ISBN 978-5-91993-061-7

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ»
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А. А. ДОРОДНИЦЫНА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

COMPUTER ALGEBRA

Материалы международной конференции
International Conference Materials

Москва, 29 июня – 2 июля 2016 года
Moscow, June 29 – July 2, 2016

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А. А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МОСКВА 2016

ББК 22.14+22.19

Ответственные редакторы
доктор физ.-матем. наук С. А. Абрамов,
доктор физ.-матем. наук Л. А. Севастьянов

Компьютерная алгебра. Сборник научных статей. Труды международной конференции «Компьютерная алгебра». Москва, 29 июня — 2 июля 2016 г. Под ред. С. А. Абрамова и Л. А. Севастьянова. М.: ФИЦ ИУ РАН, 2016.

Международная конференция проводится совместно Вычислительным центром им. А. А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН и Российским университетом дружбы народов при поддержке РФФИ. В представленных на конференции докладах обсуждаются актуальные проблемы компьютерной алгебры — научной дисциплины, алгоритмы которой ориентированы на точное решение математических задач с помощью компьютера.

Макет и компьютерная верстка: Д. С. Кулябов

Рецензенты: Ю. А. Трусова, К. П. Ловецкий

Научное издание

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А. А. Дородницына, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, 2016

Responsible editors
Doctor of Physical and Mathematical Sciences S. A. Abramov,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences L. A. Sevastyanov

Computer algebra. A book of scientific articles. Proceedings of the International Conference “Computer Algebra.” Moscow, 29 June – 2 July 2016. Ed. S. A. Abramov and L. A. Sevastyanov. Moscow: Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS.

The international conference is organized jointly by Dorodnicyn Computing Center of Federal Research Center “Computer Science and Control” of RAS and Peoples’ Friendship University of Russia with a support of Russian Federal Property Fund. The talks presented at the conference discuss actual problems of computer algebra—the discipline whose algorithms are focused on the exact solution of mathematical problems using a computer.

Layout and DTP: D. S. Kulyabov

Reviewers: Yu. O. Trusova, K. P. Lovetskiy

Scientific publication

© Federal State Institution of Science Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 2016

Состав программного комитета
Евтушенко Ю. Г. (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Россия — сопредседатель программного комитета; *Филиппов В. М.* (РУДН), д.ф.-м.н., профессор, академик РАО, Россия — сопредседатель программного комитета; *Севастьянов Л. А.* (РУДН, ЛТФ ОИЯИ), д.ф.-м.н., профессор, Россия — зам. председателя оргкомитета; *Абрамов С. А.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, Россия — зам. председателя оргкомитета; *Флеров Ю. А.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Россия; *Баркату М.* (Лиможский университет), профессор, Франция; *Бернштейн А. В.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Виницкий С. И.* (ЛТФ ОИЯИ, РУДН), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Ву М.* (Восточно-Китайский педагогический университет), профессор, Китай; *Гердт В. П.* (ЛИТ ОИЯИ), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Малашонок Г. И.* (Тамбовский ГУ), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Петковшек М.* (Люблянский университет), профессор, Словения; *Прокопеня А. Н.* (Варшавский университет естественных наук), д.ф.-м.н., профессор, Польша; *Рибович М.* (Лиможский университет), профессор, Франция; *Самуйлов К. Е.* (РУДН), д.т.н., профессор, Россия; *Серебряков В. А.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Гутник С. А.* (МФТИ), к.ф.-м.н., доцент, Россия; *Малых М. Д.* (МГУ, РУДН) к.ф.-м.н., Россия; *Кулябов Д. С.* (РУДН), Россия — секретарь программного комитета.

Состав организационного комитета
Михайлов Г. М. зам. директора ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия — председатель оргкомитета; *Зон И. А.* (ФИЦ ИУ РАН), Россия; *Державина А. И.* (ФИЦ ИУ РАН), Россия; *Хмельнов Д. Е.*, (ФИЦ ИУ РАН), Россия; *Рябенко А. А.* (ФИЦ ИУ РАН), Россия — секретарь оргкомитета.

Program Committee
Evtushenko Yu. G. FRC CSC RAS, Russia — Program Committee General Co-Chairs; *Filippov V. M.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia — Program Committee General Co-Chairs; *Sevastyanov L. A.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia — Program Committee Vice Chairs; *Abramov S. A.* FRC CSC RAS, Russia — Program Committee Vice Chairs; *Flerov Yu. A.* FRC CSC RAS, Russia; *Barkatou M.* Universite de Limoges, France; *Bernstein A. V.* FRC CSC RAS, Russia; *Vinitsky S. I.* Joint Institute for Nuclear Research, and Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Wu M.* East China Normal University, Shanghai, P.R. China; *Gerdt V. P.* Joint Institute for Nuclear Research, Russia; *Malaschonok G. I.* Tambov State University, Russia; *Petkovšek M.* University of Ljubljana, Slovenia; *Prokopenya A. N.* Warsaw University of Life Sciences, Poland; *Rybowicz M.* Universite de Limoges, France; *Samuilov K. E.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Serebryakov V. A.* FRC CSC RAS; *Gutnik S. A.* Moscow Institute of Physics and Technology, Russia; *Malykh M. D.* Moscow State University, Russia; *Kulyabov D. S.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia — Program Committee Secretary.

Organizing Committee
Mikhailov G. M. vice-director of CC FRC CSC PAS, Russia — Organising Committee Chair; *Kulyabov D. S.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Derzhavina A. I.* FRC CSC RAS, Russia; *Zonn I. A.* FRC CSC RAS, Russia; *Khmelnov D. E.* FRC CSC RAS, Russia; *Ryabenko A. A.* FRC CSC RAS, Russia — Organising Committee Secretary.

