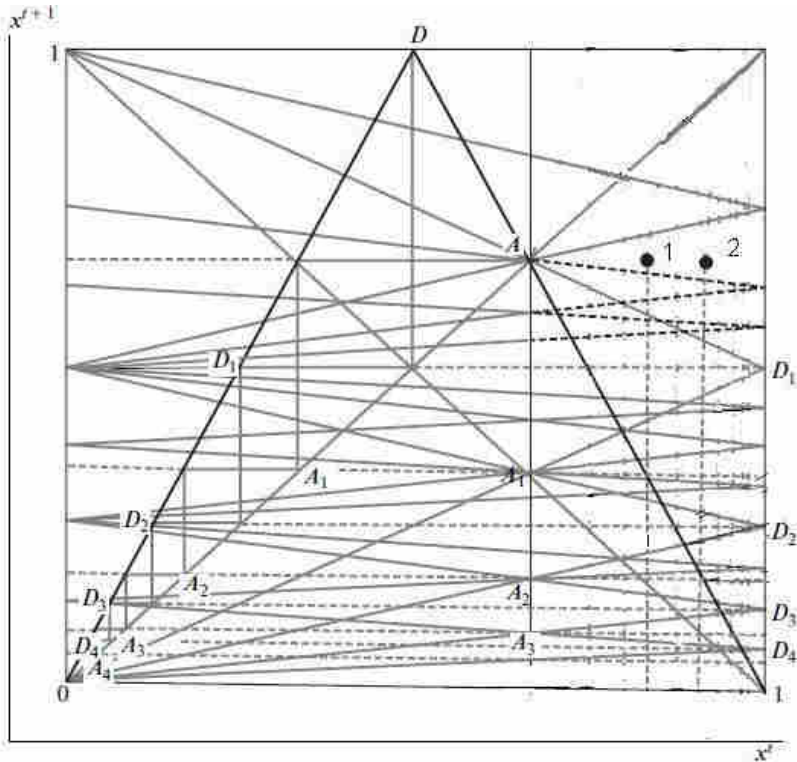


Рис. 4.1. Треугольное отображение и его i -кратные отображения, повернутые на 90 градусов. $A = F(A)$ – нетривиальная точка равновесия, D – точка достижения максимального значения $F(D) = 1$, ($x_D < 1$), точки A_i являются прообразами точки A : $F^i(A_i) = A$, а точки D_i являются прообразами точки D : $F^i(D_i) = D$. Кривая $AD_1 A_1 D_2 A_2 D_3 A_3 D_2$ – фрагмент ЛВ1. Внутри ЛВ1 имеются фрагменты ЛВ2. Вертикальные линии с обозначениями (1) и (2) проходят через точки пересечения горизонтальных линий, проведенных через точки A_1 и A_2 , с графиком исходной функции

В качестве примеров таких уравнений можно привести указанное выше уравнение (3.2), а также уравнение, представляющее на рис. 4.1 треугольное отображение:

$$X^{t+1} = F_0(X^t) = 1 - 2|0,5 - X^t|.$$

4.1. Основные определения

Для анализа результатов вычислительных экспериментов с опусканием ступеньки d (рис. 1. 1) были предложены конструктивные способы нахождения периодических траекторий ОУО, введены соответствующие способы исследования [18]. Они могут быть использованы для широкого класса отображений $X^{t+1} = F(X^t)$.

Положение равновесия A разбивает отрезок $[0, 1]$ на две области: $[0, A]$ и $[A, 1]$. Эти части неравноправны. В правой части траектория не может находиться два такта подряд; она служит своего рода «отражателем», фактически задавая начальные значения для движения траектории по левой части функции, а в левой части траектория может находиться несколько тактов.

Для анализа поведения траекторий определим два множества точек: $G = \{A_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$, $K = \{D_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Множество G состоит из таких точек A_i , что $F^i(A_i) = A$, множество K состоит из таких точек D_i , что $F^i(D_i) = D$ (рис. 4.1), где $F^i(\cdot) = F(F \dots (F(\cdot)))$ – i -кратное отображение. При этом $A_0 = A$, $D_0 = D$.

Если траектория находится слева от точки A и ордината одной из ее точек попадает в интервал $[A_i, A_{i-1}]$, то в следующем такте траектория попадает в интервал $[A_{i-1}, A_{i-2}]$.

Множество $\{A_n\}$ отражает специфику ОУО – показывает, какое количество тактов будет находиться траектория в области $[0, A]$, определяет расстояния между максимумами внутри траектории. Оно обладает очевидным свойством: для любого натурального числа существует окрестность нуля такая, что при $A_{n-1} < X^0 < A_n$ имеет $(X^t < A)$ ровно n тактов и

затем перейдет в правую область ($X^t > A$). Существует широкий класс функций, для которых может быть выбран сценарий, приводящий к тому, что в большинстве случаев множество $\{A_n\}$ определяет характер траекторий, в том числе длину цикла.

В ряде случаев, для практических задач исследования возможных динамических режимов в дискретном отображении оказывается достаточным использования множества $\{A_n\}$. В частности в случае, когда степень достоверности (биологической) информации позволяет анализировать лишь временные интервалы между максимумами численности [14-16].

Для более детального изучения свойств рассматриваемых отображений введем вспомогательную конструкцию – линию возврата (ЛВ).

Определение. ЛВ n -го порядка (ЛВ n) для отображения F называется кривая в прямоугольнике $A \leq X^t \leq 1$; $0 \leq X^{t+1} \leq A$, являющаяся графиком функции $F_c^{(n)}(X^{t+1})$, которая отображает отрезок $0 \leq X^{t+1} \leq A$ на отрезок $A \leq X^t \leq 1$ по описанному ниже алгоритму.

Алгоритм построения ЛВ n . Через любое значения X^{t+1} из отрезка $0 \leq X^{t+1} \leq A$ в прямоугольнике $A \leq X^t \leq 1$; $0 \leq X^{t+1} \leq A$ проведем горизонтальную линию. Берем любую точку X^{t+1} из отрезка $0 \leq X^{t+1} \leq A$ и проводим в прямоугольнике $A \leq X^t \leq 1$; $0 \leq X^{t+1} \leq A$ через нее горизонтальную линию. Точка пересечения с графиком исходной функции за ПР дает начальную точку. Графически построим траекторию, используя лестницу Ламерея. При n -м возврате за положение равновесия от биссектрисы угла между осью абсцисс и осью ординат опускаем соответствующую вертикальную линию. Точка пересечения этой линии с тестирующей горизонтальной линией принадлежит ЛВ n , с координатами (X^t, X^{t+1}) . Делаем аналогичную процедуру со всеми точками X^{t+1} из отрезка $[A, 1]$ и соединяя все точки пересечения получим ЛВ n . Тем самым в указанном

выше прямоугольнике каждому значению X^{t+1} соотнесено значение X^t , т.е. задана функция $X^t = \text{ЛВ}n(X^{t+1})$. Пример ЛВ1 для треугольного отображения представлен на рис. 4.1 ($AD_1A_1D_2A_2D_3A_3D_4A_4$). Графическая реализация алгоритма построения ЛВ1 и ЛВ2 для треугольного отображения представлена на рис. 4.2 и 4.3 соответственно.

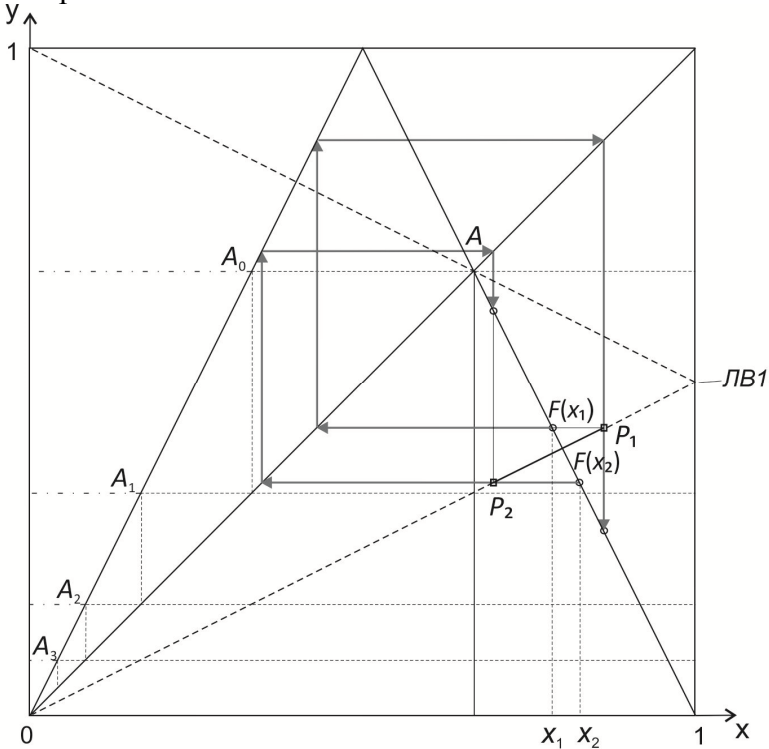


Рис. 4.2. Графическая иллюстрация алгоритма построения линий первого возврата (ЛВ1) для треугольного отображения. Для начальных точек $F(x_1)$ и $F(x_2)$ получаем точки P_1 и P_2 , лежащие на линии первого возврата (ЛВ1)

Предложение 4.1. Точки пересечения ЛВ n с графиком исходной функции F задают периодические траектории. При этом с помощью ЛВ n можно отыскать все периодические траектории с периодом, меньшим или равным n .

Определение. Область от точки A до точки A_1 называется зоной двойки, область от точки A_1 до точки A_2 называется зоной тройки и т.д.

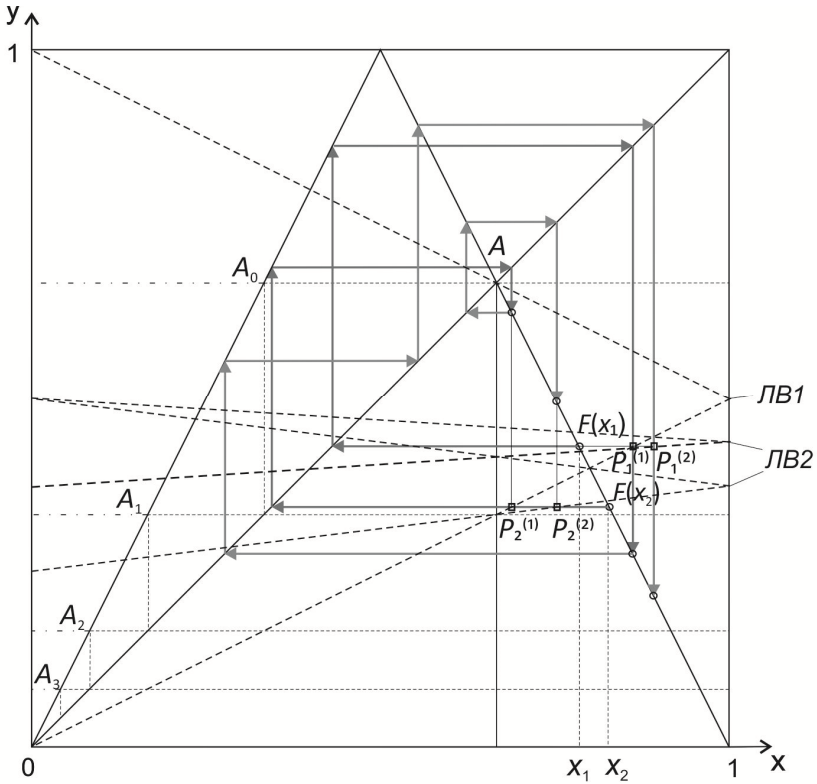


Рис. 4.3. Графическая иллюстрация алгоритма построения линий второго возврата (ЛВ2) для треугольного отображения. Для начальных точек $F(x_1)$ и $F(x_2)$ получаем точки $P_1^{(1)}$ и $P_1^{(2)}$, лежащие на линии первого возврата (ЛВ1) и точки $P_2^{(1)}$ и $P_2^{(2)}$, лежащие на линии второго возврата (ЛВ2)

Для треугольного отображения AD_1A_1 является зоной двойки, $A_1D_2A_2$ – зоной тройки, $A_2D_3A_3$ – зоной четверки, $A_3D_4A_4$ – зоной пятерки. Отметим, что в зоне формирования ЛВ зона 2 занимает половину, зона 3 – оставшуюся половину,

зона 4 – снова оставшуюся половину и так далее. Разъясним смысл двух вертикальных линий, построенных из точек 1 и 2 на рис. 2. Линии возврата введены, чтобы определить, где будет траектория после n -го возвращения. Исходя из алгоритма построения ЛВ имеем: если вертикальная линия левее первой, то попадаем в зону двойки, если между первой и второй, попадаем в зону тройки, и так далее.

Номер зоны определяет количество тактов, через которые траектория снова попадет за ПР, а также период цикла, проходящего через точку пересечения графика исходной функции и ЛВ1.

Утверждение 4.1. Точка пересечение ЛВ с графиком исходной функции (ГИФ) лежит на периодической траектории.

Доказательство. Это следует из определения ЛВ.

Утверждение 4.2. Линии ЛВ могут быть построены как фрагменты F^n , зеркально повернутые на 90° .

Доказательство. Возьмем любую точку на ЛВ, сформированной F^{n-1} , зеркально повернутой через биссектрису на 90° , и проведем горизонталь до биссектрисы. В этой точке имеется значение F^{n-1} . Из этого значения (в соответствии с алгоритмом Ламерея) проведем горизонталь до биссектрисы и из точки пересечения опустим вертикаль. Эта вертикаль попадет в исходную точку, которая построена зеркальным поворотом F^{n-1} .

Утверждение 4.3. Точки пересечения ЛВ с ГИФ лежат на периодических траекториях периода n .

Доказательство. Повторяем рассуждения, аналогичные приведенным выше. Возьмем любую точку пересечения ЛВ с ГИФ и проведем горизонталь до биссектрисы. Этой точке соответствует некоторое значение функции F^{n-1} . Из этого значения (в соответствии с алгоритмом Ламерея) проведем горизонталь до биссектрисы и из точки пересечения опустим вертикаль до пересечения с ГИФ. В точке пересечения находится ЛВ, сформированная F^{n-1} , зеркально повернутой на 90° . Таким образом, получаем цикл периода n .

Утверждение 4.4. Указанные выше точки представляют собой полный набор точек периода n , лежащих за ПР (в зоне формирования ЛВ).

Доказательство. Возьмем любую периодическую точку периода n , находящуюся за ПР. Она должна находиться (согласно утверждению 4.1) в точке пересечения некоторой ЛВ с ГИФ. Если эта точка находится на траектории периода n , то проведем горизонталь до биссектрисы. Этой точке соответствует некоторое значение функции F^{n-1} . Из этого значения (в соответствии с алгоритмом Ламерея) проведем горизонталь до биссектрисы и из точки пересечения опустим вертикаль до пересечения с ГИФ (графиком исходной функции). В точке пересечения находится исходная точка. Поскольку точка выбрана произвольно (из соответствующих точек, находящихся за ПР (положение равновесия)), то тем самым утверждение 4.4 доказано.

Утверждение 4.5. Пусть n некоторый период. Для треугольного отображения (ТО) имеют место следующие формулы. Координаты точек циклов периода n за положением равновесия (в зоне формирования ЛВ) определяются, исходя из анализа точек пересечения ЛВ (полученных зеркальным поворотом через биссектрису на 90 градусов вправо функций F^{n-1}) с графиком исходной функции. Уравнения для их определения имеют вид

$$\begin{aligned} X &= (4i-2)/(2^n + 1) \text{ для возрастающего ската } i = 1, \dots, 2^{n-2}; \\ X &= (4i-2)/(2^n - 1) \text{ для убывающего ската } i = 1, \dots, 2^{n-2}. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

В этой формуле индекс i определяет порядковый номер зубца (среди последовательности зубцов ЛВ), сформированных F^{n-1} зеркально повернутой на 90° функцией F^{n-1} . При этом отсчет начинается с самого нижнего зубца (ближайшего к оси абсцисс).

Из приведенных формул для случая треугольного отображения (ТО) с опусканием ступеньки и из формулы (3.2)

следует утверждение 4.6.

Утверждение 4.6. Координаты, ограничивающие область реализации цикла с данным периодом n для ТО, при опускании ступеньки определяются по формулам

$$X = (4i - 2)/(2^n + 1) \text{ для границы ближней к ПР } (i = 1, \dots, 2^{n-2});$$

$$X = (4i - 2)/(2^n - 1) \text{ для границы дальней от ПР } (i = 1, \dots, 2^{n-2}).$$

Из утверждения 4.6 (из формул, формирующих данное утверждение) следуют утверждения 4.7 – 4.9.

Утверждение 4.7. Если есть кратные циклы, то все циклы с меньшим периодом обязательно соприкасаются с кратным циклом большей длины.

Из утверждений 4.6 и 4.7 следуют последующие утверждения.

Утверждение 4.8. Если при процедуре последовательного увеличения периодов циклов возник цикл некоторого периода n , то непосредственно за ним возникают циклы с периодом $n \cdot 2^m$ ($m = 1, 2, 3..$).

Поскольку области реализации циклов удвоения «склеиваются», то мы доказали утверждение 4.9.

Утверждение 4.9. Внутри последовательности циклов $n \cdot 2^m$ ($m = 1, 2, 3..$) нет циклов других периодов.

Утверждение 4.10. Непосредственно перед любым циклом периода n не может быть циклов с периодом $n \cdot 2^m$ ($m = 1, 2, 3..$).

Аналоги утверждений Фейгенбаума. У Фейгенбаума есть утверждения про соотношения размеров областей циклов разной длины в процессе удвоения (2, 4, 8, 16...).

В результате проведенных исследований при исследовании бифуркационных режимов, возникающих для треугольного отображения при опускании ступеньки удастся сформулировать более общие утверждения.

Утверждение 4.11. Имеют место следующие соотношения для размеров (ширины) соседних областей (n и $2 \cdot n$).

Для периода n : $A / (2^{2n} - 1)$, а для удвоенного периода $2 \cdot n$: $A \cdot (2^n + 1) / (2^{4n} - 1)$, где A – точка равновесия.

При n , стремящейся к ∞ , отношение равно 2^n .

В отличие от соотношения Фейгенбаума, это соотношение имеет место при любом порождающем числе $n^* = 2, 3, 4, 5 \dots$.

4.2. Исследования треугольного отображения

4.2.1. Циклы кратной длины в треугольном отображении

Базовые утверждения.

1. Две периодические траектории не имеют общих точек, если они не тождественны друг другу. (Множества точек, принадлежащих разным циклам, не пересекаются).

2. Все точки, входящие в периодические траектории $F^{(1)}$, являются стационарными точками $F^{(n)}$.

3. При этом все стационарные точки $F^{(n)}$ (исключая две, характеризующие стационарные значения) являются точками циклов длины n для $F^{(1)}$ только в том случае, если n – простое число.

Если n составное, то из общего числа стационарных точек, равного 2^n , надо вычесть числа точек, принадлежащих циклам длины n_i , где n_i – делители n , включая единицу. Оставшееся подмножество стационарных точек $F^{(n)}$ входит в циклы периода n .

Число точек, принадлежащих "истинным" циклам периода n :

$$K(n) = 2^n - \sum_{i=1}^{p(n)} K(n_i), \quad 1 \leq n_i < n, \quad \frac{n}{n_i} \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$n_1 = 1, \quad K(1) = 2,$$

p – число делителей числа n .

Координаты пересечений кратных отображений с биссектрисой

Уравнения для определения координат x точек пересечения $F^{(n)}$ с прямой $y = x$ имеют вид

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n-1}, & i = 1, 3, \dots, 2^n - 1, \\ \frac{i}{2^n+1}, & i = 2, 4, \dots, 2^n, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

где $i = 1, \dots, 2^n$ – номер ската зубца, образующего $F^{(n)}$.

Номера совпадающих стационарных точек

Найдем условия, при которых точки пересечения $F^{(n)}$ и $F^{(m)}$ с биссектрисой совпадают, т.е. найдем такие номера i и j , для которых выполняется условие $x_i^{(n)} = x_j^{(m)}$.

Используя формулу (4.2.1), получим:

$$\frac{i-1}{2^n-1} = \frac{j-1}{2^m-1}, \quad i = 1, 3, \dots, 2^n - 1, \quad j = 1, 3, \dots, 2^m - 1, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{i-1}{2^n-1} = \frac{j}{2^m+1}, \quad i = 1, 3, \dots, 2^n - 1, \quad j = 2, 4, \dots, 2^m, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{i}{2^n+1} = \frac{j-1}{2^m-1}, \quad i = 2, 4, \dots, 2^n, \quad j = 1, 3, \dots, 2^m - 1, \quad (4.2.4)$$

$$\frac{i}{2^n+1} = \frac{j}{2^m+1}, \quad i = 2, 4, \dots, 2^n, \quad j = 2, 4, \dots, 2^m. \quad (4.2.5)$$

Пусть $m = kn$, т.е. n – делитель m .

1. Предложение: все стационарные точки $F^{(n)}$ являются также стационарными точками $F^{(m)}$.

Иными словами, для каждого i найдется такое j , что выполнено одно из равенств 4.2.2 – 4.2.5.

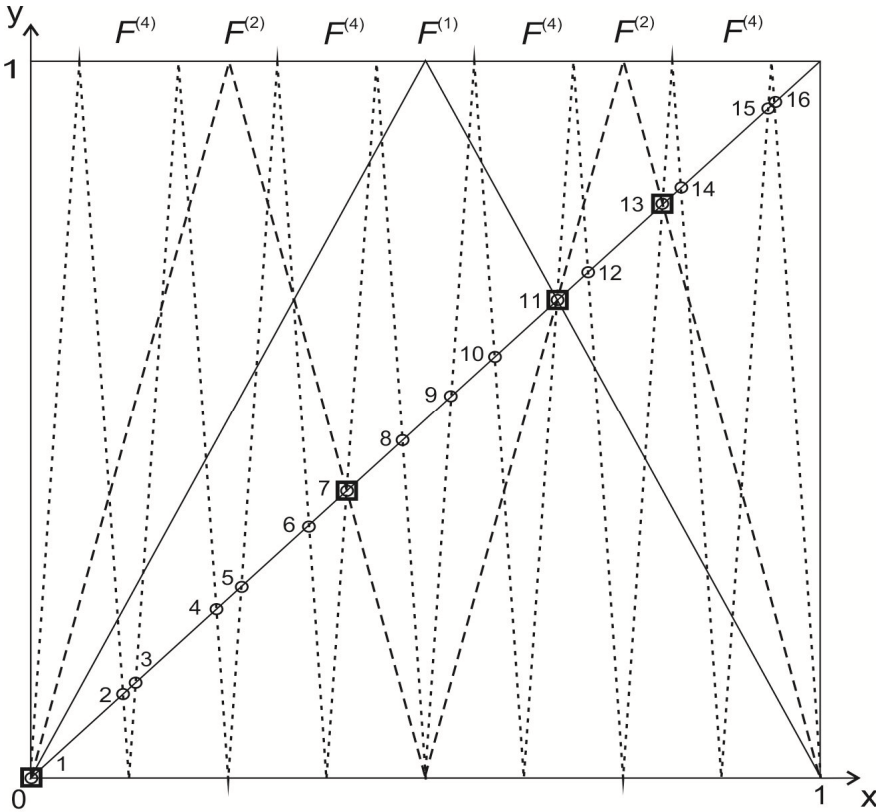


Рис. 4.4. Стационарные точки двух- и четырехкратного отображений. $F^{(1)}$ – треугольное отображение и его i -кратные отображения ($i = 2, 4$). Четыре точки пересечения $F^{(2)}$ с биссектрисой первого квадранта дают четыре точки, помеченные квадратами (1, 7, 11, 13). Две из них (1 и 11) являются стационарными, а остальные две (7 и 13) образуют единственный цикл периода два. Пересечения $F^{(4)}$ с биссектрисой дают шестнадцать точек, помеченные кружками. Четыре из них, помеченные квадратами, являются точками пересечения $F^{(2)}$ с биссектрисой. Оставшиеся 12 точек (2 – 6, 8, 9, 10, 12, 14 – 16) принадлежат трем циклам периода 4

2. Найдем множество точек, составляющих все циклы длины m .

Для этого из множества стационарных точек $F^{(m)}$ нужно исключить стационарные точки $F^{(n_i)}$, где n_i – все делители n .

3. Рассмотрим свойства подмножества стационарных точек $F^{(m)}$, совпадающих с множеством стационарных точек $F^{(n)}$. (Какие из стационарных точек $F^{(m)}$ совпадают со стационарными точками $F^{(n)}$, если $m = kn$.)

В качестве примера рассмотрим один частный случай.

При $n = 2$, $i = 1, 2, 3, 4$; $m = 4$, $j = 1, 2, \dots, 16$, получим следующие пары совпадающих точек (i, j) : $(1, 1)$, $(2, 7)$, $(3, 11)$, $(4, 13)$ – все i пересекаются с нечетными j (рис. 4.4).

Справедливо следующее утверждение 4. 12.

Утверждение 4.12. При $m = 2n$ для любого $i = 1, 2, \dots, 2^n$ найдется только одно $j \in \{1, \dots, 2^m\}$, такое что $x_i^{(n)} = x_j^{(m)}$, и это j нечетное (см. Приложение).

Для изучения свойств номеров совпадающих стационарных точек $F^{(n)}$ и $F^{(m)}$, где $m = kn$, был проведен следующий вычислительный эксперимент. Перебором всех возможных пар (i, j) , из $i = 1, 2, \dots, 2^n$, $j = 1, \dots, 2^{kn}$, для значений $n = 1, \dots, 10$, $k = 2, \dots, 7$, были получены пары номеров, удовлетворяющих условиям (4.2.2–4.2.5). Из анализа полученных пар (i, j) получены зависимости $j(i)$, где $i = 1, 2, \dots, 2^n$, $j \in \{1, \dots, 2^{kn}\}$.

$$j(i) = \begin{cases} \left(\sum_{l=1}^k 2^{(k-l)n} \right) (i-1) + 1, & i = 1, 3, \dots, 2^n - 1, \\ \left(\sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} 2^{(k-l)n} \right) i + 1 - r(k), & i = 2, 4, \dots, 2^n, \end{cases} \quad (4.2.6)$$

$$\text{где } r(k) = k - 2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \equiv \begin{cases} 1, & k - \text{нечетное} \\ 0, & k - \text{четное} \end{cases}.$$

Здесь скобки $\lfloor \rfloor$ обозначают целую часть от числа.

