

**CEDIMES Scientific Seminar at Dorodnicyn Computing Centre**

**Séminaire scientifique de la Institut CEDIMES dans le Centre  
d'informatique de nom Dorodnicyn**

**Научный семинар института CEDIMES в ВЦ РАН**

<http://www.ccas.ru/cedimes/seminar/>



**CEDIMES-Russie occidentale  
Moscow**

**Vol. 1**

**No. 2**

**2015**

CEDIMES Scientific Seminar at Dorodnicyn Computing Centre /  
Edited by Nicholas Olenev – Moscow: CEDIMES-Russie occ., Vol. 1,  
No. 2, 2015. - 84 p.

Electronic publication <http://www.ccas.ru/cedimes/seminar/>

Séminaire scientifique de la Institut CEDIMES dans le Centre  
d'informatique de nom Dorodnicyn / Edité par Nicolas Olenev –  
Moscou: CEDIMES-Russie occ., Vol. 1, No. 2, 2015. – 84 p.

Научный семинар института CEDIMES в ВЦ РАН / Под ред.  
Н.Н. Оленёва – М.: CEDIMES-Russie occ., Vol. 1, No. 2, 2015. –  
84 с.

Main subject

**"Modeling of Social and Economic Systems"**

Moscow, Russia. July 2 - December 29, 2015.

Thème principal

**"Modélisation des systèmes sociaux et économiques"**

Moscou, Russie. 2 juillet - 29 Décembre, 2015.

Главная тема

**"Моделирование социально-экономических систем"**

Москва, Россия. 02 июля - 29 декабря 2015 г.

© CEDIMES-Russie occidentale, 2015

## **Editorial Council**

### **Chief Editor**

Nicholas Olenov, director of CEDIMES-Russie, occ.

### **Deputy Editor**

Nina Slanevskaya, honorary director of CEDIMES-Russie, occ.

### **Executive secretary**

Stanislav Sorokin, CEDIMES-Russie, occ., [www2013@ccas.ru](mailto:www2013@ccas.ru)

### **Editorial board**

Nina Aprausheva Professor CEDIMES-Russie, occ., Ph.D.

Sergey Arsenyev Obraztsov, Professor of CEDIMES-Russie, occ.,  
Professor of Cambridge University, Ph.D.

Leonid Grigoryev, professor CEDIMES-Russie, occ., Professor of RSU  
PTT them. Gubkin, Prof. Dr.

Vasily Dikumar Professor CEDIMES-Russie, occ., Prof. Dr.

Alexander Tyulenev, professor CEDIMES-Russie, occ., Ph.D.

## Редакционный совет

### ▣ Главный редактор

Оленёв Николай Николаевич, директор CEDIMES-Russie, осс.

### ▣ Заместитель главного редактора

Сланевская Нина Михайловна, почетный директор CEDIMES-Russie, осс.

### ▣ Ответственный секретарь

Сорокин Станислав Викторович, CEDIMES-Russie, осс.,  
[www2013@ccas.ru](mailto:www2013@ccas.ru)

### ▣ Редакционная коллегия

Апраушева Нина Николаевна, профессор CEDIMES-Russie, осс.,  
к.ф.-м.н.

Арсеньев-Образцов Сергей Сергеевич, профессор CEDIMES-Russie, осс., профессор Кембриджского университета, к.ф.-м.н.

Григорьев Леонид Иванович, профессор CEDIMES-Russie, осс., профессор РГУ НиГ им. И.М.Губкина, д.ф.-м.н.

Дикусар Василий Васильевич, профессор CEDIMES-Russie, осс., профессор, д.ф.-м.н.

Тюленев Александр Васильевич, профессор CEDIMES-Russie, осс., к.э.н.

Шатров Анатолий Викторович, профессор CEDIMES-Russie, осс., профессор ВятГУ, д.ф.-м.н.

## Editorial

Nicholas Olenev

*CC FRC CSC RAS, CEDIMES-Russie occ., PFUR, MIPT, Moscow,  
Russia, [nolenev@mail.ru](mailto:nolenev@mail.ru)*

The second issue of the journal is opened by a paper of the Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS scientific staff Nina Aprausheva and Stanislav Sorokin devoted to solution of a task on probability of an optimum assessment of the hidden parameter of Gaussian mix. This important paper introduces new mathematical methods in modeling of social and economic systems. It is possible to use Gaussian mixes in particular for a clustering on stratus of the population distributed on levels of income and education. An attentive reader can find new applications for the stated theory.

In building of mathematical models for social and economic systems a solution of optimum control problems is widely used. Generally these tasks contain state-control constraints. Main researcher of CC FRC CSC RAS Professor Vasily Dikuser states an irregular maximum principle problem with state-control constraints.

A part of issue is allocated to students only started their scientific research. Student of PFUR Nail Sadekov presents a paper devoted to study an economic model of Bulgaria, and student of MIPT Polina Sherstobitova states an economic model of Australia.

My own paper finishes the issue, it is devoted to an evaluation of real sector for modern economy of Greece on the basis of an original vintage capital model.

The second issue as the first one is devoted to 60th anniversary of the Dorodnicyn Computing Centre (CC FRC CSC RAS since June of 2015) and to 55th anniversary of PFUR that are noted in 2015.

## Слово редактора

Н.Н. Оленёв

*ВЦ ФИЦ ИУ РАН, CEDIMES-Russie occ., РУДН, МФТИ(ГУ),  
Москва, Россия  
[nolenev@mail.ru](mailto:nolenev@mail.ru)*

Второй выпуск журнала открывает статья сотрудников Вычислительного центра им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН Нины Николаевны Апраушевой и Станислава Викторовича Сорокина, посвященная решению задачи о вероятности оптимальной оценки скрытого параметра гауссовой смеси. Это важная статья по внедрению новых математических методов в моделирование социально-экономических систем. Гауссовы смеси можно использовать, в частности, для кластеризации по стратам населения, распределенного по уровням дохода и образования. Внимательный читатель может найти новые применения изложенной теории.

При построении математических моделей социально-экономических систем широко используется решение задач оптимального управления. В общем случае эти задачи содержат смешанные ограничения. Главный научный сотрудник ВЦ ФИЦ ИУ РАН профессор Василий Васильевич Дикусар излагает нерегулярный принцип максимума для задачи со смешанными ограничениями.

Часть выпуска предоставлена студентам недавно приступившим к научной деятельности. В статье студента РУДН Наиля Халимовича Садекова изложены результаты исследования модели экономики Болгарии, а в статье студентки МФТИ Полины Александровны Шерстобитовой – модели экономики Австралии.

Завершает выпуск моя статья, посвященная оценке реального сектора современной экономики Греции на основе оригинальной динамической модели производственных фондов, дифференцированных по моментам создания.

Также как и первый, второй выпуск посвящен 60-летию ВЦ РАН (ВЦ ФИЦ ИУ РАН с июня 2015) и 55-летию РУДН, отмечаемых в 2015 году.

## Об оптимальной оценке параметра гауссовой смеси, вычисляемой по ЕМ-алгоритму

Н.Н. Апраушева, С.В. Сорокин

*ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*  
[plat@ccas.ru](mailto:plat@ccas.ru) (Н.Н.А.), [www2013@ccas.ru](mailto:www2013@ccas.ru) (С.В.С.)

Рассмотрена задача о вероятности  $P$  оптимальной оценки параметра гауссовой смеси, получаемой по ЕМ-алгоритму при случайных начальных условиях. Исследовалась смесь с равными ковариационными матрицами и различными средними. Экспериментально установлено, что эта вероятность зависит от таких факторов, как: размерность пространства  $p$ , объём выборки  $n$ , расстояния Махаланобиса  $\rho_{is}$ ,  $i < s$ ,  $i, s \in \{1, 2, \dots, k\}$ , число компонент смеси  $k$ , задаваемая точность вычислений  $\varepsilon$ . Для любых конечных значений  $p$  и  $k$  при больших значениях  $n = n(p, k, \rho_{is})$  и  $\rho_{is} = \rho_{is}(p, n, k)$  величина вероятности  $P = P(p, n, \rho_{is}, k, \varepsilon)$  может быть  $\geq 0.5$ .

**Ключевые слова:** гауссова смесь, неизвестный параметр распределения, ЕМ-алгоритм, случайные начальные условия, вероятность оптимальной оценки.

### Sur optimale estimation des paramètres de mélange de gaussiennes calculée par l'algorithme espérance-maximisation

Nina Aprausheva (CC FRC SCC RAS, Moscou, Russie, [plat@ccas.ru](mailto:plat@ccas.ru)),  
Stanislav Sorokin (CC FRC SCC RAS, Moscou, Russie,  
[www2013@ccas.ru](mailto:www2013@ccas.ru))

Cet article présente un problème de probabilité  $P$  pour optimiser l'estimation des paramètres de mélange gaussien obtenu par algorithme EM pour des conditions initiales aléatoires. Le mélange avec des matrices de covariance égales et support différent est étudiée. Il a été établi

expérimentalement que cette probabilité est fonction de facteurs tels que: la dimension de  $p$ , taille de l'échantillon  $n$ , les  $\rho_{is}$  de distance de Mahalanobis, où  $\rho_{is}$ ,  $i < s$ ,  $i, s \in \{1, 2, \dots, k\}$ , le nombre de composantes de le mélange  $k$ , donnée par la précision des calculs  $\varepsilon$ . Pour toutes les valeurs finies de  $p$  et  $k$  pour les grandes valeurs de  $n = n(p, k, \rho_{is})$  et  $\rho_{is} = \rho_{is}(p, n, k)$  la valeur de la probabilité  $P(p, n, \rho_{is}, k, \varepsilon)$  peut être  $\geq 0,5$ .

**Mots-clés:** mélange de gaussiennes, paramètre inconnu de la distribution, l'algorithme EM, les conditions initiales aléatoires, la probabilité de l'estimation optimale.

### **On optimal parameter estimation of Gaussian mixture calculated by the expectation–maximization algorithm**

Nina Aprausheva (CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia, [plat@ccas.ru](mailto:plat@ccas.ru))

Stanislav Sorokin (CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia, [www2013@ccas.ru](mailto:www2013@ccas.ru))

The paper presents a problem of probability  $P$  for optimal parameter estimation of Gaussian mixture obtained by EM algorithm for random initial conditions. The mixture with equal covariance matrices and different medium is investigated. It was established experimentally that this probability depends on such factors as: the dimension of  $p$ , sample size  $n$ , the Mahalanobis distance  $\rho_{is}$ , where  $i < s$ ,  $i, s \in \{1, 2, \dots, k\}$ , the number of components of the mixture  $k$ , given by the accuracy of calculations  $\varepsilon$ . For any finite values of  $p$  and  $k$  for large values of  $n = n(p, k, \rho_{is})$  and  $\rho_{is} = \rho_{is}(p, n, k)$  the value of the probability  $P = P(p, n, \rho_{is}, k, \varepsilon)$  can be  $\geq 0.5$ .

**Keywords:** Gaussian mixture, unknown parameter of distribution, EM algorithm, random initial conditions, probability of optimal estimation.

*Во всём мире не происходит ничего  
такого, в чём не было бы воплощено  
какое-либо правило максимума или  
минимума.*

*Леонард Эйлер*

## **Введение**

При использовании гауссовых смесей в качестве аппроксиматора в различных областях науки и практики необходимы алгоритмы для вычисления не только их мод, но и параметров распределения по данной выборке. Для определения параметров смеси используются известные классические методы (моментов, максимума правдоподобия, минимума  $\chi^2$ , наименьших квадратов, линейного программирования и др.), модификации этих методов и реализующие их программы. Достаточно полный обзор этих методов представлен в работах [1, 2], в которых отмечено, что наибольшее число публикаций посвящено исследованию одномерных смесей.

Решение задачи определения параметров многомерной смеси освещено в литературе слабее, по этой теме следует отметить работы [3-7]. Для решения задач аппроксимации и распознавания образов часто используются смеси двух видов:

- 1) компоненты смеси различаются средними значениями  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  и ковариационными матрицами  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$ ;
- 2) компоненты имеют равные ковариационные матрицы  $\Sigma_i = \Sigma, i = 1, 2, \dots, k$ , и различные средние значения  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ .

Для вычисления оптимальных оценок параметров таких смесей наиболее эффективным и часто используемым является ЕМ-алгоритм (алгоритм Дея-Шлезингера), базирующийся на методе максимального правдоподобия [5, 6]. Мы ограничимся рассмотрением ЕМ-алгоритма для смеси второго вида. Целесообразность использования этой модели обусловлена как её устойчивостью к нарушениям предположений о нормальности, так и полнотой системы гауссовых функций в пространстве  $L_2(-\infty, \infty)$ , что позволяет аппроксимировать такой смесью достаточно широкий класс распределений [8, 9].

В ряде современных работ со ссылками на первоисточник [5] отмечается, что вероятность  $P$  получения оптимального решения по ЕМ-алгоритму резко падает с увеличением размерности выборочного пространства  $p$  при случайном задании начальных условий. Но результаты многочисленных экспериментов показали, что вероятность  $P$  зависит от размерности пространства  $p$ , от расстояний Махаланобиса  $\rho_{is}$ ,  $i < s$ ,  $i, s \in \{1, 2, \dots, k\}$ , объёма выборки  $n$ , точности вычислений  $\varepsilon$  и числа компонент смеси  $k$ . На основании анализа результатов экспериментов получено утверждение.

При  $k \geq 2$  для любой размерности выборочного пространства  $p$  существуют такие числа  $\rho_0 = \rho(k, p)$ ,  $n_0 = n(k, p)$ ,  $\varepsilon_0$  ( $0 < \varepsilon_0 < 10^{-8}$ ), что при всех  $\rho_{is} > \rho_0$ ,  $n \geq n_0$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  вероятность  $P \geq 0.5$ .

Кроме того, скорректировано правило выбора оптимального решения из множества полученных, учитывающее частоту появления каждого решения при случайных начальных условиях.

Для гауссовой смеси с различными ковариационными матрицами и различными средними значениями ЕМ-алгоритм применим при условии ограниченности снизу дисперсий всех признаков [5, 10],

$$\sigma_{ii}^{(s)} \geq c > 1, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad p \geq 1, \quad s = 1, 2, \dots, k, \\ k \geq 2,$$

$p$  — размерность выборочного пространства,  $k$  — число компонент смеси.

## 1. Постановка задачи

Предполагается, что данная выборка

$$X^{(n)} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \quad (1.1a)$$

$$X_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp}), \quad i \leq p < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1b)$$

представляет собой реализацию некоторой непрерывной  $p$ -мерной случайной величины  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$  с плотностью вероятности  $f(X, \theta)$ , которая с достаточной точностью аппроксимируется

плотностью вероятности конечной гауссовой смеси с известным числом её компонент  $k$ ,

$$f(X, \theta) \approx \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}}}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^k \pi_i e^{-\frac{1}{2}(X-\mu_i)\Sigma^{-1}(X-\mu_i)'}, \quad (1.2)$$

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \Sigma, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{k-1}), \quad (1.3a)$$

$$2 \leq k < \infty, \quad \pi_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \pi_i = 1. \quad (1.3b)$$

Требуется найти оптимальную оценку векторного параметра  $\theta$  в (1.3a) с целью использования её в решении конкретной задачи (аппроксимации, классификации и др.). На основании (1.3a), (1.3b) для числа компонент  $s$  параметра  $\theta$  при известном значении  $k$  имеем формулу:

$$s = \frac{p(p+1)}{2} + pk + k - 1. \quad (1.4)$$

Для данной выборки с плотностью вероятности  $f(X, \theta)$  в (1.2) логарифмическая функция правдоподобия  $\ln L(X^{(n)}, \theta)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \ln L(X^{(n)}, \theta) = \\ -\frac{pn}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln|\Sigma| + \sum_{j=1}^n \ln \left[ \sum_{i=1}^k \pi_i e^{-\frac{1}{2}(X_j - \mu_i)\Sigma^{-1}(X_j - \mu_i)'} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для удобства векторный параметр  $\theta$  запишем в виде:

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s). \quad (1.6)$$

Тогда система уравнений правдоподобия определяется равенствами:

$$\frac{\partial \ln L(X^{(n)}, \theta)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (1.7)$$

Следуя Г. Крамеру и С. Р. Рао [11, 12] мы называем *оценкой максимального правдоподобия или оценкой максимального правдоподобия в широком смысле по терминологии Г. Кулдорфа* [13], *любое решение системы уравнений правдоподобия*. В отношении оценок максимального правдоподобия известно, что при довольно слабых условиях регулярности функции плотности вероятности среди множества решений системы уравнений правдоподобия  $\{\tilde{\theta}_l\}$ ,  $l = 1, 2, \dots, u$ , существует оптимальное решение  $\tilde{\theta}_{\text{opt}}$ , состоятельное, асимптотически эффективное и асимптотически нормальное [13-15]; такое решение единственно, и в нём функция правдоподобия имеет локальный максимум.

Гауссова смесь с равными ковариационными матрицами удовлетворяет условиям регулярности, сформулированным в [14-18], при которых среди множества решений системы уравнений правдоподобия  $\{\tilde{\theta}_i, i = 1, 2, \dots, u\}$ , существует одно оптимальное решение  $\tilde{\theta}_{\text{opt}}$ , и в нём матрица

$$\left\| \frac{\partial^2 \ln L(X^{(n)}, \tilde{\theta}_{\text{opt}})}{\partial \theta_i \partial \theta_q} \right\|, \quad i, q = 1, 2, \dots, s, \quad (1.8)$$

отрицательно определена по вероятности, т. е. функция правдоподобия при  $\theta = \tilde{\theta}_{\text{opt}}$  имеет локальный максимум.