Предисловие

В настоящее время компьютерной алгебре принадлежит заметное место среди алгоритмических разделов науки. Разнообразные аспекты этой научной дисциплины, алгоритмы которой ориентированы на точное решение математических задач с помощью компьютера, отражены в программе международной конференции «Компьютерная алгебра», проводимой совместно Вычислительным центром им. А. А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН и Российским университетом дружбы народов в Москве 29 июня — 2 июля 2016 г. В представленных докладах рассматриваются математические и реализационные задачи, вопросы алгоритмической разрешимости, проблемы обучения и т.д. Обсуждается применение компьютерно-алгебраических подходов к решению прикладных задач. В некоторых докладах формулируются еще нерешенные задачи компьютерной алгебры. Не обойдены вниманием классификация и систематизация инструментария компьютерной алгебры, в частности принципы выбора компьютерно-алгебраических средств для решения конкретных математических и прикладных задач.

Организаторы и участники конференции благодарят Российский фонд фундаментальных исследований за оказанную финансовую поддержку (проект 16-01-20379).

Программный и организационный комитеты конференции

Foreword

At present time computer algebra occupies a prominent place among algorithmic branches of science. Various aspects of this scientific discipline whose algorithms are focused on the exact solution of mathematical problems using a computer, are represented in the program of the international conference “Computer Algebra” organized by Dorodnicyn Computing Center (Federal Research Center Computer Science and Control) of the Russian Academy of Sciences jointly with Peoples’ Friendship University of Russia, in Moscow on June 29 - July 2, 2016. In the presented talks, mathematical and implementation problems, as well as algorithmic decidability questions, learning problems, etc are considered. The application of computer-algebraic approaches to the solution of applied problems is discussed. Some of the talks contain formulations of open questions in computer algebra. Systematization (classification) of computer-algebraic tools is also one of the conference topics. In particular, the goal is to propose principles for selection of appropriate computer-algebraic tools for solving concrete mathematical and applied problems.

Organizers and participants thank the Russian Foundation for Basic Research for a financial support (project 16-01-20379).

Program and Organizing Committees of the conference

Оглавление

Пленарные доклады

Брюно А. Д. Выпуклый многогранник в асимптотическом анализе 8
Евтушенко Ю. Г., Зубов В. И. Об обобщенной методологии быстрого автоматического дифференцирования 12
Гердт В. П. Описание перепутанных двухкубитных состояний в терминах полиномиальных инвариантов: вызов для компьютерной алгебры 16
Кулябов Д. С., Королькова А. В., Севастьянов Л. А. Свойства тензорных систем компьютерной алгебры 19
Ли З., Ву М. Преобразование линейных функциональных систем в полностью интегрируемые системы 22
Малых М. Д. Об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений 25
Прокопеня А. Н. Методы компьютерной алгебры для моделирования в небесной механике 29

Сессионные доклады

Абрамов С. А., Петковшек М., Закрайшек Х. Лиувиллевы последовательности и конволюция 33
Батхин А. Б. Резонансное множество многочлена и его приложения 36
Богданов Д. В., Садыков Т. М. Вычисление полиномиальных решений гипергеометрических систем 39
Гусев А. А., Чулуунбаатар О., Виницкий С. И., Хай Л. Л., Дербов В. Л. Численно-аналитический алгоритм решения задачи Штурма-Лиувилля при большом значении параметра 41
Гусев А. А., Чулуунбаатар О., Виницкий С. И., Хай Л. Л., Дербов В. Л. Алгоритмы решения краевых задач для системы ОДУ второго порядка с кусочно-постоянными потенциалами 44
Еферина Е. Г., Королькова А. В., Кулябов Д. С., Севастьянов Л. А. Системы компьютерной алгебры при исследовании статистических систем 47
Горбачев А. В., Севастьянов Л. А. Применение методов компьютерной алгебры для расчета переходных вероятностей атомов и ионов с одним валентным электроном в модели квантовых измерений 50
Гонцов Р. Р., Горючкина И. В. Теорема Майе-Мальгранжа для обобщенных степенных рядов 53
Гутник С. А., Сарычев В. А. Применение методов компьютерной алгебры для исследования влияния аэродинамических сил на стационарные движения спутника 56
Ильченко Е. А. О распараллеливании рекурсивных блочных алгебраических алгоритмов: алгоритмы и эксперименты 60
Хворов С. А. Параллельный алгоритм обращения матрицы: результаты экспериментов 63
Корняк В. В. Модель квантовой эволюции, основанная на симметрической группе 66
Малашонок Г. И. Math Partner — компьютерная алгебра нового поколения . . 69
Малашонок Н. А. Преобразование Лапласа при решении дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами 72
Малых М. Д. Курс математического анализа с точки зрения компьютерной алгебры 75
Нормов А. И. Аналитическая сложность кластерных деревьев в задачах анализа данных большого объема 77
Панферов А. А. Определение сателлитных неизвестных в линейных дифференциальных системах 79
Парамонов С. В. Об универсальном знаменателе решений в виде рациональных функций уравнений в частных производных и разностях 82
Погудин Г. А. Дифференциальный аналог теоремы о примитивном элементе . . 85
Рябенко А. А. Построение разрешающих последовательностей для систем, заданных полиномами Оре 87
Штефанеску Д. Эффективное вычисление границ корней полиномов 90

Жуков Т. А., Садыков Т. М. Система синтеза текста на русском языке passare.ru 93
Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А. Вывод системы уравнений для коэффициентных функций метода поперечных сечений для интегрально–оптического волновода с помощью пакета символьных вычислений Maple 95
Зобнин А. И., Тихонова М. И. Базисы Гребнера некоторых параметрических семейств 98