Формула (4.2.6) показывает, что зависимость j от i линейная.

Наличие члена $r(k)$, равного единицы при нечетных k , отражает тот факт, что при нечетных k при увеличении i на единицу четность $j(i)$ меняется: нечетным i соответствуют нечетные j , а четным i соответствуют четные j . В случае четного k $r(k) = 0$, четность сохраняется и j принимает только нечетные значения при всех i .

Это означает, что при соприкосновении треугольников, отвечающих кратным циклам, существует следующая закономерность. Когда отношение периодов число нечетное, то области на биссектрисе, соответствующие меньшему треугольнику (большой цикл) всегда внутри большего треугольника (меньший цикл). Когда отношение периодов четно, то при пересечении нечетных сторон, область внутри меньшего треугольника находится внутри большего треугольника, а при пересечении четной стороны большего треугольника с нечетной стороной меньшего треугольника область внутри меньшего треугольника находится снаружи.

Приложение (доказательство утверждения 4.12.)

Обозначения: {нч} – множество нечетных чисел,
{чт} – множество четных чисел.

1. Из (4.2.2) получим

$$j = 2^n(i-1) + i, \text{ где } i = 1, 3, \dots, 2^n - 1, j = 1, 3, \dots, 2^{2n} - 1. \quad (4.2.2')$$

Откуда следует

$$1) i \in \{\text{нч}\} \Leftrightarrow j \in \{\text{нч}\},$$

$$2) i = 1 \Rightarrow j(i) = 1,$$

3) Подставляя $i_{\max} = 2^n - 1$ в (4.2.2'), получим

$$j(i_{\max}) = 2^n(2^n - 2) + 2^n - 1 = 2^{2n} - 2^n - 1 < 2^{2n} - 1 = j_{\max},$$

$$\text{т. е. } j(i_{\max}) \leq j_{\max}.$$

Из 1), 2), 3) следует, что для всех нечетных $i = 1, 3, \dots, 2^n - 1$ существует нечетное $j(i) \in \{1, \dots, 2^{2n} - 1\}$.

2. Из 4.2.4 получим

$$j = (2^n - 1)i + 1, \text{ где } i = 2, 4, \dots, 2^n, j = 1, 3, \dots, 2^{2n} - 1. \quad (4.2.4')$$

Откуда следует

$$1) i \in \{\text{чт}\} \Leftrightarrow j \in \{\text{нч}\},$$

$$2) i = 1 \Rightarrow j(i) > 1,$$

3) подставляя $i_{\max} = 2^n$ в (4.2.4'), получим

$$j(i_{\max}) = (2^n - 1)2^n + 1 = 2^{2n} - 2^n + 1 < 2^{2n} - 1 = j_{\max},$$

$$\text{т. е. } j(i_{\max}) \leq j_{\max}.$$

Из 1), 2), 3) следует, что для всех четных $i = 2, 4, \dots, 2^n$ существует нечетное $j(i) \in \{1, \dots, 2^{2n} - 1\}$.

3. Надо доказать, что уравнение (4.2.3) не имеет целых корней i, j , при условии, что нечетное $i \in \{1, \dots, 2^{2n} - 1\}$, четное $j \in \{2, \dots, 2^{2n}\}$.

$$\text{Из (4.2.3) получим } i - 1 = \frac{(2^n - 1)j}{2^{2n} + 1}.$$

Надо показать:

$$\text{если } j = 2, 4, \dots, 2^{2n}, \text{ то } i - 1 = \frac{(2^n - 1)j}{2^{2n} + 1} \notin \mathbb{N}.$$

Обозначим $a = 2^n - 1, b = j, c = 2^{2n} + 1$.

$$1) \frac{b}{c} = \frac{j}{2^{2n} + 1} \notin \mathbb{N}, \quad j = 2, 4, \dots, 2^{2n},$$

$$2) \frac{a}{c} = \frac{(2^n - 1)j}{2^{2n} + 1} - \text{несократимая дробь.}$$

Доказательство 2:

$$c = (2^n - 1)(2^n + 1) + 2 = a(a + 2) + 2 = a^2 + 2a + 2.$$

$a^2 + 2a$ – делится на все делители числа a , и a – нечетное.
Значит, a и c – взаимно простые числа.

Из 1) и 2) следует неделимость $\frac{ab}{c}$.

4. Надо доказать, что уравнение (4.2.5) не имеет целых четных корней i, j , при условии, что $i \in \{2, \dots, 2^n\}$, $j \in \{2, \dots, 2^{2n}\}$.

$$\text{Из (4.2.3) получим: } i - 1 = \frac{(2^n + 1)j}{2^{2n} + 1}.$$

Надо показать:

$$\text{если } j = 2, 4, \dots, 2^{2n}, \text{ то } i - 1 = \frac{(2^n + 1)j}{2^{2n} + 1} \notin \mathbb{N}.$$

$$\text{Обозначим: } a = 2^n + 1, \quad b = j, \quad c = 2^{2n} + 1.$$

$$1) \frac{b}{c} = \frac{j}{2^{2n} + 1} \notin \mathbb{N}, \quad j = 2, 4, \dots, 2^{2n},$$

$$2) \frac{a}{c} = \frac{(2^n + 1)j}{2^{2n} + 1} - \text{несократимая дробь.}$$

Доказательство 2 аналогично доказательству в п. 3.

Из 1) и 2) следует неделимость $\frac{ab}{c}$.

Таким образом, для любого $i = 1, 2, \dots, 2^n$ не существует четного j из $\{2, \dots, 2^m\}$, удовлетворяющего равенствам (4.2.3) и (4.2.5) при $m = 2n$.

4.2.2. Порядок Шарковского и треугольное отображение

Треугольное отображение, дополненное ступенькой d после точки равновесия, довольно похоже на экологическое отображение, и с ним проще работать. Поэтому все дальнейшие результаты исследования переходных зон получены именно на нем.

А. Н. Шарковский в 1964 г. доказал теорему о наличии следующей закономерности («порядка Шарковского»)

$$\begin{aligned} 3 &\rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 13 \dots \\ &\rightarrow 3 \cdot 2 \rightarrow 5 \cdot 2 \rightarrow 7 \cdot 2 \rightarrow 9 \cdot 2 \rightarrow 11 \cdot 2 \rightarrow 13 \cdot 2 \rightarrow \dots \\ &\rightarrow 3 \cdot 2^2 \rightarrow 5 \cdot 2^2 \rightarrow 7 \cdot 2^2 \rightarrow 9 \cdot 2^2 \rightarrow 11 \cdot 2^2 \rightarrow 13 \cdot 2^2 \rightarrow \dots \\ &\rightarrow 2^n \rightarrow 2^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow 2^5 \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Стрелка означает «влечет за собой».

Одной из целей данного исследования была проверка теоремы Шарковского, на конкретном материале изучения треугольного отображения, дополненного «ступенькой» (с тайной надеждой на ее опровержение). Проводилось «бифуркационное исследование» – определение циклов, которые возникают по мере опускания ступеньки. Инструментарий ЛВ идеально подходит для анализа результатов вычислительных экспериментов с опусканием ступеньки. Если ступенька находится в некотором месте, то ее пересекают ЛВ n , реализуется ЛВ с наименьшим номером, среди тех ЛВ n , которые выше графика исходной функции. Таким образом, анализ последовательности возникновения циклов при «опускании ступеньки» сводится к исследованию смены минимальных номеров ЛВ n , которые выше графика исходной функции.

Для определения таких номеров проведем следующую процедуру: будем последовательно рассматривать ЛВ с возрастающим номером n . В таком процессе появляются области разрешенные, в которых отсутствуют ЛВ n , которые выше графика исходной функции и с номерами меньшими n , и запрещенные области, в которых уже есть такие ЛВ n , которые выше графика исходной функции и с номерами меньшими n . Запрещенную область будем называть теневой, и когда зубец с очередным номером n попадает в занятую, теневую область, будем говорить, что зубец попал в тень.

Разрешенные области образуют «псевдоканторово множество» – область с «выброшенными фрагментами». Это «решето» может быть вычислено непосредственно по формулам пересечения ЛВ с графиком исходной функции, а может быть определено и косвенным образом из соображений симметрии.

Рассмотрим процесс опускания ступеньки от положения равновесия (ПР). Сначала идет цикл периода 2, поскольку ЛВ1 в зоне двойки находится выше графика исходной функции. Затем в точке пересечения ЛВ1, ЛВ2 и графика исходной функции (при 2/5) линия ЛВ1 уходит под графиком исходной функции, а выше графика исходной функции оказывается ЛВ2 и возникают циклы периода 4. Потом ЛВ2 уходит под график исходной функции, но в этой точке нет ЛВ3, характеризующей цикл периода 6. Возникает «дыра». И в этой дыре реализуются все четные циклы. Причем (при опускании ступеньки) последовательно возникают циклы в соответствии с теоремой Шарковского и те циклы, которые эта теорема не запрещает.

Координаты цикла периода $(n+1)$ в зоне формирования ЛВ определяются, исходя из анализа точек пересечения ЛВ k , сформированными F^n и графиком исходной функции.

Уравнения для определения координат точек периодических траекторий, находящихся правее ПР. Эти точки находятся на пересечении графика исходной функции с фрагментами ЛВ, полученных зеркальным поворотом $F^{(n)}$ через бис-

сектрису на 90 градусов вправо. Уравнения для их определения имеют вид (4.1.1).

Имеет место утверждение 4.13.

Утверждение 4.13. Между точками периода 4 и 6 находятся все четные циклы.

Рассматривая последовательно ЛВ со все большими номерами n , приходим к следующей последовательности циклов:

$$\begin{aligned}
 &4, 8, 6; \\
 &4, 8, 10, 6; \\
 &4, 8, 12, 10, 6; \\
 &4, 8, 12, 14, 10, 14, 6; \\
 &4, 8, 16, 12, 16, 14, 10, 14, 16, 6; \\
 &4, 8, 16, \underline{12}, 16, \underline{18}, 14, \underline{18}, 10, \underline{18}, 14, \underline{18}, 16, \underline{6}. \quad (4.4.1)
 \end{aligned}$$

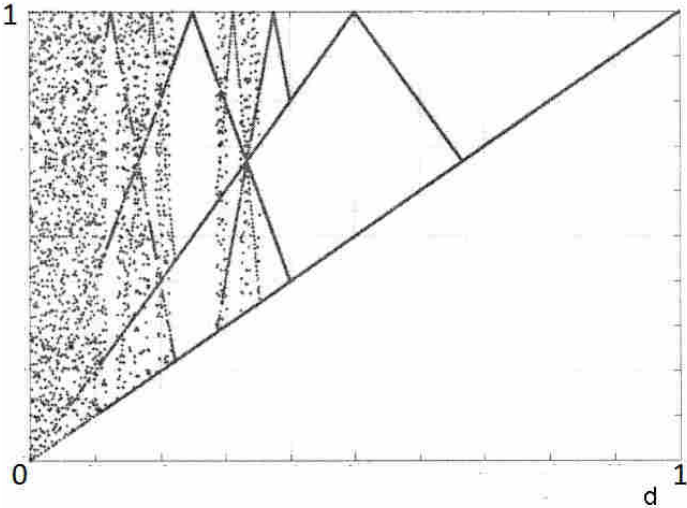


Рис. 4.5. Исходная бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая последовательности (4.4.1)

Рис. 4.5 – 4.9 иллюстрируют (4.4.1).

Приводим результаты расчетов до порядка 18 для последней конфигурации:

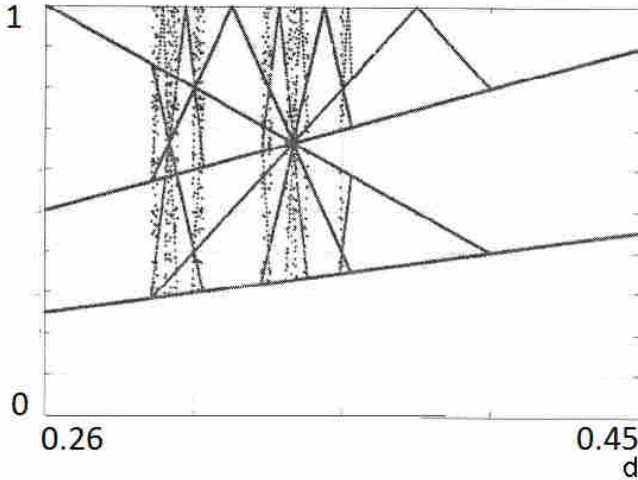


Рис. 4.6. *Фрагмент рис. 4.5*

(цикл 6) $< 22/63 = 0.3492063$;

(цикл 16) $< 22886/65537 = 0.3492073$; $22886/65535 = 0.3492179$;

(цикл 18) $< 91546/262145 = 0.3492189$; $< 91546/262143 = 0.3492216$;

(цикл 14) $< 5722/16384 (+1) = 0.3492218$; < 0.3492644 ;

(цикл 10) $< 358/1024 (+1) = 0.3492682$; < 0.3499511 ;

(цикл 14) $< 5734/16384 (+1) = 0.3499542$; < 0.3499969 ;

(цикл 18) $< 91750/262144 (+1) = 0.3499971$; < 0.3499998 ;

(цикл 16) $< 22942/65537 = 0.35000618$; $22942/65535 = 0.350007432$;

(цикл 12) $< 1434/4096 (+1) = 0.3500122$; < 0.3501831 ;

(цикл 16) $< 22950/65536 (+1) = 0.3501838$; < 0.3501945 .

Используя приведенные выше формулы для расчета координат пересечения соответствующих ЛВ с ГИФ, получен описанный выше порядок возникновения циклов со все большими периодами. Анализ проведенных расчетов показал, что можно указать такой порядок возникновения, не прибегая к прямым расчетам, а используя эмпирически полученные пра-

вила. При рассмотрении последующего (большого) периода опираемся на механизм «размножения» ЛВ – от ЛВ периода n «отпочковываются» с двух сторон по зубцу ЛВ периода $n+1$. (Поскольку это происходит в зоне двойки, то эти новые зубцы характеризуют цикл периода $2 \cdot (n+1)$). Для проверки реализации новых циклов проверяются следующие (эмпирически установленные) правила. Возник новый зубец (ЛВ $n+1$), проверяется разность соседних периодов. Она не может равняться 6 во всем диапазоне между циклами периодов 4 и 6, не может равняться 10 во всем диапазоне между циклами периодов 4 и 10, не может равняться 12 во всем диапазоне между циклами периодов 4 и 12, и т.д.

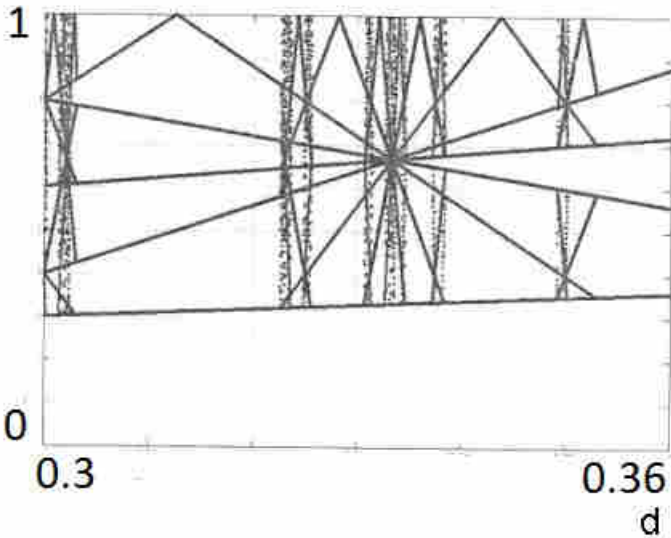


Рис. 4.7. *Фрагмент рис. 4.5*

Эти эмпирические правила основаны на «фрактальных свойствах» ЛВ. Любые ЛВ n и ЛВ m пересекаются с одинаковой координатой по оси абсцисс, определяемой разностью n и m . Этот вывод следует из указанных выше формул. Иллюстрирует этот аспект приведенный ниже рис. 4.6. На рис. 4.6.

четко прослеживается «одинаковая высота» пересечений $ЛВ_n$ и $ЛВ_{n+1}$. Пересечения других ЛВ заметить затруднительно.

Выпишем последовательность возникающих циклов для больших периодов.

Для периода 20: 4, 8, 16, 20, 12, 20, 16, 20, 18, 14, 18, 10, 20, 18, 14, 18, 20, 16, 20, 6.

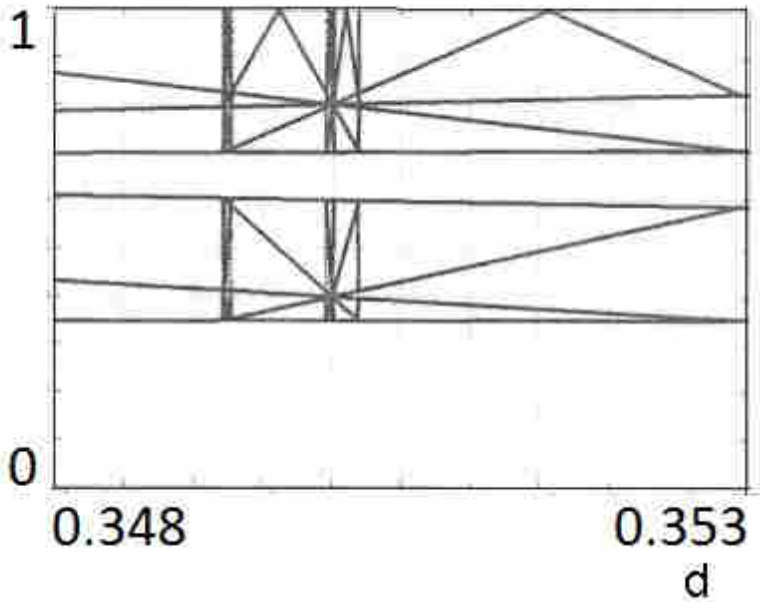


Рис. 4.8. Фрагмент рис. 4.5

Для периода 22: 4, 8, 16, 20, 12, 20, 16, 20, 22, 18, 22, 14, 22, 18, 22, 10, 20, 22, 18, 22, 14, 22, 18, 22, 20, 16, 20, 22, 6.

Для периода 24: 4, 8, 16, 24, 20, 12, 24, 20, 24, 16, 24, 20, 24, 22, 18, 22, 14, 22, 18, 22, 24, 10, 20, 24, 22, 18, 22, 24, 14, 24, 22, 18, 22, 24, 20, 24, 16, 24, 20, 24, 22, 6.

Для периода 26: 4, 8, 16, 24, 20, 12, 24, 20, 24, 16, 24, 20, 24, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 14, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 24,

10, 20, 24, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 24, 26, 14, 26, 24, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 24, 20, 24, 26, 16, 26, 24, 20, 24, 26, 22, 26, 6.

Для периода 28: 4, 8, *16*, 24 (3×8), **28** (7×4), 20 (5×4), 28, 12 (3×4), 24 (3×8), 28, 20, 28, 24, 28, *16*, 28, 24, 28, 20, 28, 24, 28, **26** (13×2), 22 (11×2), **26**, 18 (9×2), **26**, 22, **26**, 14 (7×2), 28, **26**, 22, **26**, 18, **26**, 22, **26**, 28, 24, 28, 10 (5×2), 20 (5×4), 28, 24, 28, **26**, 22, **26**, 28, 18, 28, **26**, 22, **26**, 28, 24, 28, **26**, 14, 28, **26**, 28, 24, 28, **26**, 22, **26**, 28, 18, 28, **26**, 22, **26**, 28, 24, 28, 20, 28, 24, 28, **26**, 28, 16, 28, **26**, 28, 24, 28, 20, 28, 24, 28, **26**, 22, **26**, 28, 6 (3×2).

Приведенные последовательности смены циклов при изменении бифуркационного параметра в рассматриваемом диапазоне не противоречат порядку Шарковского.

Рассмотрим теперь последовательность возникновения периодических траекторий во всем диапазоне изменения параметров ($0 < d < 2/3$), последовательно увеличивая величину их периода.

2
 2, 3
2, 4, 3, 4
2, 4, 5, 3, 5, 4, 5
2, 4, 6, 5, 3, 6, 5, 6, 4, 6, 5, 6
2, 4, 6, 7, 5, 7, 3, 6, 7, 5, 7, 6, 7, 4, 7, 6, 7, 5, 7, 6, 7
2, 4, 8, 6, 7, 8, 5, 8, 7, 3, 6, 7, 8, 5, 8, 7, 6, 7, 4, 8, 7, 6, 7, 8, 5, 8, 7, 8, 6, 8, 7, 8 и т.д.

Используя приведенные выше Утверждения 4.8-4.10, можно сформулировать Утверждение 4.14.

Утверждение 4.14 («гипотеза подобия»). Если реализуется некая последовательность смены четных циклов (при процедуре последовательного увеличения периодов) $a_i \times 2$, то такая последовательность реализуется и при замене 2 на 2^m , ($m = 1, 2, 3, \dots$), т.е. реализуется последовательность $a_i \times 2^m$.

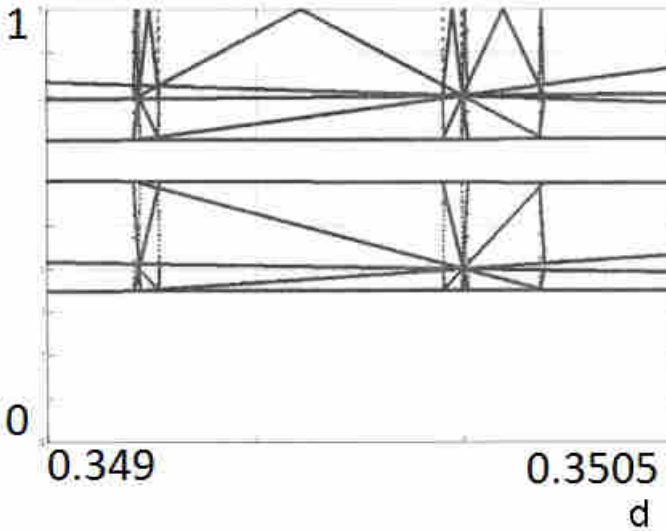


Рис. 4.9. Фрагмент рис. 4.5

Для проверки гипотезы подобия проведено сравнение соответствующих последовательностей циклов

В исходном диапазоне (при рассмотрении последовательности циклов до порядка 16) имеет место последовательность:

2, 4, 8, 16, 12, 16, 14, 10, 14, 16, 6.

Если продолжить эту последовательность до порядка 32 и рассмотреть его фрагмент от 12 до 32 (и примыкающие к 32 циклы 2^n , т.е. – 4, 8, 16, 32, 24, 32, 28, 20, 28, 32, 12... . («формально» «все» умножается на два)

Если в исходной последовательности (от 2, 4, 8, 16 до 6) между 16 и 6 встречаются только четные циклы, то в рассматриваемом фрагменте последовательности между 32 и перед 12 (3×4) должны быть только циклы $n \times 4$, где n – целое число большее трех. И не может быть $n \times 2$, где n – нечетное число.

Что и соответствует теореме Шарковского.

Продолжим рассмотрение. Перед $3 \cdot 2^m$ ($m = 2, 3, 4, \dots$) должны быть только циклы $n \cdot 2^m$, где n – целое число большее трех. И не может быть $n \cdot 2^{m-1}$, где n – нечетное число.

Продолжая рассмотрение до порядка 52 ($4 \cdot 13$), получаем 4, 8, 16, 32, 48 ($3 \cdot 16$), 40, 24, 48, 40, 48, 32, 48, 40, 48, 52,

В табл. 4.1 проведено сравнение последовательности циклов в соответствующих диапазонах – для периодов до 26 и при рассмотрении последовательности до порядка 52 – фрагмент от 16, 32 до 20.

Также с помощью вычислительного эксперимента проверялись утверждения об удвоении.

Есть зубец периода n , который принадлежит множеству натуральных чисел N . Существует зубец периода $2 \times n$, который совпадает с одним из краев зубца n , другой зубец совпадает с другим краем зубца n . Такая возможность основана на рассмотрении точек пересечения F^m с биссектрисой первого угла, которые определяют точки, формирующие цикл периода n . Циклы периода $2 \times n$ и n имеют общие точки. Отсюда следует необходимость пересечения соответствующих зубцов ЛВ.

Такое пересечение следует из формулы $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, где $a = 2^n$, $b = 1$.

Таблица 4.1. Сравнение последовательностей циклов для порядка 26 и 52

Для периода 26	4, 8, 16, 24, 20, <u>12, 24</u> , 20, 24, 16, 24, 20, 24, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 14, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 24, <u>10, 20</u> , 24, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 24, 26, 14, 26, 24, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 24, 20, 24, 26, 16, 26, 24, 20, 24, 26, 22, 26, 6.
----------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Продолжение табл. 4.1

Для периода 52	16, 32, 48, 40, 24, 48, 40, 48, 32, 48, 40, 48, 52, 44, 52, 36, 52, 44, 52, 28, 52, 44, 52, 36, 52, 44, 52, 48, 20
Формирование последовательности циклов между периодами 16 и 20	16, 20 16, 24, 20 16, 24, 28, 20 16, 32, 24, 32, 28, 20 16, 32, 24, 32, 36, 28, 36, 20 16, 32, 40, 24, 40, 32, 40, 36, 28, 36, 20 16, 32, 40, 24, 40, 32, 40, 44, 36, 44, 28, 44, 36, 44, 20 16, 32, 48, 40, 24, 48, 40, 48, 32, 48, 40, 48, 44, 36, 44, 28, 44, 36, 44, 48, 20 16, 32, 48, 40, 24, 48, 40, 48, 32, 48, 40, 48, 52, 44, 52, 36, 52, 44, 52, 28, 52, 44, 52, 36, 52, 44, 52, 48, 20
Формирование последовательности циклов между периодами 8 и 10	8, 10; 8, 12, 10; 8, 12, 14, 10; 8, 16, 12, 16, 14, 10; 8, 16, <u>12</u> , 16, <u>18</u> , <u>14</u> , <u>18</u> , 10; 8, 16, 20, 12, 20, 16, 20, 18, 14, 18, 10 8, 16, 20, 12, 20, 16, 20, 22, 18, 22, 14, 22, 18, 22, <u>10</u> . 8, 16, 24, 20, <u>12</u> , <u>24</u> , 20, 24, 16, 24, 20, 24, 22, 18, 22, 14, 22, 18, 22, 24, <u>10</u> . 8, 16, 24, 20, <u>12</u> , <u>24</u> , 20, 24,

Продолжение табл. 4.1

	16, 24, 20, 24, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 14, 26, 22, 26, 18, 26, 22, 26, 24, <u>10</u> .
Формирование последовательности циклов между периодами 32 и 40	16, 32, 40 16, 32, 48, 40
Формирование последовательности циклов между периодами 8 и 10	4, 8, 10 4, 8, 12, 10

Зубец периода n формирует две точки периода n при пересечении с ГИФ. Координаты рассчитываются по формулам 4.1.1. Из этих формулы следует, что левый край зубца $2n$ совпадает с одним из краев зубца n . Ближний (к положению равновесия) зубец периода $2n$ попадает в тень зубца n , а второй зубец периода $2n$ остается на «свету».

