Maple-пакет построения разрешающих последовательностей

А. А. Рябенко

ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва

S. Abramov, M. Petkovšek, A. Ryabenko, Hypergeometric solutions of first-order linear difference systems with rational-function coefficients, 18-е международное совещание по компьютерной алгебре, Дубна (2015), CASC'2015, LNCS 9301, 2015, pp. 1–14.

Для нормальной системы разностных уравнений

$$y(x+1) = A(x)y(x),$$

где $A(x) \in \mathrm{Mat}_m(K(x))$, $m \in \mathbb{N}_{>0}$, K — поле характеристики 0, $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x))^T$ — вектор-столбец неизвестных, строятся все гипергеометрические решения с помощью *разрешающей последовательности* уравнений:

$$L_1 y_{\ell_1}(x) = 0, \ldots, \ L_j y_{\ell_j}(x) = 0, \ldots, \ L_p y_{\ell_p}(x) = 0,$$

где $\ell_1, \ldots, \ell_p \in \{1, 2, \ldots, m\}$; $\ell_i \neq \ell_j$ для $i \neq j$;

$$L_1, \ldots, L_p \in K(x)[E], \quad E\,y(x) = y(x+1).$$

y(x+1)=A.y(x)

$$> A := \begin{bmatrix} \frac{x-1}{x} & 0 & -\frac{x-1}{x+1} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{x+1} & -x \\ -1 & 1 & x-1 & 1 \\ -\frac{x+2}{x} & \frac{x+1}{x} & \frac{x^2-x-1}{(x+1)\,x} & \frac{x^2+x+1}{x} \end{bmatrix}:$$

http://www.ccas.ru/ca/resolvingsequence

```
> read "resolvingsequence.mpl";
> RS:-ResolvingSequence(A, y(x), OreTools:-SetOreRing(x,'shift'));
```

$$\left[\left(-x^6-x^5+4x^4+3x^3-3x^2-2x\right)y_1(x)+\left(2x^6+6x^5+2x^4-6x^3-6x^2-4x\right)y_1(x+1)+\left(-x^6-6x^5-11x^4-2x^3+8x^2+8x+4\right)y_1(x+2)+\left(x^5+4x^4+x^3-6x^2\right)y_1(x+3)=0,\ -x\,y_4(x)+y_4(x+1)=0\right] \quad (1)$$

```
> LREtools:-hypergeomsols(-x y4(x) + y4(x+1) = 0, y[4](x), { }, output = basis)
```

$$[\Gamma(x)] \quad (2)$$

http://www.ccas.ru/ca/lrs

```
> read "lrshypergeomsols.mpl";
> LRS:-HypergeometricSolution(A, x);
```

$$\left[\begin{bmatrix} 0 \\ -\Gamma(x) \\ 0 \\ \Gamma(x) \end{bmatrix}\right] \quad (3)$$

S. Abramov, M. Petkovšek, A. Ryabenko, Resolving sequences of operators for linear ordinary differential and difference systems, Computational Mathematics and Mathematical Physics (ЖВМиМФ) 56, 2016, pp. 894–910.

Разрешающие последовательности используются при решении разностных и дифференциальных систем полного ранга, произвольного порядка:

$$A_n(x)y(x+n) + \cdots + A_1(x)y(x+1) + A_0(x)y(x) = 0$$

и

$$A_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) = 0,$$

где $A_n(x), \ldots, A_1(x), A_0(x) \in \mathrm{Mat}_m(K(x))$,
$y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x))^T$ — вектор-столбец неизвестных.

```
> 
```

$$\begin{bmatrix} x^5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{d}{dx} y(x)\right) + \begin{bmatrix} 0 & -x+2 \\ x+2 & 0 \end{bmatrix} \cdot y(x) = 0 :$$

$$> \; syst := \left\{ x^5 \left(\frac{d^2}{dx^2} y1(x)\right) + (-x+2)\, y2(x) = 0, \; \frac{d}{dx} y2(x) + (x+2)\, y1(x) = 0 \right\} :$$

http://www.ccas.ru/ca/resolvingsequence

```
> read "resolvingsequence.mpl";
> L := RS:-ResolvingSequence(syst, {y1(x), y2(x)}, OreTools:-SetOreRing(x,'differential'));
```

$$L := \left[\left(x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 16x - 32\right)\left(\frac{d}{dx} y1(x)\right) + \left(8x^6 - 18x^5 - 60x^4 + 160x^3\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} y1(x)\right) + \left(7x^7 - 16x^6 - 36x^5 + 80x^4\right)\left(\frac{d^3}{dx^3} y1(x)\right) + \left(x^8 - 2x^7 - 4x^6 + 8x^5\right)\left(\frac{d^4}{dx^4} y1(x)\right) = 0 \right] \tag{1}$$

```
> DEtools:-formal_sol(L[1], y1(x), t,'order'= 1);
```