Авторский указатель 101

Contents

The plenary lectures

Bruno A. D. Convex Polyhedron in the Asymptotic Analysis 8
Evtushenko Y. G., Zubov V. I. On the Generalized Fast Automatic Differentiation Technique 12
Gerdt V. P. Description of Two Qubit Entanglement Space in Terms of Polynomial Invariants: a Challenge for Computer Algebra 16
Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Sevastianov L. A. The Features of Tensor Computer Algebra Systems 19
Li Z., Wu M. Transforming Linear Functional Systems into Fully Integrable Systems 22
Malykh M. D. On Integration of Ordinary Differential Equations 25
Prokopenya A. N. Computer Algebra Methods for Modeling in Celestial Mechanics 29

The sessional presentations

Abramov S. A., Petkovšek M., Zakrajšek H. Liouvillian Sequences and Convolution 33
Batkhin A. B. Resonance Set of Polynomial and its Applications 36
Bogdanov D. V., Sadykov T. M. Computing Polynomial Solutions to Hypergeometric Systems 39
Gusev A. A., Chuluunbaatar O., Vinitsky S. I., Hai L. L., Derbov V. L. Symbolic-Numerical Algorithm for Solving the Sturm–Liouville Problem at Large Values of Parameter 41
Gusev A. A., Chuluunbaatar O., Vinitsky S. I., Hai L. L., Derbov V. L. Algorithms for Solving Boundary Value Problems for a System of Second-Order ODE with Piecewise Constant Potentials 44
Eferina E. G., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. Application of Computer Algebra Systems for the Study of the Statistical Systems . . 47
Gorbachev A. V., Sevastianov L. A. Calculation of Transition Probabilities for the Atoms and Ions with One Valence Electron in the Operational Model of Quantum Measurements Using Methods of Computer Algebra 50
Gontsov R. R., Goryuchkina I. V. The Maillet-Malgrange Type Theorem for Generalized Power Series 53
Gutnik S. A., Sarychev V. A. Application of Computer Algebra Methods for Investigation of the Aerodynamic Forces Influence on Stationary Motions of Satellite . 56
Ilchenko E. A. About Parallelizing Recursive Block Algebraic Algorithms: Algorithms and Experiments 60
Khvorov S.A. Parallel Algorithm for Matrix Inversion: Results of Experiments . . . 63
Kornyak V. V. Quantum Evolution Model Based on Symmetric Group 66
Malaschonok G. I. Math Partner—Computer Algebra of New Generation 69
Malashonok N. A. The Laplace Transform Method in an Algorithm of Solving Differential Equations with Delayed Argument 72
Malykh M. D. Calculus from the Computer Algebra Viewpoint 75
Normov A. I. The Analytic Complexity of Cluster Trees in Big Data Analysis . . . 77
Panferov A. A. On Determination of Satellite Unknowns in Linear Differential Systems 79
Paramonov S. V. On Universal Denominator of Rational Function Solutions of Partial Differential and Difference Equations 82
Pogudin G. A. Differential Analogue of the Primitive Element theorem 85
Ryabenko A. A. Construction of Resolving Sequences for Systems given by Ore Polynomials 87
Ştefănescu D. Efficient Computation of Bounds of Polynomial Roots 90
Zhukov T. A., Sadykov T. A. Passare.ru: a Web-service for Automatic Text Synthesis in Russian 93
Sevastianov A. L., Sevastianov L. A., Tiutiunnik A. A. Derivation of Equations for the Coefficient Functions of the Method of Cross-Sections for the Integrated Optical Waveguide Using the Maple Symbolic Computation Package 95
Zobnin A. I., Tikhonova M. I. Gröbner Bases of Some Parametric Systems . . . 98

Пленарные доклады

УДК 511.5+511.36+512.76+517.928+517.957

Выпуклый многогранник в асимптотическом анализе

А. Д. Брюно

Отдел № 4, Сектор сингулярных задач,
Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук»,
Миусская пл. 4, Москва, Россия, 125047

Показано, что для вычисления сингулярных решений алгебраических и дифференциальных уравнений вблизи особенностей удобно вычислять аналоги многогранника Ньютона, и по ним выделять укороченные уравнения. Для асимптотического разложения решений определенного вида справедлива теорема, что их укорочение является решением соответствующего укороченного уравнения. Здесь предложен новый вид асимптотических разложений. Кроме того, вычисление выпуклого многогранника дает глобальное обобщение цепной дроби и позволяет найти наилучшие диофантовы приближения.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, грань, нормальный конус, укорочение, алгебраическое уравнение, дифференциальное уравнение, диофантовы приближения.

1. Многогранник

Пусть в n-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n = \{Q = (q_1, \dots, q_n)\}$, $n \geqslant 2$, задано конечное множество точек $\mathbf{S} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$. Их выпуклая оболочка

$$\mathbf{\Gamma} = \left\{ Q = \sum_{i=1}^{k} \mu_i Q_i,\ 0 \leqslant \mu_i \leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1 \right\} \tag{2}$$

является выпуклым многогранником. Его граница $\partial\mathbf{\Gamma}$ состоит из граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ размерностей $d = 0, 1, \dots, n-1$. Нульмерные грани — это вершины, одномерные — ребра и $(n-1)$-мерные — гиперграни. Каждая грань $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ является выпуклым многогранником. Каждой грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствуют: граничное подмножество $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{\Gamma}_j^{(d)} \cap \mathbf{S}$ и нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle,\ Q', Q'' \in \mathbf{S}_j^{(d)},\ Q''' \in \mathbf{S} \backslash \mathbf{S}_j^{(d)} \right\}, \tag{3}$$

где $P = (p_1, \dots, p_n)$"— точка сопряженного к $\mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^n_*$, а $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$ — скалярное произведение. Это ситуация афинной геометрии [1, гл. I].