## 2. Описание ЕМ-алгоритма

Система уравнений правдоподобия (1.7) при использовании выражений апостериорных вероятностей для каждой точки выборки  $X_j$ ,

$$P_{ij} = \frac{\pi_i e^{-\frac{1}{2}(X_j - \mu_i) \Sigma^{-1} (X_j - \mu_i)'}}{\sum_{s=1}^k \pi_s e^{-\frac{1}{2}(X_j - \mu_s) \Sigma^{-1} (X_j - \mu_s)'}} \quad (2.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

приводится к виду [5]:

$$\pi_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_{ij}, \quad (2.2)$$

$$\mu_i = \frac{\{\sum_{j=1}^n X_j P_{ij}\}}{\{\sum_{j=1}^n P_{ij}\}}, \quad (2.3)$$

$$\Sigma = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k (X_j - \mu_i)' (X_j - \mu_i) P_{ij}. \quad (2.4)$$

Если ввести обозначения

$$a_i = \Sigma^{-1} \mu_i' + \tau, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.5a)$$

$$b_i = -\frac{1}{2} \mu_i' \Sigma^{-1} \mu_i' + \ln \pi_i + \nu, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.5b)$$

где  $\tau$  и  $\nu$  — произвольные вектор и скаляр соответственно, то формулы (2.1) представимы в виде:

$$P_{ij} = 1 / \sum_{s=1}^k e^{(a_s - a_i) X_j' + b_s - b_i}, \quad (2.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Из выражений (2.6) следует, что параметры  $\pi_i$ ,  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $\Sigma$ , в (2.2) — (2.4) являются функциями  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Тогда уравнения (2.5a) (2.5b) образуют ряд уравнений общего вида:

$$a_i = \phi_i(a_i, b_i; X_1, X_2, \dots, X_n), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$b_i = \psi_i(a_i, b_i; X_1, X_2, \dots, X_n), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Если выбраны начальные значения  $a_i^{(0)}$ ,  $b_i^{(0)}$ , то можно задать итеративный процесс:

$$a_i^{(t)} = \phi_i(a_i^{(t-1)}, b_i^{(t-1)}; X_1, X_2, \dots, X_n), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$b_i^{(t)} = \psi_i(a_i^{(t-1)}, b_i^{(t-1)}; X_1, X_2, \dots, X_n), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

где  $a_i^{(t)}$ ,  $b_i^{(t)}$  — значения параметров  $a_i$ ,  $b_i$  на  $t$ -ом шаге итеративной процедуры. По выбранным начальным значениям  $a_i^{(0)}$ ,  $b_i^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , определяем значения апостериорных вероятностей  $P_{ij}^{(0)}$  и параметров смеси ( $\pi_i^{(0)}$ ;  $\mu_i^{(0)}$ ;  $\Sigma^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ) по формулам (2.6) и (2.2) — (2.4) соответственно. Далее, полученные значения  $\{\pi_i^{(0)}$ ;  $\mu_i^{(0)}$ ;  $\Sigma^{(0)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k\}$  используются для вычисления  $P_{ij}^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , по формулам (2.5a), (2.5b), (2.6) и т. д. Доказано [19], что последовательность итераций

$$\theta^{(t)} = (\pi_i^{(t)}, \mu_i^{(t)}, \Sigma^{(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, k), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

сходится к решению системы уравнений правдоподобия, которое является точкой локального максимума или седловой точкой функции правдоподобия.

При различных начальных условиях  $a_{0i}^{(s)}, b_{0i}^{(s)}, i = 1, 2, \dots, k, s = 1, 2, \dots, 20(k-1)$ , для одной выборки могут получаться различные решения системы уравнений правдоподобия. Начальные значения векторов  $a_{0i}^{(s)}$  задаём случайными, а параметры  $b_{0i}^{(s)}$  находим из равенств:

$$b_{0i}^{(s)} = -\left(a_{0i}^{(s)}, \tilde{X}_{(i)}\right), \quad (2.8)$$

полагая, что гиперплоскости, разделяющие компоненты смеси,

$$a_i X' + b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.9)$$

проходят через общий центр тяжести выборки, точку

$$\tilde{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad (2.10)$$

и тогда в (2.8)

$$\tilde{X}_{(i)} = \tilde{X}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.11)$$

либо через  $k$  точек исходной выборки, взятых случайным образом, и тогда

$$\tilde{X}_{(i)} = X_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.12)$$

Окончание итеративной процедуры определяем неравенствами:

$$\max_i \left\{ \left| a_i^{(t)} - a_i^{(t-1)} \right| \right\} \leq \varepsilon_1, \quad (2.13a)$$

$$\max_i \left\{ \left| b_i^{(t)} - b_i^{(t-1)} \right| \right\} \leq \varepsilon_2, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.13b)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — малые положительные числа,  $a_i^{(t)}, b_i^{(t)}$  — значения  $i$ -ых параметров смеси на  $t$ -ом шаге.

### 3. О вероятности получения оптимального решения

Для  $k = 2$  выражения (2.6) представимы в виде:

$$P_{1j} = \frac{1}{1 + \exp(ax'_j + b)}, \quad P_{2j} = 1 - P_{1j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} a' &= \Sigma^{-1}(\mu_2 - \mu_1)', \\ b &= \frac{1}{2}(\mu_1 \Sigma^{-1} \mu_1 - \mu_2 \Sigma^{-1} \mu_2) + \ln\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

Во многих работах, например в [5, 20], утверждалось, что последовательность итераций ЕМ-алгоритма сходится из начальной точки  $(a_0, b_0)$  к оптимальной оценке  $(\tilde{a}_{\text{opt}}, \tilde{b}_{\text{opt}})$ , если угол между векторами  $a_0, \tilde{a}_{\text{opt}} \leq 45^\circ$ , и что если вектор  $a_0$  задаётся случайно, то вероятность того, что он лежит внутри угла в  $45^\circ$  от  $\tilde{a}_{\text{opt}}$  равна 0.076 при  $p = 5$ , 0.01 при  $p = 10$ , 0.001 при  $p = 15$ , 0.0002 при  $p = 20$ . Но это утверждение не подтвердили результаты экспериментов, представленные в [19].

Для  $k = 2$  уравнение гиперплоскости, разделяющей компоненты смеси (линейной дискриминантной функции Фишера), имеет вид [21]:

$$X \Sigma^{-1}(\mu_2 - \mu_1)' + \frac{1}{2}(\mu_1 \Sigma^{-1} \mu_1' - \mu_2 \Sigma^{-1} \mu_2') + \ln\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\right) = 0. \quad (3.3)$$

Из выражений в (3.2), (3.3) следует, что вектор  $a'$  есть нормаль к гиперплоскости в уравнении (3.3), а скаляр  $b$  — свободный член этого уравнения.

При проведении экспериментов в двумерном пространстве было обнаружено, что при случайном задании множества начальных векторов,

$$A_0 = \{a_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots, 19\}, \quad (3.4)$$

среди его элементов может оказаться аварийный вектор  $a_a$ , лежащий в аварийной окрестности  $A_a$  вектора  $a_{\text{орт}}$ , ортогонального прямой, проходящей через точки  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Эта прямая делит исследуемую выборку на две группы, не являющиеся классами. На рис. 1 изображена эта ситуация,  $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$  — оценки средних значений этих групп, аварийная окрестность  $A_a$  заштрихована. Для скалярного произведения векторов  $a_{\text{орт}}$  и  $m = \mu_2 - \mu_1$ , имеет место равенство:

$$(a_{\text{орт}}, m) = 0. \quad (3.5)$$

Эксперименты, проведённые на модельных выборках, показали, что если  $a_0 \in A_a$ , то последовательность итераций

сходится к оценке максимального правдоподобия  $\tilde{\theta}_a$ , не являющейся оптимальной.

Из результатов экспериментов следует, что для каждой выборки существует множество аварийных начальных векторов, лежащих в окрестности вектора  $a_{\text{орт}}$ , ортогонального вектору  $t = \mu_2 - \mu_1$ . Угол, который образует каждый аварийный вектор  $a_a$  с положительным направлением оси  $Ox_1$ , обозначим через  $\beta_a$ , множество таких углов — через  $B$ ,

$$B = \{\beta_a\}. \quad (3.6)$$

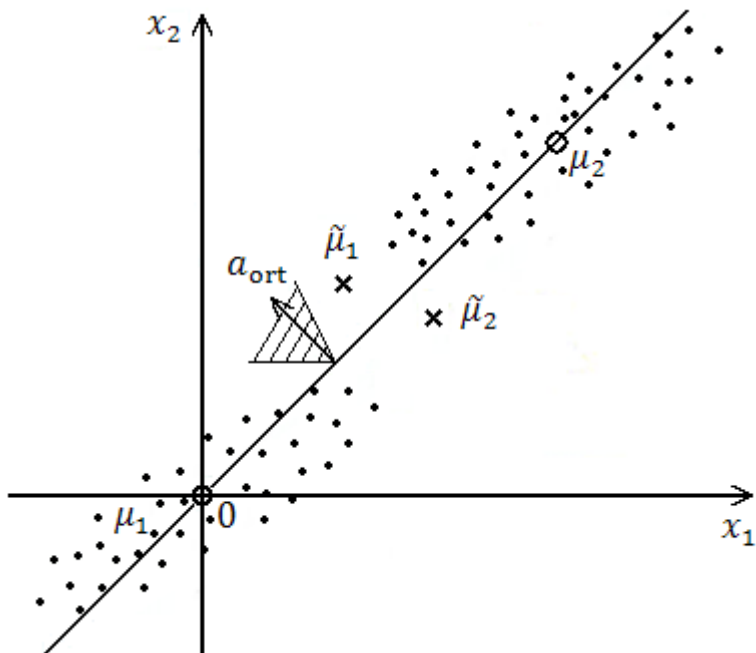


Рис. 1

Исследовались выборки с параметрами:

$\mu_1 = (0, 0)$ ,  $\Sigma = \begin{pmatrix} 6.25 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a = (0, 10)$ ,  $\pi_1 = 0.5$ ,  
 $\mu_2 = (10, 10)$ ,  $b = -50$ ,  $t = (10, 10)$ .  
 Обнаружено, что диаметр множества  $B$  уменьшается при уменьшении точности вычислений, при увеличении объёма

выборки и расстояния Махаланобиса между компонентами, о чём свидетельствуют данные таблиц 1, 2.

| Объём<br>выборки<br>$n$ | Точность<br>вычисления<br>$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ | Границы<br>аварийного<br>о множества<br>$B$<br>в градусах | Диаметр<br>множества<br>а $B$ | Таблица 1<br>Оценка вероятности<br>попадания вектора<br>$a_0$ в аварийное<br>множество $B$<br>геометрической<br>статистики |         |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
|                         |                                                           |                                                           |                               | -ческая                                                                                                                    | -ческая |
|                         |                                                           |                                                           |                               |                                                                                                                            |         |
| 100                     | 0.01                                                      | [131, 143]                                                | 12                            | 0.07                                                                                                                       | 0.06    |
|                         | 0.002                                                     | [132, 137]                                                | 5                             | 0.03                                                                                                                       | 0.04    |
|                         | 0.0002                                                    | [132, 133]                                                | 1                             | 0.005                                                                                                                      | 0.00    |
| 600                     | 0.01                                                      | [129, 134]                                                | 5                             | 0.03                                                                                                                       | 0.06    |
|                         | 0.002                                                     | [130, 134]                                                | 4                             | 0.02                                                                                                                       | 0.04    |
|                         | 0.0002                                                    | [132, 133]                                                | 1                             | 0.005                                                                                                                      | 0.00    |

Для всех выборок табл. 1 расстояние Махаланобиса равно 10. Данные табл. 2. получены по выборкам объёма 100,  $\varepsilon_1, = \varepsilon_2 = 0.002$ .

| Расстояние<br>Махаланобиса<br>$\rho$ | Точность<br>вычисления<br>$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ | Диаметр<br>множества<br>а $B$<br>в градусах | Границы<br>множества<br>а $B$<br>в градусах | Таблица 2<br>Частота<br>попадания<br>вектора $a_0$<br>в<br>множествах<br>о $B$ |       |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-------|
|                                      |                                                           |                                             |                                             |                                                                                |       |
|                                      |                                                           |                                             |                                             |                                                                                |       |
| 10                                   | 0.002                                                     | 4                                           | [130, 134]                                  |                                                                                | 0.02  |
|                                      | 0.0002                                                    | 1                                           | [132, 133]                                  |                                                                                | 0.005 |
| 5                                    | 0.002                                                     | 33                                          | [122, 155]                                  |                                                                                | 0.19  |
|                                      | 0.0002                                                    | 28                                          | [122, 150]                                  |                                                                                | 0.15  |
| 4                                    | 0.002                                                     | 18                                          | [122, 140]                                  |                                                                                | 0.1   |
|                                      | 0.002                                                     | 57                                          | [115, 172]                                  |                                                                                | 0.32  |
| 3                                    | 0.0002                                                    | 55                                          | [113, 168]                                  |                                                                                | 0.30  |
|                                      | $10^{-8}$                                                 | 55                                          | [113, 168]                                  |                                                                                | 0.30  |
|                                      | 0.002                                                     | 43                                          | [109, 152]                                  |                                                                                | 0.24  |
| 2                                    | 0.0002                                                    | 35                                          | [107, 142]                                  |                                                                                | 0.20  |
|                                      | $10^{-8}$                                                 | 32                                          | [107, 139]                                  |                                                                                | 0.17  |

Из результатов экспериментов, представленных в таблицах 1 и 2, следует утверждение.

**Утверждение 1.** Для  $k = 2$  ЕМ-алгоритм даёт оптимальную оценку параметра смеси  $\theta$ , если угол  $\gamma$  между начальным вектором  $a_0$  и вектором  $\mu_2 - \mu_1$  или вектором  $\mu_1 - \mu_2$  меньше  $45^\circ$ .

Рисунки 2 и 3 демонстрируют уменьшение диаметра аварийного множества  $A_a$  с увеличением расстояния Махаланобиса, что приводит к увеличению вероятности получения оптимальной оценки  $\tilde{\theta}_{opt}$  при случайном задании начальных векторов  $a_0$ .

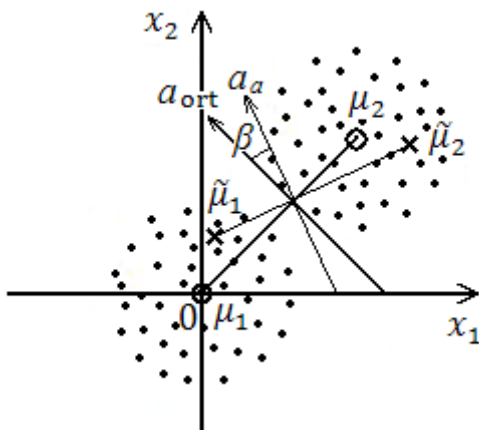


Рис. 2

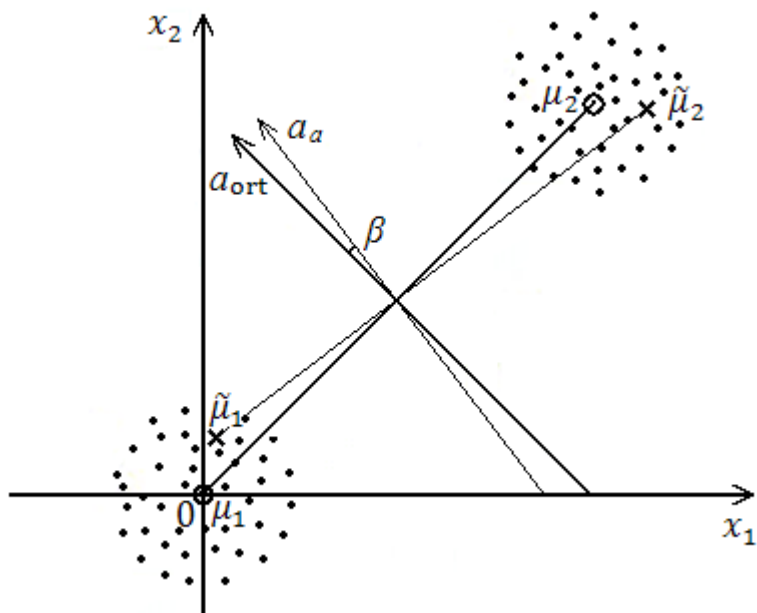


Рис 3

В табл. 3 даны значения частоты  $\tilde{P}_a$  попадания случайного вектора  $a_0$  в аварийное множество  $A_a$ ,  $a_0 \in A_a$ , в зависимости от размерности выборочного пространства и расстояния Махаланобиса  $\rho$ . Для всех выборок этой таблицы  $k = 2$ ,  $\pi_1 = 0.5$ ,  $\Sigma = I$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-8}$ ,  $m = (d, d, \dots, d)$ .

| Размерность<br>выборочного<br>пространства<br>$p$ | Расстояние<br>Махаланобиса<br>$\rho$ | Объём<br>выборки<br>$n$ | Таблица 3<br>$\tilde{P}_a$ — частота<br>попадания<br>вектора $a_0$ в<br>аварийное<br>множество $A_a$ |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                   |                                      |                         |                                                                                                      |
| 2                                                 | 2                                    | 400                     | 0.04                                                                                                 |
|                                                   | 4                                    | 400                     | 0.00                                                                                                 |

|    |    |     |      |
|----|----|-----|------|
|    | 10 | 400 | 0.00 |
|    | 2  | 400 | 0.20 |
| 4  | 4  | 400 | 0.00 |
|    | 10 | 400 | 0.00 |
|    | 2  | 400 | 0.89 |
| 10 | 4  | 400 | 0.52 |
|    | 10 | 400 | 0.14 |
|    | 14 | 400 | 0.08 |
|    | 2  | 800 | 0.55 |
| 10 | 4  | 800 | 0.30 |
|    | 10 | 800 | 0.12 |
|    | 14 | 800 | 0.06 |

Из данных этой таблицы следует, что при фиксированных значениях  $n$  и  $\rho$  частота попадания случайного вектора  $a_0$  в аварийное множество  $\tilde{P}$  растёт при увеличении размерности выборочного пространства  $p$ . Так, для  $n = 400$  и  $\rho = 4$  имеем:  $\tilde{P} = 0.00$  при  $p = 2$  и  $p = 4$ ,  $\tilde{P} = 0.52$  при  $p = 10$ . Однако,  $\tilde{P} = 0.14$  при  $n = 400, \rho = 10, p = 10$  и  $\tilde{P} = 0.06$  при  $n = 800, \rho = 14, p = 10$ , так что в этом случае вероятность получения оптимального решения  $\geq 0.86$ , что противоречит утверждениям в [5, 20].

На основании анализа данных табл. 3 следует утверждение.

**Утверждение 2.** Для  $k = 2$  для каждой размерности выборочного пространства  $p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) существуют такие числа  $n_0 = n_0(p)$ ,  $\rho_0 = \rho_0(p)$ , ( $\rho_0 \geq 4$ ),  $\varepsilon_0$ , ( $0 < \varepsilon_0 < 10^{-8}$ ), что при  $n \geq n_0$ ,  $\rho \geq \rho_0$ ,  $\varepsilon < \varepsilon_0$  вероятность  $\tilde{P}_a$  попадания случайного вектора  $a_0$  в аварийное множество  $\leq 0.5$ , а вероятность получения оптимального решения по ЕМ-алгоритму  $\geq 0.5$ .

В некоторых случаях можно увеличить вероятность получения оптимального решения. Для  $k = 2$ , если известны, хотя бы приближённо, значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , то случайный начальный вектор  $a_0 = (a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0p})$  используется в итеративной процедуре лишь при условии, что угол  $\gamma$  между ним и вектором  $m = \mu_2 - \mu_1$ ,  $m = (m_1, m_2, \dots, m_p)$  меньше  $45^\circ$ , т. е.

$$\cos \gamma = \frac{|a_{01}m_1 + a_{02}m_2 + \dots + a_{0p}m_p|}{|a_0||m|} > \frac{1}{\sqrt{2}} > 0.707106.$$

Если значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  неизвестны, то их оценки можно получить по исходной выборке методами кластер-анализа.