Вычислительные эксперименты показали следующее. Имеют место последовательности: 2, 4, 8, 16; 3, 6, 12; 4, 8, 16; 5, 10, 20; 6, 12; 7, 14; 8, 16; 9, 18; 10, 20.

Для циклов 2, 4, 8, 16 имеет место следующая последовательность, представленная в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Координаты циклов «удвоения», имеющих точки пересечения

n	i	x_1	x_2
2		0.6666666666666666	0.4000000000000000
	4	0.4000000000000000	0.352941176471
	8	0.352941176471	0.350194552529
	16	0.350194552529	0.350183865603

Продолжение табл. 4.2

3	1	0.285714285714	0.222222222222
6	4	0.222222222222	0.215384615385
12	221	0.215384615385	0.215279472785
4	1	0.133333333333	0.117647058824
8	8	0.117647058824	0.116731517510
16	1913	0.116731517510	0.116727955201
5	1	0.064516129032	0.060606060606
10	16	0.060606060606	0.060487804878
20	15857	0.060487804878	0.060487689507
5	2	0.193548387097	0.181818181818
10	47	0.181818181818	0.181463414634
20	47570	0.181463414634	0.181463068520
5	3	0.322580645161	0.303030303030
10	78	0.303030303030	0.302439024390
20	79283	0.302439024390	0.302438447534

В табл. 4.3 представлены последовательности для циклов 2, 4, 8, 16.

Таблица 4.3. Последовательности для циклов 2, 4, 8, 16

n	x_1	x_2
2	0.666666666667	0.400000000000
4	0.400000000000	0.352941176471
8	0.352941176471	0.350194552529
16	0.350194552529	0.350183865603

При этом один из зубцов третьей линии возврата, характеризующий цикл периода 4, попадает в тень зубца, характеризующего период 2:

в цикле 4 – 0.666666666667 0.588235294118 (в «тени» цикла периода 2).

Тем самым иллюстрируется утверждение 4.10. «Непосредственно перед любым циклом периода n не может быть циклов с периодом $n \times 2^m$, ($m = 1, 2, 3..$).»

Аналогично для последовательностей «3, 6, 12.», «4, 8, 16.», «5, 10, 20.» Рассмотрим последовательность 3, 6, 12 в соответствии с таблицей 4.4.

Таблица 4.4. Последовательность для циклов 3, 6, 12

n	x_1	x_2
3	0.285714285714	0.222222222222
6	0.222222222222	0.215384615385
12	0.215384615385	0.215279472785

При этом один из зубцов пятой линии возврата, характеризующий цикл периода 6 попадает в тень зубца, характеризующего период 3:

в цикле 6 – 0.285714285714 0.276923076923.

Для цикла периода 6, 7 и т.д. имеют место все три утверждения про удвоение для каждого из зубцов.

Одной из целей данного исследования является поиск связи между порядком Шарковского и порядком появления простых чисел. При подсчете количества циклов оказывает влияние факт: является ли период цикла простым числом (если период цикла простое число, то справедлива малая теорема Ферма).

В порядке Шарковского не выделяются простые числа. Это позволяет надеяться, что можно найти связь теоремы Шарковского с алгоритмом нахождения простых чисел.

Должны иметь точки пересечения циклы – период одного является составным числом, а период второго является одним из делителей (например, 9 и 3). Как показало сравнение

этих циклов, оба зубца цикла 9, имеющие общие точки с циклом периода 3, оказались в тени цикла периода 3.

Такая возможность следует из формул сокращенного умножения. Пересечения скатов, которые ближе к ПР, приводят к тому, что зубец большего периода оказывается в тени.

Далее, пересечения скатов, которые дальше от ПР, приводят к тому, что зубец большего периода оказывается в тени, если делитель периода нечетное число, и оказывается на свету, если делитель периода четное число.

Это следует из формул

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \dots - a^2b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1});$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a^n + b^n)(a^n - b^n);$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

где $n \in \mathbb{N}$.

В таблицах 4.1-4.7 представлены данные взаимодействия циклов.

Таблица 4.5. *Взаимодействие цикла периода 9 с циклом периода 3*

n	i	x_1	x_2
3	1	0.2857142857142857	0.2222222222222222
9	29	0.22309198	0.22222222
9	37	0.28571429	0.28460039

Таблица 4.6. Взаимодействие цикла периода 12
с циклами периодов 6, 4, 3, 2

n	i	x_1	x_2
2	1	0.6666666666666666	0.4000000000000000
3	1	0.2857142857142857	0.2222222222222222
4	1	0.133333333	0.11764706
4	2	0.40000000	0.35294118
6	1	0.03174603	0.03076923
6	2	0.09523810	0.09230769
6	3	0.15873016	0.15384615
6	4	0.22222222	0.21538462
6	6	0.34920635	0.33846154
12	32	0.03076923	0.03075421
12	33	0.03174603	0.03173053
12	95	0.09230769	0.09226263
12	98	0.09523810	0.09519160
12	121	0.11770452	0.11764706
12	137	0.13333333	0.13326825
12	158	0.15384615	0.15377105
12	163	0.15873016	0.15865267
12	221	0.21538462	0.21527947
12	228	0.22222222	0.22211374
12	293	0.28571429	0.28557481
12	347	0.33846154	0.33829631
12	358	0.34920635	0.34903588
12	362	0.35311355	0.35294118
12	410	0.40000000	0.39980474
12	683	0.66666667	0.66634123

Таблица 4.7. *Взаимодействие цикла периода 15 с циклами периодов 5, 3*

n	i	x_1	x_2
15	1821	0.22223579	0.22222222
3	1	0.2857142857142857	0.2222222222222222
15	2341	0.28571429	0.28569685
15	497	0.06060976	0.06060606
5	1	0.06451613	0.06060606
15	529	0.06451613	0.06451219
15	1490	0.18182928	0.18181818
5	2	0.19354839	0.18181818
15	1586	0.19354839	0.19353657
15	2483	0.30304880	0.30303030
5	3	0.32258065	0.30303030
15	2643	0.32258065	0.32256096

Подведем некоторые итоги проведенным исследованиям. Из экологической задачи появился нетрадиционный вид разностных уравнений. Вычислительный эксперимент показал наличие порядка натурального ряда в зонах стабильности, которые разделены переходными зонами с более сложными динамическими режимами. Для исследования переходных зон было выбрано треугольное отображение, а также треугольное отображение, дополненное «ступенькой». Одной из целей работ является проверка выполнения теоремы Шарковского, точнее, его утверждения о порядке наличия циклов различных периодов. Для этих функций было получено некоторое обобщение порядков Шарковского, что основано на вычислительных экспериментах с данными типами функций. Сформулирован ряд утверждений (гипотез) о порядке следования циклов при изменении бифуркационного параметра. Эти утверждения проверялись с помощью вычислительных экспериментов и частично с помощью аналитических выкладок.

4.3. Исследование отображений с помощью метрических эpsilon-сетей

4.3.1. Аналоги треугольного отображения

Система. Рассмотрим более подробно разностное уравнение, связывающее нормированную численность леммингов в двух соседних годах (3.2). Для общности дальнейшего изложения обозначим $Y(t) = \tilde{L}_t$. В случае $P = 2$ и $r = 100$ можно говорить и о других аналогах треугольного отображения. Зададим параметр A , и пусть $d(A) = 1 - r(A - 1/P)$. В этом разделе мы будем, если не оговорено другое, исследовать траекторию, стартующую со «ступеньки» $d(A)$, т.е. исследовать свойства устойчивого цикла развития системы: $Y(0) = d(A)$. Для $t = 1, 2, \dots$ рассчитаем $Y(t+1)$ по $Y(t)$ согласно формуле (3.2). Нас будут интересовать различные характеристики этой траектории: множество достижимых состояний системы $Y(t)$ при различных t , циклические структуры траекторий, их периоды и т.п. при различных сочетаниях значений параметров P , r и $d(A)$. Пусть величины A , P и r заданы. Они однозначно определяют величину $d(A)$. В дальнейшем в данном разделе зависимость d от A будет опускаться.

Объекты исследования. Нас будут интересовать следующие *множества и показатели*. Прежде всего в пространстве параметра d и фазы Y рассмотрим множество

$$A(d) = \{(d, Y(t)), t = 0, \dots, N\}.$$

В дальнейшем принято $N = 1000$. Построим и исследуем множества $A(d)$ для всех $d \in [0, 1]$:

$$A = \{A(d): d \in [0, 1]\}.$$

Эти множества при больших значениях N можно считать приближениями аттрактора рассматриваемой системы.

Нас также будет интересовать величина, характеризующая периодичность рассматриваемой траектории:

$$Period(d) = \min \{t: |Y(t) - d| \leq \Delta, t = 1, \dots, N\},$$

где Δ – заданная точность «замыкания» цикла. В дальнейших исследованиях, если не оговорено другое, принято $\Delta = 10^{-8}$.

Нас также будут интересовать множества

$$B(d) = \{(d, Y(t), \text{Period}(d)), t = 0, \dots, N\},$$

$$B = \{B(d): d \in [0, 1]\},$$

которые представляют график длины цикла, заданный в точках (d, Y) аттрактора A .

Мы будем также рассматривать карты периода цикла как функции параметров P и d (при фиксированном значении r), т.е. множества

$$C = (P, d, \text{Period}(d)).$$

Метод исследования. Будем исследовать рассматриваемое отображение с помощью его визуализации. Однако предварительно его необходимо построить в явном виде. Применяемая в настоящей работе технология исследований разрабатывалась в Вычислительном центре РАН им. А. А. Дородницына, начиная с 80-х годов прошлого века. Она носит название метода множеств достижимости / метода достижимых целей. Подробно она описана ниже в разд. 5.

Приведем краткое описание применяемой технологии для случая аппроксимации и визуализации нелинейных отображений. Множество T называется метрической ε -сетью для множества S , если любая точка S расположена на расстоянии не большем, чем ε от некоторой точки T . Метрические сети позволяют кодировать бесконечные вполне ограниченные множества конечными наборами точек. Если T – метрическая ε -сеть для S , то ε -окрестность T , т.е. множество $(T)_\varepsilon$, аппроксимирует множество S . Это значит, что $T \subset S \cup \{B(x, \varepsilon): x \in T\}$, где $B(x, \varepsilon)$ есть шар радиуса ε с центром в точке x . Таким образом, чем меньше ε , тем точнее аппроксимация, но тем больше требуется точек метрической сети. В методе множеств достижимости для нелинейных систем для построения аппроксимаций используется метод глубоких ям [21].

На рис. 4.10-4.12 представлены аппроксимации различных множеств. Поскольку используется метрика Чебышева, то метрические шары являются кубами (в двумерном случае – квадратами). Поэтому двумерные множества состоят из совокупности мелких квадратов. Трехмерные множества состоят из совокупности мелких кубов. Изображаются их двумерные сечения, каждому сечению соответствует свой цвет. Для визуализации используется технология диалоговых карт решений [22, 23].

Исследование периода. На бифуркационной диаграмме рис. 4.10 с помощью метрических эpsilon-сетей представлена аппроксимация множества $A = \{A(d): d \in [0, 1]\}$. На рисунках по оси абсцисс отложен параметр d , а по оси ординат – множество значений $Y(t)$ при $t = 0, \dots, N$.

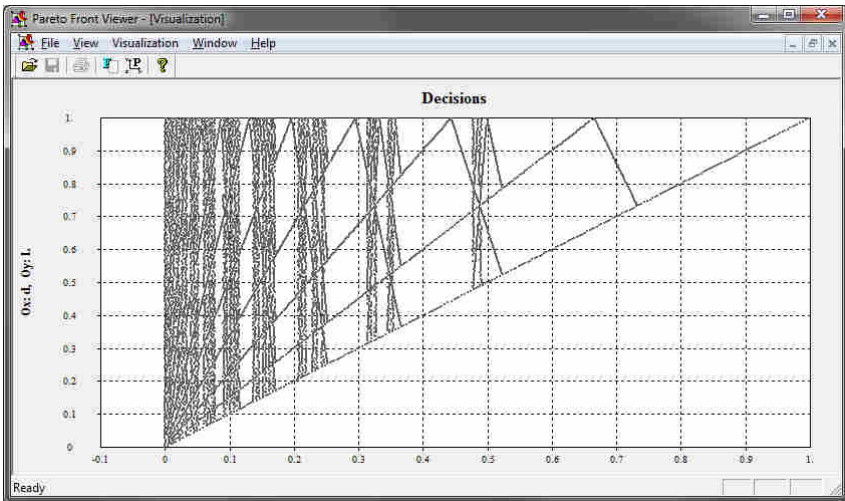


Рис. 4.10. Бифуркационная диаграмма для (3.2)
при $P = 1.5, r = 4$

Из рис. 4.10 видны те же свойства возрастающего хаотического поведения системы при приближении параметра d к 0, как и описанные в предыдущем разделе.

На рис. 4.11 представлена аппроксимация множества $B = \{B(d): d \in [0.01, 1]\}$ с помощью метрических эпсилон-сетей. Множество B являются расслоениями множества A по показателю $Period(d)$, т.е. графиком этой функции в точках A .

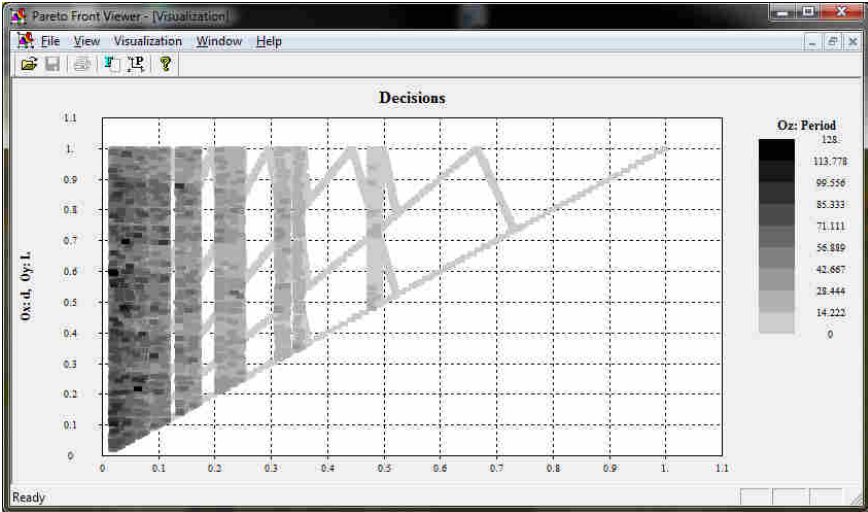


Рис. 4.11. Расслоение бифуркационной диаграммы для (3.2) по периоду цикла при $P = 1.5$, $r = 4$

По оси абсцисс отложен параметр d , а по оси ординат – множество значений $Y(t)$ при $t = 0, \dots, N$. Цвет соответствует значению показателя $Period(d)$. Одному и тому же цвету может соответствовать несколько значений величины $Period$. Палитра цветов представлена слева.

Из рис. 4.11 видно, что при приближении значений величины d к нулю возникают траектории со сколь угодно большим периодом. В данном случае изображена часть графика при $d \geq 0.01$, поэтому максимальное значение периода цикла при данных значениях параметров P и r и точности «замыкания» цикла Δ не превышает 128.

Пусть теперь $P = r = 2$, т.е. рассматривается *треугольное отображение, дополненное ступенькой*. На следующем ри-

сунке представлена аппроксимация множества $B = \{B(d) : d \in [0.01, 1]\}$.

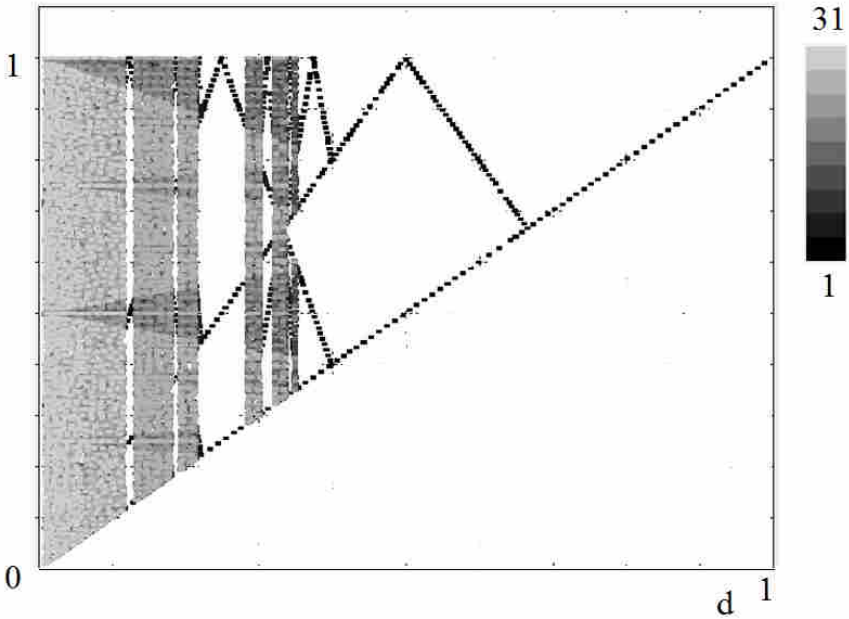


Рис. 4.12. *Расслоение бифуркационной диаграммы для (3.2) по периоду цикла при $P = 2$, $r = 2$*

Шкала справа обозначает период траектории. Поскольку изображена часть графика при $d \geq 0.01$, то максимальное значение периода цикла при данных значениях параметров P и r и точности «замыкания» цикла Δ не превышает 31.

Из рис. 4.12 видно, что слои периодов формируют i -кратные отображения, повернутые на 90 градусов (можно сравнить с рис. 4.1). Численные эксперименты показали справедливость данного утверждения и для логистического отображения (см. ниже).

Карта параметров по периоду. На рис. 4.13-4.16 представлены карты графика $C = (P, d, \text{Period}(d))$ в виде совокупности слоев графика при различных диапазонах значений пе-

риода. Соответствие значений периода цвету (на черно-белом изображении – штриховке) представлено в палитре слева.

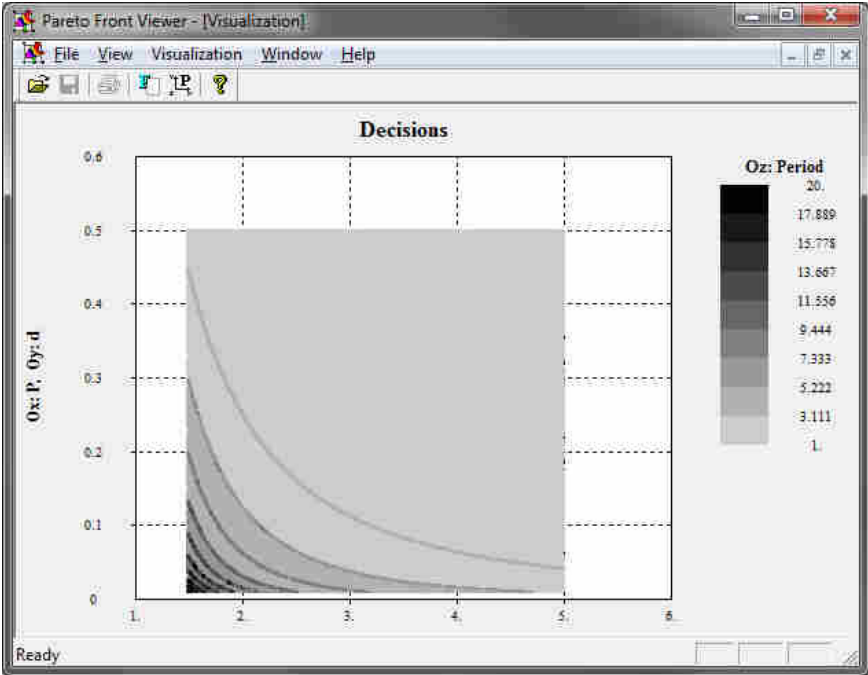


Рис. 4.13. Карта периода цикла для (3.2) при $r = 100$

На рис. 4.13 на абсциссе отложено значение параметра P , на ординате – параметра d . Цветом дано значение $Period(d)$ из диапазона, соответствующего цвету. Например, плато вверху справа характеризует сочетания этих двух параметров, в которых период равен 1, 2 или 3. На черно-белых рис. 4.13-4.16 каждый цвет представлен штриховкой определенной густоты. Видны горные хребты из точек с большим периодом (более темный цвет).

На рис. 4.13 представлены только точки с $P \in [1.5, 5]$ и $d \in [0.01, 0.5]$. Видно, что при приближении к левому нижнему углу (точке с минимальными значениями параметров) значение основного периода резко возрастает, а «хребты» высоких

периодов учащаются. Для рассмотрения случая малых значений параметров рассмотрим рис. 4.14.

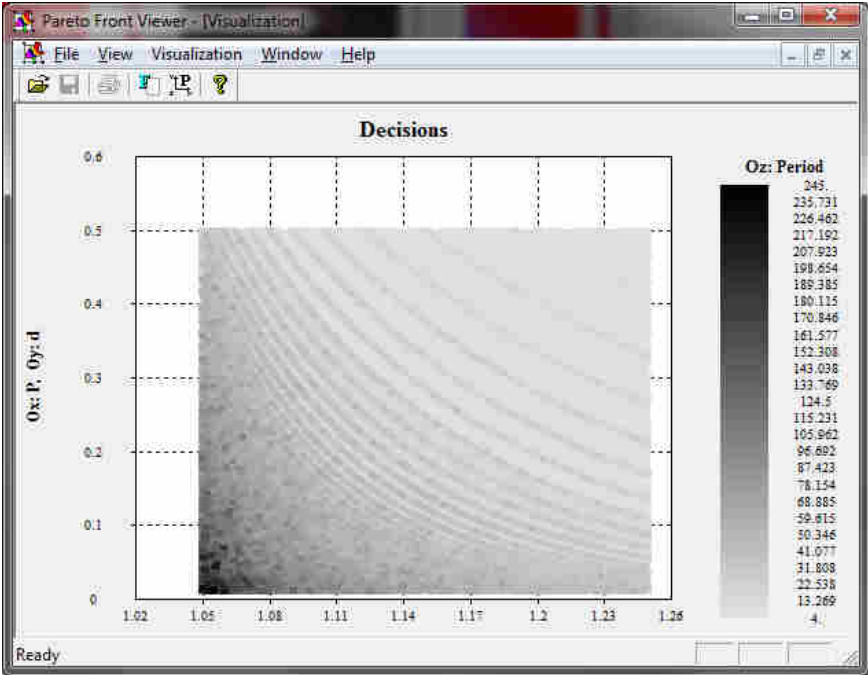


Рис. 4.14. Карта периода цикла для (3.2) при $r = 100$ в области малых параметров P и d

На рассматриваемом рисунке представлены точки с $P \in [1.05, 1.25]$ и $d \in [0.01, 0.5]$. При сравнении с предыдущем рисунком заметно значительное возрастание основного периода и резкое учащение «хребтов» сверхвысоких периодов. При дальнейшем уменьшении параметров P и d период устремляется к бесконечности, т.е. возникает сингулярность периода, которая характеризуется понятием «катастрофа голубого неба».

Рис. 4.15, 4.16 представляют карты периода при $r = 10$.