2. Алгебраическое уравнение

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, а $f(X)$ — многочлен. Корни уравнения $f(X) = 0$ образуют алгебраическое многообразие. Его точка X^0 называется особой, если в ней многочлен $f(X)$ и все его частные производные обращаются в ноль. Если $X^0 = 0$, то

$$f(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i X^{Q_i}, \tag{4}$$

где $a_i = \text{const} \neq 0$, $X^Q = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$. При $X \to 0$ по разным путям разные слагаемые суммы (4) дают ведущие члены суммы (4).

Чтобы их выделить, рассмотрим множество векторных показателей степени $\{Q_1, \ldots, Q_k\} = \mathbf{S}$, его выпуклую оболочку $\mathbf{\Gamma}$. Каждой грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствуют: граничное подмножество $\mathbf{S}_j^{(d)}$, укороченный многочлен

$$\hat{f}_j^{(d)} = \sum a_i X^{Q_i} \text{ по } Q_i \in \mathbf{S}_j^{(d)} \tag{5}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $x_i = b_i \tau^{p_i}$, $b_i, p_i = \text{const} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $\tau \to \infty$ и $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то ведущие слагаемые в сумме (4) объединены в укороченную сумму (5), которая квазиоднородна. Пусть вещественные постоянные $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} > 0$ и $z_i = x_i / x_1^{\alpha_i}$, $i = 2, \ldots, n-1$. Будем искать решение уравнения $f(X) = 0$ в виде ряда

$$x_n = x^\lambda \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(z_2, \ldots, z_{n-1}) x_1^{l\varkappa}, \tag{6}$$

где $\varkappa, \lambda = \text{const} > 0$.

Теорема 1. *Если уравнение $f(X) = 0$ имеет решением разложение вида (6) и $P = -(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \lambda) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то укороченное уравнение $\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0$ имеет решение $x_n = x_1^\lambda \varphi_0(z_2, \ldots, z_{n-1})$.*

Используя описанную выше конструкцию и степенные преобразования координат [1], можно вычислить разложения решений вида (6) [2, § 2].

3. Уравнение в частных производных

Пусть $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — независимые, а x_n — зависимая переменные. Дифференциальным мономом $a(X)$ назовем конечное произведение: ненулевой постоянной, обычного монома X^Q и частных производных вида $\partial^{||K||} x_n / \partial^K X$, где $K = (k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $K \geqslant 0$, $||K|| = k_1 + \cdots + k_{n-1}$. Каждому дифференциальному моному $a(X)$ соответствует его векторный показатель степени $Q(a) = (q_1, \ldots, q_n)$:

$$Q(\text{const}) = 0, \quad Q\left(X^R\right) = R, \tag{7}$$

$$Q\left(\partial^{||K||} x_n / \partial^K X\right) = (-K, 1). \tag{8}$$

При умножении мономов их векторные показатели складываются как векторы.

Рассмотрим конечную сумму дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i(X). \tag{9}$$

Точки $Q(a_1), \ldots, Q(a_k) \in \mathbb{R}^n$ образуют исходное множество $\mathbf{S}$. По нему вычисляем многогранник $\mathbf{\Gamma}$ с гранями $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$, граничными подмножествами $\mathbf{S}_j^{(d)}$, укороченными суммами

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X) \text{ по } Q_i \in \mathbf{S}_j^{(d)}, \tag{10}$$

с нормальными конусами $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Вблизи точки $X^0 = 0$ для решений вида (6) уравнения $f(X) = 0$ справедлива теорема 2 с заменой (4) на (9) и (5) на (10) . При этом для

алгебраического уравнения функции $\varphi_l(z_2,\dots,z_{n-1})$ — рациональные, а для дифференциального уравнения функции φ_l — более общей природы [1, гл. VI, § 5].

4. Диофантовы приближения

Пусть в вещественном n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n = \{X\}$ задано m однородных вещественных форм $f_i(X)$, $i = 1,\dots,m$, $2 \leqslant m \leqslant n$. Выпуклая оболочка множества значений $Q(X) = (|f_1(X)|,\dots,|f_m(X)|) \in \mathbb{R}^m_+$ для целочисленных $X \in \mathbb{Z}^n$ во многих случаях является выпуклым многогранным множеством, граница которого для $||X|| < \text{const}$ вычисляется с помощью стандартной программы. Точки $X \in \mathbb{Z}^n$, для которых значения $Q(X)$ лежат на этой границе, названы граничными. Они являются наилучшими диофантовыми приближениями для корневых множеств указанных форм. Их вычисление дает глобальное обобщение цепной дроби.

Пусть $p(\xi)$ — целый неприводимый в $\mathbb{Q}$ многочлен степени n и λ — его корень. Набор основных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ можно вычислить по граничным точкам некоторой совокупности линейных и квадратичных форм, построенных по корням многочлена $p(\xi)$. Каждая единица определяет автоморфизмы граничных точек в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{R}^m_+$. В логарифмической проекции $\mathbb{R}^m_+$ на $\mathbb{R}^{m-1}$ можно найти фундаментальную область для группы автоморфизмов, соответствующих единицам. С помощью этих конструкций можно находить целочисленные решения диофантовых уравнений специального вида [3, 4].

Для $n = 3$ обобщить цепную дробь безуспешно пытались Эйлер, Якоби, Дирихле, Эрмит, Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Брун, Арнольд и многие другие. Наш подход обобщает цепную дробь, позволяет вычислить наилучшие совместные приближения, основные единицы алгебраических колец поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ и все решения некоторого класса диофантовых уравнений для любого n.

5. Обобщения

Аналоги теоремы 2 справедливы вблизи любой точки X^0, координаты которой состоят из нулей и бесконечностей. Аналогичные конструкции с одним многогранником или многоугольником полезны для вычисления разложения решений:

1. Автономной системы ОДУ [1, гл. III].
2. Одного неавтономного ОДУ [2, §§ 3,4].