Для  $k \geq 3$  эта рекомендация эффективна для векторов  $m^{ij} = \mu_i - \mu_j$ ,  $i < j$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $j = 2, 3, \dots, k$ , в ситуации, когда все средние значения  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  лежат в вершинах выпуклого многоугольника  $p$ -мерного пространства. Уравнения гиперплоскостей, разделяющих компоненты смеси, имеют вид [21]:

$$X \Sigma^{-1} (\mu_j - \mu_i)' - \frac{1}{2} (\mu_j + \mu_i) \Sigma^{-1} (\mu_j - \mu_i)' + \ln \left( \frac{\pi_j}{\pi_i} \right) = 0, \quad (3.8)$$

$$j > i, \quad j = 2, 3, \dots, k, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Так как при  $p \leq 2$  двухкомпонентная смесь унимодальна и оптимальные оценки максимального правдоподобия имеют большое смещение [5], то во многих случаях разделять такую смесь на составляющие компоненты нецелесообразно.

#### 4. Правила выбора оптимального решения

Известно [15], что в многомерных пространствах ( $p \geq 2$ ) система уравнений правдоподобия для выборок малых объемов ( $n \leq 80$ ) с небольшим расстоянием Махаланобиса ( $\rho_{is} \leq 3$ ,  $i \neq s$ ,  $i, s = 1, 2, \dots, k$ ) имеет, как правило, несколько решений. И тогда выбор оптимального решения  $\tilde{\theta}_{\text{opt}}$  из множества полученных решений является не простой задачей. Стандартное правило определения оптимального решения (оптимальным решением считать то, в котором логарифм функции правдоподобия имеет наибольшее значение [5, 22]) оказывается не всегда верным. Эксперименты показали, что это правило верно при достаточно большом объеме выборки  $n$ , зависящем от расстояний между компонентами, размерности пространства, числа компонент смеси, дисперсий случайных величин.

Для каждой выборки **оптимальной оценкой максимального правдоподобия**  $\tilde{\theta}_{\text{opt}}$  естественно считать ту оценку из множества полученных оценок

$$\{\tilde{\theta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, u\}, \quad (4.1)$$

значения координат которой ближе к истинным значениям координат параметра  $\theta_0$ . При разработке правила выделения

оптимального решения из множества (4.1) мы исходили из того, что некоторую информацию об оптимальности оценок максимального правдоподобия могут дать частоты их появления при случайном задании начальных условий [19, 23]. Так как процесс максимизации логарифма функции правдоподобия  $\ln L(X^{(n)}, \theta)$  в ЕМ-алгоритме начинается при случайных начальных условиях, то частоты получения решений уравнений правдоподобия в седловых точках и точках различных локальных максимумов функции  $\ln L(X^{(n)}, \tilde{\theta})$  не должны быть равными. Вполне возможно, что при случайных начальных условиях редкими, одиночными решениями являются седловые точки или неустойчивые локальные максимумы, а наиболее вероятными — точки самых обширных локальных максимумов, в окрестностях которых концентрируется наибольшее число точек данной выборки. Поэтому для выделения оптимального решения из множества (4.1) целесообразно учитывать не только значения  $\ln L(X^{(n)}, \tilde{\theta})$ , но и частоту получения каждого решения  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ , при случайном задании начальных условий (не менее 20 раз). На основании результатов экспериментов сформулированы правила выделения оптимального решения [19, 23].

1) **Оптимальным решением**  $\tilde{\theta}_{\text{opt}}$  из множества полученных (4.1) считать то, для которого имеет место равенство:

$$\tilde{\theta}_{\text{opt}} = \arg \max_i v_i \ln L(X^{(n)}, \tilde{\theta}_i), \quad i = 1, 2, \dots, u. \quad (4.2)$$

2) **Оптимальным решением**  $\tilde{\theta}_{\text{opt}}$  считать то, которое имеет наибольшую частоту появления при многократном задании случайного начального вектора  $a_0$ .

Многочисленные эксперименты, проведённые на выборках для  $k = 2, \rho = 2, 3, 4, n = 40, 81, 200$  подтвердили, что предлагаемые правила выделения оптимального решения точнее известного правила:

$$\tilde{\theta}_{\text{opt}} = \arg \max_i \ln L(X^{(n)}, \tilde{\theta}_i), \quad i = 1, 2, \dots, u. \quad (4.3)$$

Результаты экспериментов, подробно описанных в [19, 23], показали, что при  $\rho \geq 4, n \geq 40$  решения, даваемые двумя правилами (4.2) и (4.3), совпадают.

## 5. Некоторые результаты экспериментов для $k \geq 3$

Результаты экспериментов, проведённых на модельных выборках для  $k \geq 3$ ,  $k = 3, 4, \dots, 11$ , показали, что итеративная процедура ЕМ-алгоритма принципиально не отличается от её частного вида ( $k = 2$ ) и что в этой ситуации возможны варианты:

- 1) выборки разделяются на заданное число классов  $k$ ,
- 2) выборки разделяются на число классов  $\tilde{k}$ , меньшее заданного  $k$ , причём среди выделенных классов могут быть истинные.

В табл. 4 даны значения частот удачного выбора начальных векторов  $a_{0s}$ ,  $s = 1, 2, \dots, u$ , для  $k = 3$  и  $k = 4$  при различных объёмах выборок  $n$  и различных расстояниях Махаланобиса. Параметры модельных выборок имели конкретные значения:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 6.25 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 = (0, 0), \quad \mu_2 = (0, d_1), \quad \mu_3 = (d_2, 0), \\ \mu_4 = (d_3, d_3), \quad \pi_i = 1/k, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad k = 3, \quad k = 4, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-8},$$

переменные  $d_i$  определялись по заданному расстоянию Махаланобиса  $\rho_{1i}$  от 1-й компоненты до  $i$ -й,  $i = 2, 3, 4$ ,  $\rho_{1i}^2 = (\mu_i - \mu_1)\Sigma^{-1}(\mu_i - \mu_1)'$ .

Таблица 4

| Число классов<br>$k$ | Объём выборки<br>$n$ | Расстояние Махаланобиса<br>$\rho_{1i}$ , $i = 2, 3, 4$ | Оценка вероятности удачного выбора начальных векторов<br>$a_{0s}$ , $s = 1, 2, \dots, 20$ |
|----------------------|----------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3                    | 600                  | 20                                                     | 0.90                                                                                      |
|                      | 400                  | 20                                                     | 0.87                                                                                      |
|                      | 1001                 | 4                                                      | 1.00                                                                                      |
|                      | 400                  | 4                                                      | 0.33                                                                                      |
|                      | 400                  | 2                                                      | 0.24                                                                                      |
|                      | 400                  | 20                                                     | 0.70                                                                                      |
| 4                    | 400                  | 4                                                      | 0.63                                                                                      |
|                      | 400                  | 6                                                      | 0.64                                                                                      |
|                      | 400                  | 3                                                      | 0.40                                                                                      |

На основании многочисленных экспериментов имеем утверждение, обобщающее утверждение 2.

**Утверждение 3.** Для  $k \geq 2$  при любой размерности выборочного пространства  $p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) существуют такие числа  $n_0 = n_0(k, p)$ ,  $\rho_0 = \rho_0(k, p)$ , ( $\rho_0 \geq 4$ ),  $\varepsilon_0$ , ( $0 < \varepsilon_0 < 10^{-8}$ ), что при  $n \geq n_0$ ,  $\rho_{ij} \geq \rho_0$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  вероятность получения оптимального решения по ЕМ-алгоритму  $\geq 0.5$ .

## Заключение

Отметим новые результаты, представленные в этой работе.

1. Определена аварийная область  $A_a$  для начальных векторов  $a_0$ , из которой последовательность итераций сходится не к оптимальному решению  $\tilde{\theta}$ . Диаметр этой области зависит от размерности пространства  $p$ , расстояний Махаланобиса, объёма выборки  $n$  и задаваемой точности вычислений.

2. При  $k \geq 2$  для любой размерности выборочного пространства  $p$  существуют такие числа  $\rho_0 = \rho(k, p)$ ,  $n_0 = n(k, p)$ ,  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 10^{-8}$ ), что при всех  $\rho_{is} \geq \rho_0$ ,  $i < s$ ,  $i, s \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $n \geq n_0$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  вероятность получения оптимального решения по ЕМ-алгоритму  $P \geq 0.5$ . ( $\rho_{is}$  — расстояние Махаланобиса между  $i$ -й и  $s$ -й компонентами,  $n$  — объём выборки).

3. Для выборок малых объёмов при малых расстояниях Махаланобиса скорректировано правило выделения оптимального решения, учитывающее частоту появления каждого решения при случайных начальных условиях.

## Литература

1. Исаенко О.К., Урбах В.Ю. Разделение смесей распределений вероятностей на их составляющие. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика (Итого науки и техники). 1975, т. 13, сс. 37-58.
2. Королёв В.Ю. ЕМ-алгоритм, его модификация и их применения к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор. М.: ИПИ РАН, 2007, 86 с.

3. *Anderson T.W., Bahadur R.R.* Classification into Two Multivariate Normal Distributions with Different Covare Matrices. The Annals of Mathevftral Statictics, 1962, v. 33, N 2.
4. *Gupta S.* Optimum Classification Rules for Classification into Two Multivariate Normal populations. The Annals of Mathevftral Statictics, 1965, v. 36, N 1.
5. *Day N.E.* Estimating the Components of a Mixture of Normal Distributions. Biometrika, 1969, v. 56, № 3, pp. 463-477.
6. *Шлезингер М.И.* Взаимосвязь обучения и самообучения в распознавании образов. Киев: Кибернетика, 1968, № 2, сс. 81-88.
7. *John S.* On Identifying the Population of Origin of Each Observation in a Mixture of Observations from Two Normal Populations. Technometrics, 1970, v. 12, N 3.
8. *Благовещенский Ю.Н., Мешалкин Л.Д.* Общие вопросы статистических методов классификации. В сб.: Статистические методы классификации, М.: МГУ, 1969, вып. 1, № 6.
9. *Дороднов А.А.* Ортонормированная система Гаусса. Сборник аспирантских работ. Точные науки. Казань: КГУ, 1969.
10. *Фомин Я.А., Тарловский Г.Р.* Статистическая теория распознавания образов. М.: Радио и связь, 1986, 264 с.
11. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975, 648 с.
12. *Pao C.P.* Линейные статистически методы и их применение. М.: Наука, 1968, 547 с.
13. *Kulldorff G.* On the Condition for Consistency and Asymptotic Efficiency of Maximum Lilelihood Estimates. Skzndinavisk Aktuaritidskrift, 1957, v. 40, № 129.
14. *Norden R.H.* A Survey of Maximum Likelihood Estimation. Part 1. International Statistical Review, 1973, v. 40, № 3.
15. *Norden R.H.* A Survey of Maximum Likelihood Estimation. Part 2. International Statistical Review, 1973, v. 41, № 1.
16. *Huzurbazar V.S.* The Likelihood Equation Consistency and the Maxima of the Likelihood Function. Annals Engenics, 1948, v. 14, part 3.
17. *Doss S.A.D.C.* A Note on Consistency and Asymptotic Efficiency of Maximum Likelihood Estimates in Multi-Paramentic Problems. Calcutta Statistical Association Bulletin, 1962, v. 11, № 85.

18. Doss S.A.D.C. On Consistency and Asymptotic Efficiency of Maximum Likelihood Estimates. Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics, 1963, v. 15, № 2.
19. *Апраушева Н.Н.* Об использовании смесей нормальных распределений в распознавании образов. Канд. диссертация. М.: ВЦ АН СССР, 1981, 136 с.
20. *Бежаева З.И.* О содержании библиотеки программ по разделу Классификация и снижение размерности. Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. М.: Наука, 1980, сс. 163-188.
21. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М.: Наука, 1963, 500 с.
22. *Миленький А.В.* Классификация сигналов в условиях неопределённости. М.: Советское радио, 1975, 328 с.
23. *Апраушева Н.Н.* Об оптимальном решении системы уравнений правдоподобия смеси нормальных распределений. Деп. ВИНТИ, 1979, № 371579.

## Literatura

1. *Isaenko O.K., Urbah V.Yu.* Razdelenie smesey raspredeleniy veroyatnostey ni ih sostavlyayuschie. Teoriya veroyatnostey. Matematicheskaya statistika. Teoreticheskaya kibernetika (Itogo nauki i tehniki). 1975, t. 13, ss. 37-58.
2. *Korolyov V.Yu.* EM-algorithm, ego modifikatsiya i ih primeneniya k zadache razdeleniya smesey veroyatnostnyih raspredeleniy. Teoreticheskij obzor. M.: IPI RAN, 2007, 86 s.
3. *Anderson T.W., Bahadur R.R.* Classification into Two Multivariate Normal Distributions with Different Covare Matrices. The Annals of Mathevfical Statitics, 1962, v. 33, N 2.
4. *Gupta S.* Optimum Classification Rules for Classification into Two Multivariate Normal populations. The Annals of Mathevfical Statitics, 1965, v. 36, N 1.
5. *Day N.E.* Estimating the Components of a Mixture of Normal Distributions. Biometrika, 1969, v. 56, # 3, pp. 463-477.
6. *Shlezinger M.I.* Vzaimosvyaz obucheniya i samoobucheniya v raspoznavanii obrazov. Kiev: Kibernetika, 1968, # 2, ss. 81-88.

7. *John S.* On Identifying the Population of Origin of Each Observation in a Mixture of Observations from Two Normal Populations. *Technometrics*, 1970, v. 12, N 3.
8. *Blagoveschenskiy Yu.N., Meshalkin L.D.* Obschie voprosyi statisticheskikh metodov klassifikatsii. V sb.: Statisticheskie metodyi klassifikatsii, M.: MGU, 1969, vyip. 1, # 6.
9. *Dorodnov A.A.* Ortonormirovannaya sistema Gaussa. Sbornik aspirantskih rabot. *Tochnyye nauki*. Kazan: KGU, 1969.
10. *Fomin Ya.A., Tarlovskiy G.R.* Statisticheskaya teoriya raspoznavaniya obrazov. M.: Radio i svyaz, 1986, 264 s.
11. *Kramer G.* Matematicheskie metodyi statistiki. M.: Mir, 1975, 648 s.
12. *Rao S.R.* Lineynyye statisticheskie metodyi i ih primeneniye. M.: Nauka, 1968, 547 s.
13. *Kulldorff G.* On the Condition for Consistency and Asymptotic Efficiency of Maximum Likelihood Estimates. *Skandinavisk Aktuaritidskrift*, 1957, v. 40, # 129.
14. *Norden R.H.* A Survey of Maximum Likelihood Estimation. Part 1. *International Statistical Review*, 1973, v. 40, # 3.
15. *Norden R.H.* A Survey of Maximum Likelihood Estimation. Part 2. *International Statistical Review*, 1973, v. 41, # 1.
16. *Huzurbazar V.S.* The Likelihood Equation Consistency and the Maxima of the Likelihood Function. *Annals Engenics*, 1948, v. 14, part 3.
17. *Doss S.A.D.C.* A Note on Consistency and Asymptotic Efficiency of Maximum Likelihood Estimates in Multi-Parametric Problems. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 1962, v. 11, # 85.
18. *Doss S.A.D.C.* On Consistency and Asymptotic Efficiency of Maximum Likelihood Estimates. *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics*, 1963, v. 15, # 2.
19. *Aprausheva N.N.* Ob ispolzovanii smesey normalnykh raspredeleniy v raspoznavanii obrazov. *Kand. dissertatsiya*. M.: VTs AN SSSR, 1981, 136 s.
20. *Bezhaeva Z.I.* O soderzhanii biblioteki programm po razdelu Klassifikatsiya i snizhenie razmernosti. *Algoritmicheskoe i programmnoye obespechenie prikladnogo statisticheskogo analiza*. M.: Nauka, 1980, ss. 163-188.

21. *Anderson T.* Vvedenie v mnogomernyy statisticheskiy analiz. M.: Nauka, 1963, 500 s.
22. *Milenkiy A.V.* Klassifikatsiya signalov v usloviyah neopredelYonnosti. M.: Sovetskoe radio, 1975, 328 s.
23. *Aprausheva N.N.* Ob optimalnom reshenii sistemyi uravneniy pravdopodobiya smesi normalnyih raspredeleniy. Dep. VINITI, 1979, # 371579.

## **Нерегулярный принцип максимума задачи со смешанными ограничениями**

В.В. Дикусар

*ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

[dikussar@yandex.ru](mailto:dikussar@yandex.ru)

Предложен двухэтапный метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями. На первом этапе решается дискретная задача (системы линейных алгебраических уравнений и несобственные задачи линейного программирования), на основе методов факторного анализа. Далее формулируется гипотеза о геометрии оптимальной траектории, то есть выделяются промежутки времени постоянства множества номеров активных ограничений. На втором этапе сформулированная гипотеза проверяется аналитически с использованием принципа максимума Понтрягина и формализма Дубовицкого-Милютина. Приведен пример использования данной схемы для решения модельной задачи оптимального управления при суспензионной полимеризации винилхлорида. Показана процедура формирования и проверки гипотезы о геометрии оптимальной траектории.

**Ключевые слова:** нерегулярный принцип максимума, несобственная задача, задача линейного программирования, распределенные вычисления

## **Irrégulier problème principe du maximum de contraintes état-commande**

Vasily Dikussar (CC FRC CSC RAS, Moscou, Russie,  
[dikussar@yandex.ru](mailto:dikussar@yandex.ru))

Nous proposons une méthode en deux étapes pour résoudre les problèmes de contrôle optimal avec contraintes état-contrôle. À la première étape d'un problème discret est résolu (un système d'équations algébriques linéaires et problèmes inappropriés de la programmation linéaire), sur la base des méthodes de l'analyse factorielle. Ensuite que nous formulons une hypothèse sur la géométrie de la trajectoire optimale, soit alloué des intervalles de temps de constance de contraintes actives. Dans la deuxième étape, nous vérifions la hypothèse analytiquement en utilisant le principe du maximum de Pontryagin et le formalisme Dubovitskiy Milutin. Un exemple de l'utilisation du dispositif pour la solution du problème de commande optimale en modèle pour la polymérisation en suspension du chlorure de vinyle. Nous montrons la procédure de formage et tester des hypothèses sur la géométrie de la trajectoire optimale.

**Mots-clés:** principe irrégulière maximale, les problèmes indus, programmation linéaire, calcul distribué

### **Irregular maximum principle problem with state-control constraints**

Vasily Dikussar (*CC FRC CSC RAS, Moscow, Russia*,  
[dikussar@yandex.ru](mailto:dikussar@yandex.ru))

We propose a two-step method for solving optimal control problems with state-control constraints. At the first stage a discrete problem is solved (a system of linear algebraic equations and improper problems of linear programming), based on the methods of factor analysis. After that we formulate a hypothesis about the geometry of the optimal trajectory, i.e. allocated time intervals of constancy of active constraints. In the second stage we verify the hypothesis analytically by using the Pontryagin maximum principle and the Dubovitskiy Milutin formalism. An example of the use of the scheme for the solution of the

model problem in optimal control for the suspension polymerization of vinyl chloride. We show the procedure of forming and testing hypotheses about the geometry of the optimal trajectory.