$$\left[[1 + O(t), t = x], \left[e^{-\frac{6}{t^2}} (1 + O(t)), \frac{1}{4} t^3 = x \right] \right] \tag{2}$$

http://www.ccas.ru/ca/formalsolution

```
> read "ldsformalsols.mpl";
> FormalSolution(syst, [y1(x), y2(x)], t, 'order'= 2);
```

$$\left[e^{-\frac{6}{t^2}} \cdot \begin{bmatrix} -8 + O(t^2) \\ t^5 + O(t^7) \end{bmatrix}, \frac{1}{4} t^3 = x \right] \tag{3}$$

$$y(x+1) = A(x)y(x), \qquad y'(x) = A(x)y(x).$$

1. $c^{[0]}(x) = (\underbrace{0,\dots,0}_{\ell_1-1},1,\underbrace{0,\dots,0}_{m-\ell_1})$.

2.Вычисляем

в разностном случае	в дифференциальном
$c^{[1]}(x) = c^{[0]}(x+1)\,A(x)$	$c^{[1]}(x) = c^{[0]}(x)\,A(x) + \frac{d}{dx}c^{[0]}(x)$
$c^{[2]}(x) = c^{[1]}(x+1)\,A(x)$	$c^{[2]}(x) = c^{[1]}(x)\,A(x) + \frac{d}{dx}c^{[1]}(x)$
$\dots$	$\dots$
$c^{[k]}(x) = c^{[k-1]}(x+1)\,A(x)$	$c^{[k]}(x) = c^{[k-1]}(x)\,A(x) + \frac{d}{dx}c^{[k-1]}(x)$

k — наименьшее целое такое, что $c^{[0]}, c^{[1]}, \dots, c^{[k]}$ линейно зависимы над $K(x)$:

$$u_0(x)c^{[0]}(x) + u_1(x)c^{[1]}(x) + \dots + u_k(x)c^{[k]}(x) = 0.$$

– O. Ore, Theory of non-commutative polynomials, Annals of Mathematics 34, 1933, pp. 480–508.

– M. Bronstein, M. Petkovšek. On Ore rings, linear operators and factorisation, Programming and Computer Software (Программирование), No. 1, 1994, pp. 27–43.

– M. Bronstein, M. Petkošek. An introduction to pseudo-linear algebra, Theoretical Computer Science 157, 1996, pp. 3–33.

Пусть $\mathbb{K}$ — поле характеристики 0 с автоморфизмом σ и дифференцированием δ относительно σ, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{K}$ выполняется:

$$\delta(a+b) = \delta a + \delta b, \quad \delta(ab) = \sigma(a)\delta b + (\delta a)b.$$

Пусть далее $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ — линейное пространство над $\mathbb{K}$ и пусть отображение $\xi : \mathcal{L}_{\mathbb{K}} \mapsto \mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ — псевдолинейно относительно σ и δ, т.е. для любых $a \in \mathbb{K}$, $u, v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ выполняется:

$$\xi(u+v) = \xi(u) + \xi(v), \;\; \xi(au) = \sigma(a)\xi(u) + \delta(a)u.$$

$\mathbb{K} = K(x)$, $a(x) \in K(x)$, $y(x) \in \mathcal{L}_{K(x)}$

Дифференцирование

$$\xi(y(x)) = \tfrac{d}{dx} y(x),\ \sigma(a(x)) = a(x),\ \delta(a(x)) = \tfrac{d}{dx} a(x)$$

Дифференцирование Эйлера

$$\xi(y(x)) = x \tfrac{d}{dx} y(x),\ \sigma(a(x)) = a(x),\ \delta(a(x)) = x \tfrac{d}{dx} a(x)$$

Оператор сдвига

$$\xi(y(x)) = y(x+1),\ \sigma(a(x)) = a(x+1),\ \delta(a(x)) = 0$$

Оператор первой разности

$$\xi(y(x)) = y(x+1) - y(x),\ \sigma(a(x)) = a(x+1),$$
$$\delta(a(x)) = a(x+1) - a(x)$$

Оператор q-сдвига

$$\xi(y(x)) = y(q\,x),\ \sigma(a(x)) = a(q\,x),\ \delta(a(x)) = 0$$

$$
\left.\begin{aligned}
c^{[j]}(x) &= c^{[j-1]}(x+1)\,A(x) \\[1em]
c^{[j]}(x) &= c^{[j-1]}(x)\,A(x) + \tfrac{d}{dx}c^{[j-1]}(x)
\end{aligned}\;\right\}\, c^{[j]} = \sigma(c^{[j-1]})\,A + \delta(c^{[j-1]})
$$