Конструкции с несколькими многогранниками полезны для вычисления решений:

3. Системы m алгебраических уравнений с $m < n$ [1, гл. II].
4. Системы m уравнений в частных производных с n независимыми и m зависимыми переменными [2, § 5].

При этом граничные условия можно рассматривать как дополнительные алгебраические уравнения системы. В этих вычислениях используется почти весь арсенал компьютерной алгебры.

Список литературы

1. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998. 288 с. = Bruno A. D. Power Geometry in Algebraic and Differential Equations. Elsevier Science (North-Holland), Amsterdam, 2000. 385 p.
2. Bruno A. D. Asymptotic solution of nonlinear algebraic and differential equations // International Mathematical Forum. 2015. Vol. 10, no. 11. 535–564. http://dx.doi.org/10.12988/imf.2015.5974
3. Брюно А. Д. От диофантовых приближений к диофантовым уравнениям // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 1. 20 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprints.asp?id=2016-01

4. Брюно А. Д. Вычисление наилучших диофантовых приближений и основных единиц алгебраических полей // ДАН. 2016. Т. 468, № 1. С. 7–11. = Bruno A.D. Computation of the best Diophantine approximations and the fundamental units of the algebraic fields // Doklady Mathematics, 93:3 (2016).

UDC 511.5+511.36+512.76+517.928+517.957

Convex Polyhedron in the Asymptotic Analysis

A. D. Bruno

Department of Singular Problems,
Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Miusskaya sqr. 4, Moscow, 125047, Russia

It is shown here that for computation of singular solutions of algebraic and differential equations near their singularities it is convenient to compute some analogues of the Newton polyhedron, and to separate by them truncated equations. Then for asymptotic expansions of solutions of a certain form we state a theorem that its truncation is a solution of the corresponding truncated equation. We propose here a new form of asymptotic expansions. Moreover computation of convex polyhedron gives global generalization of the continued fraction and allows to find the best Diophantine approximations.

1. Polyhedron. Let in $\mathbb{R}^n$ we have a set $\mathbf{S}$ of points $Q_1, \dots, Q_k$. Its convex hull is a polyhedron $\mathbf{\Gamma}$. Its boundary $\partial\mathbf{\Gamma}$ consists of faces $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ of dimension $d = 0, 1, \dots, n-1$. Each face $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ corresponds the normal cone $\mathbf{U}_j^{(d)} \subset \mathbb{R}_*^n$ (3) and the boundary subset $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{\Gamma}_j^{(d)} \cap \mathbf{S}$. Here $\mathbb{R}_*^n$ is dual to the $\mathbb{R}^n$ [1, Ch. I].

2. Algebraic equation. Let we have a polynomial $f(X)$. Near its singular point $X^0 = 0$ it has the form (4). The set $\mathbf{S}$ of its vector power exponents Q_i is its support. We compute all objects $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$, $\mathbf{U}_j^{(d)}$ and $\mathbf{S}_j^{(d)}$, mentioned above, and additionally we obtain truncated polynomials $\hat{f}_j^{(d)}(X)$, consisting from all terms $a_i X^{Q_i}$ of $f(X)$ corresponding to $\mathbf{S}_j^{(d)}$. Let constants $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} > 0$ and $z_i = x_i / x_1^{\alpha_i}$. We look for solutions of the equation $f(X) = 0$ of the form (6).

Theorem. If equation $f(X) = 0$ has a solution in the form (6) with

$$P = -(1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \lambda) \in \mathbf{U}_j^{(d)}, \tag{1}$$

then the truncated equation $\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0$ has solution $x_n = x_1^{\lambda}\varphi_0$ [2, § 2].

3. Partial differential equation. Now let $x_1, \dots, x_{n-1}$ are independent and x_n is dependent variables. Each differential monomial $a(X)$ [1, Ch. 6, § 1] corresponds to its vector power exponent Q. To a finite sum $f(X)$ of differential monomials there corresponds the set $\mathbf{S}$ of points Q_i. Here there are all objects, considered earlier, and Theorem is true [1, Ch. 6, § 5].

4. Global generalization of the continued fraction. Let in $\mathbb{R}^n$ we have m homogeneous real forms $f_i(X)$, $2 \leqslant m \leqslant n$. Convex hull of points $Q(X) = (|f_1(X)|, \dots, |f_n(X)|) \in \mathbb{R}_+^n$ for integer $X \in \mathbb{Z}^n$ is a convex polyhedron set $\mathbf{\Gamma}$. Points $X \in \mathbb{Z}^n$, for which values $Q(X) \subset \partial\mathbf{\Gamma}$ are *boundary points*. They are the best Diophantine approximations for the root sets of given forms $f_i(X)$ [3, 4].

5. Generalizations. Constructions of Sections 2 and 3 can be generalized to one ODE, to a system of ODE's and to a system of polynomial or partial differential equations [1, 2].

Key words and phrases: convex polyhedron, face, normal cone, truncation, algebraic equation, differential equation, Diophantine approximations.

УДК 519.653:519.658

Об обобщенной методологии быстрого автоматического дифференцирования

Ю. Г. Евтушенко[*], **В. И. Зубов**[*†]

[*] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333*

[†] *Московский физико-технический институт, Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московская область, Россия, 141700*

Описывается новая эффективная методология, предназначенная для численного вычисления градиента функций и решения широкого класса задач оптимального управления сложными динамическими системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями и (или) дифференциальными уравнениями с частными производными. Суть этого подхода состоит в том, что выводятся канонические формулы, позволяющие с машинной точностью вычислять значение градиента целевой функции для выбранной конечномерной аппроксимации целевого функционала.

Ключевые слова: градиент, оптимальное управление, быстрое автоматическое дифференцирование, сопряженные уравнения, аппроксимация краевой задачи.

1. Введение

При решении задач из разных областей науки и техники возникает необходимость вычислять производные достаточно сложных функций конечного числа переменных. Эти функции могут быть заданы как явным образом, так и неявно. Кроме того, часто функции задаются на многообразиях, которые определяются системой равенств.