**Keywords:** irregular maximum principle, improper problems, linear programming, distributed computing

## 1. Введение

Приоритет в постановке и исследованию задач с нерегулярными смешанными ограничениями принадлежит А.Я. Дубовицкому и А.А. Милютину [1]. В 1970 году впервые была опубликована работа [2] по численному решению практически важной задачи об определении маневренных возможностей аппарата при входе в атмосферу с учетом ограничений на величину полной перегрузки (нерегулярное смешанное ограничение). Подробно решение этой задачи изложено в монографии [3]. Согласно табели о рангах по сложности, задачи с нерегулярными смешанными ограничениями занимают первое место в классе задач оптимального управления. Основные понятия и представления в теории оптимального управления связаны с принципом максимума. Наличие фазовых и смешанных ограничений сложной природы ведет к усложнению формулировки принципа максимума и его свойств. При этом появляются новые математические объекты-мера и функциональные множители Лагранжа. Возникает необходимость изучения свойств этих объектов в зависимости от конкретных постановок задач оптимального управления. Кроме того большую актуальность приобретает исследование взаимосвязи между различными компонентами принципа максимума. Отсюда видно, что классический аппарат не дает возможности исследовать такие задачи в полном объеме. Конечно, математический аппарат следует совершенствовать применительно к сложным задачам оптимального управления. Другой путь по дальнейшему изучению задач оптимального управления связан с выделением

определенного класса задач и их качественным исследованием при помощи существующих условий экстремума.

Исследование нерегулярных случаев для смешанных ограничений требует рассмотрения следующих задач.

1. Определение множества фазовых точек.
2. Проверка условий существования принципа максимума.
3. Анализ условий в нерегулярной точке (число свободных параметров должно равняться числу контролируемых условий).
4. Анализ особенностей в дифференциальных уравнениях для сопряженных переменных в нерегулярных точках.
5. Определение множителей Лагранжа. В нерегулярной точке указанные множители не всегда определяются однозначно.
6. Определение числа выходов в нерегулярные точки на оптимальной траектории.

Особую роль играет геометрия оптимальной траектории.

**Геометрия оптимальной траектории.** В регулярном случае под геометрией оптимальной траектории для смешанных ограничений типа неравенств понимается определение множества активных индексов в каждый момент  $t \in [t_0, t_1]$ . Сюда входит: определение типа контакта смешанного ограничения и его формы с оптимальной траекторией (контакт может быть точечным или протяженным, а точечный контакт может быть касательным или в виде конуса); определение момента входа на ограничение; определение момента схода. В нерегулярном случае, кроме множества активных индексов необходимо определить множество нерегулярных точек с учетом структуры задачи и расшифровать принцип максимума в нерегулярной точке. Совокупность указанных условий определяет геометрию оптимальной траектории в нерегулярном случае.

## **2. Математическая модель суспензионной полимеризации винилхлорида в периодическом реакторе**

Описанная ниже модель полимеризации состоит из трех стадий. Для первой стадии ( $x_3 \leq x_{31}$ ), где  $x_{31}; 0,03 - 0,05$  выпишем сначала уравнение для мольной доли радикалов [4]

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2(1-x_1)(1-x_3) - ux_2^2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (11) \quad (1)$$

Описание кинетики для следующих переменных имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1(1-x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad t \in [t_0, t_1], \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_3(1-x_3)x_2, \quad 0 \leq x_3 \leq 1, \\ \frac{dx_4}{dt} &= a_4(1-x_3)x_2 + b_4x_2^2, \quad 0 \leq x_4 \leq 1. \end{aligned} \quad (12) \quad (2)$$

Здесь  $x_1$  -- степень использования инициатора,  $x_3$  -- конверсия мономера,  $x_4$  -- мольная доля полимера;  $x_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  -- фазовые переменные,  $u$  -- скалярное управление,  $a_i$ ,  $i = \overline{1,4}, b_4$  -- известные константы.

Начальные условия для системы (1), (2) предполагаются нулевыми

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0, \quad t_0 = 0. \quad (3)$$

На управляющую функцию  $u(t)$  наложены ограничения

$$u_1 \leq u \leq u_2, \quad \varphi_1(u) = u_1 - u \leq 0, \quad \varphi_2(u) = u - u_2 \leq 0. \quad (4)$$

Кроме ограничений (4) задано смешанное ограничение на величину производной  $\dot{x}_2$  (1)

$$\Phi_1(x, u) = ux_2^2 - a_2(1-x_1)(1-x_3) \leq 0, \quad x = \{x_i\}, \quad i = \overline{1,4}. \quad (5)$$

Новым элементом в моделях кинетики (1) -- (5) является введение управления  $u(t)$  (14) в систему (1) и смешанного ограничения типа неравенства (5).

В дальнейшем кроме уравнения (1) будем рассматривать его различные модификации

$$\frac{dx_2}{dt} = u(1-x_1)(1-x_3) - b_2x_2^2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad (6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2 - ux_2^2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad (7)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u - b_2x_2^2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1, \quad (8)$$

где  $b_2$  -- известный коэффициент и на управление  $u(t)$  наложено ограничение типа (4) с другими константами  $u_1$ ,  $u_2$ . В соответствии с этой модификацией введем новые смешанные ограничения

$$\Phi_2(x, u) = b_2x_2^2 - u(1-x_1)(1-x_3) \leq 0, \quad (9)$$

$$\Phi_3(x, u) = ux_2^2 - a_2 \leq 0, \quad (10)$$

$$\Phi_4(x, u) = b_2x_2^2 - u \leq 0. \quad (11)$$

### 3. Задачи на быстродействие

**Задача  $A_2$ .** Требуется определить  $\min t_1$  при ограничениях (1) -- (5) и заданных граничных условиях

$$x_3(t_1) = x_{31}; \quad x_1(t_1), x_2(t_1), x_4(t_1) \quad (12)$$

- свободны.

Наряду с задачей  $A_2$  рассмотрим следующую задачу.

**Задача  $A_{21}$ .** При фиксированном  $t_1$  определить  $\max x_3(t_1)$  при соотношениях (1) -- (5) с учетом граничных условий

$$t_1 = t_{10}; \quad x_1(t_1), x_2(t_1), x_4(t_1) \quad (13)$$

- свободны.

**Утверждение 3.1.** Задачи  $A_2$  и  $A_{21}$  эквивалентны.

Доказательство. Производная  $\dot{x}_3$  (2) является положительной для всех  $t \in (0, t_1]$ . Отсюда в силу строгой монотонности  $x_3(t)$  следует эквивалентность указанных задач.

По аналогии с задачей  $A_{21}$  можем сформулировать задачу оптимизации для системы (6), (2)--(4), (9).

**Задача  $A_3$ .** Определить  $\max x_3(t_1)$ , если выполнены ограничения (2)--(4), (6), (9) при граничных условиях (13).

Аналогичным образом формулируются задача  $A_4$  для системы (7), (2)-(4), (8), (10) для граничных условий (13).

#### 4. Оптимальные траектории

Выпишем принцип максимума [4-10] для задачи  $A_{21}$

$$\begin{aligned} H = & \psi_1 a_1 (1 - x_1) + \varphi_2 a_2 (1 - x_1)(1 - x_3) - \psi_2 u x_2^2 + \psi_3 a_3 (1 - x_3) x_2 + \\ & + \psi_4 a_4 (1 - x_3) x_2 + \psi_4 b_4 x_2^2; \quad H = H_1 + H_2, \quad H_1 = -\psi_2 u x_2^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Pi = H - \lambda_1 \Phi_1 - \lambda_2 \varphi_1 - \lambda_3 \varphi_2 = H - \lambda_1 [ux_2^2 - a_2(1-x_1)(1-x_3)] - \quad (15)$$

$$\lambda_2(u_1 - u) - \lambda_3(u - u_2),$$

Условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_1 \Phi_1 = 0, \quad \lambda_2 \varphi_1 = 0, \quad \lambda_3 \varphi_2 = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Сопряженная система дифференциальных уравнений имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} - \lambda_1 a_2(1-x_3) + \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}, \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} - 2\lambda_1 u x_2 + \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}, \\ \dot{\psi}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} - \lambda_1 a_2(1-x_1) + \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из  $\dot{\psi}_4 = 0$  и  $\psi_4(t_1) = 0$  следует  $\psi_4(t) \equiv 0$ . Краевые условия для сопряженных переменных запишутся в следующей форме

$$\psi_3(t_1) = -1, \quad \psi_1(t_1) = 0, \quad \psi_2(t_1) = 0 \quad (17)$$

Оптимальное управление  $u_0(t)$  в каждой точке  $t$  при  $\Phi_1(x, u) < 0$  определяется из условия максимума  $H_1$  (14)

$$u_0(t) = \arg \max_{u \in U} H_1, \quad U = \{u : \varphi_1(u) \leq 0, \quad \varphi_2(u) \leq 0\}. \quad (18)$$

Отсюда следует, что при  $\lambda_1 = 0$  и  $\frac{d\mu}{dt} = 0$   $u_0(t) = u_1$ , если  $\psi_2 \geq 0$ ;  $u_0(t) = u_2$ , если  $\psi_2 < 0$ .

Для решения задачи Коши (16) необходимо задать начальные значения сопряженных переменных

$$\psi_1(0) = \psi_{10}, \quad \psi_2(0) = \psi_{20}, \quad \psi_3(0) = \psi_{30}. \quad (19)$$

В результате, определение оптимальной траектории при  $\Phi_1(x, u) < 0$  сводится к решению трех основных задач:

1. задача Коши для систем (1)-- (2), (16) при начальных условиях (3), (19);
2. задача линейного программирования (18);
3. поиск нулей трансцендентных функций (17) в пространстве параметров (19) (трехпараметрическая двухточечная краевая задача).

Пусть на оптимальной траектории  $x_0(t)$ ,  $u_0(t)$ ,  $t$  выполнено ограничение типа равенства  $\Phi_1(x, u) = 0$  в некоторых точках  $t \in [0, t_1]$ . Тогда из условий  $\Pi_{u'} = 0$  (15),  $\varphi_1 < 0$ ,  $\varphi_2 < 0$  (4) получаем

$$\lambda_1 = \psi_2, \quad ux_2^2 - a_2(1-x_1)(1-x_3) = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \frac{d\mu}{dt} = 0.$$

В этом случае траектория является регулярной, а оптимальное управление  $u_0(t)$  выбирается из условия связи  $\Phi(x, u) = 0$

$$u_0(t) = a_2(1-x_1)(1-x_3)/x_2^2.$$

Заметим, что в регулярном случае производные (13) терпят разрыв первого рода при входе на ограничение  $\Phi_1(x, u) = 0$ , а

сами сопряженные функции являются непрерывными на всей оптимальной траектории.

Рассмотрим теперь возможность существования нерегулярных точек. Согласно [2] имеем

$$\lambda_1 x_2^2 - \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad u = u_1, \quad u_1 x_2^2 - a_2(1-x_1)(1-x_3) = 0. \quad (20)$$

**Лемма 4.1.** Для задачи  $A_{21}$  выполнен интегральный принцип максимума  $\Pi_0$ .

Доказательство следует из теоремы Дубовицкого-Милютина [3] стр. 251.

**Лемма 4.2.** Пусть нерегулярная точка  $t_* \in (t_0, t_1)$ . Тогда в этой точке  $\ddot{x}_2(t_* + 0) > 0$ .

Доказательство. В точке  $t_* + 0$  имеем  $u(t_* + 0) = u_1$ . Тогда из (30) следует

$$x_2(t_* + 0) = 2u_1 x_2 x_2 + a_2 x_1(1-x_3) + a_2 x_3(1-x_1). \quad (21)$$

$\dot{x}_2(t_* + 0) = 0$  в силу непрерывности  $\dot{x}_2$ ;  $1-x_3 > 0$ ,  $1-x_1 > 0$ ,  $\dot{x}_1 > 0$ ,  $\dot{x}_3 > 0$ . Отсюда получаем требуемый результат  $\ddot{x}_2(t_* + 0) > 0$ .

Из леммы 6.2 следует

**Лемма 4.3.** Обобщенная функция  $\dot{\mu}(t_*) = 0$  в уравнениях (16). Действительно в силу структуры уравнений (1) -- (2) и леммы 4.2  $\Phi(t_* + 0) < 0$ . Таким образом, условия (20) и (21) выполняются автоматически.

При движении по ограничению  $\Phi_1(x, u) = 0$  оптимальное управление  $u_0(t)$  является убывающей функцией. Тогда в какой-

то момент времени  $t = t_*$ ,  $u_0(t_*) = u_1$ . Этим моментом и определяется сход с ограничения  $\Phi_1(x, u) = 0$ .

Из вышеприведенных рассуждений получаем геометрию регулярной и нерегулярной траектории. Время схода определяется нерегулярной точкой  $t_*$ , причем на всей оптимальной траектории сопряженные переменные являются непрерывными функциями.

## 5. Приближенное решение краевой задачи

Решение краевой задачи  $A_{21}$  существенно упрощается, если мы рассмотрим в качестве первого приближения задачу  $A_4$ . Для данной задачи сравнительно просто определяется структура оптимального управления.

**Теорема 5.1.** оптимальное управление  $u_0(t)$  в задаче  $A_4$  удовлетворяет уравнению  $u_0(t) = u_1$  на всей оптимальной траектории.

Доказательство. Из уравнений (2), (7) следует  $u_0(t) = u_1$  при  $\Phi_3(x, u) < 0$  (10). При движении по ограничению  $ux_2^2 - a_2 = 0$  получаем

$$u_0(t) = u_1 = a_2/x_2^2, \quad (22)$$

причем оптимальная траектория содержит целый отрезок  $[t_*, t_1]$  с нерегулярным смешанным ограничением;  $t_*$  -- точка входа на ограничение  $\dot{x}_2 = 0$  (10). Таким образом, оптимальная траектория содержит два куска. На первом куске при  $t \in [t_0, t_*)$ ,  $\dot{x}_2(t) > 0$ . На втором имеем  $\dot{x}_2(t) = 0$ ,  $t \in [t_*, t_1]$ .

Покажем что так построенная траектория удовлетворяет принципу максимума  $\Pi_0$ . Действительно, справа от нерегулярной

точки  $t_*$  смешанное ограничение  $\Phi_3(x, u) = 0$  удовлетворяется автоматически поскольку  $\dot{x} + 2 \equiv 0$  и  $x_2$  является постоянной величиной. Следовательно, никаких дополнительных условий в нерегулярных точках не возникает. Тогда в уравнениях (16) можно положить  $\dot{\mu}(t), t \in [t_*, t_1] = 0$ . Краевые условия для сопряженных переменных (17) по-прежнему можно выполнить за счет начальных значений (19). Таким образом, для траектории с управлением  $u_0(t) = u_1$  выполнены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума. Следует отметить что эти условия являются и достаточными в силу линейности управления и строгой монотонности функционала [5, с. 136--138].

Краевая задача (16), (17), (19) легко решается методом продолжения решений по параметру [3]. В качестве параметра продолжения выбираем время  $t$ . Для этой цели разбиваем отрезок  $[t_0, t_1]$  на ряд частей точками  $t_{01}, t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1n}, t_{01} = t_0, t_{1n} = t_1$ . В результате получаем систему вложенных отрезков  $[t_{01}, t_{11}] \in [t_{01}, t_{12}] \in \dots \in [t_{01}, t_{1n}]$ . Сначала на отрезке  $[t_{01}, t_{11}]$  рассматриваем краевую задачу (16) с граничными условиями

$$\psi_3(t_{11}) = -1, \quad \psi_1(t_{11}) = 0, \quad \psi_2(t_{11}) = 0.$$

в пространстве начальных параметров (19). Так как отрезок  $[t_{01}, t_{11}]$  сравнительно мал, то краевая задача (16), (19), (23) легко решается известными методами. Полученные начальные значения сопряженных переменных используем затем в качестве первого приближения при решении последующих краевых задач

$$\psi_3(t_{1i}) = -1, \quad \psi_1(t_{1i}) = 0, \quad \psi_2(t_{1i}) = 0, \quad i = \overline{2, n}. \quad (24)$$

Для прогноза каждого начального приближения используем предыдущие значения путем обработки накопленной информации методами линейной или квадратичной экстраполяции [3].

При решении задачи  $A_{21}$  вводим параметризацию вида

$$\frac{dx_2}{dt} = wa_2(1-x_1)(1-x_3) - ux_2^2 + (1-w)a_2, \quad 0 \leq w \leq 1. \quad (25)$$

$$\Phi_2(x, u) = b_2x_2^2 - uw(1-x_1)(1-x_3) - (1-w)u, \quad 0 \leq w \leq 1. \quad (26)$$

Отсюда видно, что при  $w = 0$  задача  $A_{21}$  совпадает с задачей  $A_4$ . Продолжение решений по параметру  $w$  дает возможность получить решение краевой задачи (16), (17), (19).

Аналогичным образом решается задача  $A_3$ . Для указанной задачи в качестве первого приближения рассматривается задача  $A_5$ .

**Задача  $A_5$ .** Найти  $\max x_3(t_1)$  при ограничениях (18), (12)--(14), (21), (23). Здесь на оптимальной траектории  $u_0(t) \equiv u_2$ .

## 6. Задача о минимуме $x_2(t)$

В математической модели полимеризации кроме смешанных ограничений система (1)--(2) содержит фазовые ограничения. В рамках данной работы не представляется возможным рассмотрение методов решения подобного рода задач. Однако, используя задачи со смешанными ограничениями мы можем оценить верхние и нижние решения соответствующих фазовых переменных.

Для задачи  $A_4$  положим  $\psi_3(t) \equiv 0$ . В результате стационарность оптимальной траектории в указанной задаче будет определяться не функционалом  $x_3(t_1)$ , а ограничением (20). В этом случае  $u_0(t) = u_2$  на всей оптимальной траектории. Полученное решение определяет минимальное значение  $x_2(t)$  на всей траектории. При  $u_0(t) = u_1$  определяется максимальное

значение  $x_2(t)$ . В данной ситуации краевая задача определяется двумя начальными параметрами (19).

Аналогичным образом определяются нижнее и верхнее решения для задачи  $A_{41}$ . При  $\Phi_1(x, u) < 0$ ,  $u_0(t) = u_2$ . Для верхнего решения  $u_0(t) = u_1$ ,  $\Phi_1(x, u) < 0$ .

## 7. Класс регулярных задач со смешанными ограничениями

В данной работе исследовались не только задача полимеризации, но и сам принцип максимума. Недостатком многих работ по оптимальному управлению являлось получение необходимых условий, а не их исследование. Задачи с регулярными смешанными ограничениями весьма важный и широкий класс задач, который до сих пор полностью не указан. Единственное условие экстремума для данного класса и есть приведенный принцип максимума [3-10]. В классе нерегулярных смешанных ограничений фазовые ограничения являются частным случаем смешанных. Однако в регулярной ситуации чисто фазовые ограничения уже не включаются в смешанные ограничения. В работах [6, 7] рассмотрен регулярный принцип максимума для линейных задач со смешанными ограничениями.

Основные направления при исследовании нерегулярного принципа максимума связаны с анализом условий [2] в фазовой точке и с требованием **интегрируемости множителей Лагранжа** [7]. Если система [2] имеет неединственное решение относительно множителей Лагранжа и управления при фиксированных  $x(t)$  на множестве полной меры, то необходимы дальнейшие исследования по принципу максимума. Такой анализ называется **расшифровкой**. Решение уравнения [2] совместно с [7] приводит к дополнительным условиям в нерегулярной точке, которые можно выполнить за счет скачка сопряженной переменной. Мера  $\mu$  и характеризует величину скачка.