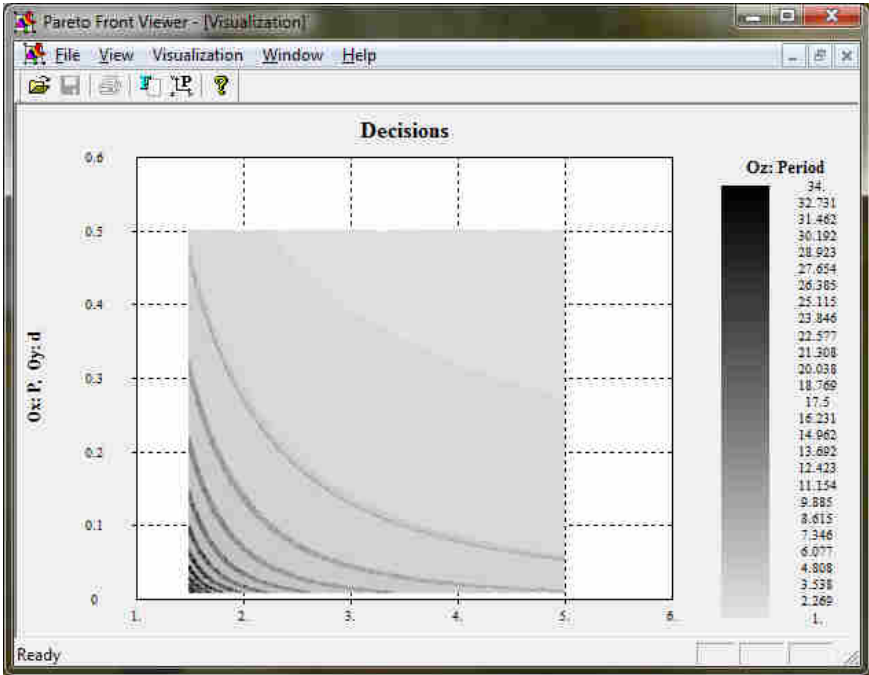


Рис. 4.15. Карта периода цикла для (3.2) при $r = 10$

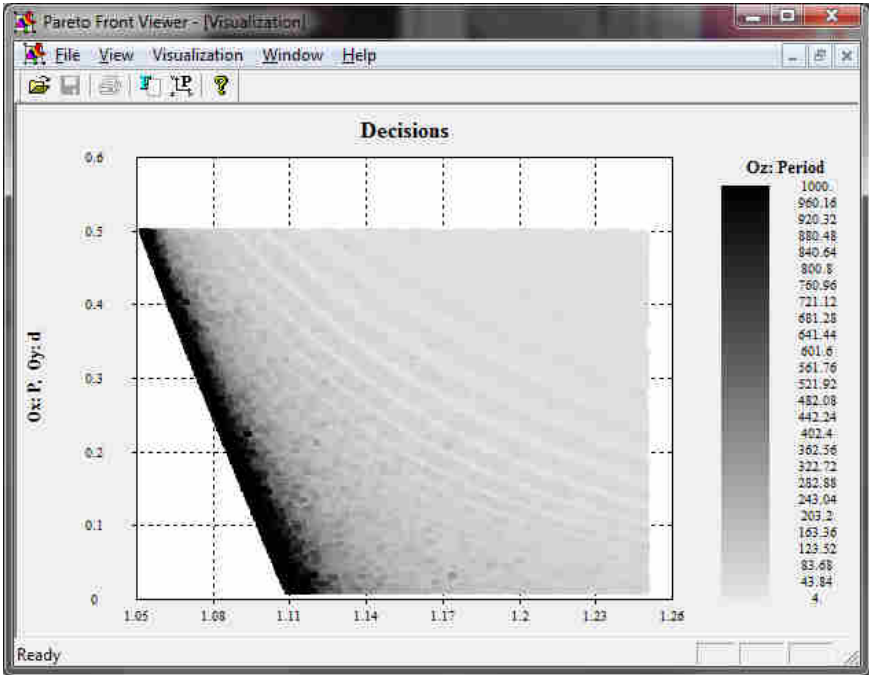


Рис. 4.16. Карта периода цикла для (3.2) при $r = 10$ в области малых параметров P и d (сингулярность «голубого неба»)

В целом, рис. 4.15, 4.16 свидетельствуют об углублении хаотического поведения системы, по сравнению со случаем $r = 100$. На рис. 4.16 в левом нижнем углу отсутствует изображение точек с периодом цикла, большим 1000. В этом случае фронт «катастрофы голубого неба» особенно нагляден.

Зависимость периода от параметра P . Пусть теперь параметры r и d фиксированы. Рассмотрим зависимость функции траектории $Period$ от параметра P .

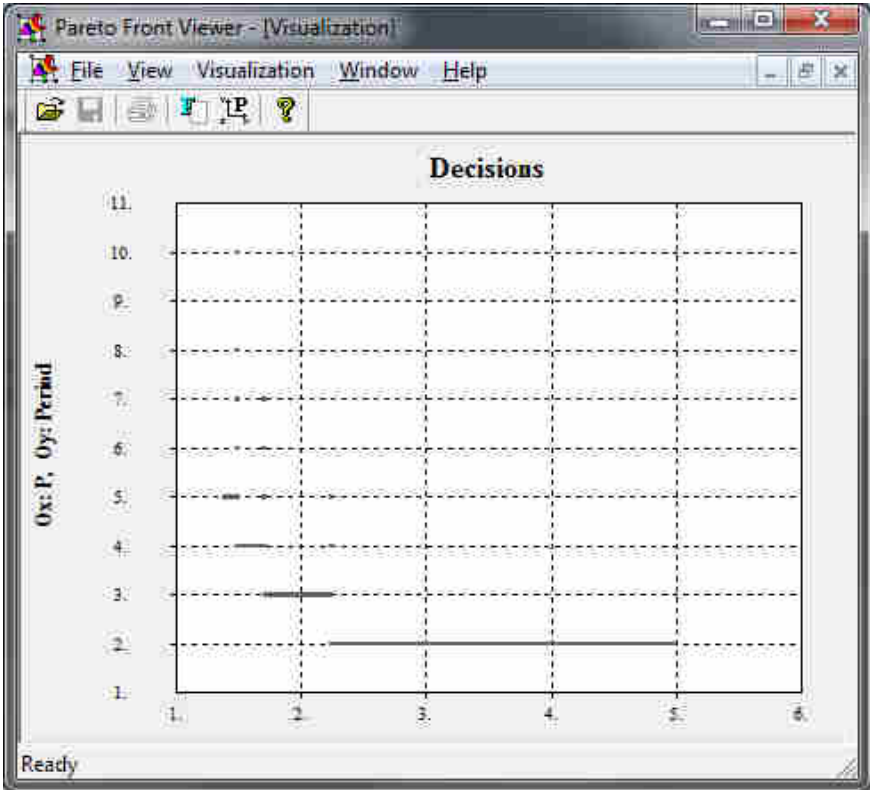


Рис. 4.17. График периода цикла для (3.2) при $r = 100$, $d = 0.2$ в зависимости от параметра P

На рис. 4.17 видно наличие трех «резонансных» значений P , в которых период значительно возрастает.

При уменьшении r (на рис. 4.18 $r = 10$) происходит небольшой сдвиг графика периода вправо, увеличение числа «резонансных» значений P и увеличение пиковых значений периода.

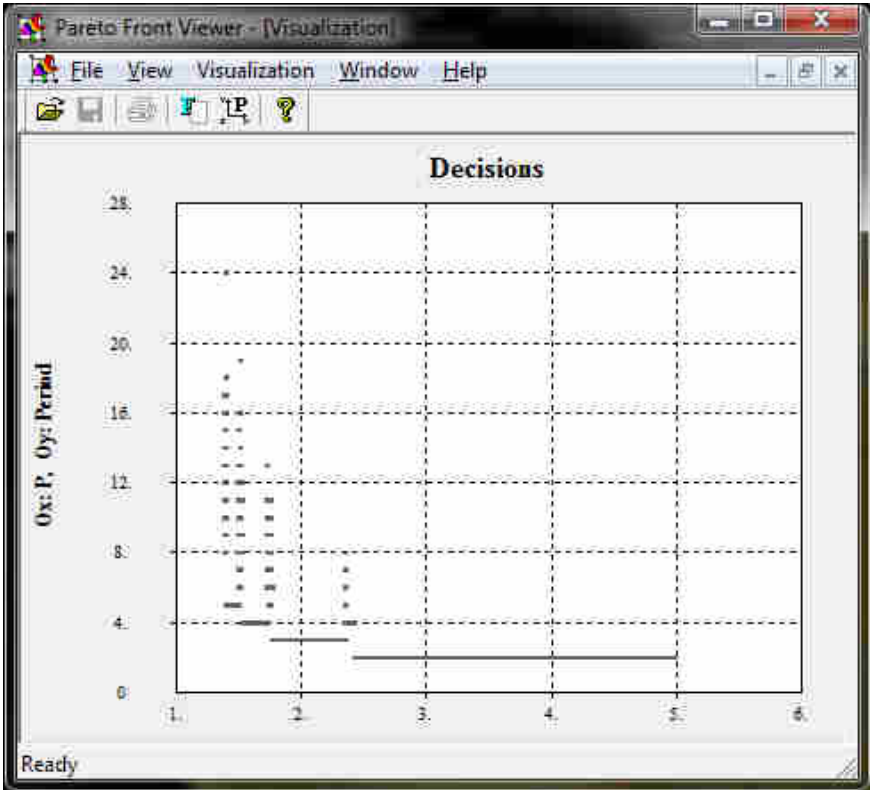


Рис. 4.18. График периода цикла для (3.2) при $r = 10$, $d = 0.2$ в зависимости от параметра P

На рис. 4.19 представлены оба этих графика одновременно. Здесь более темной штриховкой дан график для случая $r = 100$, а более светлой – $r = 10$. Таким образом, с уменьшением значения параметра r происходит усиление «резонансных» характеристик графика периода цикла траектории.

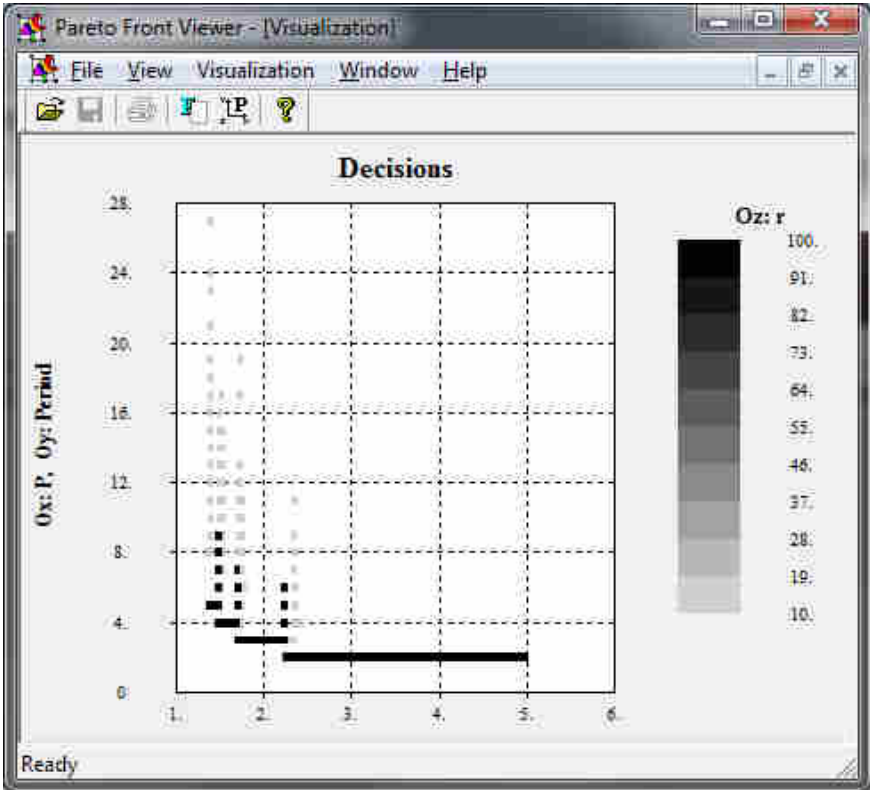


Рис. 4.19. График периода цикла для (3.2) при $d = 0.2$ в зависимости от параметра P в случаях $r = 100$ и $r = 10$

Множество существования. Множество существования определим как множество троек сочетаний значений основных параметров (P, d, r) , для которых период находится в заданном диапазоне. Например, можно рассмотреть множество «резонансных» сочетаний параметров, при которых период цикла больше 5. Это множество изображено на рис. 4.20.

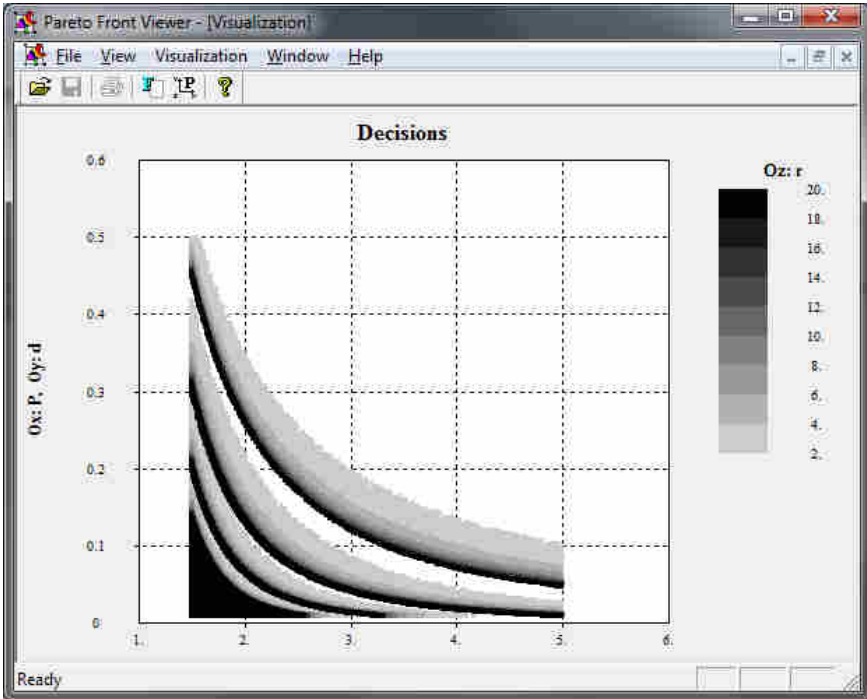


Рис. 4.20. Множество «резонансных» параметров P , d и r для (3.2), при которых $\text{Period} > 5$

По оси абсцисс отложены значения параметра P , а по оси ординат – параметра d . Цветом даны значения параметра r в соответствии с палитрой в правой части рисунка. Напомним, что для всех этих сочетаний значений параметров период цикла траектории превосходит 5.

Видно, что рассматриваемое множество существования лежит в области малых значений параметров P и d . Из рисунка видна структура этого множества – оно представляет из себя трехмерные фрагменты, в пространстве параметров P и d – гиперболического вида, скошенные в третьем измерении в сторону уменьшения этих двух параметров при увеличении r .

В работе [19] приведены подобные результаты.

Трубки траекторий и времени выхода на устойчивый цикл. Пусть параметры P , d и r заданы. В системе (2) зададим $Y(0)$, отличное от «ступеньки» d , $Y(0) \in [0, 1]$, и параметр точности Δ . Для $t = 1, 2, \dots$ рассмотрим множество

$$D(Y(0)) = \{(t, Y(t)) \mid t = 0, \dots, N\},$$

представляющее из себя так называемую «трубку» траекторий рассматриваемой пошаговой динамической системы в пространстве фазы Y и времени t .

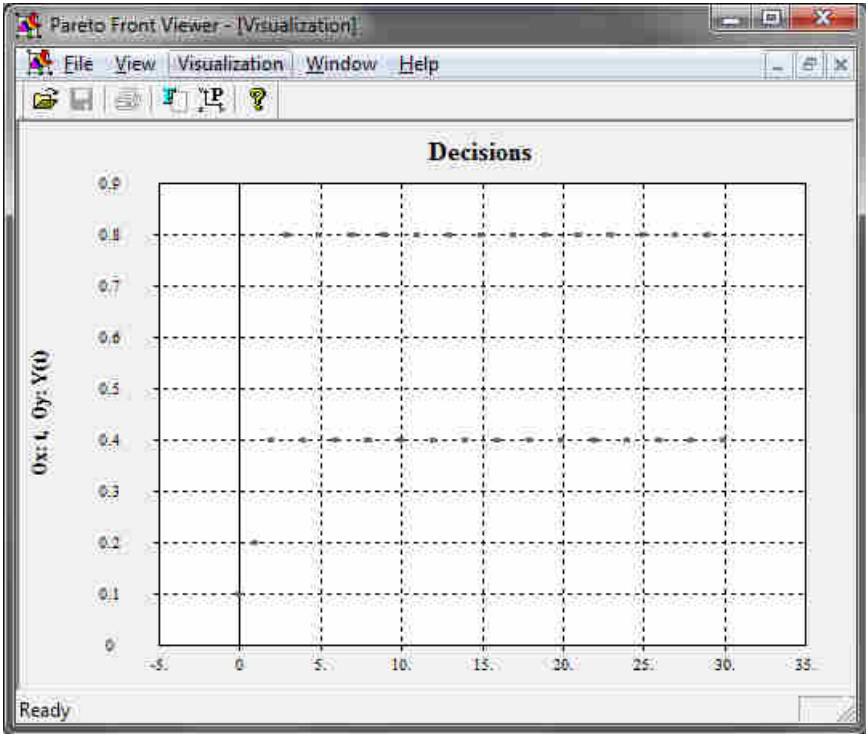


Рис. 4.21. Трубка системы (3.2) из единственной траектории при $Y(0) = 0.1$ и $P = 2$, $d = 0.4$, $r = 10$

Нас также будет интересовать величина
 $Time(Y(0)) = \min \{t: |Y(t) - d(A)| \leq \Delta, t = 0, \dots\}$.

Величина $Time(Y(0))$ показывает, за какое число шагов система окажется в Δ -окрестности «ступеньки» $d(A)$.

На рис. 4.21 представлена «трубка» траекторий, состоящая из единственной траектории, начинающейся в точке $Y(0) = 0.1$ при значениях параметров $P = 2$, $d = 0.4$ и $r = 10$.

По оси абсцисс отложен номер шага t , а по оси ординат – значение $Y(t)$, полученное для данного единственного начального значения при выбранных значениях параметров P , d и r . Видно, что уже на четверном шаге траектория попадает на ступеньку $Y(t) = d = 0.4$. Далее происходит цикл колебаний между ступенькой и еще одной точкой аттрактора – $Y(t) = 0.8$. Длина цикла в этом случае составляет величину 2 шага.

На рис. 4.22 представлена трубка всех возможных траекторий, т.е. для всех $Y(0) \in [0, 1]$.

По оси абсцисс также отложен номер шага t , а по оси ординат – значение $Y(t)$, полученное для начального значения $Y(0)$ при выбранных значениях параметров P , d и r . Начальные значения представлены на палитре справа. Так самый светлый слой соответствует минимальным значениям $Y(0)$ в диапазоне от 0 до 0.05. Видно, что уже на 20 шаге все траектории попадают на ступеньку $Y(t) = d = 0.4$. Далее происходит цикл колебаний между ступенькой и еще одной точкой аттрактора – $Y(t) = 0.8$, причем некоторые траектории колеблются в противофазе (цвета на ступеньке чередуются). Позже всех на ступеньку выходят траектории со значениями $Y(0)$ около нуля (крайняя точка – 18 шагов). Всем остальным для этого требуется около 5 шагов. Длина цикла во всех случаях составляет величину 2 шага.

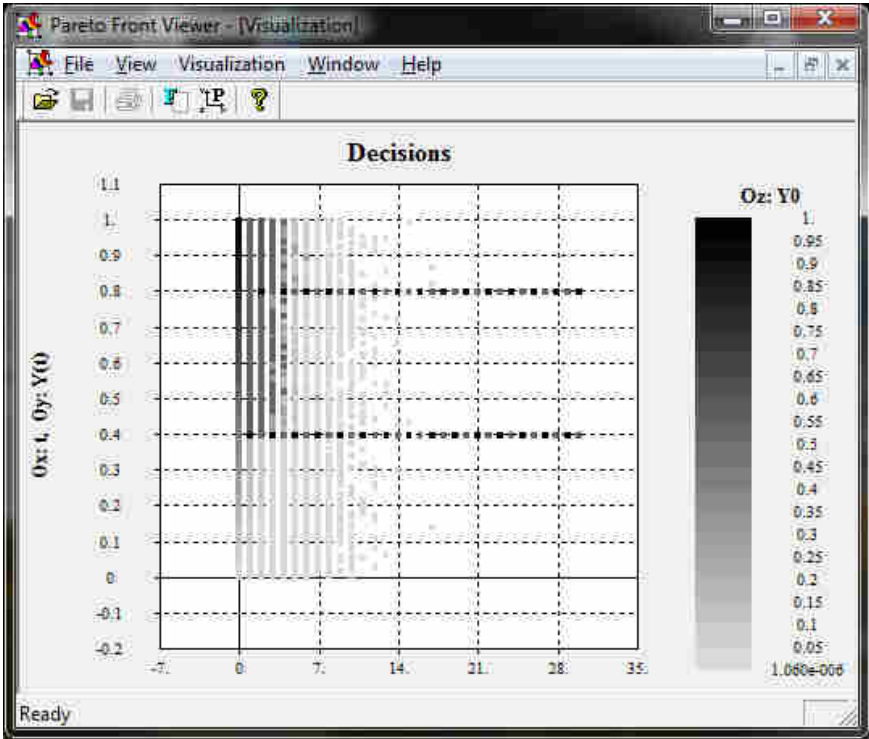


Рис. 4.22. Трубка системы (3.2) из всех возможных траекторий при $Y(0) \in [0, 1]$ и $P = 2$, $d = 0.4$, $r = 10$

При других значениях параметров трубка траекторий может иметь значительно более сложный характер. На рис. 4.23 представлена трубка всех возможных траекторий, т.е. для всех $Y(0) \in [0, 1]$, но уже при значениях параметров $P = 2$, $d = 0.1$ и $r = 2$.

Из рис. 4.23 видно, что, как и в предыдущем случае, уже к 30-му шагу все траектории выходят на ступеньку $Y(t) = d = 0.1$. Однако число итоговых точек аттрактора здесь больше: цикл состоит из более, чем 8 точек и его длина больше 8. Также отметим, что в этом случае траектории даже с большими стартовыми значениями $Y(0)$ (темная штриховка)

демонстрируют почти такое же хаотическое поведение, как и с малыми (светлая штриховка).

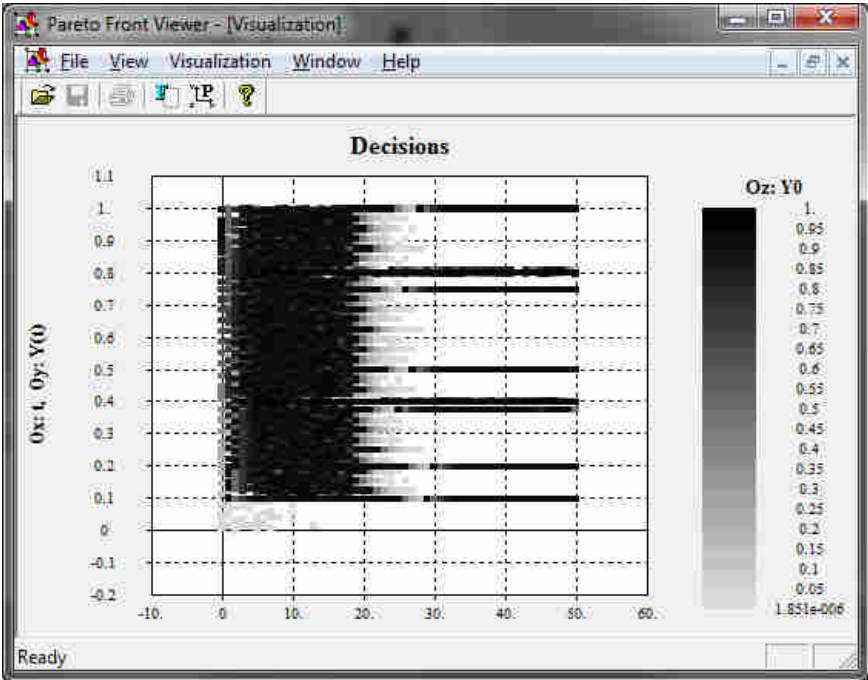


Рис. 4.23. Трубка системы (3.2) из всех возможных траекторий при $Y(0) \in [0, 1]$ и $P = 2$, $d = 0.1$, $r = 2$

На рис. 4.24 приводится зависимость времени выхода траектории на ступеньку $Y(t) = d$ при значениях параметров $P = 1.6$, $d = 0.3$ и $r = 100$ и $\Delta = 10^{-4}$.

По оси абсцисс отложено начальное значение $Y(0)$, по оси ординат – параметр $Time(Y(0))$. Видны характерные резонансные начальные значения с большим и малым временем выхода на цикл (нулевое время только в окрестности ступеньки $d = 0.3$). Самое большое время не превышает 30 шагов.

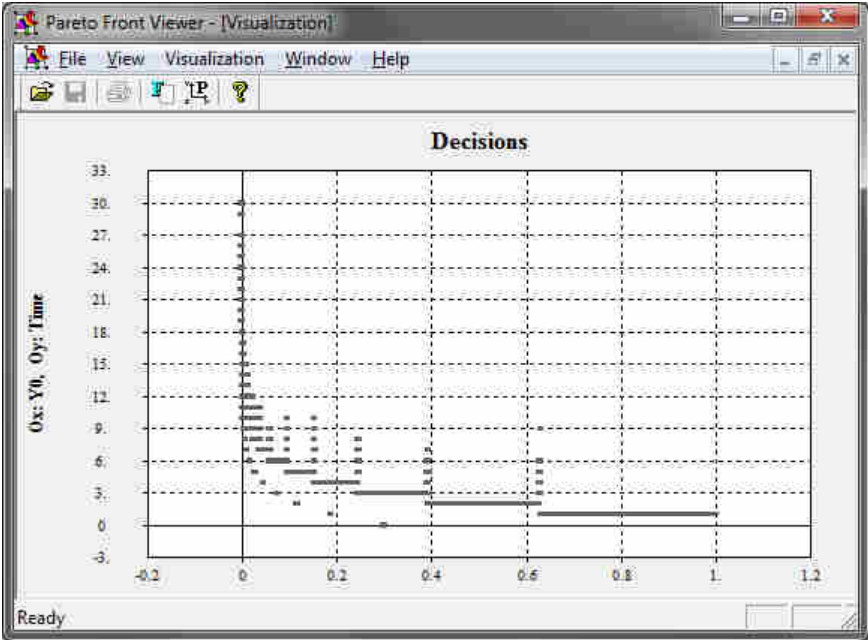


Рис. 4.24. Зависимость времени выхода на устойчивый цикл для (3.2) от разных значениях $Y(0)$ и $P = 1.6$, $d = 0.3$ и $r = 100$

На рис. 4.25 представлена карта времени выхода на цикл для различных сочетаний параметров P и d . При этом значение $r = 100$. Представлено максимальное время выхода на «ступеньку», т.е. величина

$$Time = \max \{Time(Y(0)), Y(0) \in [0, 1]\}.$$

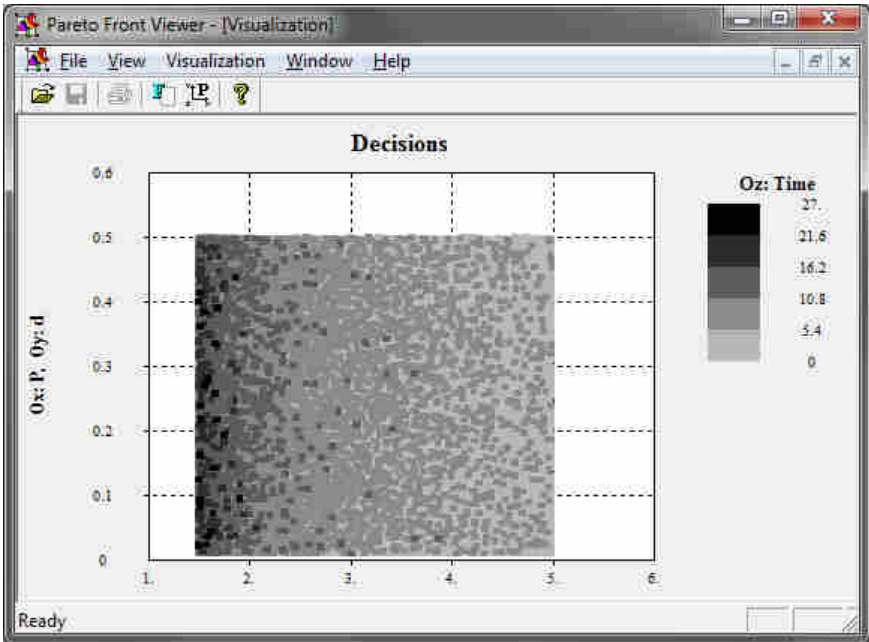


Рис. 4.25. Карта максимального по начальным значениям времени выхода на устойчивый цикл для (3.2) при $r = 100$

Видно, что, при фиксированном значении r максимальное по начальным данным время выхода траектории на цикл определяется, в основном, параметром P : чем он больше, тем выше это время.