Существуют разные методы вычисления производных сложных функций: символьное дифференцирование, метод конечных разностей,... Одним из современных методов вычисления производных сложных функций является Быстрое Автоматическое Дифференцирование (БАД). Это направление развивается на протяжении последних пятидесяти лет. Обзор истории создания и развития БАД и связанных с ним методов сделан в [1–6].

Начиная с 1970 года в ВЦ АН СССР проводились работы по созданию численных методов решения задач оптимального управления, основанных на редукции исходной задачи к задаче нелинейного программирования. Полученные при этом формулы дифференцирования оказались весьма близкими к формулам БАД. В результате этих работ был предложен общий подход к дифференцированию сложных функций (БАД-методология) и показано, что из найденных результатов можно получить как формулы БАД, так и формулы для вычисления градиента функционала в задачах оптимального управления сложными динамическими системами.

2. Основная часть

Пусть $z \in R^n$ и $u \in R^r$ – векторы. Дифференцируемые функции $W(z,u)$ и $\Phi(z,u)$ определяют отображения $W\colon R^n \times R^r \to R^1$, $\Phi\colon R^n \times R^r \to R^n$. Фазовый вектор z и вектор управлений u удовлетворяют следующей системе из n нелинейных скалярных уравнений:

$$\Phi(z,u) = 0_n, \tag{1}$$

где 0_n – n-мерный нулевой вектор. Предположим, что матрица $\Phi_z^\top(z,u)$ невырожденна. Тогда, согласно теореме о неявной функции, система уравнений (1) определяет дифференцируемую функцию $z = z(u)$, производная которой вычисляется по формуле:

$$dz^\top/du = -\Phi_u^\top(z(u),u) \cdot \left[\Phi_z^\top(z(u),u)\right]^{-1}. \tag{2}$$

Сложная функция $\Omega(u) = W(z(u), u)$ дифференцируема и ее градиент относительно независимых переменных u вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} d\Omega(u)/du &= W_u\left(z(u), u\right) + W_z(z, u) \cdot dz^\top/du = \\ &= W_u\left(z(u), u\right) - W_z\left(z, u\right) \cdot \Phi_u^\top\left(z(u), u\right) \cdot \left[\Phi_z^\top\left(z(u), u\right)\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Введем функцию Лагранжа $L(z, u, p) = W(z, u) + \Phi^\top(z, u)p$ с вектором множителей $p \in R^n$. Этот вектор находится из решения линейной алгебраической системы:

$$L_z(z, u, p) = W_z(z, u) + \Phi_z^\top(z, u)p = 0_n, \tag{4}$$

т.е. $p = -W_z(z, u) \cdot \left[\Phi_z^\top(z, u)\right]^{-1}$.

Следовательно, формулу (3) можно записать так:

$$d\Omega(u)/du = W_u\left(z(u), u\right) + \Phi_u^\top\left(z(u), u\right) \cdot p. \tag{5}$$

В многошаговых задачах векторы z и u обычно состоят из набора векторов меньшей размерности:

$$\begin{gathered} z^\top = [z_1, z_2, \ldots, z_k]^\top, \qquad u^\top = [u_1, u_2, \ldots, u_k]^\top, \\ z \in R^s, \qquad u \in R^m, \qquad D_i = \{i\colon 1 \le i \le k\}. \end{gathered}$$

Пусть соотношение (1) расщеплено на k соотношений следующим образом:

$$z_i = F(i, Z_i, U_i), \qquad i \in D, \qquad n = s \cdot k, \qquad r = m \cdot k, \tag{6}$$

где Z_i – набор векторов z_i, которые входят в правую часть равенства (6), а U_i – набор векторов u_i, входящих в правую часть этого равенства.

Отметим, что представление (6) имеет весьма общий характер, включая в себя дискретные варианты задач оптимального управления процессами, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями (как обыкновенными, так и с частными производными), интегро-дифференциальными уравнениями и т.д.

Определим следующие индексные множества:

$$\overline{Q}_i = \{j \in D, \qquad z_i \in Z_j\}, \qquad \overline{K}_i = \{j \in D, \qquad u_i \in U_j\}.$$

Введем множители Лагранжа (импульсы) $p_i \in R^s$. Тогда

$$L(z, u, p) = W(z, u) + \sum_{j \in D} \left[F^\top(j, Z_j, U_j) - z_j^\top\right] p_j,$$

и множители $p_i \in R^s$ определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$p_i = W_{z_i}(z, u) + \sum_{q \in \overline{Q}_i} F_{z_i}^\top(q, Z_q, U_q)p_q, \tag{7}$$

а формула (5) принимает вид:

$$d\Omega/du_i = W_{u_i}(z, u) + \sum_{q \in \overline{K}_i} F_{u_i}^\top(q, Z_q, U_q)p_q. \tag{8}$$

Формулы (7), (8) – это и есть формулы быстрого автоматического дифференцирования для вычисления градиента сложной функции $\Omega(u) = W(z(u), u)$ относительно независимых переменных u в том случае, когда векторы z и u связаны между собой многошаговым процессом (6).

Анализ формул БАД-методологии позволил сформулировать и доказать теорему, указывающую на эффективность этой методологии: точное значение градиента функции вычисляется за время, не превосходящее утроенного времени вычисления самой функции.

Описанная БАД-методология продемонстрировала свою эффективность при решении самых разнообразных задач. Это и дифференцирование функций, и решение задач оптимизации.

Но особенно ярко БАД-методология проявила себя в приложениях к задачам оптимального управления динамическими системами, поведения которых описывается уравнениями с частными производными. Действительно, при численном решении таких задач часто используются градиентные методы и их обобщения, которые для своей реализации требуют умения вычислять точно не только значения оптимизируемых функций, но и их градиентов.