Для численного решения использовался двухэтапный метод и распределенные вычисления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-07-08952).

## Литература

1. А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства. Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1968, Т. 8, N 4, С. 725--779.
- 2 В.В. Дикусар, А.А. Шилов. Нерегулярные оптимальные траектории аппарата при полете в атмосфере. Учен. зап. ЦАГИ, 1970, N 4, с. 73--83.
- 3 А.П. Афанасьев, В.В. Дикусар, А.А. Милютин, С.А. Чуканов. Необходимое условие в оптимальном управлении. М., Наука, 1990.
- 4 В.В. Кафаров, И.Н. Дорохов, Л.В. Дранишников. Системный анализ процессов химической технологии. М., Наука, 1991.
- 5 В.В. Дикусар, А.А. Милютин. Качественные и численные методы в принципе максимума. М., Наука, 1989.
- 6 R.F. Hartl, S.P. Sethi, and R.G. Vockson. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. SIAM Review. Vol. 37, Number 2, June 1995, pp.181-218.
- 7 А.М. Тер-Крикоров. Некоторые линейные задачи теории оптимального управления со смешанными ограничениями. Журн. вычисл. матем. и матем. физики. Т. 21, N 1, 1975, с. 55--66.
- 8 А.А. Милютин, А.Е. Илютович, Н.П. Осмоловский, С.В. Чуканов. Оптимальное управление в линейных системах. М., Наука, 1993.
- 9 Дикусар В.В., Шомполова О.И. Применение факторного анализа для решения задач линейного программирования // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 53(3). Вып. 14. Стр. 142 - 153.

## Literatura

1. A.Ya. Dubovitskiy, A.A. Milyutin. Neobhodimyye usloviya slabogo ekstremuma v zadachah optimalnogo upravleniya so smeshannyimi ogranicheniyami tipa neravenstva. Zhurn. vyichisl. matematiki i mat. fiziki, 1968, T. 8, N 4, S. 725--779.
- 2 V.V. Dikumar, A.A. Shilov. Neregulyarnyye optimalnyye traektorii apparata pri polete v atmosfere. Uchen. zap. TsAGI, 1970, N 4, s. 73--83.
- 3 A.P. Afanasev, V.V. Dikumar, A.A. Milyutin, S.A. Chukanov. Neobhodimoe uslovie v optimalnom upravlenii. M., Nauka, 1990.
- 4 V.V. Kafarov, I.N. Dorohov, L.V. Dranishnikov. Sistemnyy analiz protsessov himicheskoy tekhnologii. M., Nauka, 1991.
- 5 V.V. Dikumar, A.A. Milyutin. Kachestvennyye i chislennyye metody v printsipe maksimuma. M., Nauka, 1989.
- 6 R.F. Hartl, S.P. Sethi, and R.G. Vockson. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. SIAM Review. Vol. 37, Number 2, June 1995, pp.181-218.
- 7 A.M. Ter-Krikorov. Nekotoryye lineynyye zadachi teorii optimalnogo upravleniya so smeshannyimi ogranicheniyami. Zhurn. vyichisl. matem. i matem. fiziki. T. 21, N 1, 1975, s. 55--66.
- 8 A.A. Milyutin, A.E. Ilyutovich, N.P. Osmolovskiy, S.V. Chukanov. Optimalnoe upravlenie v lineynykh sistemakh. M., Nauka, 1993.
- 9 Dikumar V.V., Shompolova O.I. Primenenie faktornogo analiza dlya resheniya zadach lineynogo programmirovaniya // Trudy ISA RAN. 2010. T. 53(3). Vyip. 14. Str. 142 - 153.

# **Идентификация параметров расширения модели Рамсея по статистическим данным экономики Болгарии**

Н.Х. Садеков

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

[1032120871@pfur.ru](mailto:1032120871@pfur.ru)

Работа посвящена проблеме идентификации параметров в модели типа Рамсея для экономики Болгарии. В модели учтены внешнеторговый оборот страны и изменение относительных цен на основные макропоказатели экономики. Исследованы статистические данные и рассчитаны параметры модели. Получены сравнительные результаты отклонения статистики от расчета для каждого макроэкономического показателя. Работа выполнена под научным руководством Н.Н. Оленёва.

**Ключевые слова:** модель Рамсея, идентификация параметров, экономика Болгарии

The work is devoted to identification of parameters of a Ramsey type model for Bulgarian economy. The model takes into account the foreign trade turnover of the country and changes in the relative prices of basic macroeconomic indexes. Statistical data are studied and parameters of the model are calculated. Comparative results on deviation of statistical and calculated time series for every macroeconomic index are obtained. The work has been performed under the supervision of Nicholas Olenev.

**Keywords:** Ramsey model, parameter identification, Bulgarian economy

Le papier est consacré à l'identification des paramètres d'un modèle de type Ramsey pour l'économie bulgare. Le modèle prend en compte le chiffre d'affaires du commerce extérieur du pays et les changements dans les prix relatifs des indices macroéconomiques de base. Les données statistiques sont étudiées et les paramètres du modèle sont calculés. Les résultats comparatifs sur la déviation de séries statistiques et calculé le temps pour tous les indices macroéconomiques sont obtenus. Le travail a été effectué sous la supervision de Nicolas Olenev.

**Mots-clés:** modèle de Ramsey, l'identification des paramètres, l'économie bulgare

## 1. Введение

Данная работа связана с нахождением параметров расширения модели Рамсея по статистическим временным рядам макропоказателей экономики Болгарии.

Описание модели и схема идентификации ее параметров полностью совпадают с моделью экономики для России из [1].

## 2. Описание модели

Пусть валовой внутренний продукт (ВВП)  $Y(t)$  определяется однородной производственной функцией объемов капитала  $K(t)$  и труда  $L(t)$  с постоянной эластичностью замещения (CES-функцией)

$$Y(t) = Y_0 \left[ a \left( \frac{L(t)}{L_0} \right)^{-b} + (1-a) \left( \frac{K(t)}{K_0} \right)^{-b} \right]^{-\frac{1}{b}}, \quad (1)$$

где начальные значения и параметры обладают свойствами  $Y_0 > 0, L_0 > 0, K_0 > 0, a \in (0,1), b > -1$ .

На основе статистических данных будем полагать, что труд  $L(t)$  описывается полиномиальной функцией степени 2, поэтому

$$\frac{dL}{dt} = -\alpha t + \beta, L(0) = L_0, \quad (2)$$

где  $\alpha > 0, \beta > 0$  – некоторые параметры.

Будем считать, что капитал  $K(t)$  меняется в силу уравнения

$$\frac{dK}{dt} = J(t) - \mu K(t), K(0) = K_0, \quad (3)$$

где  $\mu$  – темп выбытия капитала, а  $J(t)$  – скорость прироста нового капитала (инвестиции в основной капитал).

Пусть в каждый момент времени  $t$  выполняется основной макроэкономический продуктивный баланс в текущих ценах: сумма выпуска ВВП  $p_Y(t)Y(t)$  и импорта  $p_I(t)I(t)$  равна сумме конечного потребления населения  $p_C(t)C(t)$ , инвестиций в основной капитал  $p_J(t)J(t)$  и экспорта  $p_E(t)E(t)$ , т.е.

$$p_Y Y(t) + p_I I(t) = p_C C(t) + p_J J(t) + p_E E(t), \quad (4)$$

где через  $p_Y(t), p_I(t), p_C(t), p_J(t), p_E(t)$  обозначены дефлятор ВВП и индексы цен на импорт, конечное потребление, инвестиции и экспорт соответственно.

Перейдем к продуктивному балансу, выраженному в индексах относительных цен

$$Y(t) + \pi_I(t)I(t) = Q(t) + \pi_J(t)J(t) + \pi_E(t)E(t), \quad (5)$$

где индексы относительных цен импорта, инвестиций и экспорта заданы отношениями

$$\pi_I(t) = \frac{p_I(t)}{p_Y(t)}, \quad \pi_J(t) = \frac{p_J(t)}{p_Y(t)}, \quad \pi_E(t) = \frac{p_E(t)}{p_Y(t)}, \quad (6)$$

а выражение, балансирующее равенство (5), дает величину

$$Q(t) = p_C(t) \frac{C(t)}{p_Y(t)}. \quad (7)$$

Для решения системы уравнений (1) – (7) нужно определить объемы инвестиций  $J(t)$ , экспорта  $E(t)$  и импорта  $I(t)$  в постоянных ценах 2005 года. Будем предполагать, что эти объемы определяются постоянными параметрами  $\sigma, \delta$  и  $\rho$  соответственно, где

$$\sigma = \frac{J(t)}{Y(t) + \pi_I(t)I(t)}, \quad (8)$$

$$\delta = \frac{E(t)}{Y(t)}, \quad (9)$$

$$\rho = \frac{\pi_I(t)I(t)}{Y(t)}. \quad (10)$$

Из (8) – (10) видно, что объемы экспорта  $E(t)$ , импорта  $I(t)$  и инвестиций  $J(t)$  в постоянных ценах через ВВП  $Y(t)$  определяются следующим образом:

$$E(t) = \delta Y(t), \quad (11)$$

$$I(t) = \frac{\rho}{\pi_I(t)} Y(t), \quad (12)$$

$$J(t) = \sigma(1 - \rho)Y(t). \quad (13)$$

### 3. Статистические данные

Источниками данных являются официальные сайты Статистического отдела ООН [2] и Национального статистического института Болгарии [3].

Будем использовать данные за период с 2000 по 2013 гг. Составляющие ВВП приведены в текущих ценах и в постоянных ценах 2005 г. Индексы относительных цен получены расчетом на основе данных по изменению составляющих ВВП в текущих и постоянных ценах. Данные для величины  $Q(t)$  рассчитаны из баланса (5).

### 4. Идентификация параметров модели

Для простоты будем считать, что время  $t$  изменяется в пределах от 0 до 13, т.е. для 2000 г. соответствует значение  $t = 0$ , для 2001 г. соответствует значение  $t = 1$  и т.д.

Во-первых, определим линию тренда для числа занятых в народном хозяйстве  $L(t)$  согласно статистическим данным. Для этого будем использовать встроенную в Microsoft Excel функцию построения линии тренда (рис. 1).

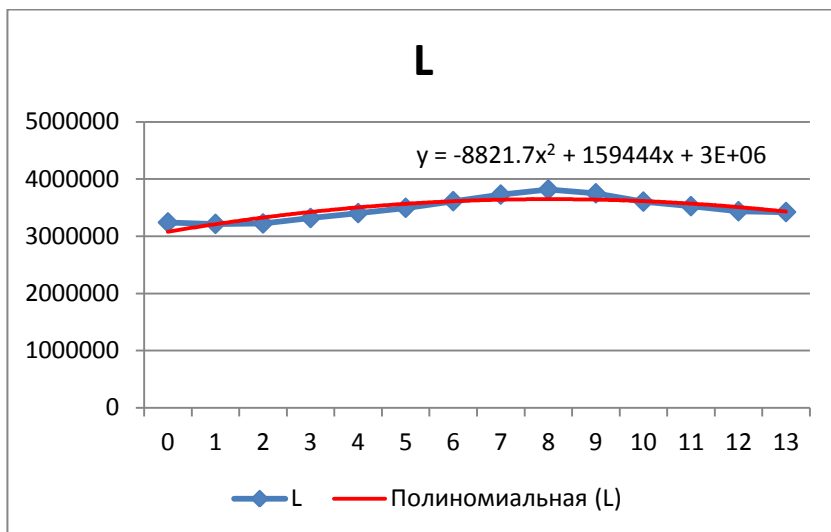


Рис. 1

В результате полиномиальной подгонки получим следующую функцию для  $L(t)$ :

$$L(t) = -8821.7t^2 + 159444t + 3000000. \quad (14)$$

Для уравнения (2) соотношение (14) дает значения параметров  $\alpha = 17643.4$ ,  $\beta = 159444$  и значение начальной величины числа занятых  $L_0 = 3000000$ .

Во-вторых, найдем линии тренда для индексов относительных цен  $\pi_E(t)$ ,  $\pi_I(t)$  и  $\pi_J(t)$  согласно статистическим данным. Для этого будем использовать встроенную в Microsoft Excel функцию построения линии тренда (рис. 2 – рис. 4).

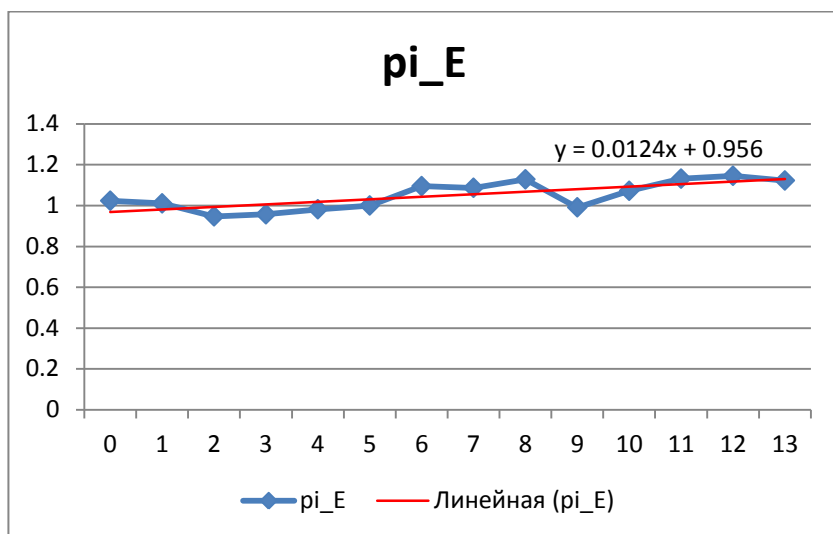


Рис. 2

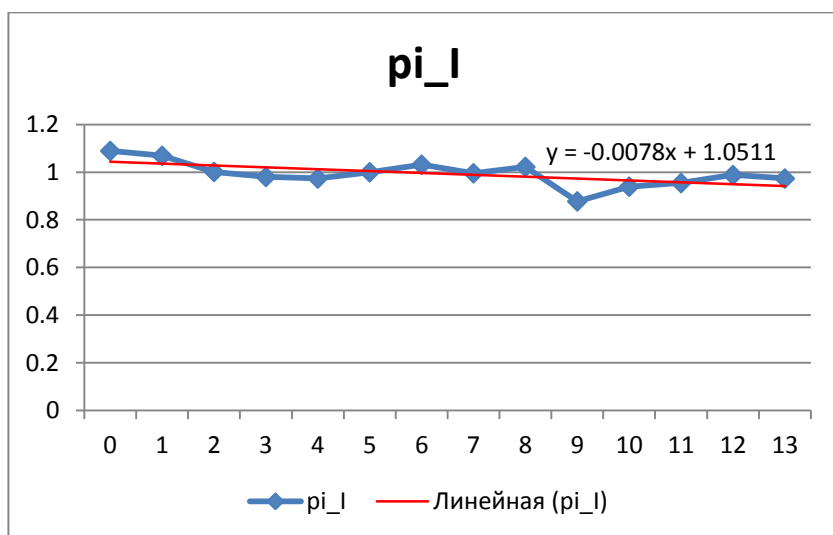


Рис. 3

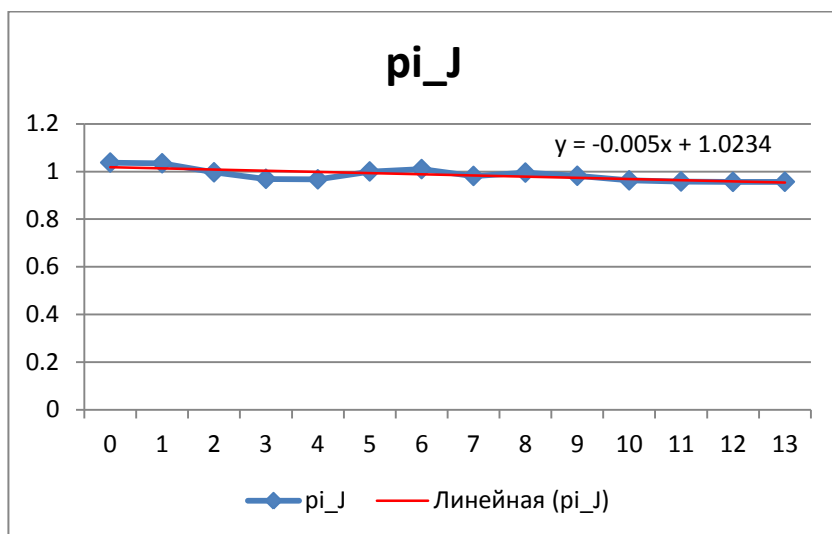


Рис. 4

В результате линейной подгонки относительных цен получим следующие функции для  $\pi_E(t)$ ,  $\pi_I(t)$  и  $\pi_J(t)$ :

$$\pi_E(t) = 0,0124x + 0,956, \quad (15)$$

$$\pi_I(t) = -0,0078x + 1,0511, \quad (16)$$

$$\pi_J(t) = -0,005x + 1,0234. \quad (17)$$

В-третьих, найдем постоянные параметры  $\sigma$ ,  $\delta$  и  $\rho$  согласно статистическим данным:

$$\sigma = 0,149697648, \quad (18)$$

$$\delta = 0,454387796, \quad (19)$$

$$\rho = 0,573894963. \quad (20)$$

Далее, перепишем уравнение (3) в дискретном виде:

$$K(t+1) = K(t) + J(t) - \mu K(t), K(0) = K_0, \quad (21)$$

где  $J(t) = \sigma(1 - \rho)Y(t)$ ,  $K_0 = \kappa Y_0$ ,  $\kappa \in [0,5; 5]$ .

Итак, применяя уравнения (1) и (21), найдем постоянные параметры  $a, b, \mu, \kappa$ . Для этого будем использовать встроенную в Microsoft Excel функцию «Поиск решения», с помощью которой на каждом шаге будем оптимизировать искомое значение  $Y^*$  до статистического значения  $Y$ , изменяя параметры  $a, b, \mu, \kappa$  при заданных ограничениях, т.е.

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ b > -1, \\ -0,2 < \mu < 0,1, \\ 0,5 < \kappa < 5. \end{cases} \quad (22)$$

В результате подбора параметров имеем следующие их значения:

$$\begin{aligned} a &= 0,3273875640, \\ b &= 1,015085243, \\ \mu &= 0,099327922, \\ \kappa &= 1,224577628. \end{aligned}$$

Таким образом, подставив все параметры, получим окончательную модель для расчета ВВП.

#### 4. Результаты идентификации

Для наглядности, результаты расчета ВВП, импорта, экспорта и инвестиций представлены на рис. 5 – 8, где соответственно  $Y^*, I^*, E^*, J^*$  – показатели, рассчитанные по модели, а  $Y, I, E, J$  – статистические.