4.3.2. Логистическое отображение

Для проверки независимости найденных в разд. 4.3.1 закономерностей от вида отображения рассмотрено логистическое уравнение.

Система. Пусть задан параметр A . Обозначим $d(A) = 4A(1-A)$. Зададим $Y(0) = d(A)$. Для $t = 1, 2, \dots$ рассчитываются

$$Y(t+1) = \begin{cases} 4Y(t)(1-Y(t)), & Y(t) < A, \\ d(A), & Y(t) \geq A. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Объекты исследования. Как и в разд. 4.3.1, мы будем исследовать различные множества, аппроксимированные ε -сетями и визуализированные с помощью диалоговых карт решений (см. [23]). Прежде всего, в пространстве параметра d и фазы Y рассмотрим множество

$$A(A) = \{(d(A), Y(t)), t = 0, \dots, N\},$$

$$A = \{A(d(A)): A \in [0, 1]\}.$$

Эти множества при больших N можно считать приближениями аттрактора рассматриваемой системы.

Нас также будет интересовать величина, характеризующая периодичность рассматриваемой траектории:

$$Period(A) = \min \{t: |Y(t) - d(A)| \leq \Delta, t = 1, \dots, N\},$$

где Δ – заданная точность «замыкания» цикла.

Нас также будут интересовать множества

$$B(A) = \{(d(A), Y(t), Period(A)), t = 0, \dots, N\},$$

$$B = \{B(A): A \in [0, 1]\},$$

которые представляют график длины цикла, заданный в точках (d, Y) аттрактора A .

Мы будем также рассматривать множество

$$C = \{d(A), Period(A): A \in [0, 1]\},$$

представляющее собой график, точнее – одномерную карту периода цикла $Period(A)$ как функции параметра $d(A)$.

Исследование периода. На бифуркационной диаграмме рис. 4.26 с помощью метрических ε -сетей представлена аппроксимация множества $A = \{A(d(A)): d(A) \in [0, 1]\}$. По оси абсцисс отложен параметр $d(A)$, а по оси ординат – множество значений $Y(t)$ при $t = 0, \dots, N$.

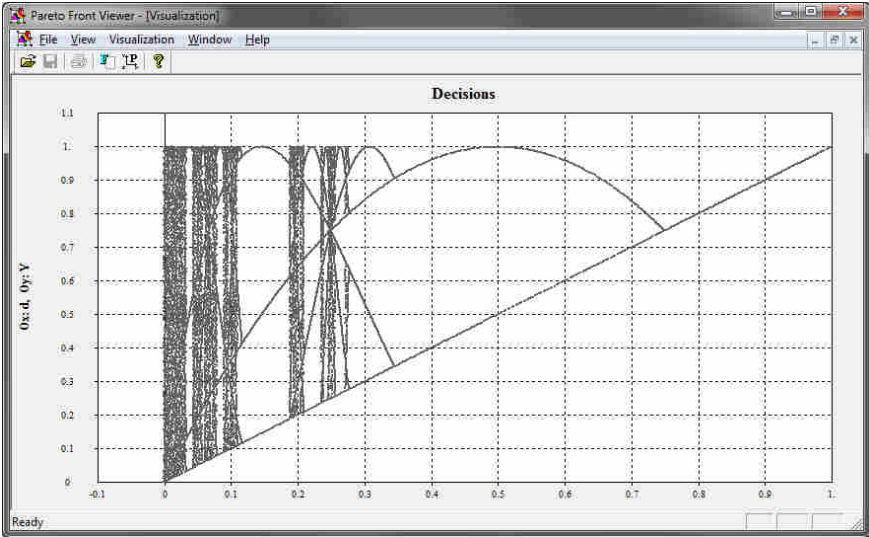


Рис. 4.26. Бифуркационная диаграмма для (4.3.1)

Видны те же свойства возрастающего хаотического поведения системы при приближении параметра d к 0, как и описанные в разд. 4.3.1.

На рис. 4.27 представлена аппроксимация множества B . Здесь исключены значения параметра A , приводящие к сравнительно малым $d(A)$, т. е. с помощью метрических ϵ -сетей построено множество $B_1 = \{(d, Y(t), Period) \in B: d \geq 0.1\}$. Множество B являются расслоениями множества A по показателю $Period(A)$, т.е. графиком этой функции в точках A .

По оси абсцисс отложен параметр $d(A)$, а по оси ординат – множество значений $Y(t)$ при $t = 0, \dots, N$. Цвет соответствует значению показателя $Period(A)$. Одному и тому же цвету может соответствовать несколько значений величины $Period$. Палитра цветов представлена слева.

Видно, что при приближении значений величины $d(A)$ к нулю возникают траектории со сколь угодно большим периодом. В данном случае изображена часть графика при $d(A) \geq 0.1$, поэтому максимальное значение периода цикла при

данных значениях параметров P и r и точности «замыкания» цикла Δ не превышает 55.

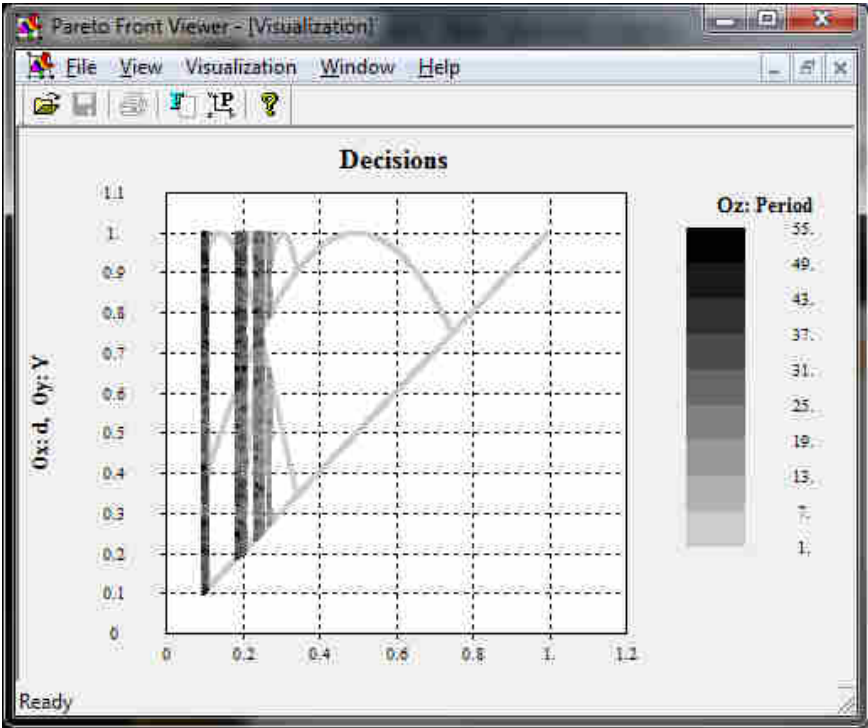


Рис. 4.27. *Расслоение бифуркационной диаграммы для (4.3.1) по периоду цикла*

Самая светлая штриховка соответствует $Period = 1-7$; штриховка чуть темнее – $Period = 7-13$, и т.д.

На рис. 4.28 представлен участок рис. 4.27 в области значений параметра A , приводящие к малым $d(A)$:

$$B_2 = \{(d, Y, Period) \in B: 0.01 \leq d \leq 0.15\}.$$

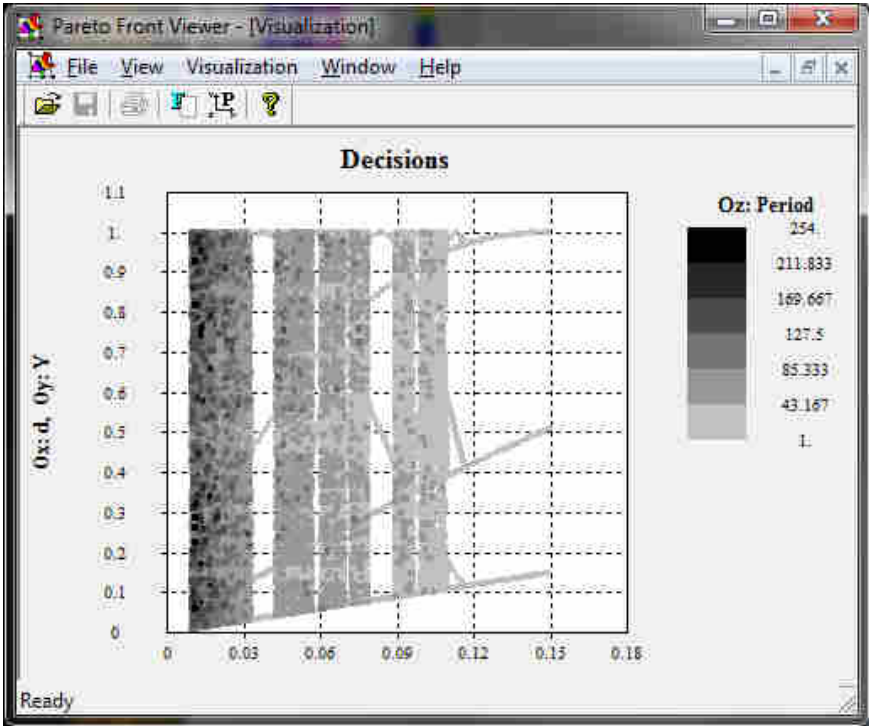


Рис. 4.28. *Расслоение бифуркационной диаграммы для (4.3.1) по периоду цикла при малых $d(A)$*

Здесь самая светлая штриховка соответствует $Period = 1-43$; чуть темнее – $Period = 44-85$, и т.д. Максимальный достижимый период в этих условия равен 254. На фоне хаотических состояний (режимов с большим периодом) прослеживается более тонкая структура режимов со сравнительно малыми периодами.

Карта периода цикла. На рис. 4.29, 4.30 представлена карта периода, т. е. множество $C = \{(d(A), Period(A)) : A \in [0, 1]\}$. Соответственно, представлена сначала часть множества C при больших $d(A)$, а затем – при малых.

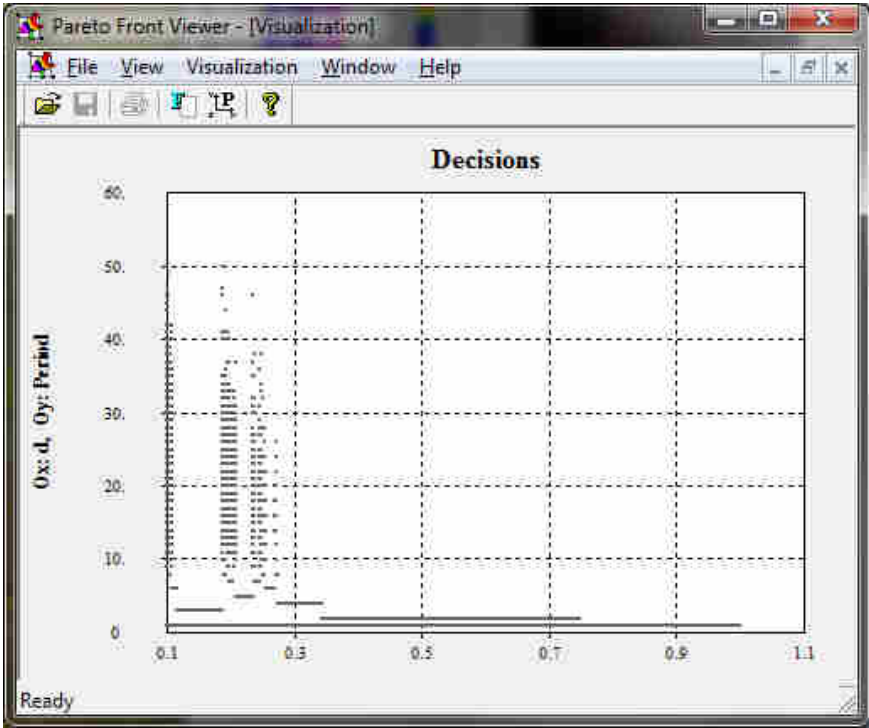


Рис. 4.29. Карта периода цикла для (4.3.1) при больших $d(A)$

На рис. 4.29 по оси абсцисс отложено значение $d(A)$, а по оси ординат – соответствующее значение периода цикла траектории $Period(A)$. Параметр A при этом пробегает все значения, такие что $0.1 \leq d(A) \leq 1$: $C_1 = \{(d, Period) \in C: 0.1 \leq d \leq 1\}$.

Видно, что каждому значению $d(A)$ соответствуют два режима траекторий. Первый – с малым периодом (нижняя горизонтальная линия), равным единице. Ему соответствуют значения $0 \leq A \leq 0.5$. Все траектории при этом режиме за один шаг со ступеньки $d(A)$ оказываются снова на ступеньке $d(A)$ (т. е. $d(A)$ является стационарной точкой отображения). Вторым – с характерными «резонансными» скачками в отдельных точках $d(A)$. Ему соответствуют значения $0.5 \leq A \leq 1$. В нем «ре-

зонансные» точки уплотняются по мере уменьшения величины $d(A)$.

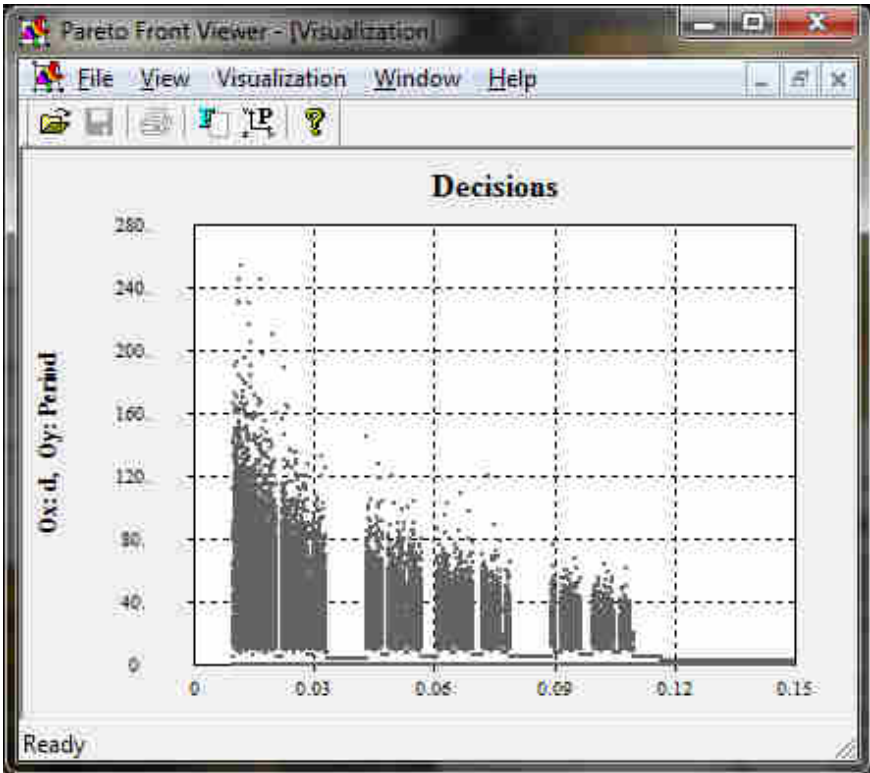


Рис. 4.30. Карта периода цикла для (4.3.1) при малых $d(A)$

На рис. 4.30 по оси абсцисс отложено значение $d(A)$, а по оси ординат – соответствующее значение периода цикла траектории $Period(A)$. Параметр A при этом пробегает все значения, такие, что $0.01 \leq d(A) \leq 0.15$: $C_2 = \{(d, Period) \in C : 0.01 \leq d(A) \leq 0.15\}$. Видно, что все характерные особенности зависимости периода цикла, отмеченные на рис. 4.29, сохраняются и при малых $d(A)$. При этом, однако, хаотические режимы траекторий становятся более выраженными.

Наличие двух режимов (верхнего и нижнего), объясняется неоднозначностью определения величины $d(A)$ по параметру A : одному и тому же значению $d(A)$ соответствует ровно два значения параметра A , приводящих к нему. И этим двум различным значениям A соответствует два различных режима траекторий – один с периодом цикла траектории, равным единице, а другой – со значениями большими или равными единице. Именно по этой причине – неоднозначности зависимости периода цикла от параметра $d(A)$ – более корректно говорить о карте, а не о графике периода цикла по этому параметру.

Исследование времени выхода на устойчивый цикл. В системе (4.3.1) зададим $Y(0)$, отличное от «ступеньки» $d(A)$, $Y(0) \in [0, 1]$, и параметр точности Δ . Для $t = 1, 2, \dots$ рассчитываем величину

$$Time(A, Y(0)) = \min \{t: |Y(t) - d(A)| \leq \Delta, t = 0, \dots \}.$$

Величина $Time(A)$ показывает, за какое число шагов система окажется в Δ -окрестности «ступеньки» $d(A)$.

В дальнейшем величина Δ принята равной 10^{-4} , уменьшение этой величины к принципиальным изменениям результатов не приводит.

Поскольку $d(A)$ определяется параметром A неоднозначно, исследуем две однозначные ветви этого отображения по отдельности.

Случай значений A от 0 до 0.5. На рис. 4.31 по оси абсцисс отложено начальное значение $Y(0)$, по оси ординат – параметр $d(A)$, а цвет показывает величину $Time(A)$. Для того чтобы можно было хорошо различить детали изображения, мы исключили из изображения величины $Y(0) < 0.01$ и $d(A) < 0.01$.

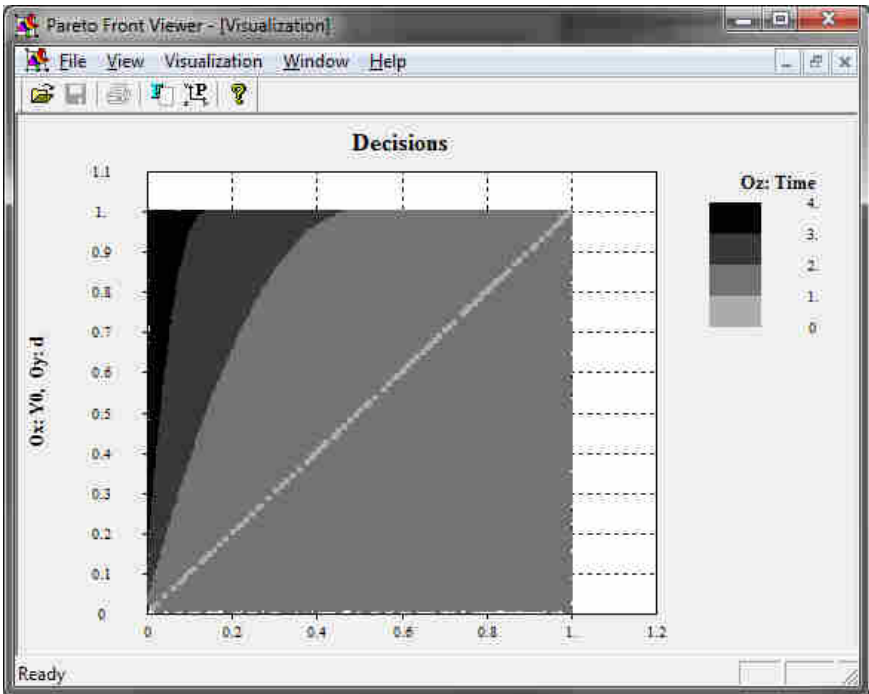


Рис. 4.31. Карта времени выхода на устойчивый цикл для (4.3.1) при разных значениях $Y(0)$ и $d(A)$ для A от 0 до 0.5

На рис. 4.31 самая светлая штриховка соответствует $Time = 0$; чуть более темная штриховка – $Time = 1$, и т.д.

Прежде всего, заметим, что в рассматриваемом случае время выхода на устойчивый цикл $Time$ мало (не превышает 4 шагов).

Далее обращает на себя внимание наличие диагонали – это точки, соответствующие условию $Y(0) = d(A)$, которые сразу находятся в Δ -окрестности «ступеньке». Видно, что в рассматриваемом случае «ступенька» $Y(0) = d(A)$ является «хорошо» устойчивым состоянием равновесия, так как для окружающих диагональ точек (синий цвет или более темная

штриховка) система всего за один шаг оказывается в Δ -окрестности «ступеньки».

Случай значений A от 0.5 до 1. На рис. 4.32 по оси абсцисс отложено начальное значение $Y(0)$, по оси ординат – параметр $d(A)$, а цвет показывает величину $Time(A)$. Для того чтобы можно было хорошо различить детали изображения, мы исключили из изображения величины $Y(0) < 0.01$ и $d(A) < 0.01$.

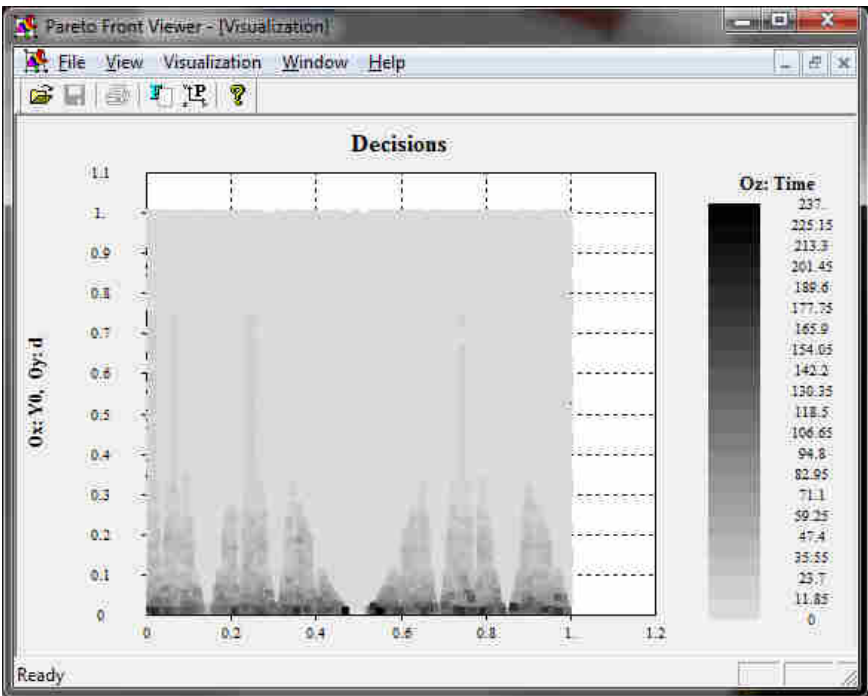


Рис. 4.32. Карта времени выхода на устойчивый цикл для (4.3.1) при разных значениях $Y(0)$ и $d(A)$ для A от 0.5 до 1

Самый светлый оттенок соответствует $Time = 0-11$; чуть более темный – $Time = 12-23$, и т.д.

Прежде всего заметим, что в рассматриваемом случае существуют начальные состояния, для которых время выхода на устойчивый цикл $Time$ может быть достаточно большим

(превышать 230 шагов). В основном, этим состояниям соответствуют малые величины $d(A)$.

Например, при $Y(0) = 0.55171$ и $d(0.997125) = 0.011468$ имеем $Time(0.997125) = 237$. Однако имеются и большие значения $d(A)$, для которых существуют значения $d(A)$ со сравнительно большим временем выхода на цикл.

Так, например, при $Y(0) = 0.75$ и $d(0.797233) = 0.64661$ имеем $Time(0.797233) = 16$.