Самым естественным способом вычисления градиентов возникающих сложных функций представляется метод конечных разностей. Однако в ряде задач оптимального управления это связано с большими трудностями (см., например, [7]).

При сведении задачи оптимального управления сложными системами к задаче нелинейного программирования исследователи идут, в основном, двумя путями.

Первый путь предусматривает формулировку задачи оптимального управления в непрерывном пространстве, формулировку сопряженной задачи в непрерывном пространстве, определение градиента функционала в непрерывном случае, и только после этого осуществляется переход к дискретному варианту прямой и сопряженной задач, к дискретному варианту формул для определения градиента функционала.

Используя указанный подход, исследователь должен, однако, помнить, что получаемый градиент дискретизированного функционала неточен и зависит от способа дискретизации как прямой и сопряженной задач, так и от способа дискретизации самого градиента. Эта неточность может быть существенно уменьшена за счет уменьшения погрешностей указанных аппроксимаций или даже полностью ликвидирована за счет выбора “согласованных” аппроксимаций прямой и сопряженной задач и “согласованно” с ними аппроксимации градиента. “Согласованные” аппроксимации можно случайно угадать. Указать способ определения “согласованных” аппроксимаций, находясь в рамках данного подхода, по-видимому, невозможно. Если выбрать неправильный дискретный вариант сопряженной задачи, получается неверное значение градиента. С такими случаями встречались на практике, например, при оптимизации решения задачи Бюргерса [8].

Второй путь связан с предварительной аппроксимацией непрерывной задачи оптимального управления, постановкой задачи оптимизации в конечномерном пространстве и с определением градиента функционала в дискретном виде. Если при этом дискретный градиент функционала определять с помощью канонических формул БАД-методологии, то его значение (с машинной точностью) получается и здесь за время, не превышающее утроенного значения времени вычисления самого функционала.

Методология быстрого автоматического дифференцирования позволила успешно решить ряд сложных задач оптимального управления динамическими системами. В качестве примера можно указать цикл работ, посвященный решению задачи оптимального управления тепловыми процессами с фазовыми переходами [9].

3. Заключение

Предлагается современный подход к вычислению градиента сложной функции, заданной на многообразии. В его основе лежат полученные конечные канонические формулы, удобные для запоминания и проведения вычислений. Отличительной особенностью этих формул является то, что они позволяют вычислять градиент функции с машинной точностью за время, не превосходящее утроенного времени вычисления самой функции. Это утверждение справедливо для функций любого конечного числа переменных.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 14 11 00782).

Список литературы

1. *Iri M.* Simultaneous computation of functions, partial derivatives and estimates of rounding errors - Japan Journal of Applied Mathematics 1984. V. 1. P. 223-252.
2. *Griewank A. and Corliss G.F., eds.* Automatic Differentiation of Algoritms. Theory, Implementation and Application - Philadelphia: SIAM, 1991.
3. *Griewank A.* Evaluating Derivatives - Philadelphia: SIAM, 2000.
4. *Uwe Naumann.* The Art of Differentiating Computer Programs: An Introduction to Algorithmic Differentiation - Philadelphia: SIAM, 2012.
5. *Evtushenko Y.G.* Computation of exact gradients in distributed dynamic systems // Optimization Methods and Software - 1998. Vol. 9. P. 45-75.
6. *Евтушенко Ю.Г.* Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование -М.: ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, 2013. 144 с.
7. *Албу А.Ф., Зубов В.И.* Вычисление градиента функционала в одной задаче оптимального управления, связанной с кристаллизацией металла // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2009. Т. 49. № 1. С. 51-75.
8. *Евтушенко Ю.Г., Засухина Е.С., Зубов В.И.* О численном подходе к оптимизации решения задачи Бюргерса с помощью граничных условий // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 12. С. 1449-1458.
9. *Албу А.Ф., Зубов В.И.* Исследование задачи оптимального управления процессом кристаллизации вещества в новой постановке для объекта сложной геометрической формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 12, С. 1879–1893.

UDC 519.653:519.658

On the Generalized Fast Automatic Differentiation Technique

Y. G. Evtushenko*, V. I. Zubov*†

* *Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences*
Vavilov str. 40, CCAS, Moscow, 119333, Russia
† *Moscow Institute of Physics and Technology*
Institutskii per.,9,Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700, Russia.

The new efficient methodology, designed for the numerical computation of the gradient of functions, is presented. It may be applied to solve a wide range of optimal control problems of complex dynamical systems described by ordinary differential equations and (or) partial differential equations. The essence of this approach is that it displays the canonical formula to calculate the gradient of the cost function with machine precision for the selected approximation of the target functional.

Key words and phrases: gradient, optimal control, fast automatic differentiation, adjoint equations, approximation of boundary-value problem.

UDC 512.714, 530.145

Description of Two Qubit Entanglement Space in Terms of Polynomial Invariants: a Challenge for Computer Algebra

V. P. Gerdt

Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

We consider computational aspects of characterising the entanglement space of two qubit mixed states via the polynomial invariants of local unitary group $SU(2) \times SU(2)$. Although in the literature a number of computer algebra based algorithms has been designed for construction of the ring of invariant polynomials, the underlying computations related to two qubits are too hard for those algorithms. In the talk we restrict ourselves by a subset of the two qubit states containing so-called $X-$states and investigate its invariant ring.

Key words and phrases: two qubit mixed state, entanglement space, local unitary transformation, invariant polynomial ring, primary invariant, secondary invariant, Noether normalization, syzygy ideal, computer algebra.

1. Introduction

The entanglement of qubits (quantum bits) provided by their quantum correlations is the main resource [1] of quantum computing and quantum information processes, e.g., superdense coding, teleportation and cryptography. By this reason a qualitative and quantative characterization of entanglement is a topical research problem.