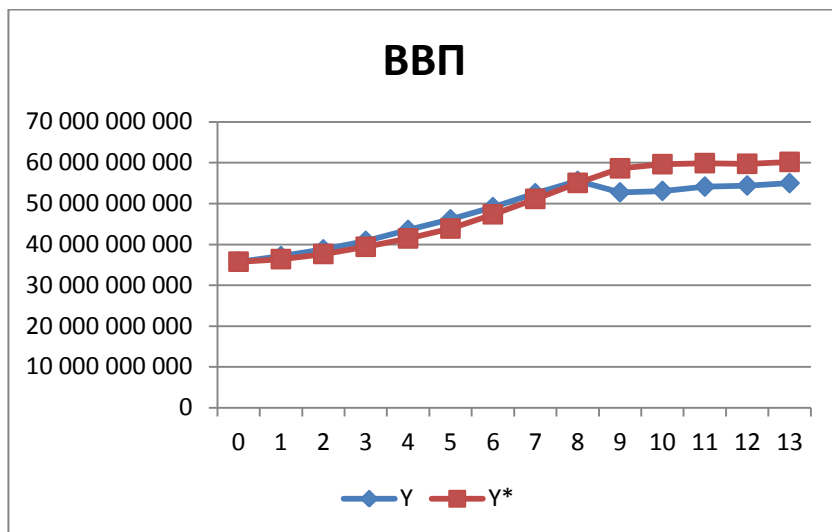


Рис. 5

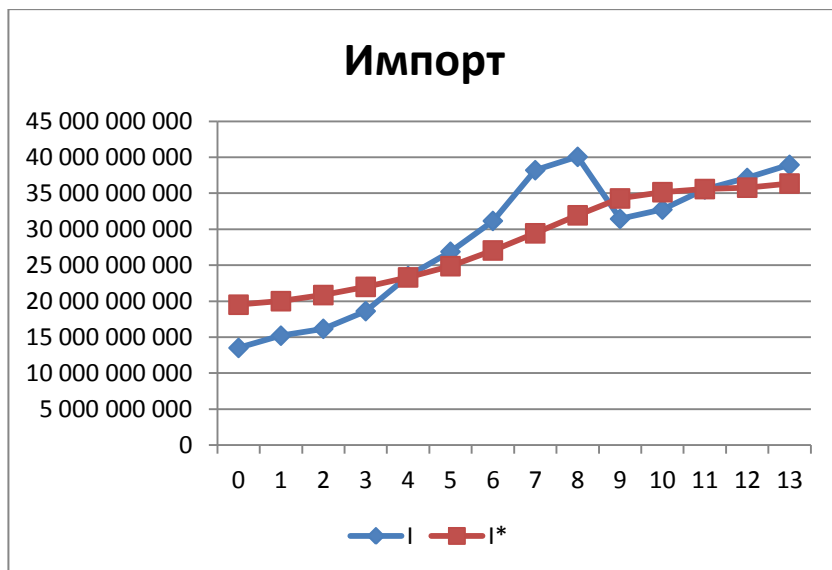


Рис. 6

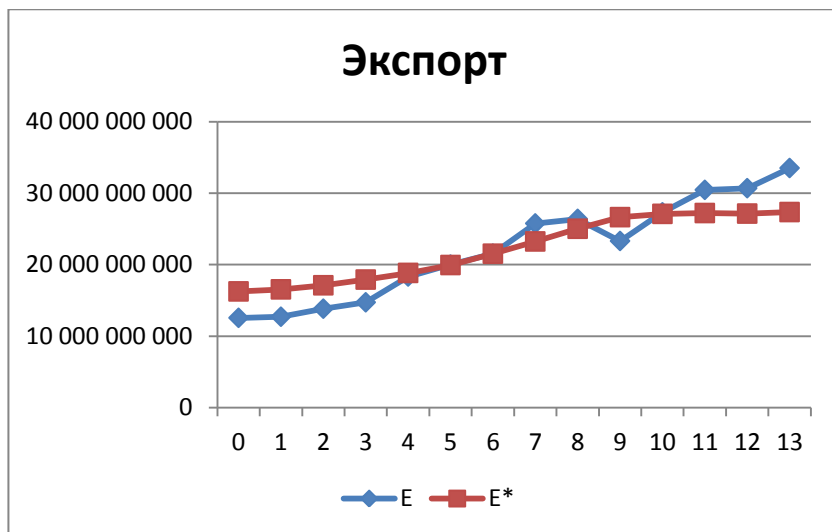


Рис. 7

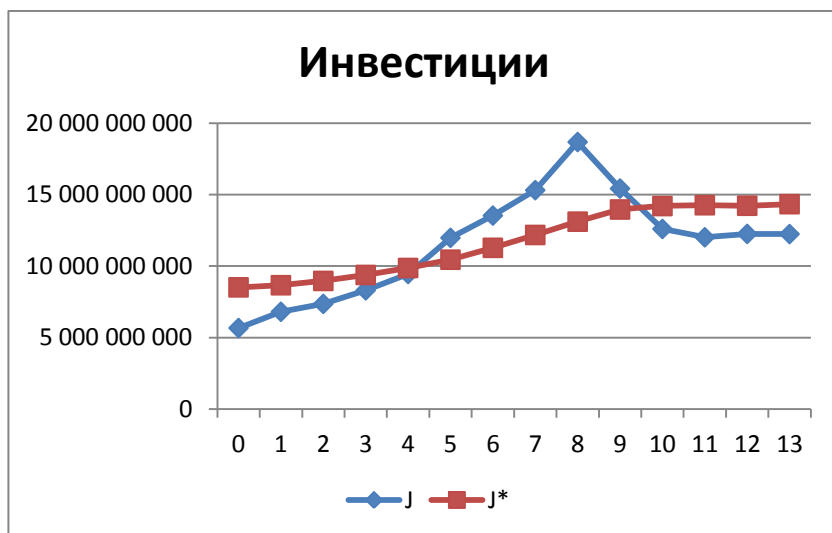


Рис. 8

## 5. Заключение

В работе исследована проблема идентификации параметров расширения модели Рамсея, в результате которой получена модель экономики Болгарии. Идентифицированную модель можно использовать не только для анализа основных макроэкономических показателей, но и для их прогнозирования на ближайшее будущее.

## Литература

1. *Н.Н. Оленев, Р.В. Печенкин, А.М. Чернецов.* Параллельное программирование в MATLAB и его приложения. М.: ВЦ РАН, 2007, с. 67 – 98.
2. Сайт статистического отдела ООН: <http://unstats.un.org>.
3. Сайт национального статистического института Болгарии: <http://nsi.bg>.

## Literatura

1. *N.N. Olenev, R.V. Pechenkin, A.M. Chernetsov.* Parallelnoe programmirovaniye v MATLAB i ego prilozheniya. M.: VTs RAN, 2007, s. 67 – 98.
2. Sayt statisticheskogo otdela OON: <http://unstats.un.org>.
3. Sayt natsionalnogo statisticheskogo instituta Bolgarii: <http://nsi.bg>.

# Идентификация внешних параметров модели Рамсея для экономики Австралии

П.А. Шерстобитова

МФТИ, Москва, Россия, [sherstobitova.polya@gmail.com](mailto:sherstobitova.polya@gmail.com)

В работе изучена идентификация модели Рамсея для экономики Австралии с помощью параллельных вычислений. В модели используются экономические макропоказатели и изменение относительных цен на компоненты экономического баланса. С помощью статистических данных были рассчитаны макропоказатели, характеризующие структуру использования валового внутреннего продукта, и сопутствующие параметры в модели. Работа выполнена под научным руководством Н.Н. Оленёва.

**Ключевые слова:** модель Рамсея, Австралия.

The identification of the Ramsey model of the Australian economy using parallel computing was studied in the work. The model includes the economic macro indicators and changes in the relative prices of the components of the economic balance. Using statistical data macroeconomic indicators characterizing the structure of use of gross domestic product, and related model parameters were calculated. The work has been performed under the supervision of Nicholas Olenev.

**Keywords:** Ramsey model, Australia

L'identification du modèle de Ramsey de l'économie australienne en utilisant le calcul parallèle a été étudié dans le travail. Le modèle inclut les indicateurs macro économiques et les changements dans les prix relatifs des composants de l'équilibre économique. L'utilisation

d'indicateurs macroéconomiques de données statistiques caractérisant la structure de l'utilisation du produit intérieur brut, et les paramètres du modèle connexes ont été calculés. Le travail a été effectué sous la supervision de Nicolas Olenev.

**Mots clés:** Modèle Ramsey, Australie

## Описание модели

Применение и идентификация модели Рамсея [1] для исследования экономики Австралии. Пусть  $L$  – среднегодовое число занятых в хозяйстве страны,  $Y$  – ВВП,  $C$  – потребление,  $J$  – совокупные инвестиции,  $E$  – экспорт,  $I$  – импорт,  $K$  – объемы капитала.

Основной макропоказатель – валовой внутренний продукт – определяется производственной функцией [1]:

$$Y(t) = Y_0 \left[ a \left( \frac{L(t)}{L_0} \right)^{-b} + (1-a) \left( \frac{K(t)}{K_0} \right)^{-b} \right]^{-\frac{1}{b}} \quad (1)$$

Начальные значения соответствуют 2005 году, также накладываются ограничения на параметры:  $Y_0 > 0, L_0 > 0, K_0 > 0, a \in (0,1), b > -1$ .

Считаем, что  $L(t)$  растет с постоянным темпом, а  $K$  меняется за счет новых инвестиций и выбытия капитала:

$$\frac{dL}{dt} = \gamma L(t), L(0) = L_0, \gamma > 0, \quad (2)$$

$$\frac{dK}{dt} = J(t) - \mu K(t), K(0) = K_0 \quad (3)$$

Уравнение макроэкономического баланса:

$$p_Y Y(t) + p_I I(t) = p_C C(t) + p_J J(t) + p_E E(t) \quad (4)$$

Преобразуем балансовое уравнение с помощью введения относительных цен [1]:

$$Q(t) = p_c(t) * \frac{c(t)}{p_Y(t)}, \quad (5)$$

$$\pi_I(t) = \frac{p_I(t)}{p_Y(t)}, \quad \pi_E(t) = \frac{p_E(t)}{p_Y(t)}, \quad \pi_J(t) = \frac{p_J(t)}{p_Y(t)}, \quad (6)$$

$$Y(t) + \pi_I(t)I(t) = Q(t) + \pi_J(t)J(t) + \pi_E(t)E(t) \quad (7)$$

Для решения уравнений нам понадобятся величины импорта  $I(t)$ , экспорта  $E(t)$ , объем инвестиций  $J(t)$ , вводим следующие величины [1]:

$$\sigma = \frac{\pi_J(t) * J(t)}{Y(t) + \pi_I(t) * I(t)},$$

$$\delta = \frac{\pi_E(t) * E(t)}{Y(t)},$$

$$\rho = \frac{\pi_I(t) * I(t)}{Y(t) + \pi_I(t) * I(t)}$$

Далее переходим к дискретным уравнениям:

$$K_{t+1} = (1 - \mu) * K_t + J_t, \quad (7)$$

$$E_t = \frac{\delta * Y_t}{(\pi_E)_t}, \quad (8)$$

$$I_t = \frac{\rho * (1 - \delta) * Y_t}{(\pi_I)_t}, \quad (9)$$

$$J_t = \frac{\sigma * (1 + \rho * (1 - \delta) * Y_t)}{(\pi_J)_t} \quad (10)$$

$$Y_t = Y_0 * \left( a * \left( \frac{L(t)}{L_0} \right)^{-b} + (1 - a) * \left( \frac{K(t)}{K_0} \right)^{-b} \right)^{-\frac{1}{b}}, \quad Y_0 = a * K_0,$$

$$Q_t = \left( (1 - \sigma) * (1 + \rho * (1 - \delta)) - \delta \right) * Y_t. \quad (11)$$

## Идентификация модели

### Построение приближений

Для проведения вычислений потребуются ряды величин, полученные на основе анализа статистических данных, взятых из [2].

Переменная  $t = \langle \text{текущий год} \rangle - 2005$ .

Построим приближения для величин  $L(t)$ ,  $\pi_I$ ,  $\pi_J$ ,  $\pi_E$ :

$$L(t) = a_1 * t^2 + a_2 * t + L_0, \quad (12)$$

$$\pi_E = 1 + a_E * t * \sin(1.1 + b_E * \sin(t)), \quad (13)$$

$$\pi_I = a_I + (1 - a_I) * t * \cos(a_I * t), \quad (14)$$

$$\pi_J = a_J + (1 - a_J) * (1 + t) * e^{-b_I * t} \quad (15)$$

Приближение дает следующие результаты:

$$L(t) = 11.67 + 0.297 * t - 0.01212 * t^2, \quad (16)$$

$$\pi_E = 1.05 + 0.0343 * t * \sin(1.05 - 0.3724 * \cos(t)), \quad (17)$$

$$\pi_I = 1.0073 + (1 - 1.0073) * t * \cos(1.0073 * t), \quad (18)$$

$$\pi_J = 0.9717 + (1 - 0.9717) * (1 + t) * e^{-0.0630 * t} \quad (19)$$

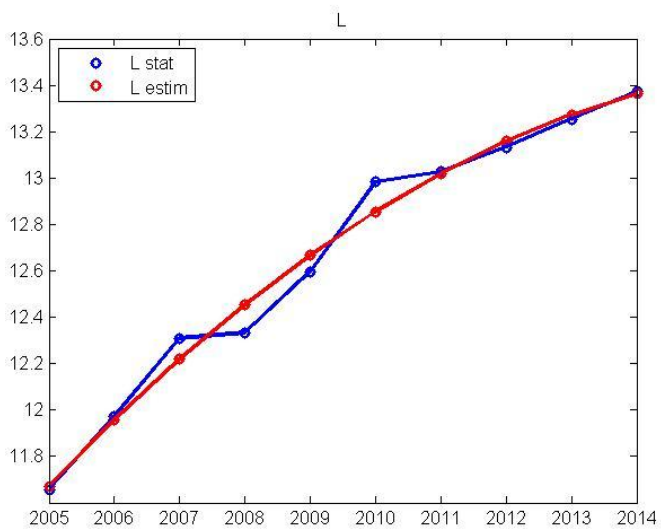


Рис.1

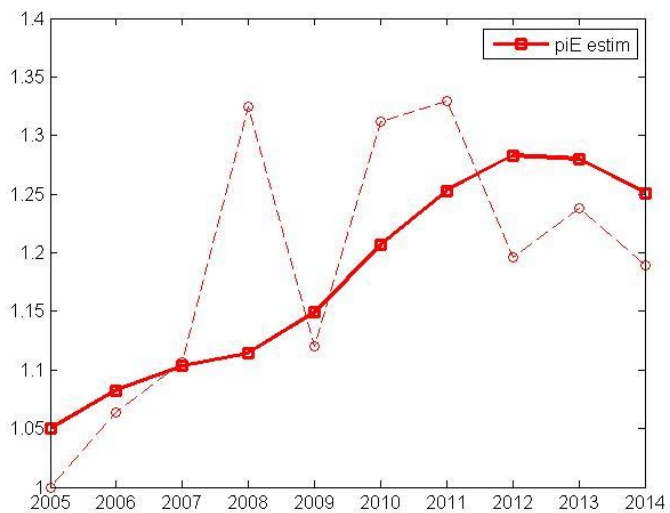


Рис.2

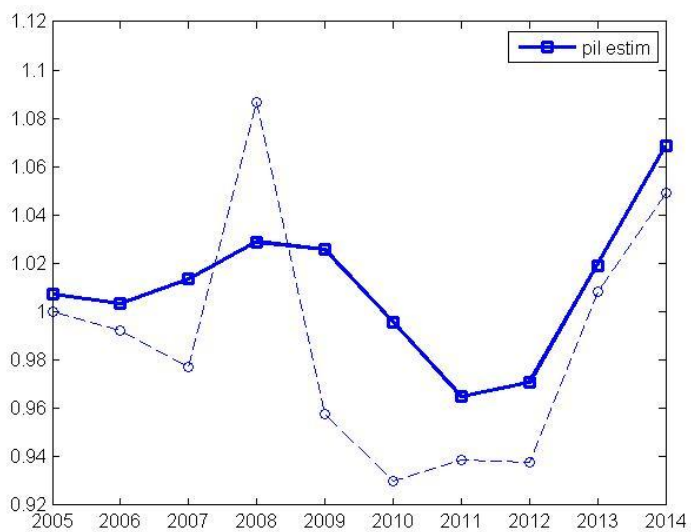


Рис.3

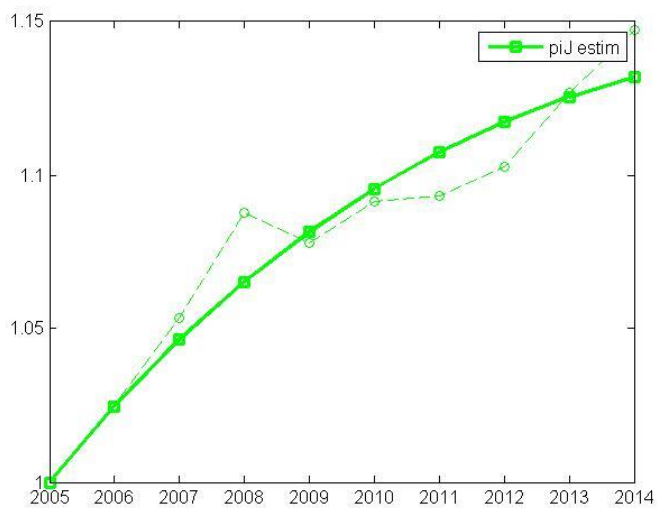


Рис.4

*Перебор параметров*

Подставляя статистические данные для величин  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\delta$ , получим следующие значения:

$$\sigma = 0,2647 \pm 0,00017, \quad \delta = 0,2470 \pm 0,00048, \quad \rho = 0,3825 \pm 0,00109$$

Переходим к расчету дискретных уравнений (7)-(10):  
Расчетные графики соответствующих индикаторов J, I, E, Y показаны ниже.