Pre-defined

> $DiffRing := OreTools{:-}SetOreRing(x,'differential');$

$$DiffRing := UnivariateOreRing(x, differential) \qquad (1)$$

> $ShiftRing := OreTools{:-}SetOreRing(x,'shift');$

$$ShiftRing := UnivariateOreRing(x, shift) \qquad (2)$$

> $QShiftRing := OreTools{:-}SetOreRing([x, q],'qshift');$

$$QShiftRing := UnivariateOreRing(x, qshift) \qquad (3)$$

> $OreTools{:-}Properties{:-}Getdelta(DiffRing)$

$$(p, var) \rightarrow \frac{\partial}{\partial var} p \qquad (4)$$

User-defined

> $DeltaRing := OreTools{:-}SetOreRing(x, 'Delta',$
> $'sigma' = ((p, x) \rightarrow eval(p, x = x + 1)),$
> $'sigma\_inverse' = ((p, x) \rightarrow eval(p, x = x - 1)),$
> $'delta' = ((p, x) \rightarrow eval(p, x = x + 1) - p),$
> $'theta1' = 0);$

$$DeltaRing := UnivariateOreRing(x, \Delta) \qquad (5)$$

> $OreTools{:-}Properties{:-}Getdelta(DeltaRing)$

$$(p, x) \rightarrow p\Big|_{x = x + 1} - p \qquad (6)$$

>

Рассмотрим

$$A_n\,\xi^n(y) + \cdots + A_1\,\xi(y) + A_0\,y = 0, \tag{1}$$

где $A_k \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $A_n \neq 0$,
$y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ — вектор-столбец неизвестных,
$\xi : \mathcal{L}_{\mathbb{K}} \mapsto \mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ — отображение, псевдолинейное относительно σ и δ.

Пусть (1) — система полного ранга. Пусть также $\ell_1, \ldots, \ell_p$ — попарно различные натуральные числа, не превосходящие m, и пусть скалярные операторы $L_1, \ldots, L_p \in \mathbb{K}[\xi]$ таковы, что если $y_{\ell_1} = \cdots = y_{\ell_j} = 0$ (при $j \leq p$) для некоторого решения $y \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^m$ системы (1), то

- в случае $j = p$ все компоненты этого решения равны нулю:
$$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0,$$
- в случае $j < p$ для компоненты $y_{\ell_{j+1}}$ этого решения выполнено
$$L_{j+1}(y_{\ell_{j+1}}) = 0.$$

Тогда конечная последовательность $L_1, \ldots, L_p$ называется *разрешающей последовательностью операторов* данной системы, а вектор $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ — *индикатором* этой последовательности.

```
> DeltaRing := OreTools:-SetOreRing(x, 'Delta',
     'sigma' = ((p, x) → eval(p, x = x + 1)),
     'sigma_inverse' = ((p, x) → eval(p, x = x−1)),
     'delta' = ((p, x) → eval(p, x = x + 1) − p),
    'theta1' = 0) :
```

$$> \begin{bmatrix} 1 & -x-5 & -x-2 \\ 0 & 2x+10 & x+2 \\ 1 & x+5 & x+2 \end{bmatrix} . \Delta^{(2)}(y(x)) + \begin{bmatrix} x+1 & x+1 & 0 \\ -2x-4 & -2x-4 & 0 \\ -x-3 & -x-3 & 0 \end{bmatrix} . \Delta(y(x)) + \begin{bmatrix} -x & 2 & x+2 \\ 2x & -2 & -x-2 \\ x & 0 & -x-2 \end{bmatrix} . y(x) = 0 :$$

http://www.ccas.ru/ca/resolvingsequence

> **read** "resolvingsequence.mpl" :

$$> RS{:-}ResolvingSequence\left(OrePoly\left(\begin{bmatrix} -x & 2 & x+2 \\ 2x & -2 & -x-2 \\ x & 0 & -x-2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x+1 & x+1 & 0 \\ -2x-4 & -2x-4 & 0 \\ -x-3 & -x-3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -x-5 & -x-2 \\ 0 & 2x+10 & x+2 \\ 1 & x+5 & x+2 \end{bmatrix} \right), DeltaRing \right);$$