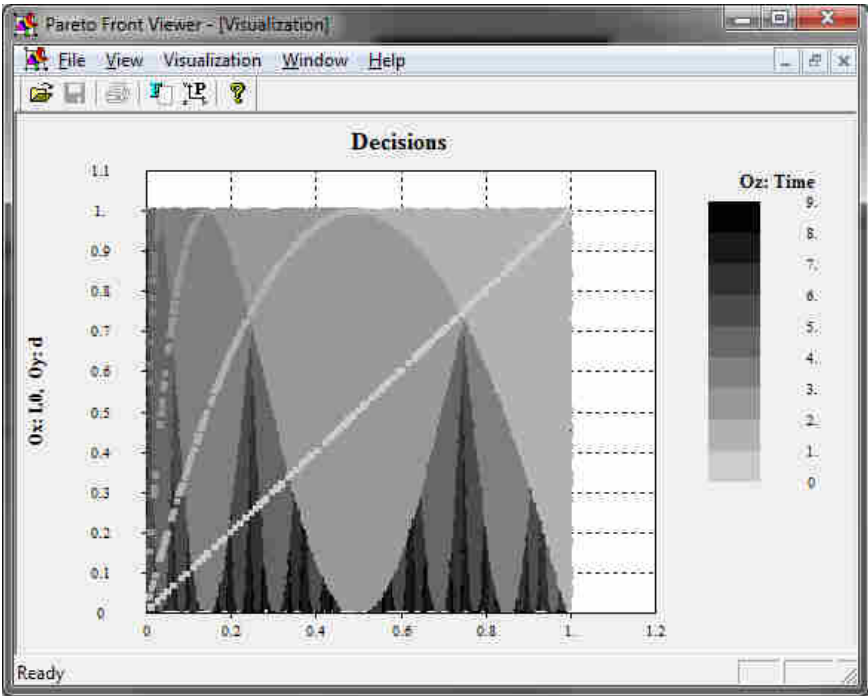


Рис. 4.33. Карта малых времен выхода на устойчивый цикл для (4.3.1) при разных значениях $Y(0)$ и $d(A)$ для A от 0.5 до 1

Из рис. 4.31 также видно, что в рассматриваемом случае диагональ, соответствующая ступеньке, т.е. множество $Y(0) = d(A)$, проходит и через темные участки, соответствующие сравнительно большим значениям $Time(A)$. Это значит, что «ступенька» $Y(0) = d(A)$ уже не всегда является «хорошо»

устойчивым состоянием равновесия, так как встречаются участки, где системе требуется больше 10 шагов для попадания в Δ -окрестности устойчивого цикла.

Структура состояний с малыми значениями времени выхода на устойчивый цикл ($Time(A) < 10$) для A от 0.5 до 10 представлена на рис. 4.33.

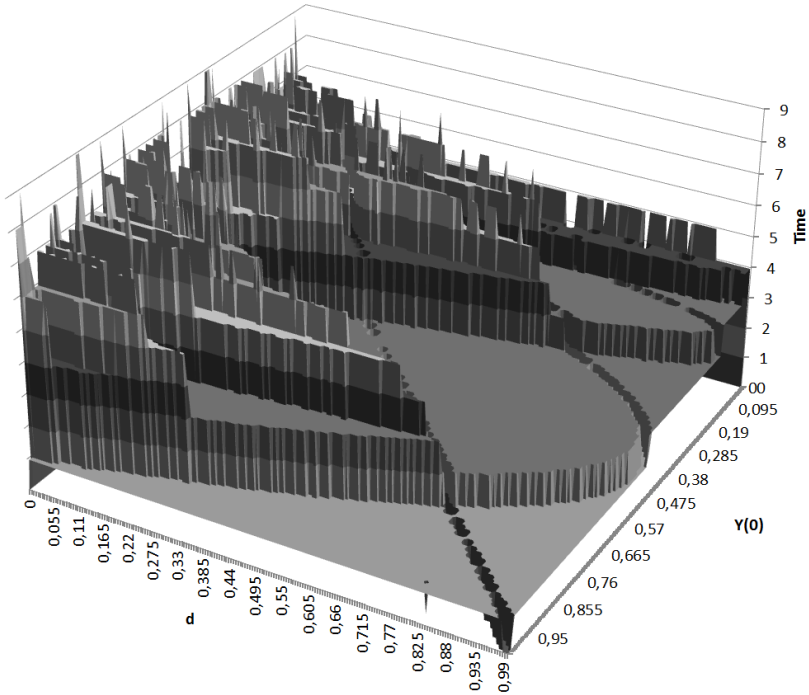


Рис. 4.34. *Трехмерная карта малых времен выхода на устойчивый цикл для (4.3.1) при разных значениях $Y(0)$ и $d(A)$ для A от 0.5 до 1*

На рис. 4.33 также видна (самого светлого оттенка штриховки) диагональ – точки, соответствующие условию $Y(0) = d(A)$, которые сразу находятся в Δ -окрестности «ступеньки». Хорошо видны участки некоторой неустойчивости,

где она проходит в слоях со сравнительно большими значениями времени выхода в ее окрестность.

Для большей наглядности представим тот же рисунок в трехмерном изображении (рис. 4.34).

Итак, при значениях параметра A от 0 до 0.5 «ступеньки», то есть состояния $Y(0) = d(A)$, являются *хорошо устойчивыми*, так как в их окрестности система быстро (за несколько шагов) приходит в их окрестность и остается там. При значениях параметра A от 0.5 до 1 «ступенька» не всегда обладает указанным свойством *хорошей устойчивости*, хотя общее время возврата не превышает 240 шагов (при $Y(0) < 0.01$ и $d(A) < 0.01$).

4.4. Исследование треугольного, двухзонного и логистического дискретных отображений

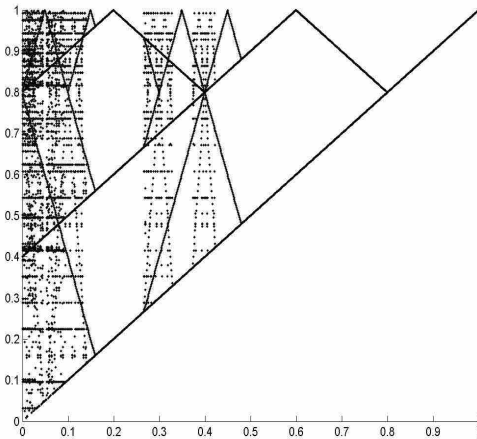


Рис. 4. 35. Результаты вычислительного эксперимента с ДДО, дополненным ступенькой, при изменении высоты ступеньки d ($0 < d < 1$). Зависимость траекторий расчетной модели (по оси ординат) от высоты ступеньки d (по оси абсцисс)

Рассмотрим, как проявляются указанные выше свойства на конкретных дискретных отображениях: треугольном, двух-зонном (ДДО) и логистическом.

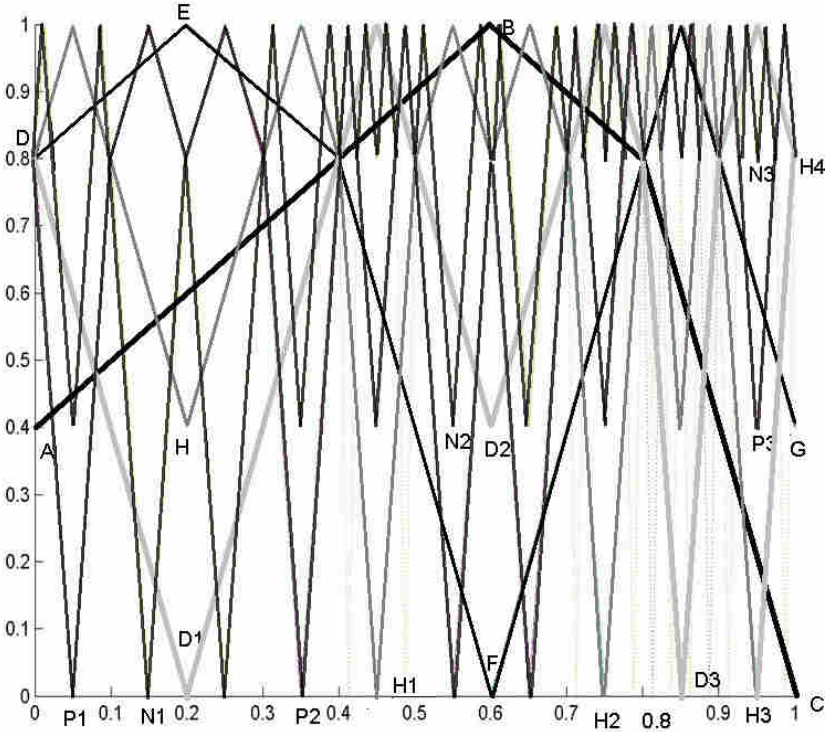


Рис. 4.36. N -кратные отображения для ДДО ABC
 ($DEFG$ – 2-кратное отображение,
 $DD_1D_2D_3H_4$ – 3-кратное отображение,
 $DHH_1H_2H_3H_4$ – 4-кратное отображение,
 $DP_1P_2P_3H_4$ – 5-кратное отображение,
 $DN_1N_2N_3H_4$ – 6-кратное отображение)

При сравнении рис. 4.35 и 4.36 видно, что бифуркационная диаграмма повторяет черты F^n . То же справедливо для треугольного и логистического отображений.

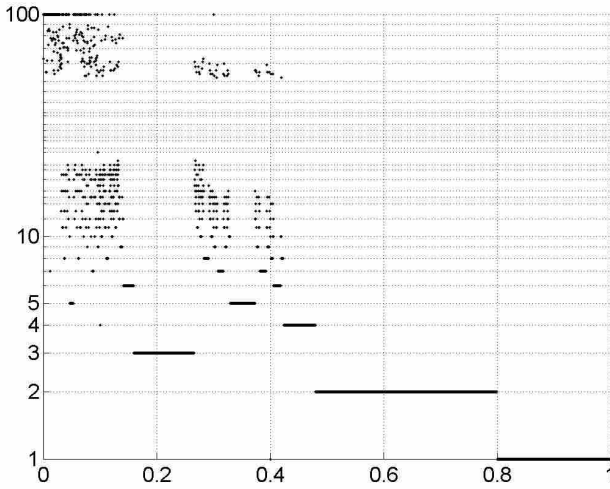


Рис. 4.37. Зависимость периода цикла от высоты ступеньки d для вычислительного эксперимента рис. 4.35

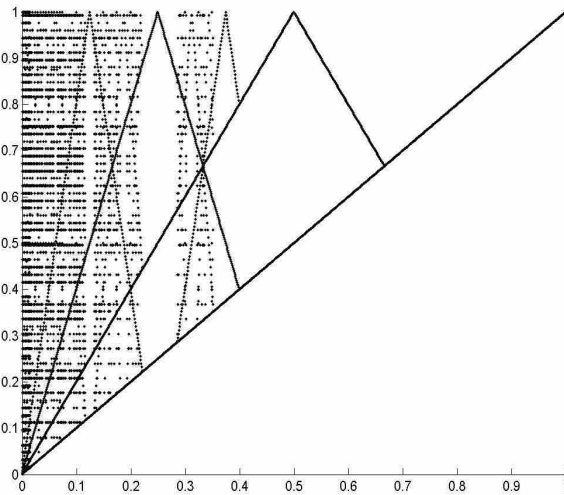


Рис. 4.38. Аналог рис. 4.35 для треугольного отображения

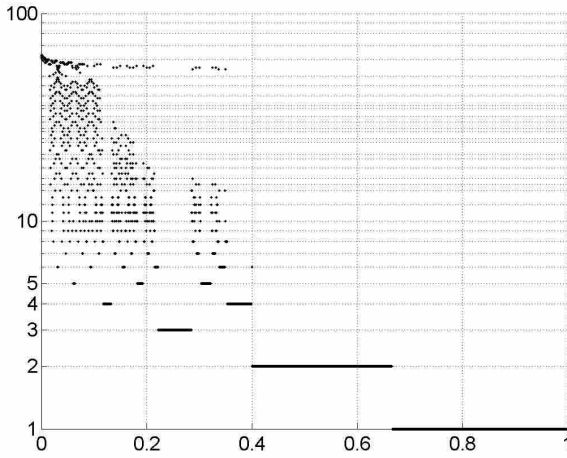


Рис. 4.39. Аналог рис. 4.37 для треугольного отображения

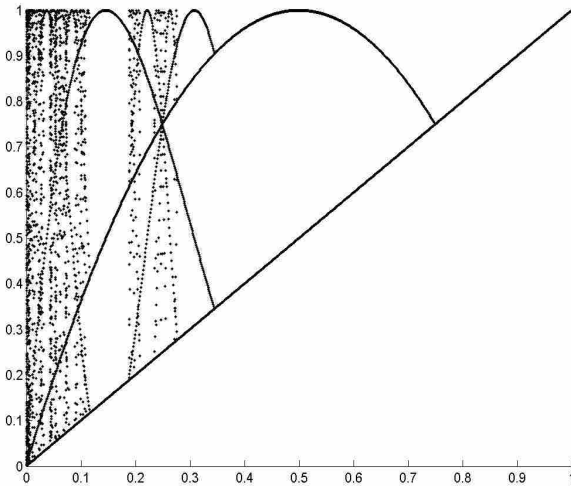


Рис. 4.40. Аналог рис. 4.35 для логистического отображения

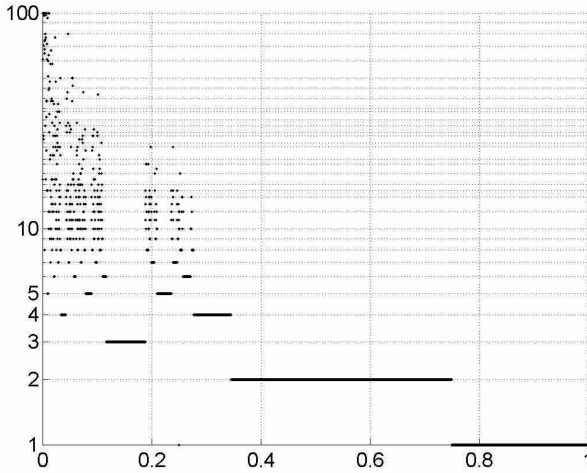


Рис. 4.41. Аналог рис. 4.37 для логистического отображения

Как видно из рис. 4.35, 4.37-41, зависимость периода цикла от высоты ступеньки хорошо согласована с бифуркационной диаграммой для всех трех отображений.

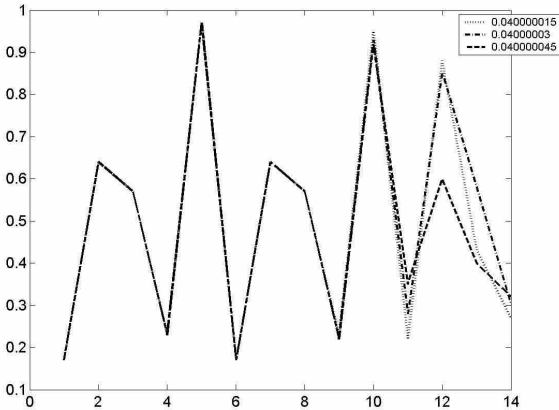


Рис. 4.42. Координаты линий возврата (с 1 по 14) при трех близких, но разных исходных значениях для ДДО

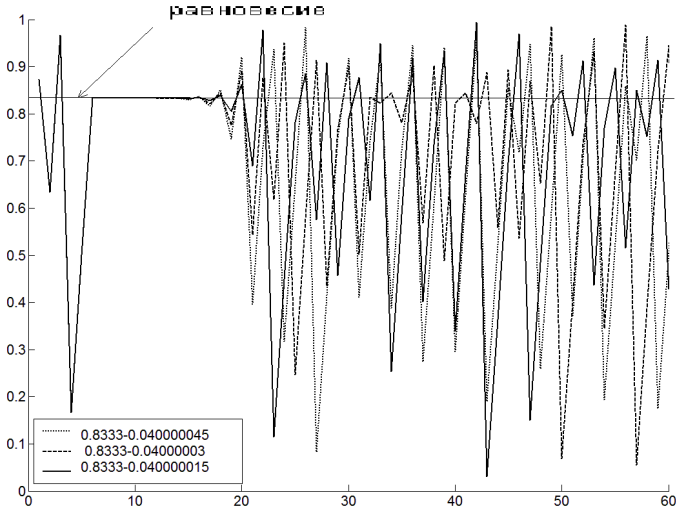
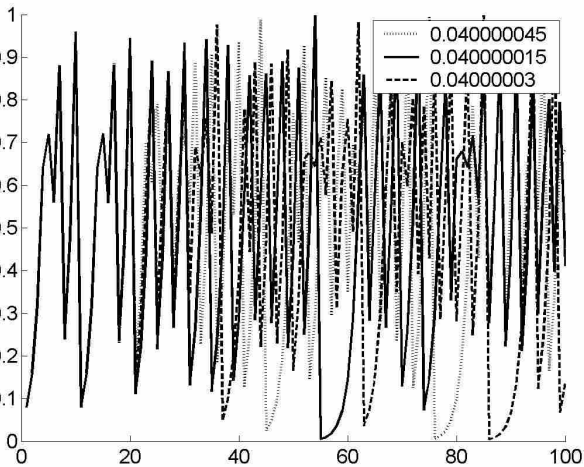
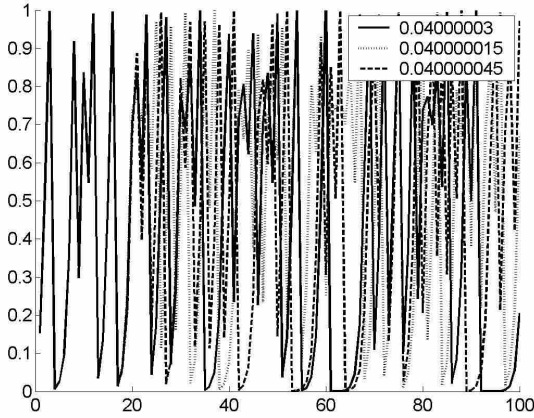


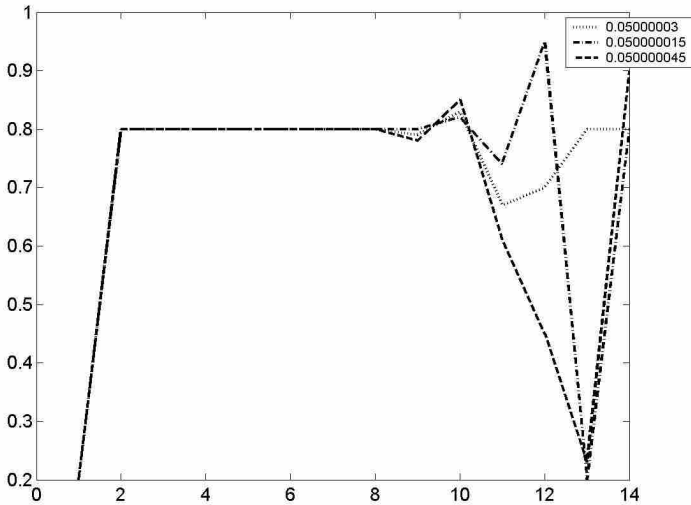
Рис. 4.43. Временные ряды в трех близких точках для ДДО.
Временные ряды соответствуют ЛВ рис. 4.42



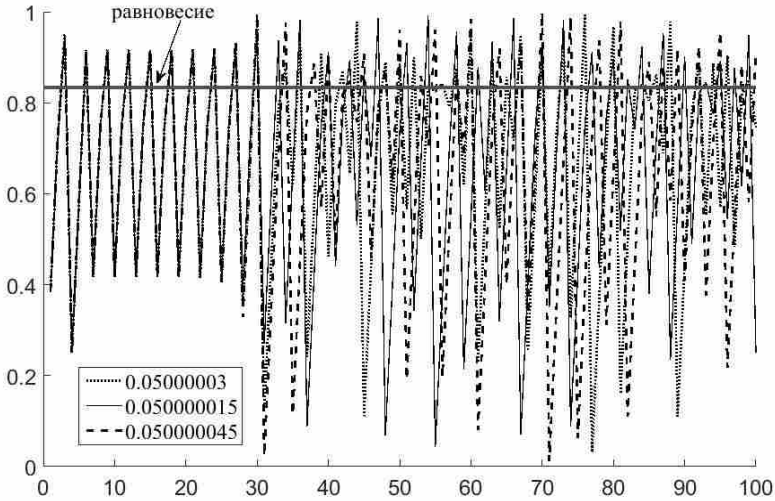
4.44. Временные ряды для в трех близких точках
для треугольного отображения



4. 45. *Временные ряды в трех близких точках для логистического отображения*



4. 46. *Координаты линий возврата (с 1 по 14) при трех близких, но разных исходных значениях для ДДО в окрестности периодической точки*



4.47. *Временные ряды в трех близких точках для ДДО.
Временные ряды соответствуют ЛВ рис. 4.46*

На рис. 4.42 изображены координаты линий возврата (с 1 по 14) при трех близких, но разных исходных значениях для ДДО. Видно, что координаты для первых 11 линий совпадают (а в окрестности периодической точки (рис. 4.43) несколько раз координата сохраняется примерно постоянной, что изображено горизонтальной прямой), это отражено на эволюции временных рядов, не зависимо от вида функции дискретного отображения (см. рис. 4.44 – 4.47).

5. Исследование моделей хаотической динамики методами аппроксимации и визуализации неявно заданных множеств

Рассмотрим проблему исследования математических моделей в виде отображения множества допустимых решений (параметров, внешних управлений) в пространство показателей. В случае, когда в пространство показателей входят только фазовые переменные, а терминальный шаг фиксирован, это

множество представляет собой обычное множество достижимости динамической системы. В случае, когда в число показателей входит само варьируемое терминальное время, множество достижимых показателей совпадает с «трубкой» траекторий в расширенном на время фазовом пространстве. Во всех таких постановках множество достижимых показателей (множество достижимости) задано неявно. Рассматриваемый *метод множеств достижимости (ММД)* состоит в аппроксимации и интерактивном визуальном анализе множества достижимых показателей исследуемой модели [22-25].

Рассматриваемый подход к исследованию неявно заданных множеств предполагает построение их явного приближенного описания (аппроксимации), допускающего дальнейший качественный и количественный анализ современными средствами быстрой интерактивной визуализации. Могут рассматриваться различные способы задания аппроксимируемого множества, предполагающие различные способы их кодирования. Выпуклые множества, заданные через расчет опорной функции (алгоритм поиска максимума линейной формы), аппроксимируются многогранниками [26, 27]. Невыпуклые множества, заданные через характеристическую функцию, доступ к большим базам данных или нелинейным отображением типа «черный ящик» из множества с вероятностной мерой, кодируются (табулируются) метрическими эpsilon-сетями [21, 27]. Возникает проблема оптимального кодирования, особенно актуальная в многомерном случае. В [21] предложены близкие к оптимальным методы построения метрических сетей, которые можно объединить в рамках единого подхода *метода «глубоких ям» (МГЯ)*. В этом методе построенный код (эpsilon-сеть) последовательно пополняется его глубокими ямами (наиболее удаленными элементами аппроксимируемого множества) до достижения требуемой точности. Показано, что скорость сходимости МГЯ асимптотически совпадает с верхней метрической (фрактальной) размерностью аппроксимируемого множества, что делает этот метод особенно эффек-

тивным при аппроксимации различных объектов, связанных с хаотической динамикой, так как они зачастую имеют фрактальную размерность, меньшую, чем размерность объемлющего пространства показателей.

Визуализация аппроксимированных множеств в рамках ММД основана на использовании *диалоговых карт решений (ДКР)* – совокупностей двумерных проекций и сечений исследуемого множества, которые могут при необходимости образовывать статические или анимированные трехмерные карты, четырехмерные атласы и пятимерные матрицы изображений [23]. При этом предварительная аппроксимация исследуемого неявно заданного множества системой шаров заданного радиуса позволяет проводить визуальный анализ в необходимом исследователю быстром интерактивном режиме.

5.1. Методы анализа сложных систем, основанные на аппроксимации многомерных множеств, заданных неявным образом

Настоящий раздел подготовлен на основе [21-29].

Рассмотрим проблему исследования математической модели в виде отображения множества допустимых решений (параметров, внешних управлений) X в множество показателей Y :

$$X \subset \mathbf{R}, f: X \rightarrow \mathbf{R}^d, f(X) = \{y \in \mathbf{R}^d: y = f(x), x \in X\}.$$

В задачах хаотической динамики пространство решений может включать в себя начальные условия динамики и параметры формы соответствующего пошагового отображения.

Пространство *показателей* может включать в себя: фазовые концы траекторий на фиксированном терминальном шаге, свободные фазовые концы траекторий на терминальных шагах из заданного диапазона, некоторые функции от терминальных или свободных фазовых концов траекторий. Могут рассматриваться также показатели, характеризующие всю траекторию в целом (например, период, время выхода на устойчивый цикл, различные интегралы от траектории и др.).

В качестве показателя может быть рассмотрено значение фазовой переменной или ее некоторой функции на некотором шаге из заданного диапазона, вместе с самим номером шага. В этом случае будет изучаться (как множество) так называемая «трубка» отображения или ее метрический образ в пространстве времени и показателей, зависящих от фазовых переменных.

Задача исследования математической модели формулируется в методе множеств достижимости как визуальное исследование свойств полного образа множества X , т.е. неявно заданного множества достижимости $f(X)$.

Метод множеств достижимости, как правило, включает в себя:

1. явное построение, или *аппроксимация* $f(X)$ или его оболочки;
2. быстрый *интерактивный визуальный анализ* аппроксимации множества $f(X)$;
3. выбор на $f(X)$ достижимых сочетаний показателей (*целей*);
4. восстановления *решений*, приводящих к ним.

В случае, когда в исследовании присутствуют пп. 3,4, метод достижимости называется методом достижимых целей [22, 23]. Если все рассматриваемые показатели являются критериями, в методе достижимых целей, как правило, аппроксимируется не само множество $f(X)$, а его оболочка Эджворта-Парето [29].

Способ задания отображения. В рассматриваемом нами случае отображение f считается заданным алгоритмически, по типу «черный ящик», т.е. для каждого решения x имеется алгоритм расчета значений вектора показателей $y = f(x)$ или получение информации о том, что такого решения не существует.

Способ аппроксимации образа. Поскольку в рассматриваемых задачах аппроксимируемые образы являются невыпуклыми, используется аппроксимация их системами метри-

ческих шаров, радиус которых тем меньше, чем выше требуемая точность аппроксимации. Эти системы шаров строятся на основе кодирования (табуляции) аппроксимируемого множества метрическими ε -сетями.

Оптимальное кодирование множеств метрическими ε -сетями. Напомним, что множество U называется метрической ε -сетью для A , если любая точка A расположена на расстоянии не большем, чем ε от некоторой точки U . Обозначим через $N(\varepsilon, A)$ минимальное число точек ε -сети A . Тогда величина $H(\varepsilon, A) := \log N(\varepsilon, A)$ называется ε -энтропией A (под \log здесь и далее понимается \log_2). Нижняя и верхняя метрическая размерности (размерности Минковского, фрактальные размерность) определяются как

$$\underline{\text{dm}} A = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{H(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}},$$

$$\overline{\text{dm}} A = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{H(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ясно, что $\underline{\text{dm}} A \leq \overline{\text{dm}} A \leq d$. В случае, когда нижние и верхние размерности совпадают, можно говорить о единой метрической размерности (размерности Минковского, фрактальные размерности). Она определяет сложность задачи кодирования рассматриваемого образа метрическими ε -сетями и сложность построения его описания с заданной точностью через системы шаров радиусом ε с центрами в точках этой сети.