В результате получаем следующие значения параметров

$$L_0 = 11.67, \quad Y_0 = 99868.$$

$$a = 0.9667, \quad b = -0,9500, \quad \mu = -0,0400, \quad K_0 = 1032600$$

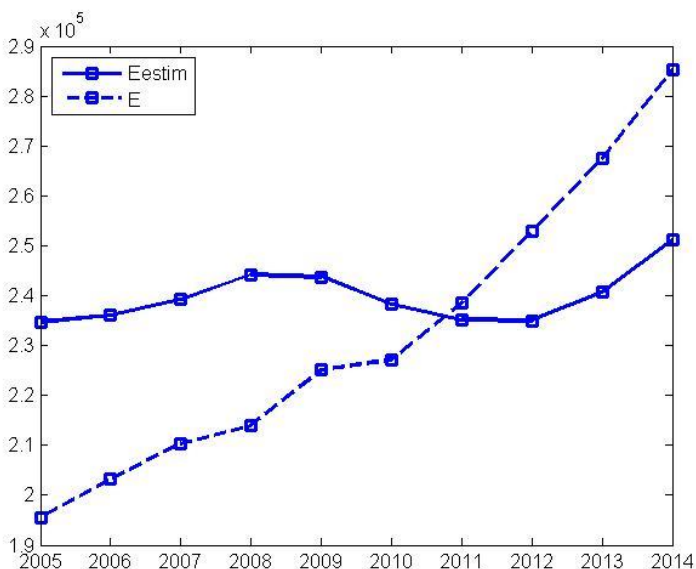


Рис.5

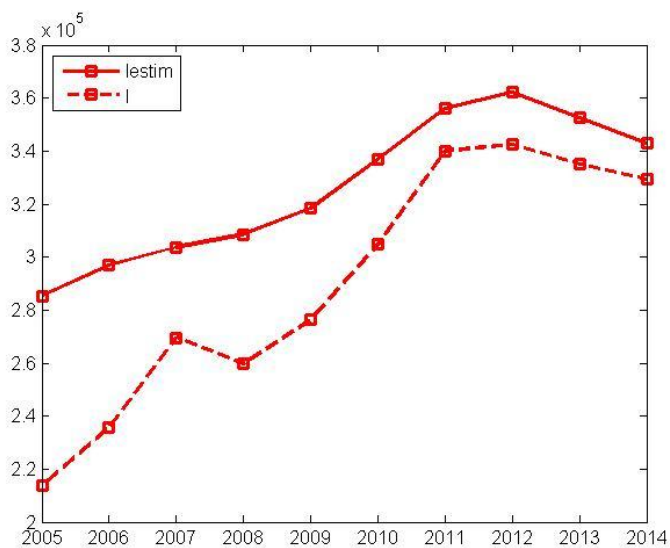


Рис.6

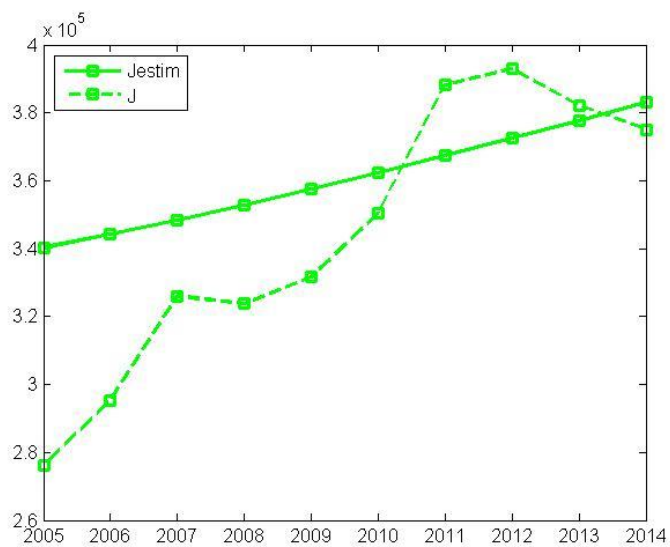


Рис.7

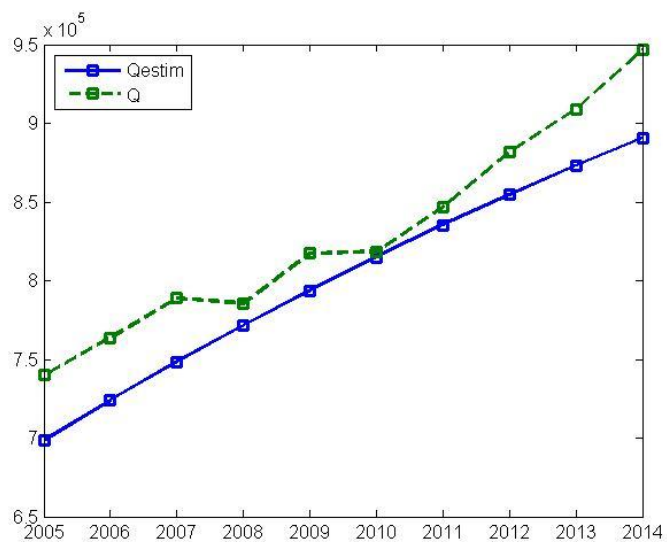


Рис.8

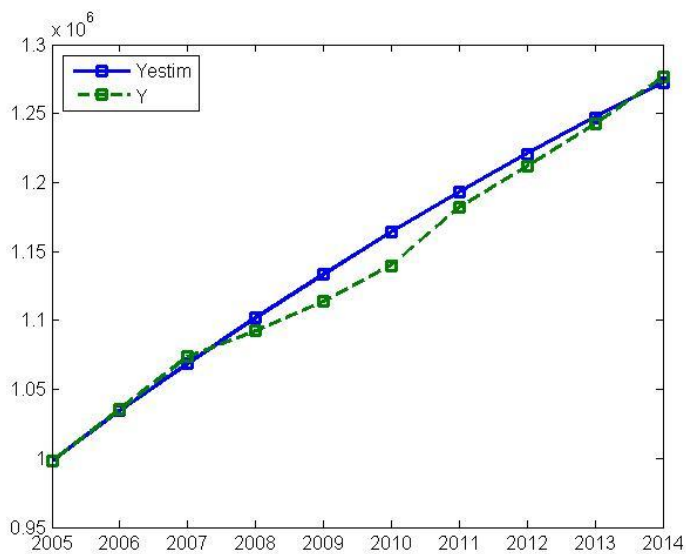


Рис.9

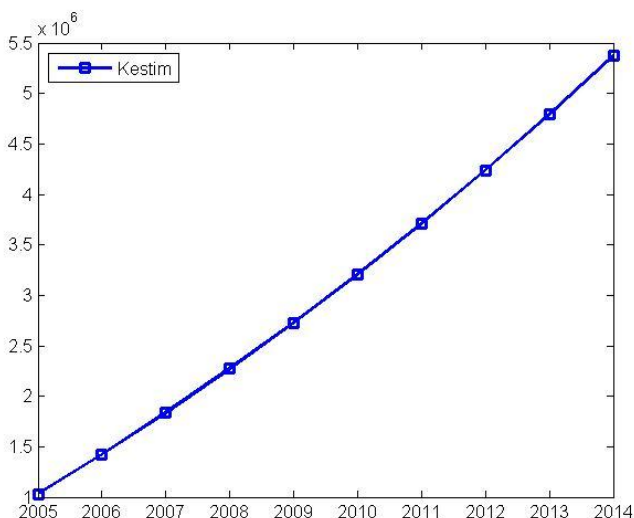


Рис.10

## Заключение

В работе был произведен расчет основных макропоказателей по модели Рамсея для экономики Австралии с помощью параллельных вычислений. Идентификация параметров экономики страны представлена на рис.1-10. Эти результаты могут помочь в анализе дальнейшего поведения экономической системы.

## Литература

4. Н.Н. Оленев, Р.В. Печенкин, А.М. Чернецов. Параллельное программирование в MATLAB и его приложения. М.: ВЦ РАН, 2007, с. 67 – 98.
5. Сайт Статистического отдела ООН: <http://unstats.un.org>.

## Literatura

1. N.N. Olenev, R.V. Pechenkin, A.M. Chernetsov. Parallel Programming in MATLAB and its applications. M.: VTs RAN, 2007, s. 67 – 98.
2. Site UN: <http://unstats.un.org>.

## **Economy of Greece: evaluation of real sector**

Nicholas Olenev

*Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences,  
40 Vavilova st., Moscow 119333, Russia  
[nolenev@mail.ru](mailto:nolenev@mail.ru), <http://www.ccas.ru/olenev/newpub.html>*

Any critical situation in an economy is always reflected on its real sector. The paper presents an evaluation of recent changes for real sector of the Greek economy by an original vintage capital model with putty-clay technology. At a given capital intensity and a given depreciation rate they can evaluate age structure of production capacities by the past real investments. This two unknown parameters along with those of a production function can be determined in an indirect way by comparison of pairs of time series for each macroeconomic index calculated by the model and for its analog taken from statistics. External parameters of the model obtained in the process of model identification are used here for calculation the production capacity dynamics of the immediate past and forecasts of the immediate future. These evaluations can be used to estimate required and feasible structural transformations of the Greek economy.

**Keywords:** Greek economy, vintage capital, production capacities, capacity utilization

**JEL classification:** D24; E22; C82

**Economie de la Grèce: évaluation du secteur réel**

Nicholas Olenev (CC FRC CSC RAS, [nolenev@mail.ru](mailto:nolenev@mail.ru))

Toute situation critique dans une économie se reflète toujours sur son secteur réel. Le document présente une évaluation des récents changements pour le secteur réel de l'économie grecque par un modèle de capital original vintage avec la technologie mastic argile. Lors d'une intensité de capital donné et un taux d'amortissement étant donné qu'ils peuvent évaluer la structure d'âge des capacités de production par les derniers investissements réels. Ces deux paramètres inconnus ainsi que ceux d'une fonction de production peuvent être déterminées de façon indirecte par comparaison de paires de séries chronologiques pour chaque indice macroéconomique calculé par le modèle et son analogue prise à partir des statistiques. Les paramètres externes du modèle obtenu dans le processus d'identification de modèle sont utilisés ici pour le calcul de la dynamique des capacités de production du passé et les prévisions de l'avenir immédiat. Ces évaluations peuvent être utilisées pour estimer les transformations structurelles nécessaires et réalisables de l'économie grecque.

**Mots-clés:** économie grecque, le capital vintage, capacités de production, utilisation des capacités

### **Экономика Греции: оценка реального сектора**

Николай Оленев (ВЦ ФИЦ ИУ РАН, [nolenev@mail.ru](mailto:nolenev@mail.ru))

Любая критическая ситуация в экономике всегда отражается на ее реальном секторе. В работе дана оценка современных изменений в реальном секторе экономики Греции, полученная на основе оригинальной модели производственных фондов, дифференцированных по моментам создания, с технологией, задаваемой при создании. При заданной фондоемкости и норме деградации мощностей можно оценить возрастную структуру этих производственных мощностей на основе прошлых реальных инвестиций.

Эти два неизвестных параметра и параметры производственной функции можно определить косвенно посредством сравнения пары временных рядов для каждого макроэкономического индекса, ряда, рассчитанного по модели и его аналога, взятого из статистики. Внешние параметры модели, полученные в процессе идентификации, используются здесь для расчета динамики производственной мощности в недавнем прошлом и для ее прогноза в ближайшем будущем. Эти оценки можно использовать для оценки необходимых и возможных структурных изменений в греческой экономике.

**Ключевые слова:** греческая экономика; фонды, дифференцированные по моментам создания; производственная мощность, загрузка мощностей

## Introduction

Any critical situation in an economy is always reflected on real sector of the economy. Here it is considered the real sector of Greek economy impacted by the situation with external debt which is reflected in the distribution of its production capacities by age. The paper presents an evaluation for real sector of recent Greek economy by an original vintage capital model with putty-clay technology. In fact the model uses an age structure of production capacities instead of vintage capital. So the model can be called as a “vintage capacity model”.

Production capacity is determined as a maximum of possible output in a year. Gross domestic product (GDP) of Greek economy at constant 2005 prices measured in US dollars is used here as the output. At a given capital intensity and a given depreciation rate they can evaluate age structure of production capacities by the past real investments. This two unknown parameters (the capital intensity, the depreciation rate) along with unknown parameters of a production function can be determined in an indirect way by comparison of pairs of time series for each macroeconomic index calculated by the model and taken from statistics.

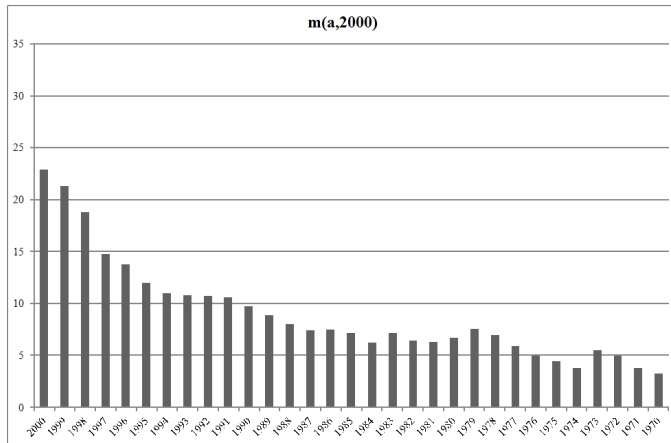


Fig.1. Distribution of production capacity in 2000 by age (vintage capacity) in constant prices of 2005, USD billions

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6]

External parameters of the model obtained in the process of model identification are used here for calculation the production capacity dynamics for the immediate past of 1970-2014 and forecasts for the immediate future of 2015-2020. These evaluations can be used to estimate required and feasible structural transformations of the Greek economy.

Methods of evaluation are based on a description of economic model for investment policy of firms in a market economy, presented in the works [1-3].

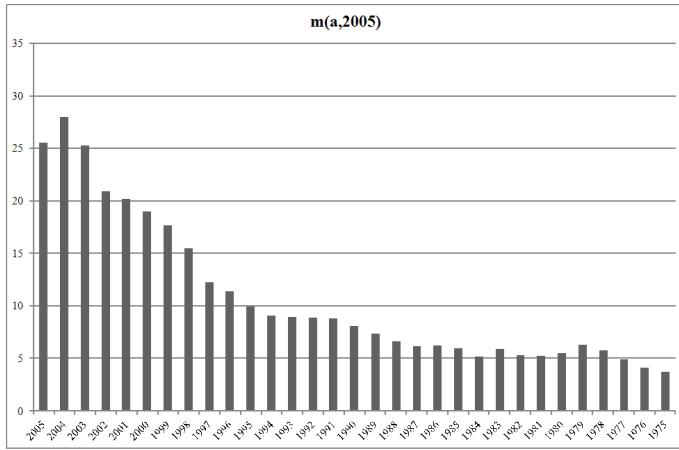


Fig.2. Vintage production capacity in 2005 in constant prices of 2005, USD billions

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6]

### Model of investment policy of firms

The model of investment policy of firms in a market economy [1-3] was constructed in the end of 1980-s and it can be used here to analyze the structural changes in Greece.

Recall the basic definitions and hypotheses [1-3]. Production capacity is defined as a maximum possible output in a given period of time. In the vintage capacity model [1-3] each “firm” is determined by time of creation and has a production capacity with unique value and productivity (putty-clay technology).

Production capacity  $m(t, t)$  created in year  $t$  in this year  $t$  is determined by gross fixed capital formation  $\Phi(t)$  divided on a coefficient  $b(t)$  of capital intensity.

$$m(t, t) = \Phi(t)/b(t). \quad (1)$$

The value of the capital intensity  $b(t)$  depends in general of a present technological level and in particular of a country’s corruption

level. For simplicity it is supposed here that  $b(t) = b(0) \exp(-\beta t)$ . As a rule, rate  $\beta > 0$ .

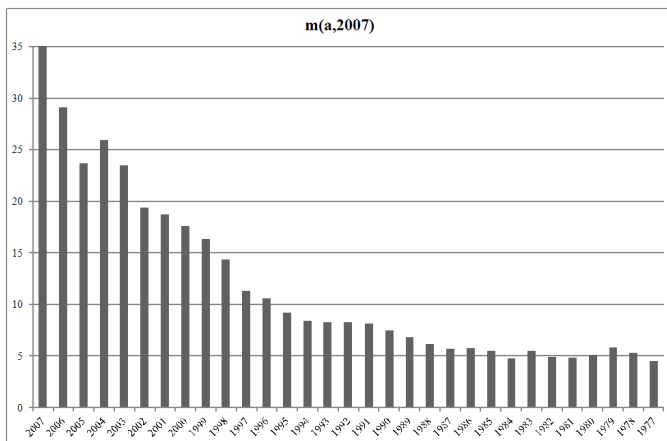


Fig.3. Vintage production capacity in 2007 in constant prices of 2005, USD billions

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6]

The model of investment policy of firms used a hypothesis of constant number of workplaces  $r(\tau, t)$  on every capacity through its all life period from the moment of its creation  $\tau$  until its dismantling. It is supposed also that production capacity of the firm created in a year  $\tau$  decreases with increasing of its age  $t - \tau$  by specified rate  $\mu > 0$ .

$$m(\tau, t) = m(\tau, \tau) \exp(-\mu(t - \tau)). \quad (2)$$

If norm of labour input of firm created in year  $\tau$  at time  $t$  denote as  $\lambda(\tau, t)$  than the number of workplaces  $r(\tau, t) = \lambda(\tau, t)m(\tau, t)$  and therefore the norm of labour input increases (labor productivity decreases)

$$\lambda(\tau, t) = \lambda(\tau, \tau) \exp(\mu(t - \tau)). \quad (3)$$

Paper [1] shows that if they come from the variables  $(\tau, t)$  to the variables  $(\lambda, t)$  in a description of capacity dynamics for a density of distribution  $m(\lambda, t)$  the capacity dynamics satisfies a partial differential equation of the first order:

$$\frac{\partial m(\lambda, t)}{\partial t} = j(\lambda, t) - 2\mu m(\lambda, t) - \mu\lambda \frac{\partial m(\lambda, t)}{\partial \lambda}, \quad (4)$$

where  $j(\lambda, t)$  is an investment in technology with labour intensity  $\lambda$ .

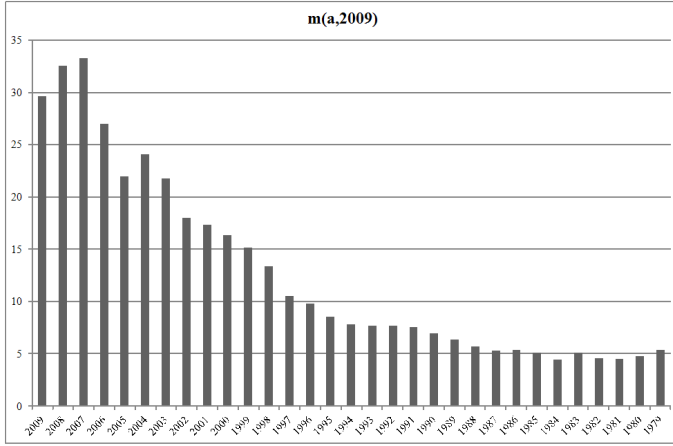


Fig.4. Vintage production capacity in 2009 in constant prices of 2005, USD billions

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6]

Equation (4) completely determines the density  $m(\lambda, t)$  if an initial condition  $m(\lambda, 0) = m_0(\lambda)$  is specified. If as it is supposed in equation (1) all investments  $J(t) = \frac{\Phi(t)}{b}$  come in a new technology with a norm of labour input  $v(t)$  then  $j(\lambda, t) = J(t)\delta_+(t - v(t))$ , where  $\delta_+(x)$  is Dirac delta plus function. Now we can find by integrating (4) by norm of labour input from  $v(t)$  to  $\infty$  an equation for a total capacity

$$M(t) = \int_{v(t)}^{\infty} m(\lambda, t) d\lambda \quad (5)$$

of an industry or an economy. The equation obtained here from the microeconomic description is usually used in macroeconomic models:

$$\frac{dM(t)}{dt} = J(t) - \mu M(t). \quad (6)$$

Note [1], if we have a limit on upper value of the integral (5) we will have a more general equation then (6).