$Indicator(\,);$

$$[OrePoly(-x+1, 2x+3, -3, -2x-7, x+6), OrePoly(-1, 0, 1)]$$

$$[1, 3] \tag{1}$$

$$> (x+6)\,\Delta^{(4)}(y_1(x)) + (-2x-7)\,\Delta^{(3)}(y_1(x)) - 3\,\Delta^{(2)}(y_1(x)) + (2x+3)\,\Delta(y_1(x)) + (-x+1)\,y_1(x) = 0 :$$

$$> \Delta^{(2)}(y_3(x)) - y_3(x) = 0 :$$

\>

$$\xi(y) = Ay, \quad A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$$

1. $c^{[0]} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\ell_1 - 1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{m - \ell_1})$.
2. Вычисляем

$$\begin{array}{l} c^{[1]} = \sigma(c^{[0]})\, A + \delta(c^{[0]}) \\ c^{[2]} = \sigma(c^{[1]})\, A + \delta(c^{[1]}) \\ \qquad\qquad \dots \\ c^{[k]} = \sigma(c^{[k-1]})\, A + \delta(c^{[k-1]}) \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} c^{[0]} \\ c^{[1]} \\ \vdots \\ c^{[k-1]} \end{pmatrix}$$

k — наименьшее целое такое, что $c^{[0]}, c^{[1]}, \dots, c^{[k]}$ линейно зависимы над $\mathbb{K}$: $u_k c^{[k]} + \dots + u_1 c^{[1]} + u_0 c^{[0]} = 0$.

$$u_k\, \xi^k(y_{\ell_1}) + \dots + u_1\, \xi(y_{\ell_1}) + u_0\, y_{\ell_1} = 0$$

называется *y_{ℓ_1}-разрешающим уравнением*,
$B \in \mathrm{Mat}_{k \times m}(\mathbb{K})$ называется *y_{ℓ_1}-разрешающей матрицей*.

$\boxed{k = m}$

Если $\overline{y} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ является решением y_{ℓ_1}-разрешающего уравнения

$$u_m\,\xi^m(y_{\ell_1}) + \cdots + u_1\,\xi(y_{\ell_1}) + u_0\,y_{\ell_1} = 0$$

то решение системы $\xi(y) = A\,y$ можно найти с помощью неоднородной системы алгебраических уравнений

$$B\,y = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \xi(\overline{y}) \\ \vdots \\ \xi^{m-1}(\overline{y}) \end{pmatrix}.$$

$\boxed{k < m}$

С помощью y_{ℓ_1}-разрешающего уравнения можно искать решения $\xi(y) = A\,y$ такие, что $y_{\ell_1} \neq 0$.

Для $y_{\ell_1} = 0$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$B\,y = 0.$$

Существует $m - k$ компонент $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{m-k}}$ таких, что остальные k компонент линейно выражаются через $y_{i_1}, \ldots, y_{i_{m-k}}$.
Вектор $\tilde{y} = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_{m-k}})^T$ удовлетворяет системе

$$\xi\,\tilde{y} = \tilde{A}\,\tilde{y},$$

где $\tilde{A} \in \mathrm{Mat}_{(m-k)\times(m-k)}(\mathbb{K})$.

$$> \ syst := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . y(q^3 x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . y(q^2 x) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ x q & -2 q \end{bmatrix} . y(x q) + \begin{bmatrix} x & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . y(x) :$$

http://www.ccas.ru/ca/resolvingsequence

```
> read "resolvingsequence.mpl" :
> RS:-EG(syst, y(x), OreTools:-SetOreRing([x, q], 'qshift'));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . y(q^3 x) + \begin{bmatrix} 0 & q \\ -1 & -2 \end{bmatrix} . y(q^2 x) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -x q & 2 q \end{bmatrix} . y(x q) = 0 \qquad (1)$$

```
> L := RS:-ResolvingSequence(syst, y(x), OreTools:-SetOreRing([x, q],'qshift'));
```

$$L := \left[-q^2 x y_1(q^2 x) - y_1(q^3 x) + y_1(q^4 x) = 0, -q y_2(x q) + y_2(q^2 x) = 0\right] \qquad (2)$$

```
> value(QDifferenceEquations:-QHypergeometricSolution(L[2], y[2](x)));
```

$$\{q^n\} \qquad (3)$$

$$x = q^n, y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ q^n \end{bmatrix} :$$

$$> \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ q^{n+3} \end{bmatrix} = simplify\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ q^{n+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ q^n q & -2 q \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ q^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q^n & q \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ q^n \end{bmatrix} \right);$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Пакет RS доступен на сайте *http://www.ccas.ru/ca/resolvingsequence*
Основная процедура — ResolvingSequence. Ее аргументы:

- система линейных однородных уравнений, коэффициенты системы — рациональные функции одной переменной;
- структура-описание кольца Ore, созданная с помощью процедуры SetOreRing пакета OreTools.

Система уравнений может быть представлена OrePoly-структурой или (в дифференциальном, разностном и q-разностном случае) в явном виде.
Дополнительные процедуры пакета: Indicator, ResolvingEquation, ResolvingMatrix, EG, ResolvingDependence, CyclicVector.