Метод аппроксимации. Рассмотрим теоретический метод аппроксимации множеств, позволяющий строить ε -сети со свойствами, близкими к оптимальным.

Пусть A – компактное множество метрического пространства \mathbf{R} с функцией расстояния ρ и T – его конечное подмножество (код, таблица или база аппроксимации). Точки множества A , находящиеся на максимальном расстоянии от T , называются глубокими ямами (ГЯ) для T . Для $x \in A$ обозначим

$\rho(x, T) := \min \{ \rho(x, t) : t \in T \}$ и пусть $\rho(A, T) := \sup \{ \rho(x, T) : x \in A \}$. Для $\varepsilon, 0 < \varepsilon$, пусть $(T)_\varepsilon := \{ x \in R : \rho(x, T) < \varepsilon \}$. Для заданного $\gamma, 0 < \gamma \leq 1$, обозначим

$$\text{DN}_\gamma(T) := \{ x \in A : \rho(x, T) \geq \gamma \rho(A, T) \}.$$

Очевидно, что при $\gamma = 1$ это определение имеет смысл для замкнутых вполне ограниченных множеств, т.е. в силу ограниченности вполне ограниченных множеств – для любых компактных A . Точки $x \in \text{DN}_1(T)$ и называются глубокими ямами. Множество $\text{DN}_1(T)$ назовем *множеством ГЯ*, а множество $\text{DN}_\gamma(T)$ – множеством ГЯ уровня γ .

Опишем класс итерационных алгоритмов построения ε -сетей и ε -различимых подмножеств для вполне ограниченных множеств.

5.2. Метод глубоких ям

Общее описание МГЯ. Пусть $t_1 \in A$ и $T_1 := \{ t_1 \}$. Пусть множество T_n построено и $\rho(A, T_n) > 0$.

Тогда $T_{n+1} := T_n \cup \{ t_{n+1} \}$, где $t_{n+1} \in \text{DN}_\gamma(T_n)$.

Конкретный алгоритм МГЯ состоит в уточнении способа выбора $t_1 \in A$ и $t_{n+1} \in \text{DN}_\gamma(T_n)$.

Точность аппроксимации T_n характеризуется в МГЯ *радиусом покрытия* (РП) – расстоянием от базы аппроксимации T_n до его ГЯ, т.е. величиной $\rho(A, T_n)$.

Таким образом, МГЯ позволяет строить приближенные описание множества:

- как *код*, т.е. через конечную систему точек, входящих в базу аппроксимации T_n , образующих метрическую $\rho(A, T_n)$ -сеть;
- как *систему шаров* с центрами в точках базы аппроксимации и радиусом, равными $\rho(A, T_n)$, которые покрывают множество A . Любая точка такой системы находится не далее, чем на расстоянии $\rho(A, T_n)$ от аппроксимируемого множества.

Свойства метода глубоких ям. Пусть $M(\varepsilon, A)$ – максимальное число точек ε -различимого подмножества A , т. е. точек, лежащих друг от друга на расстоянии, большем ε . Величина $E_\varepsilon(A) := \log M(\varepsilon, A)$ называется ε -емкостью A . Нетрудно видеть, что

$$M(2\varepsilon, A) \leq N(\varepsilon, A) \leq M(\varepsilon, A).$$

Поэтому

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{E(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \underline{\text{dm}}A,$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{E(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \overline{\text{dm}}A.$$

Таким образом, асимптотика метрической емкости совпадает с метрической (фрактальной) размерностью A .

Скорость сходимости МГЯ. Пусть $\{T_n\}_{n=1, 2, \dots}$ – последовательность множеств, порождаемая МГЯ для A и $\rho(A, T_n) > 0$. Скорость сходимости МГЯ определяется следующей теоремой.

Теорема [21]. *Справедливо*

$$N(\rho(A, T_n), A) \leq n \leq M(\rho(A, T_n), A)$$

Следствие [21]. *Для любого $\alpha > \overline{\text{dm}}A$ справедливо*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1/\alpha} \rho(A, T_n) = 0.$$

Итак, порядок скорости сходимости МГЯ по числу точек в базе покрытия (длине метрического кода) определяется верхней фрактальной размерностью аппроксимируемого множества. Таким образом, в случае совпадения верхней и нижней фрактальных размерностей, МГЯ оптимален по порядку мощности кода (числа точек в базе покрытия).

Стохастический метод глубоких ям (СМГЯ). МГЯ требует на каждой итерации поиска ГЯ для построенной базы покрытия. В случае задания отображения алгоритмом типа «черный ящик» в самом общем варианте эту задачу можно

решать на основе глобального зондирования множества допустимых решений.

Рассмотрим случай, когда на борелевской σ -алгебре $\mathbf{b}(A)$, $A \in \mathbf{b}(A)$, задана некоторая вероятностная мера π . Множество U назовем ε -сетью для A полноты η , если $\pi((U)_\varepsilon \cap A) \geq \eta$. При $\eta > 0$ множество $(U)_\varepsilon$, т.е. систему ε -шаров на базе покрытия U , будем называть *существенным покрытием* A , а величину $\pi((U)_\varepsilon \cap A)$ – *полнотой* этого покрытия. Если значение полноты равно единице, то покрытие $(U)_\varepsilon$ будем называть *полным*. Рассмотрим реализацию МГЯ, позволяющую строить существенные покрытия вполне ограниченных множеств.

Пусть имеется возможность получать большие независимые повторные выборки точек из A . Пусть U задано. Обозначим через $\eta^U(s) = \pi((U)_s \cap A)$ функцию распределения случайной величины, равной расстоянию от случайной точки из A до множества U . Воспользуемся контрольной выборкой $H_N := \{a_1, \dots, a_N\}$ из A для оценки полноты покрытия $(U)_\varepsilon$. Обозначим через $\eta^{(U)}(s, H_N)$ выборочную функцию распределения для $\eta^U(s)$:

$$\eta^{(U)}(s, H_N) = n(s)/N, \quad n(s) := \text{card} \{a \in H_N: \rho(a, U) < s\}.$$

Опишем теперь алгоритм СМГЯ, реализующий МГЯ для стохастически заданных множеств. Пусть заданы вероятностная мера π и объем выборки N .

Алгоритм СМГЯ. Начальная итерация алгоритма состоит в том, что генерируется случайная точка a_1 из A и получается $T_1 := \{a_1\}$. Опишем $(n+1)$ -ю итерацию алгоритма, $n \geq 1$

Шаг 1: получить контрольную выборку H_N .

Шаг 2: положить $T_{n+1} := T_n \cup \{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1} := \text{argmax} \{\rho(a, T_n): a \in H_N\}$.

Обозначим через

$$\rho(T_n, H_N) = \text{argmax} \{\rho(a, T_n): a \in H_N\}$$

выборочный радиус покрытия множества A шарами с центрами в базе покрытия T_n , полученный на выборке H_N .

Условием окончания работы алгоритма может быть *выборочная точность*: остановка в случае, когда значение выборочного радиуса покрытия $\rho(T_n, H_N)$ оказывается меньше заданной точности ε .

Оценка полноты аппроксимации. Пусть задана некоторая мера надежности χ , $0 < \chi < 1$. Обозначим

$$\Delta(\chi, N) := \sqrt{-\frac{\ln(1-\chi)}{2N}}.$$

Можно показать, что вероятностная оценка полноты покрытия $(U)_\varepsilon$ приобретает вид

$$\mathbf{P} \{ \eta^U(\varepsilon) > \eta^{(U)}(\varepsilon, H_N) - \Delta(\chi, N) \} \geq \chi.$$

Обозначим

$$\chi(\eta, N) = 1 - \exp(-2N(1-\eta)^2).$$

Пусть задана некоторая оценка полноты η , $0 \leq \eta < 1$. Тогда *надежность оценки полноты* покрытия A системой шаров с радиусом $\rho(T_n, H_N)$ величиной η , оказывается равной $\chi(\eta, N)$:

$$\mathbf{P} \{ \eta^U(\rho(T_n, H_N)) > \eta \} \geq \chi(\eta, N).$$

Определение объема тестовой выборки. Обозначим $N^*(\eta, \chi) = -\ln(1-\chi) / [2(1-\eta)^2]$. Это величина характеризует объем выборки N , необходимый для построения аппроксимации с заданной полнотой η и надежностью χ :

$$\mathbf{P} \{ \eta^U(\rho(T_n, H_{N^*(\eta, \chi)})) > \eta \} \geq \chi.$$

Например, требование $\chi = 0.95$ и $\eta = 0,95$ дает $N = 600$, а требование $\chi = 0.99$ и $\eta = 0,99$ приводит к $N = 23000$.

Область применения. Таким образом, СМГЯ позволяет строить существенные покрытия стохастически заданных ограниченных множеств с требуемыми параметрами точности, полноты и надежности. При этом число точек базы покрытия (мощность эpsilon-сети) будет определяться величиной ее эpsilon-емкости, а порядок роста сложности описания от точности – метрической (фрактальной) размерностью аппроксимируемого множества, что является оптимальным.

Примеры использования ММД и МГЯ в задачах исследования моделей хаотической динамики приведены в разд. 4.3.

6. Об одном варианте индивидуально-ориентированной модели популяции леммингов

В ВЦ РАН на протяжении многих лет осуществлялись работы по разработке и использованию методов точных наук в описательных науках, в экологии в том числе. На примере моделирования тундровых популяций и сообществ была разработана методика построения и исследования комплекса математических моделей для изучения биоценотических сообществ. Оригинальность методики состоит в использовании комплексного подхода в диапазоне от выбора объекта моделирования, анализа исходной биологической информации, обоснования детальной базовой модели до обоснования и построения набора взаимосвязанных и взаимодополняющих моделей, включающих в себя наряду с имитационными также упрощенные (аналитические) модели. Особенностью методики является совмещение биологических, биофизических и математических подходов при анализе экологической проблемы [3, 30-32].

В результате применения данной методики была разработана модель тундрового сообщества «растительность – лемминги – песцы». Она основана на учете сезонных изменений трофических взаимодействий внутри сообщества и построена с помощью экспертно оцененных зависимостей [17, 30, 33].

Анализ результатов вычислительных экспериментов с исходной моделью показал ведущую роль популяции леммингов в формировании колебаний численности животных тундрового сообщества.

Применение комплексного подхода при моделировании тундровых популяций и сообществ позволило сформулировать количественные гипотезы о ведущих механизмах фор-

мирования колебаний численности тундровых животных. Как указано выше, ведущим фактором, определяющим эти колебания, является динамика численности популяции леммингов. Эта динамика, в свою очередь, определяется тремя показателями: 1) скоростью прироста биомассы в благоприятный год, 2) максимальной численностью, 3) выживаемостью в наиболее неблагоприятных условиях.

Полученные выводы хорошо согласуются с одной из распространенных гипотез о том, что формирует колебания численности популяций не какой-то отдельно взятый фактор, а некоторая их комбинация [17]. Наличие предыдущего опыта моделирования позволило перейти на другой уровень описания – использование индивидуально-ориентированных моделей [34].

В настоящей работе построена индивидуально-ориентированная модель поведения тундровых животных – копытных леммингов (*Dicrostonyx torquatus chionopyes*), а для численного моделирования использован метод прямого статистического моделирования Монте Карло. Этот метод был предложен австралийским профессором Бердом в начале 60-х для решения задач динамики разреженного газа [35]. Основная идея метода состоит в предположении, что на малом временном шаге можно разделить два взаимосвязанных процесса – движение молекул и их столкновение друг с другом. Такой подход был использован для моделирования динамики численности популяции леммингов в работе [34], в данной работе представлен более углубленный вариант.

В современной литературе по моделированию грызунов метод Монте Карло применяется в основном для построения генетических моделей (в нашей работе упоминаются лишь генотипы особей как атрибуты объекта лемминг), например [36, 37].

В работах [38-40] реализовывался алгоритм случайных блужданий при поиске пищи грызунов, но не введены столкновения особей, оказавшихся в одной ячейке, приводящие к

потере их жизнестойкости, что реализуется в настоящей работе. Но работы [39-41] превосходят нашу работу более детальным моделированием растительного покрова (использованием натуральных данных растительности, качества корма, нескольких видов растительности, пространственно-временной неоднородности ландшафта и др.).

Данная работа описывает результаты изучения математической модели популяции животных, изменения ее количественных показателей со временем, в первую очередь динамику численности. Модель называется индивидуально-ориентированной и относится к классу имитационного моделирования.

Объектно-ориентированное программирование представляет организмы как дискретные объекты, свойства которых представлены как атрибуты, а поведение как методы. В настоящей работе реализуется моделирование дискретных событий, модель представляет собой систему, состоящую из организмов и растительного покрова. Организмы представлены как мобильные объекты, ландшафт сформирован трехмерными сетками ячеек.

6.1. Описание модели

Рассматривается некая абстрактная территория – среда обитания популяции, разбитая на зоны – $M \times N$ ячеек. У каждой особи есть набор характеристик: пол, возраст, координаты на территории и дополнительное число, изменяющееся от 0 до 1 (0 – особь считается погибшей и удаляется из рассмотрения, 1 – наилучшее состояние), обозначающее состояние здоровья индивидуума и называемое в дальнейшем потенциалом жизнестойкости (ПЖ).

Работа модели происходит по итерациям, на каждой из которых особь может выполнить одно из определенных действий: движение, борьба с другими особями, прием пищи, отдых, размножение и другие.

Копытные лемминги примечательны тем, что у них постоянно происходят стычки друг с другом, в результате чего

средний потенциал жизнестойкости сильно зависит от динамики численности. Также согласно зарегистрированным данным особям присущи циклы динамики численности периодом в три-четыре года. Фазы цикла условно называются депрессией, нарастанием и пиком численности. Основная задача данной работы – подобрать такие параметры модели (размеры территории, начальное количество особей, снижение ПЖ за одну стычку, параметры размножения и другие, всего около 20), при которых получались стабильные циклы в несколько лет и совпадение с зарегистрированными данными.

Условно после некоторого количества итераций считается, что в расчетной модели прошел один день. Весь год разделен на несколько частей по разным категориям. Период размножения: февраль – август. В вегетативный период начинают восполняться ресурсы, пригодные для пищи (июнь – август).

Все особи действуют согласно общему алгоритму поведения. Сначала они некоторое время двигаются в поисках пищи, при этом участвуя в стычках и размножении (если период размножения), далее возвращаются в нору, где переваривают пищу.

Вероятность забеременеть берется из статистических данных. Сезон размножения делится на генерации (перезимовавшие, февраль-март, апрель-май, июнь).

Через определенное время появляется потомство. Оно находится в материнской норе некоторое время. Потом выходит в поисках собственной норы.

На данном этапе особь является неполовозрелой. Должно пройти еще некоторое время, чтобы особь смогла участвовать в размножении.

Гибель особи происходит в одном из следующих случаев: 1) потенциал жизнестойкости меньше нуля, 2) особь достигла предельного возраста, 3) самка принесла третье потомство.

Опишем основной механизм работы алгоритма. Установка параметров модели. Определяются параметры модели и вводятся в программу (описаны ниже). На основе параметров происходит инициализация и начальное распределение объектов в пространстве и подготовка к первой итерации. Далее последовательно выполняются итерации. Эксперимент заканчивается в одном из трех случаев: остановлен пользователем, достигнуто максимальное количество выполненных итераций, популяция вымирает.

Опишем объекты модели: ячейка, лемминг, нора, растительность.

Объект ячейка. Имеет координаты. В одной ячейке может находиться любое количество леммингов. Также в ней есть (или нет) некоторый уровень насыщения ячейки кормом. Может иметь одну нору.

Объект нора. Имеет координаты. Нора может быть занята одной особью. Переменные объекта: координаты норы, нора занята / не занята особью.

Объект растительность. Переменные объекта: начальное количество корма в ячейке; насыщенность ячейки растительностью (для каждой ячейки задается уровень насыщения растительностью, он изменяется от 0 (нет корма) до 1 (максимальный уровень корма)); наличие растительности в ячейке; восстановление количества корма (на каждой итерации во время вегетативного периода корм увеличивается в каждой ячейке на указанную величину); снижение количества корма (когда особь начинает потреблять корм в некоторой ячейке, то уровень насыщения растительностью в ней снижается на указанную величину); вегетативный период (период восстановления растительности). В одном из вариантов модели, если особь питается, то растительность уменьшается на фиксированное число, со временем линейно растет до максимума, в другом растет экспоненциально, но при выедании не может опускаться ниже некоторого минимума.

Объект лемминг. Переменные объекта: случайная величина (результаты некоторых функции случайны, для их расчета нужна эта переменная); координаты особи; потенциал жизнестойкости (ПЖ); снижение ПЖ от стычек (во время стычки потенциал снижается на указанную величину); восстановление ПЖ (в отсутствие стычек потенциал особи восстанавливается на указанную величину); вероятность беременности (если в период размножения встречаются разнополые особи, то этот параметр определяет вероятность самки забеременеть), может быть задана одним числом или таблицей [6]; среднее число новорожденных; сытость (описывает меру сытости, если особь сыта, то она лучше участвует в стычках, а ПЖ быстрее восстанавливается; напротив, при низкой сытости, ПЖ снижается от голода; изменяется от 0 до 1); снижение показателя сытости (каждую итерацию показатель сытости снижается на указанную величину); восстановление показателя сытости (если особь потребляет корм, то показатель сытости увеличится на указанную величину); передвижение (количество итераций, которое особь тратит на активные действия, прежде чем вернуться в нору на отдых); отдых (количество итераций, которые особь пребывает в норе); новорожденная стадия (сколько дней особь находится в норе после рождения); неполовозрелая стадия (сколько дней у особи есть, чтобы найти себе нору, после истечения срока при наличии норы переходит в половозрелую стадию, иначе умирает); возраст особи; предельный возраст (при достижении его особь умирает от старости); срок беременности (описывает, через сколько дней у беременной особи появится потомство, две недели); интервал между беременностями (две недели); генотип особи; генотип самца (если особь беременна, то эта переменная хранит генотип самца); нора (если есть); переменная, определяющая была ли стычка на текущей итерации; тип лемминга (новорожденная особь, неполовозрелая, половозрелая, беременная, понесла потомство); текущий срок беременности.

Опишем параметры модели: количество итераций в одном дне (время выполнения одной итерации необходимо соотносить с реальным временем в популяции); начальная дата; количество ячеек в высоту и ширину соответственно; процентное отношение ячеек с норами от всех ячеек; начальное количество леммингов; вегетативный период; начальное количество корма в ячейке; восстановление количества корма; снижение количества корма; снижение ПЖ от стычек; восстановление ПЖ; вероятность беременности; среднее число новорожденных; снижение показателя сытости; восстановление показателя сытости; передвижение; отдых; новорожденная стадия; неполовозрелая стадия; предельный возраст; текущий срок беременности; очередная беременность.

6.2. Подробный алгоритм работы модели

Начальное распределение. Начальное время в модели – это период сразу после зимы и пика численности, то есть оптимальный биотоп. В этот период еще не началось размножение и все особи находятся в половозрелой стадии.

На основе введенных параметров составляются сетка пространства, массивы нор, растительности в ячейках, леммингов. Распределение нор происходит случайно. Лемминги норы не выкапывают, поэтому позиции всех нор фиксированы на протяжении всего эксперимента. Все ячейки заполняются растительностью, указанной в параметрах. Начальные лемминги случайно наделяются норами, собственными координатами, полом и генотипом в равных пропорциях, возрастом в несколько месяцев, потенциалом от 0.5 до 1.

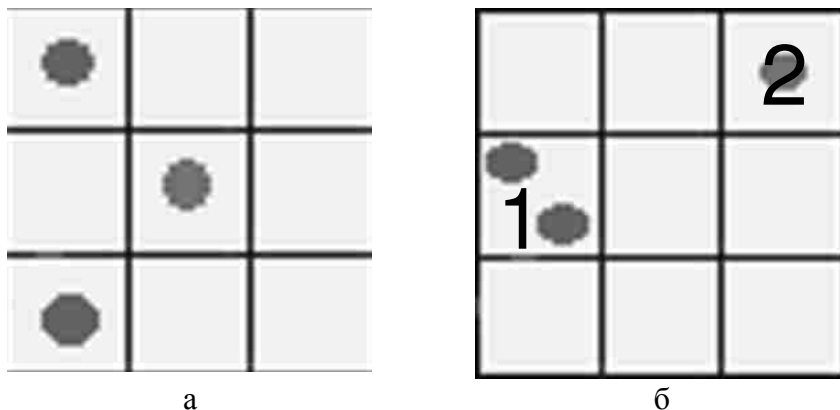


Рис. 6.1. а) Фаза перемещения. Каждая особь случайно передвигается в соседнюю ячейку; б) В ячейке 1 происходит стычка, так как там 2 особи. В ячейке 2 особь одна, она питается

После этого начинается работа основного алгоритма.

1. Каждая особь может перемещаться в случайном направлении на ячейку по вертикали, горизонтали, диагонали или не двигается. Итого 9 исходов. Куда особь пойдет, определяется следующими факторами:
 - 1.1. Если особь находится в новорожденной стадии, то не двигается.
 - 1.2. Неполовозрелые особи передвигаются в случайном направлении в поисках норы. Особь ищет в первую очередь именно нору, но если рядом нет других особей и есть рядом растительность, то питается.
 - 1.3. У половозрелых особей есть три варианта:
 - 1.3.1. Особь передвигается в случайном направлении в поисках пищи.
 - 1.3.2. После окончания поиска пищи (определяется соответствующим параметром модели) особь двигается по направлению своей норы кратчайшим путем, пока не дойдет.
 - 1.3.3. Особь отдыхает в норе и не двигается.

- 1.4. Беременные самки повторяют алгоритм половозрелой особи. Когда срок беременности подходит к концу, то особь при любых факторах идет к своей норе, чтобы понести потомство.
2. После окончания первой стадии, каждая особь определяет, что ей делать в новом местоположении:
 - 2.1. Если в ячейке находятся более одной однополовой особи, то между ними происходит стычка, в результате которой у всех особей снижается ПЖ на соответствующий параметр модели, умноженный на количество особей в ячейке (чем больше особей рядом, тем опаснее, поэтому есть зависимость от количества особей). После каждой такой операции происходит проверка ПЖ на нулевое значение, такие особи считаются мертвыми и удаляются из моделирования. Новорожденные особи и те особи, которые находятся в своей норе, не участвуют в стычках.
 - 2.2. Если в ячейке находятся две разнополые половозрелые особи, то в репродуктивный период самка беременеет с вероятностью, равной соответствующему параметру модели.
 - 2.3. Если в ячейке находится только одна не новорожденная особь, то она потребляет корм, находящийся в ячейке, и восстанавливает свою сытость на величину, равную соответствующему параметру модели. Количество корма в ячейке снижается на соответствующий параметр модели.
3. Далее происходит перерасчет оставшихся переменных модели. Увеличивается возраст каждой особи, снижается сытость, снижается ПЖ при низкой сытости, происходит проверка на смерть от голода или возраста, увеличивается срок беременности для беременных особей (если особь понесла потомство, то увеличивается переменная, которая определяет, когда особь сможет опять забеременеть). Происходит проверка достижения возраста, чтобы перейти

в другую стадию развития (новорожденная особь, неполовозрелая, половозрелая, беременная, понесла потомство). Если беременная особь достигла предельного срока беременности и находится в норе, то несет потомство. Растительность в вегетативный период восстанавливается.

4. По окончании каждого дня собирается всевозможная статистика, на основе которой строятся всевозможные графики и распределения.
5. Переход в п. 1, если не было достигнуто одного из завершающих условий.

На рис. 6.1 графически представлен пример расчета одного шага модели. Рассмотрены ситуации расположения особей относительно друг друга. На рис. 1,а представлена ситуация, когда в каждой ячейке находится не более одной особи. Здесь не может проходить ни стычек, ни взаимодействия самцов и самок в процессе размножения. На рис. 1,б представлена ситуация, когда в ячейке находятся две особи. В этом случае в зависимости от пола особей возможна ситуация стычки или спаривания. В конце каждой итерации происходит пересчет всех переменных.

На рис. 6.2 представлено распределение леммингов и нор в пространстве.

Результаты моделирования

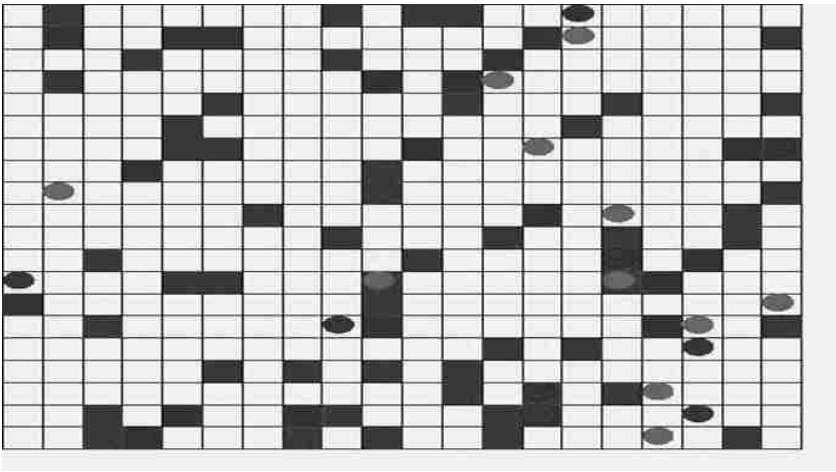


Рис. 6.2. *Распределение объектов в пространстве (квадрат – нора, круг – особь)*

В ходе подбора параметров модели удалось получить трехлетние циклы динамики численности. На рис. 6.3 представлен пример трехлетнего цикла динамики численности. Имеет место нарастание в сезон размножения и спад численности в период перезимовки. В фазе депрессии идет постепенное увеличение численности (в каждом из периодов). Фаза пика имеет резкие отличия. Происходит нарастание в период размножения. При этом возможно достижение максимальной численности в середине лета с последующим уменьшением. Во время перезимовки после пика численности наблюдается резкое снижение численности популяции и затем осуществляется переход в фазу депрессии.