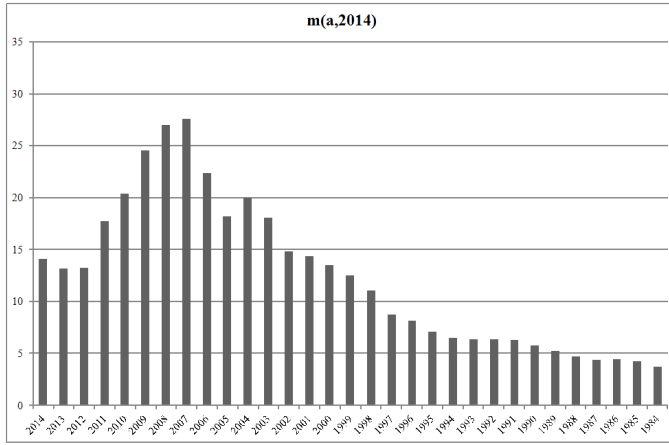


Fig.5. Vintage production capacity in 2014 in constant prices of 2005, USD billions

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6]

If share of investments in total capacity of an economy  $\sigma = J(t)/M(t)$  is constant than this microeconomic description allows you to build an analytical expression for production function of the economy, that is, the dependence of the output  $Y(t)$  from the production factors: total capacity  $M(t)$  and the total labour  $L(t)$ :

$$Y(t) = M(t)f(t, x), \quad (7)$$

where  $x = L(t)/M(t)$ . It only needs to define function of scientific and technical progress which in this model is reflected in a dynamics of the best and the lowest norm of labour input  $v(t)$ .

$$\frac{1}{v(t)} \frac{dv(t)}{dt} = -\varepsilon\sigma, \quad (8)$$

where parameter  $\varepsilon > 0$  is a rate of scientific and technical progress. See for details paper [1]. So, we can find [1] an analytical form of a new kind of production functions:

$$f(t, x) = 1 - (1 - (1 - \varepsilon - \mu/\sigma) \frac{x}{v(t)})^{1/(1-\varepsilon-\mu/\sigma)}. \quad (9)$$

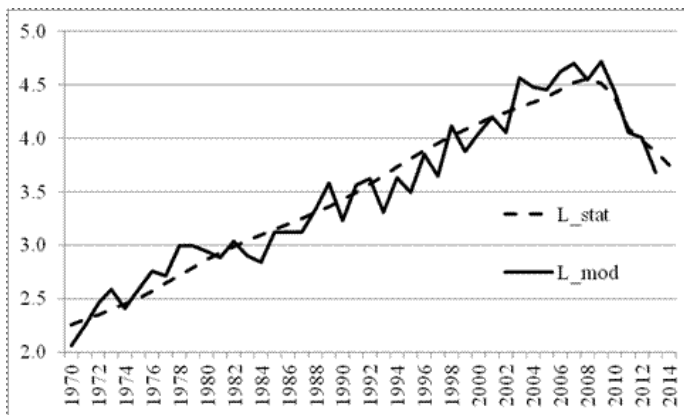


Fig.6. Identification for the model of Greek economy by the employment fitting. Time series for employment: L\_mod – estimation by vintage capacity model, L\_stat – statistical data, millions people.

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6]

In general case when the share of new capacities in the total capacity  $\sigma(t)$  is not constant the analytical form is not available but it is possible to construct a production function numerically using relations (1)-(3), (8). So let begin numerical estimations by the model for Greek economy.

## Estimation of production capacities for Greek economy

Here, an annual gross domestic product (GDP) at constant 2005 prices in US dollars is used as the output  $Y(t)$  of Greek economy. Consider the distribution of production capacity on age (see. Fig.1-5 for the distribution of production capacity over the years established in 2000, 2005, 2007, 2009 and 2014, respectively, where capacities are measured in billion USD of 2005).

Let us evaluate the parameters  $b(0)$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $v(0)$ ,  $\varepsilon$ ,  $m_0(\lambda)$  of the Greek economy 1970-2013 by the model described above from some natural conditions. One of the condition is that the production capacities are utilized an average on 70% approximately, implying an existence of a normal reserve of capacities on the level of approximately 30% [5].

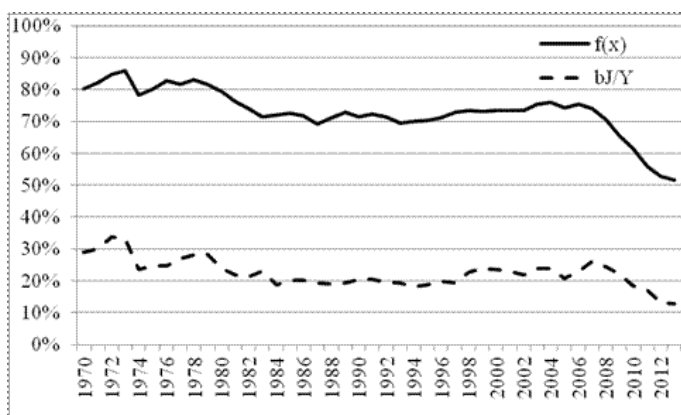


Fig.7. Time series for macroeconomic indices:  $f(x)$  – capacity utilization,  $bJ/Y$  – ratio of investment product to GDP.

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6,7]

Let use for estimation fitting of time series for labour  $L(t)$  and output  $Y(t)$ . Namely, we iterate through all valid sets of parameters using high-performance computing on supercomputer MVS-1000M of Joint supercomputer centre of Russian academy of sciences and select a

combination of the parameters in which the match of statistics and calculations is complete for GDP  $Y(t)$  and the best one for labour  $L(t)$ .

Figures 1-5 show a history of changing the form for distribution of production capacities by dates of creation. Up to 2007 Greek economy developed rapidly with a slight decline in 2005, which resulted in an investment level and in a correspondent fluctuation of the capacity distribution.

It is interesting to note that at the same time the human development index calculated entirely on other indicators (human life expectancy (longevity), education level, living standards in purchasing power parity), allowed the Greek economy attributed to the group of developed countries. However, Figures 1-3 show that Greek economy in 2000-2007 maintained a fairly long "tail" of production capacity with a large age and therefore with a relatively low labour productivity (or which is the same with a high norm of labour input).

And when the flow of foreign lending has fell as a result of the world crisis the problems have arisen because the internal resources of real sector were not enough to support development of production and payments on the accumulated foreign debt.

Figures 3-5 show how the decline in investment affects the distribution of production capacity after 2007 and up to 2014. A naked eye from these drawing can see that the average age of production capacity increases and average labor productivity reduces, accordingly, reducing the competitiveness of Greek economy and, therefore, under a fixed exchange rate of national currency increasing unemployment to curb the growth of average norm of labour input.

To increase the average productivity in the conditions of the fixed rate of national currency it would have been better during the growth of new production capacity to dismantle the old capacities and grow by creating more productive capacities, but that did not happen.

With no possibility to devalue the national currency and thereby making the old production capacities profitable it remains to hope only for the possibility of debt relief since the policy of clamping one region in the common economic space looks strange and for the possibility of a new development program including the construction of new capacities and destruction of old ones, which lenders and borrowers can offer jointly.

As a result of research we have the next estimations for Greek economy of 1970-2013: capital intensity in 1970  $b(0) = 2.755$ , rate of its decline  $\beta = 0.009$ , the best norm of labour input in 1970  $v(0) = 0.01576$ , the rate of scientific and technical progress  $\varepsilon = 0.051$ , the rate of capacity depreciation  $\mu = 0.0375$ . Value of  $b(t)$  differs in different countries, the value characterizes the level of technology in new capacities and the level of corruption. A value of rate  $\mu$  characterizes an average level of capacities depreciation as a result of technical ageing in the given country (it depends on the production culture and the climatic conditions). The inverse value  $1/\mu$  gives an evaluation of the maximum possible lifetime (age) of capacities by technical performance. Taking into account the moral depreciation the lifetime drops below  $1/\mu$  increasing the competitiveness of the economy.

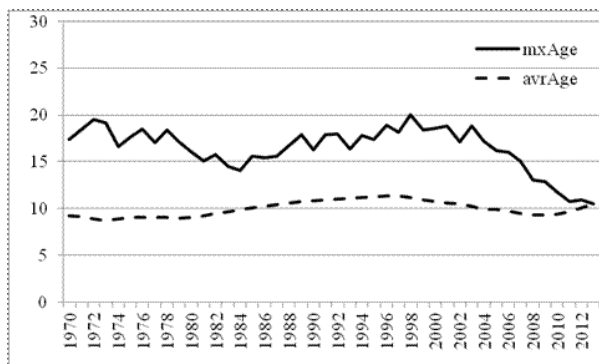


Fig.8. Time series for macroeconomic indices: *mxAge* – maximal age of capacities which are used in production of output, *avrAge* – average age of production capacities.

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6,7]

Figure 6 indicates a quality of fitness of the model and statistics [6-7] by this parameters.

Figure 7 shows the dynamics of production capacity utilization by labor employed in Greek economy. It is seen that after 2007 the capacity utilization has fallen sharply below the economically

reasonable level of 70%. The figure 7 shows also a ratio of investment product to GDP. It also falls down after 2008.

Figure 8 shows that in 2013 maximal age of capacities used in production is fell down below the average age.

Figure 9 shows that in 2013 the share of investments in total capacity is fell down below the rate of depreciation. So that total capacity (maximal total output) of Greek economy fall down.

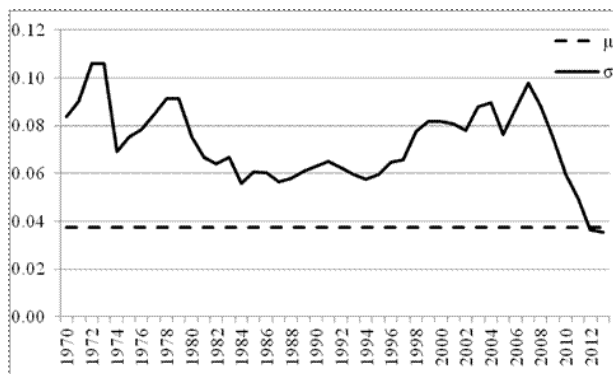


Fig.9. Time series for macroeconomic indices:  $\sigma(t)$  share of investments in total capacity,  $\mu$  - rate of depreciation.

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6,7]

## Comparative analysis

The model allows conducting a comparative analysis of Greek economy with other countries. For example, Italian economy gives the next estimations for the model: capital intensity in 1970  $b(t) = 3.3$ , rate of its decline  $\beta = 0.019$ , the best norm of labour input in 1970  $v(0) = 0.012$ , the rate of scientific and technical progress  $\varepsilon = 0.08$ , the rate of capacity depreciation  $\mu = 0.017$ .

Figure 10 illustrates the dynamics of capital intensity for Greece and for Italy. So that  $b(2014) = 1.85$  for Greece, and  $b(2014) = 1.42$  for Italy. This means particularly that the nowadays level of corruption in Greece is on 30% more greater than in Italy.

The total capacity of each compared country was calculated by a condition that average loading of capacities is approximately equaled 70 percent. The condition gives a value for age of a marginal capacity which included in total capacity of the country. It was determined that for Greek economy the age is 30 years old, and for Italy it is 28 years old. So that the smaller is the tail of the capacity distribution, the greater is the rate of growth in this economy. Note that as it was shown in [3] the longer is the tail of the distribution of capacities by age, the less stable growth of the economy is in the future.

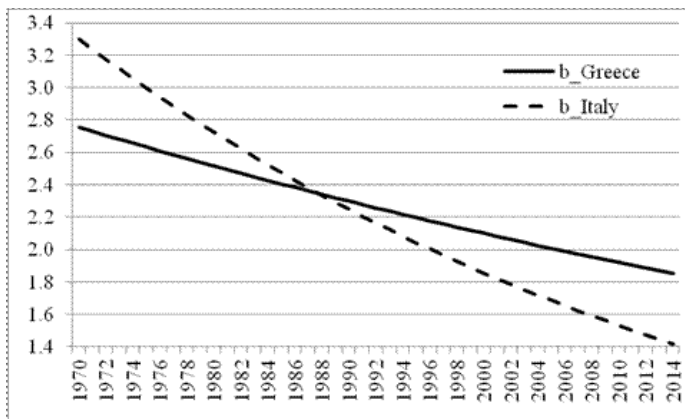


Fig.10. Time series for capital intensity  $b(t)$  for economy of Greece (solid curve) and for economy of Italy (dashed curve)

Source: my own estimations for the model [1-3] by data [6,7]

## Conclusions

The paper presents my estimation of a recent situation in real sector of Greek economy obtained by the model identification on the base of official statistical data.

The model of economy, techniques of its identification and especially its application for Greek economy require further research, some areas of which are given in [9-12].

Sometimes unscrupulous analysts say politicians that they have only two or three possible scenarios of behavior. In fact the number of ways is limited only by an imagination. As ancient Chinese people said: «It is known that in any situations there are 36 possible ways out.» [13]. You need only to choose an optimal way in terms of acceptance criteria for a given situation.

In order to ensure sustained growth of the Greek economy in the future and to be able to repay the debts have to recommend reducing of the age limit of capacities that can be used in production. For example, this can be done by increased taxation on old capacities, which may differ by production sectors.

The author of the work was partly supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00432).

## References

1. *Olenev N.N., Petrov A.A., Pospelov I.G.* Model of Change Processes of Production Capacity and Production Function of Industry. . In: Mathematical Modelling: Processes in Complex Economic and Ecologic Systems, 1, 46-60 (1986). In Russian. DOI: 10.13140/RG.2.1.3938.8880.
2. *Olenev N.N., Pospelov I.G.* The Model of Investment Policy in Market Economy. . In: Mathematical Modelling: Processes in Complex Economic and Ecologic Systems, 1, 163-173 (1986). In Russian. DOI: 10.13140/RG.2.1.2366.0244
3. *Olenev N.N., Pospelov I.G.* Exploring of the Investment Policy of Firms in Market Economy. In: Mathematical Modelling: Methods of Description and Investigation of Complex Systems /Ed. A.A. Samarsky, N.N.Moiseev, A.A.Petrov/ - Moscow: Nauka. P.175-200. In Russian. DOI: 10.13140/RG.2.1.3992.6242
4. *Olenev N.N.* A life-cycle model of capital and production function with reserve capacity// Mathematical Modeling. Vol.7, No.7. 1995. P.175-200. In Russian.
5. *Olenev N.N.* A study of structural changes influence on Russian economy // Vestnik RUDN. Seria Ekonomika. 2015, № 1. P.150-157. In Russian.
6. National Accounts Main Aggregates Database. Web page: <http://unstats.un.org/unsd/snaama/dnllist.asp>.

7. Data of the Statistical Institute. Web page: <http://www.statistics.gr/>
8. *Kamenev G.K., Olenev N.N.* Study of the Russian Economy's Identification and Forecast Stability Using a Ramsey Type Model // *Mathematical Models and Computer Simulations*, Vol. 7, No. 2, 2015, P.179-189.
9. *Matveenko V.D., Olenev N.N., Shatrov A.V.* Modeling economic growth of different countries by means of production functions on the basis of comparative analysis of dynamics of interaction of social groups // *Vestnik Permskogo universiteta. Seria Ekonomika = Perm University Herald. Economy*. 2015. № 2(25). P. 42–50.
10. *Nicholas Olenev* A Ramsey type model with an endogenous production function for study of economic systems // 10th International Conference "Economic Integration, Competition and Cooperation" (April 22-24, 2015). Book of Abstracts. – Opatija-Croatia-Hotel Ambassador: University of Rijeka, 2015. P.54.
11. *Nicholas Olenev*. Identification of the Uzawa-Lucas Model for World Economy// International scientific conference "New challenges of economic and business development - 2014". May 8-10, 2014. Riga, University of Latvia. Abstracts of reports. PP.87-88.
12. *Makarova Maria, Olenev Nicholas* On firm investment policy model accounting for employees learning. // IV International Conference on Optimization Methods and Applications "Optimization and applications" (OPTIMA-2013). Petrovac, Montenegro, September 22-28, 2013. Abstracts. Moscow – 2013. - P.109-110.
13. *Shi Naian* The Water Margin: Outlaws of the Marsh/Trans. by J.H. Jackson. Tuttle Publishing, 2010. 800pp.

## **Правила для авторов**

### **Структура представляемой статьи**

**Название статьи** (Times New Roman, 12pt, полужирный, заголовок, выравнивание по центру)

Пустая строка

Фамилия И.О. автора (Times New Roman, 11pt, по центру)

Пустая строка

Место работы или учебы автора, город (Times New Roman, 11pt, курсив, выравнивание по центру).

Пустая строка.

Абстракт на русском языке (Times New Roman, 11pt, отступы слева и справа по 1 см, до 8 строк).

Пустая строка.

Название статьи и абстракт на французском языке (Times New Roman, 11pt, отступы слева и справа по 1 см, до 8 строк).

Пустая строка.

Название статьи и абстракт на английском языке (Times New Roman, 11pt, отступы слева и справа по 1 см, до 8 строк).

Пустая строка.

Текст (Times New Roman, 11pt, выравнивание по ширине).

Пустая строка.

**Список литературы**, на которую есть ссылки в тексте: [n].

Работа должна быть представлена в редакторе Word, размер А5, формат doc, шрифт Times New Roman, размер шрифта – 11, межстрочный интервал – одинарный, размер полей сверху и снизу по 1,5 см, слева и справа по 1,8 см, отступ в начале абзаца 1,25 см, форматирование по ширине.

Рисунки, таблицы, схемы, графики и пр. должны быть пронумерованы, «вмещаться» в печатное поле страницы. Название таблицы указывается над таблицей; название рисунка – под рисунком. Уравнения записываются встроенным редактором Word. Список литературы в конце статьи нумеруется по мере упоминания в тексте.

Далее приводится литература в латинской транслитерации.

В сборнике трудов, как правило, публикуются работы, представленные на научном семинаре института CEDIMES и ВЦ РАН "Моделирование социально-экономических систем" и рекомендованные этим семинаром к публикации.

## Оглавление - Contenu - Contents

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Editorial Council.....                                                                                 | 3  |
| Редакционный совет .....                                                                               | 4  |
| Editorial.....                                                                                         | 5  |
| Nicholas Olenev .....                                                                                  | 5  |
| Слово редактора .....                                                                                  | 6  |
| Н.Н. Оленёв .....                                                                                      | 6  |
| Об оптимальной оценке параметра гауссовой смеси,<br>вычисляемой по ЕМ-алгоритму.....                   | 7  |
| Н.Н. Апраушева, С.В. Сорокин .....                                                                     | 7  |
| Нерегулярный принцип максимума задачи со смешанными<br>ограничениями .....                             | 29 |
| В.В. Дикусар .....                                                                                     | 29 |
| Идентификация параметров расширения модели Рамсея по<br>статистическим данным экономики Болгарии ..... | 45 |
| Н.Х. Садеков .....                                                                                     | 45 |
| Идентификация внешних параметров модели Рамсея для<br>экономики Австралии.....                         | 57 |
| П.А. Шерстобитова.....                                                                                 | 57 |
| Economy of Greece: evaluation of real sector .....                                                     | 67 |
| Nicholas Olenev .....                                                                                  | 67 |
| Правила для авторов .....                                                                              | 83 |