Ключевой особенностью индивидуально-ориентированного моделирования является возможность проанализировать модель по различным срезам данных: рождение, смертность, влияние стычек и голода на популяцию, средний возраст, средний ПЖ, влияние болезней и т. д. Это позволяет выявить

главные характеристики популяции, которые больше всего влияют на динамику численности.

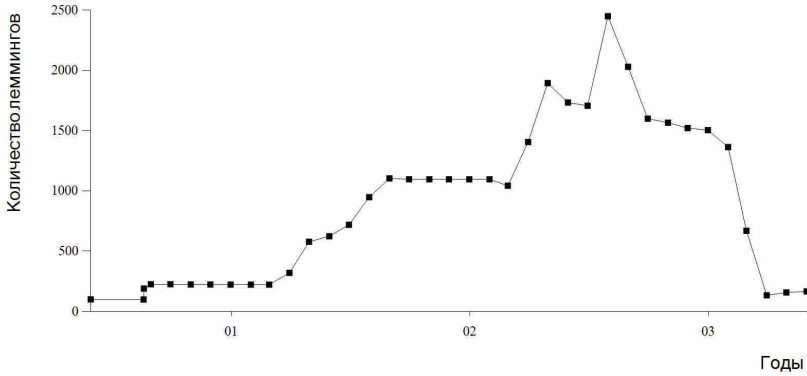


Рис. 6.3. Динамика численности за три года

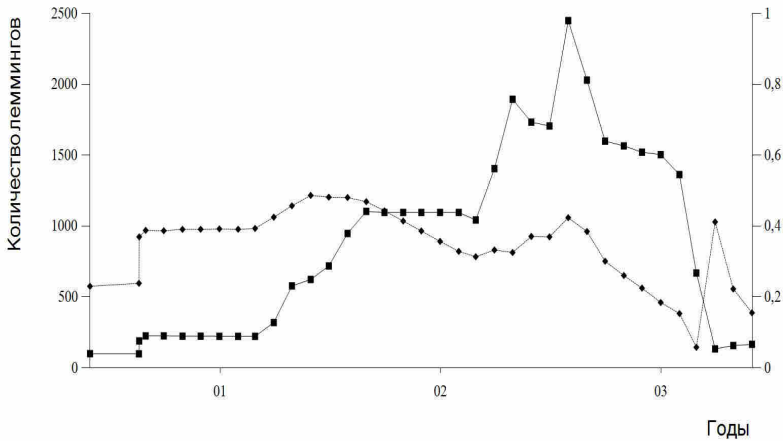


Рис. 6.4. Динамика численности за три года (квадраты, шкала от 0 до 2500 особей) и средний потенциал жизнестойкости (ромбы, шкала от 0 до 1)

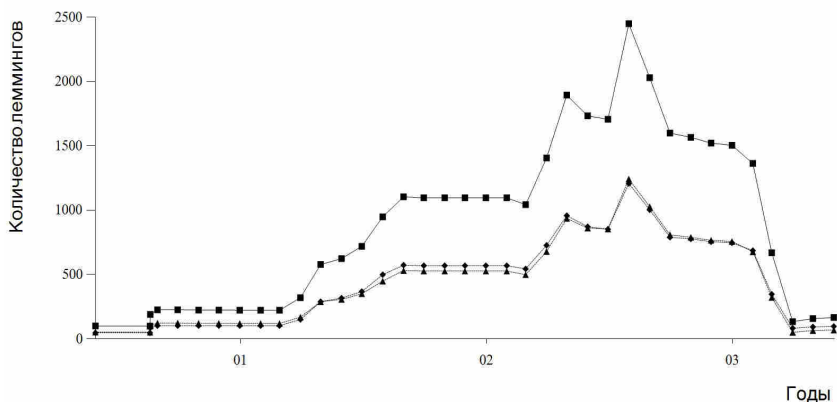


Рис. 6.5. Динамика численности за три года (квадраты), динамика самцов (ромбы) и самок (треугольники)

На рис. 6.4 на график изменения численности наложен график, отображающий средний ПЖ. Из этого графика видно, что достигается максимум ПЖ (в момент окончания фазы нарастания), затем происходит спад показателя, и локальный максимум отмечен в фазу пика, он примерно совпадает с наступлением пика численности популяции. Затем наблюдается резкий спад до минимума (в момент окончания перезимовки) и очередной подъем показателя в фазе депрессии.

На рис. 6.5 приведено сравнение динамики численности леммингов, самцов и самок. Как видно из рисунка, динамика сильно не отличается.

На рис. 6.6 показана динамика численности особей различных стадий развития. Видно, что неполовозрелых мало. В тоже время динамика слепых и половозрелых выражено отчетливо. Имеет место следующий факт, что, когда у половозрелых наблюдается локальный максимум, численность неполовозрелых имеет локальный минимум и наоборот, когда численность неполовозрелых имеет локальный максимум, численность половозрелых имеет локальный минимум. Из этого графика видно, что в период перезимовки все выжив-

шие особи переходят в разряд половозрелых, что совершенно естественно.

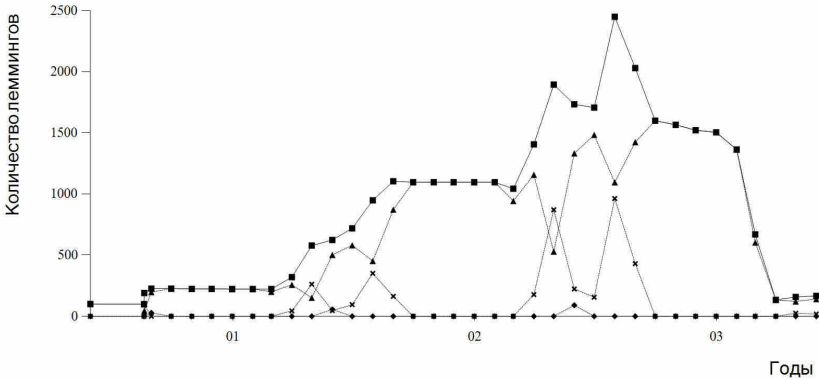


Рис. 6.6. Динамика численности за три года (квадраты), динамика неполовозрелых особей (кресты), половозрелых (треугольники) и слепых (ромбы)

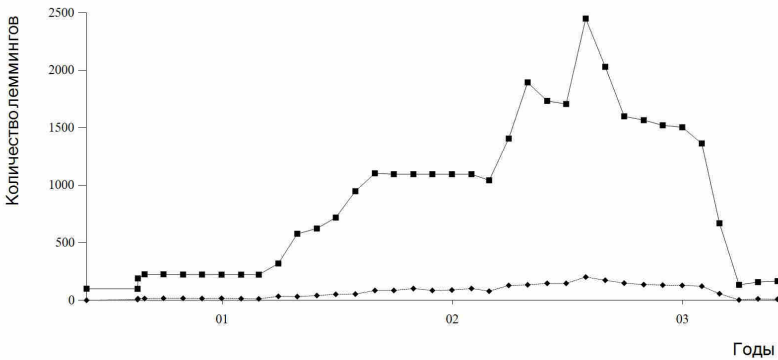


Рис. 6.7. Динамика численности за три года (квадраты) и динамика больных особей (ромбы)

На рис. 6.7 показана динамика численности зараженных особей. Видно, что в пике численности отношение заражен-

ных к общей массе сильно не увеличивается, поэтому при данных параметрах модели эпидемии не происходит.

На рис. 6.8 показано изменение количества особей с различными генотипами. Видно, что оно согласовано с динамикой численности популяции. Из графика следует, что численность особей с генотипом ББ (с повышенной плодовитостью) меняется незначительно, имеет максимум, когда общая численность популяции достигает максимума. Динамика численности особей с генотипом АА и динамика численности особей с генотипом АБ изменятся примерно синхронно до момента, когда численность достигает максимума, и затем начинает снижаться.

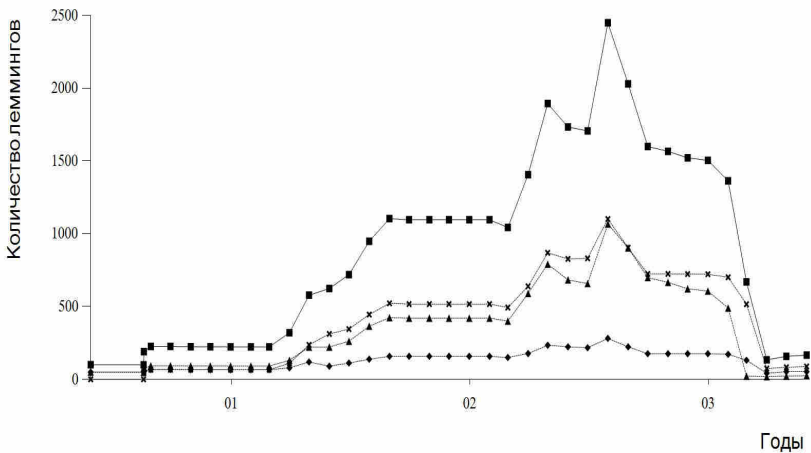


Рис. 6. 8. Динамика численности за три года (квадраты) и динамика генотипов. Генотип “А” – доминантный, большее выживание в стычках, “Б” – повышенная плодовитость. АА (треугольники), АБ (кресты), ББ (ромбы)

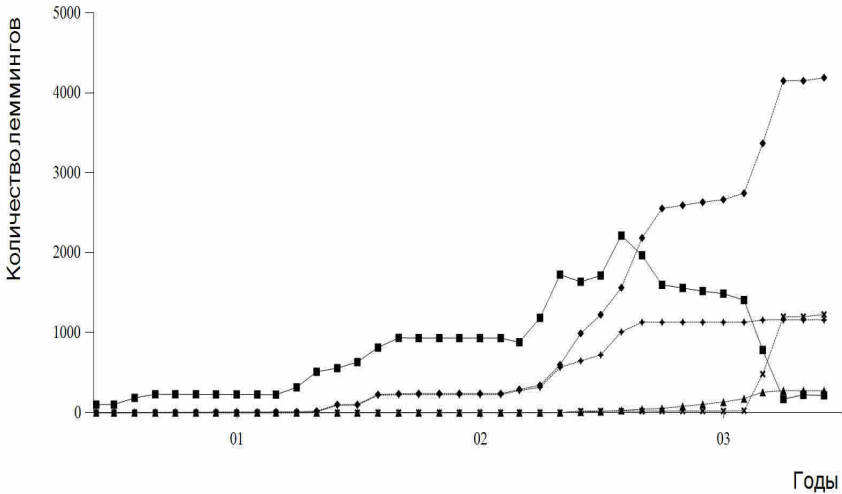


Рис. 6. 9. Динамика численности за три года (квадраты), общая смертность за все время (ромбы), смерть от стычек (треугольники), смерть от голода (кресты), смерть из-за предельного возраста (звезды)

На рис. 6.9 сравниваются графики смертности по различным причинам с графиком динамики численности. Из графика видно, что от возраста смертность растет постепенно, а от голода резко после пика, в условии отсутствия пищи.

На рис. 6.10 сравниваются график динамики численности и график средней доступности корма. Как видно, корм не восстанавливается в зимний период, а восстанавливается в вегетативный. В конце пика численности леммингов корм снижается до минимума.

На рис. 6.11 представлено сравнение зарегистрированных данных [6] и результат работы модели.

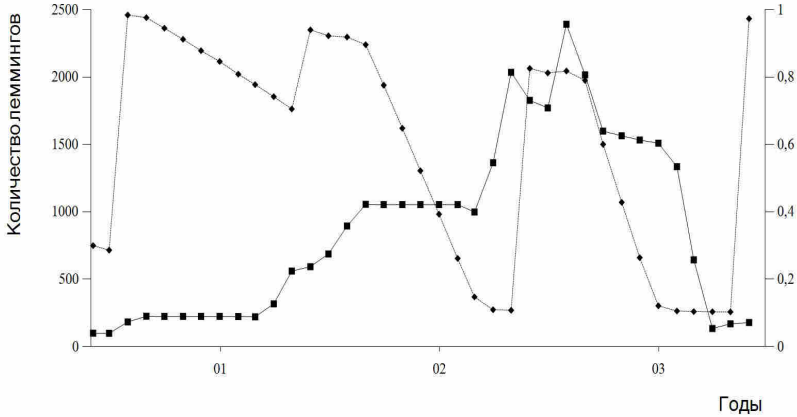


Рис. 6.10. Динамика численности за три года (квадраты, шкала от 0 до 2500 особей) и средняя доступность корма (ромбы, шкала от 0 до 1)

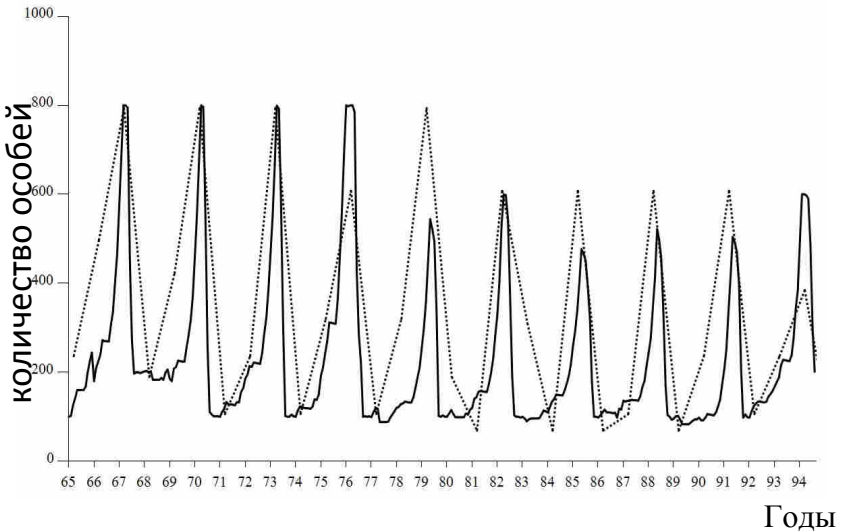


Рис. 6.11. Динамика численности за длительный промежуток времени. Сплошная линия – динамика из модели. Пунктир – зарегистрированные данные [6]

На рис. 6.12-6.15 показано пространственное распределение доступности корма в разное время. Более темный участок соответствует низкой доступности, более светлый – высокой. Черный цвет – нет растительности.

Во время депрессии (начальная стадия) особей мало и происходит рост популяции. С течением времени особей становится больше, плотность повышается, а значит, и количество стычек, сумма которых влияет на средний ПЖ. В некоторый момент растительность, пригодная для пищи, не успевает восполниться за вегетативный период, и при большом количестве стычек происходит резкая смертность популяции, после которой остается небольшое количество особей. И популяция возвращается в начальную фазу депрессии. Потом все опять повторяется.

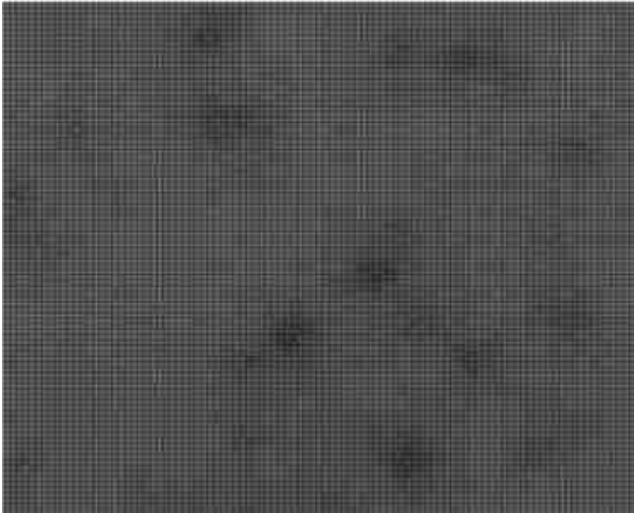


Рис. 6.12. *Пространственное распределение биомассы растительности (начальное распределение)*

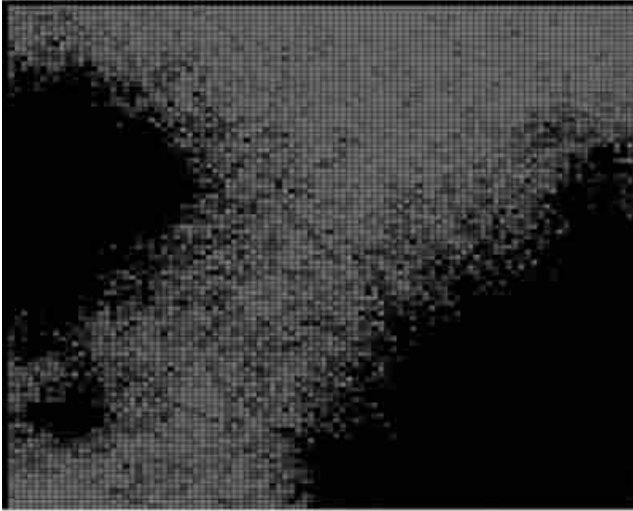


Рис. 6.13. *Пространственное распределение биомассы растительности (нарастание)*

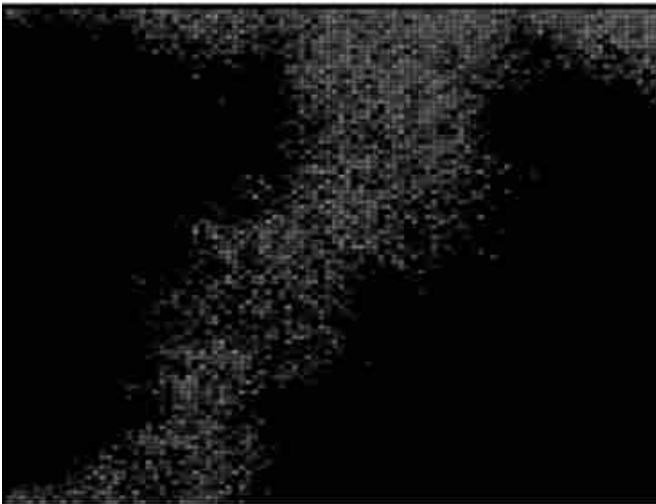


Рис. 6.14. *Пространственное распределение биомассы растительности (пик)*



Рис. 6.15. *Пространственное распределение биомассы растительности (депрессия)*

6.4. Заключение

Построена модель динамики численности леммингов и найдены параметры, при которых появляются стабильные трехлетние циклы динамики численности. Были получены результаты, хорошо совпадающие с зарегистрированными данными.

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-90011.

Литература

1. *Дородницын А.А.* Математика и описательные науки. М.: Знание, 1982. С. 6-15.

2. *Костицын В.А.* Эволюция атмосферы, биосферы и климата. М.: Наука, 1984. 96 с.

3. *Глушков В.Н., Недоступов Э.В., Саранча Д.А., Юферова И.В.* Компьютерные методы анализа математических моделей экологических систем. М.: ВЦ РАН, 2006. 74 с.

4. *Колмогоров А.Н.* Качественное изучение математических моделей динамики популяций. М.: Наука, 1972. 254 с.

5. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968. 232 с.

6. *Орлов В.А., Саранча Д.А., Шелепова О.А.* Математическая модель численности популяции леммингов (*Lemmus*, *Dicrostonyx*) и ее использование для описания популяций восточного Таймыра. // *Экология*. 1986. Т. 2. С. 43-51.

7. *Саранча Д.А.* Биомоделирование. Материалы по количественной экологии. Математическое моделирование и биофизические аспекты. М.: ВЦ РАН, 1995. 139 с.

8. *Трацев Р. В., Люлякин О. П., Саранча Д. А., Юрезанская Ю. С.* Метод комплексных исследований на примере моделирования популяций леммингов. Москва, ВЦ РАН, 2014. 115 с.

9. *Павловский Ю.Н.* Имитационные системы и модели. М.: Знание, 1990. 45 с.

10. *Рашевский Н.* Некоторые медицинские аспекты математической биологии. М.: Медицина, 1966. 244 с.

11. *Байбиков Е.В., Белотелов Н.В., Завьялова С.В. и др.* О моделировании тундровых популяций и сообществ. // *Математическое моделирование. Процессы в сложных экономических и экологических системах*. М.: Наука, 1986. С. 207-219.

12. *Чернявский Ф.Б., Лазуткин А.Н.* Циклы леммингов и полевок на севере. Магадан: ИБПС ДВО РАН, 2004. 150 с.

13. *Oksanen T., Oksanen L., Dahlgren J., Olofsson J.* Arctic lemmings, *Lemmus* spp. and *Dicrostonyx* spp.: integrating eco-

logical and evolutionary perspectives // *Evolutionary Ecology Research*. 2008. V.10. P. 415-434.

14. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование/ Пер. с фр. под ред. *Ю.М. Свирижева*. М.: Наука, 1976. 286 с.

15. *Lotka A.J.* Elements of physical biology. Baltimor: Williams and Wilkins, 1925. 368 p.

16. *Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б.* Математические модели биологических продукционных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1993. 302 с.

17. *Глушков В.Н., Саранча Д.А.* Комплексный метод математического моделирования биологических объектов. Моделирование тундрового сообщества // *Автоматика и телемеханика*. 2013. № 2. С. 94 -108.

18. *Белотелов Н.В., Дмитриева И.В., Саранча Д.А.* О некоторых свойствах одномерного дискретного отображения со специфическим видом правой части // *Биомоделирование*. М: ВЦ РАН, 1993. С. 111-154.

19. *Недоступов Э.В., Саранча Д.А., Чигерев Е.Н., Юрезанская Ю.С.* О некоторых свойствах одномерных унимодальных отображений // *ДАН*. 2010. Т. 430. № 1. С. 23-28.

20. *Люлякин О.П., Саранча Д.А., Трапцеев Р.В., Юрезанская Ю.С.* Математическое моделирование экологических сообществ. М.: ВЦ РАН, 2013. 66 с.

21. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2001. Т. 41. №11. С. 1751-1760.

22. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. и Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.

23. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.

24. *Лотов А.В.* О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем // Докл. АН СССР, 1980. Т. 250. № 5. С. 1081-1083.

25. *V.A. Bushenkov, O.L. Chernykh, G.K. Kamenev, and A.V. Lotov.* Multidimensional Images Given by Mappings: Construction and Visualization // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 5, No. 1, 1995. P. 35-56.

26. *Каменев Г.К.* Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. № 1. С. 136-152.

27. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: ВЦ РАН, 2007. 230 с. ISBN 5-201-09876-2.

28. *Каменев Г.К., Кондратьев Д.Л.* Об одном методе исследования незамкнутых нелинейных моделей // Математическое моделирование. 1992. № 3. С. 105-118.

29. *Берёзкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В.* Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной границы Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006. Т. 46. № 11. С. 2009-2023.

30. *Саранча Д.А.* Количественные методы в экологии. Биофизические аспекты и математическое моделирование. – М.: МФТИ, 1996. 251 с.

31. *Бибик Ю.В., Попов С.П., Саранча Д.А.* Неавтономные математические модели экологических систем. – М.: ВЦ РАН, 2004. 120 с.

32. *Саранча Д.А., Сорокин П.А., Фролова А.А.* Математическое моделирование динамики численности популяций животных. М.: ВЦ РАН, 2005. 27 с.

33. *Sarancha D.A.* Mathematical modeling of tundra communications and populations // Systems analysis and simulation. Math. Res. 1985. Vol. 27. P. 377-379.

34. *Перминов В. Д., Саранча Д. А.* Об одном подходе к решению задач популяционной экологии // Математическое моделирование. 2003. № 11. С. 45-53.

35. *Bird G. A.* Molecular gas dynamics. – Oxford: Clarendon Press, 1976. – 78 p.

36. *Ojeda A. A., Novillo A., Ojeda R. A., Roig-Juñent S.* Geographical distribution and ecological diversification of South American octodontid rodents // *Journal of Zoology*. 2013. Vol. 289. P. 285-293.

37. *Horvilleur B. and Lartillot N.* Monte Carlo algorithms for Brownian phylogenetic models // *Phylogenetics*. 2014. Vol. 30. №. 21. P. 3020-3028.

38. *Amori G., Luiselli L.* Null model analyses of small mammal community structure in tropical islands // *Tropical Ecology*. 2013. Vol. 54. №. 1. P. 23-31.

39. *Loos M., Ragas A.M.J., Plasmeijer R., Schipper A. M., Hendriks A. J.* Eco-SpaCE: An object-oriented, spatially explicit model to assess the risk of multiple environmental stressors on terrestrial vertebrate populations // *Science of the Total Environment*. 2010. Vol. 408. – P. 3908-3917.

40. *Liu C., Sibly R. M., Grimm V., Thorbek P.* Linking pesticide exposure and spatial dynamics: An individual-based model of wood mouse (*Apodemus sylvaticus*) populations in agricultural landscapes // *Ecological Modelling*. 2013. – Vol. 248. – P. 92-102.

41. *Dalkvist T., Sibly R. M., Topping C.J.* Landscape structure mediates the effects of a stressor on field vole populations // *Landscape Ecol.* 2013. Vol. 28. P. 1961-1974.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Метод комплексных исследований	4
2. Биологические предпосылки модели	8
3. Методы моделирования экологических объектов. Описание имитационной модели «растительность– лемминги–песцы».....	9
4. Анализ разностных уравнений	16
4.1. Основные определения.....	18
4.2. Исследования треугольного отображения.....	25
4.2.1. Циклы кратной длины в треугольном отображении	25
4.2.2. Порядок Шарковского и треугольное отображение	32
4.3. Исследование отображений с помощью метрических эпсилон-сетей.....	48
4.3.1. Аналоги треугольного отображения	48
4.3.2. Логистическое отображение.....	66
4.4. Исследование треугольного, двухзонного и логи- стического дискретных отображений.....	78
5. Исследование моделей хаотической динамики методами аппроксимации и визуализации неявно заданных множеств	85
5.1. Методы анализа сложных систем, основанные на аппроксимации многомерных множеств, заданных неявным образом	87
5.2. Метод глубоких ям	90
6. Об одном варианте индивидуально-ориентированной модели популяции леммингов	94
6.1. Описание модели	96
6.2. Подробный алгоритм работы модели	100
6.3. Результаты моделирования	104
6.4. Заключение	113
Литература	114