2. Problem statement

A two qubit state is described by a 4×4 Hermitian, semi-positive and unit-trace matrix of the (so-called Fano) form

$$\varrho = \frac{1}{4}\left[I_2 \otimes I_2 + \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_i \otimes I_2 + \sum_{i=1}^{3} b_i I_2 \otimes \sigma_i + \sum_{i,j=1}^{3} c_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right]$$

where σ_i are the Pauli matrices, I_2 is the identity 2×2 matrix and a_i, b_i, c_{ij} are real numbers. The entanglement of a quantum state is invariant under the adjoint action of the local unitary group $(g, \varrho) \to g\varrho g^\dagger$, $g \in G := SU(2) \times SU(2)$. These transformations of ϱ induce transformations on the 15-dimensional real space

$$W := \{ (a_i, b_j, c_{kl}) \in \mathbb{R}^{15} \mid i, j, k, l = 1, 2, 3 \}.$$

It follows that the corresponding G–invariant polynomials accumulate all relevant information on the two qubit entanglement.

The ring $\mathbb{R}[W]^G$ of $G-$invariant polynomials is Cohen-Macaulay [2] and the *research problem of computer algebra* is to construct the Hironaka decomposition

$$\mathbb{R}[W]^G = \bigoplus_{f_k \in F_s} f_k \, \mathbb{R}[F_p].$$

Here F_p is a set of homogeneous and algebraically independent *primary invariants* and F_s is a set of homogeneous *secondary invariants*.

3. Computational issues

Based on the Gröbner bases techniques, several algorithms has been suggested and implemented in computer algebra software (cf. book [2] and its bibliography) to construct invariant rings for linear reductive groups. According to the literature, among those algorithms the Derksen's one, implemented in MAGMA and SINGULAR, is the most efficient. However, the invariant ring $\mathbb{R}[W]^G$ is computationally intractable by the last algorithm as well as by the other known algorithms.

Nevertheless, both sets F_p of primary and F_s of secondary invariants for $\mathbb{R}[W]^G$ were constructed in [3]. The authors of this paper exploited the following facts: (i) the knowledge on cardinalities of F_p (10) and F_s (15) and the degrees of their elements provided by the generating Molien function of G (Hilbert series in [2]); (ii) the results of paper [4] where a set F of 20 fundamental invariants in $\mathbb{R}[W]^G$ was presented. An irredundant set of invariants is called *fundamental* if it generates $\mathbb{R}[W]^G$. In so doing, the special features of $SU(2) \times SU(2)$ were used in construction of F_p and F_s whereas the computer algebra software (MAPLE) was applied to compute the ideal I of *syzygies* (*nontrivial algebraic relations*) generated by the fundamental invariants. The knowledge of syzygy ideal I is necessary because of the ring isomorphism

$$\mathbb{R}[W]^G \cong \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_{20}]/I_F \,.$$

It should be emphasized that at the present time even verification of the algebraic independence for the 10 primary invariants of paper [3] cannot be performed by means of computer algebra since the underlying Gröbner basis computation is too cumbersome.

4. $X-$states

Recently, we studied [5] the subspace of two qubit mixed states such that the density matrix reads

$$\varrho_X := \begin{pmatrix} \varrho_{11} & 0 & 0 & \varrho_{14} \\ 0 & \varrho_{22} & \varrho_{23} & 0 \\ 0 & \varrho_{32} & \varrho_{33} & 0 \\ \varrho_{41} & 0 & 0 & \varrho_{44} \end{pmatrix} .$$

These states got name $X-$states due to the visual similarity of the density matrix, whose non-zero entries lie only on the main and minor (secondary) diagonals, with the Latin letter "X":

Comparison with the above given Fano decomposition shows that the $X-$states belong to the 7-dimensional subspace W_X of the vector space W defined as:

$$W_X := \{\, w \in W \mid c_{13} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = 0\,, a_i = b_i = 0\,,\ i = 1, 2\,\}\,.$$

Our interest to this subspace of a generic two qubit space is due to fact that many well-known states, e.g. the Bell states, Werner states, isotropic states and maximally entangled mixed states are particular subsets of the $X-$states. Since their introduction in 2007 many interesting properties of $X-$states have been established. Particularly, it was shown that for a fixed set of eigenvalues the states of maximal concurrence, negativity or relative entropy of entanglement are the $X-$states.

The restriction of the invariant polynomial ring $\mathbb{R}[W]^G$ to the invariant polynomial ring $\mathbb{R}[W_X]^{G_X}$ where G_X is a group of local unitary transformations that preserve the shape of $X-$states shows [5] that

$$G_X := SO(2) \times SO(2) \cong U(1) \times U(1) \subset SU(2) \times SU(2)\,,$$

and there is an injective homomorphism of the ring $\mathbb{R}[W]^G$ to the ring $\mathbb{R}[W_X]^{SO(2)\times SO(2)}$ which is freely generated.

5. Conclusions

A two qubit system is the simplest nontrivial quantum system which admits entangled states. However, even in this simplest case the rigorous and comprehensive description of the entanglement in terms of local unitary polynomial invariants is an arduous computational challenge for modern computer algebra.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 16-01-00080.

References

1. *Nielsen M. A.,Chuang I. L.* Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. — Cambridge University Press, 2011.
2. *Derksen H, Kemper G.* Computational Invariant Theory. Second Edition. Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 130. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VIII. Gamkrelidze R.V., Vladimir L. Popov V.L. (Subseries Eds). — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2015.
3. *King R. C., Welsh T. A., Jarvis P.D.* The mixed two-qubit system and the structure of its ring of local invariants. — J. Phys. A: Math. Theor. —Vol.40 — P.10083–10108, 2007.
4. *Quesne C.* $SU(2) \times SU(2)$ scalars in the enveloping algebra of $SU(4)$. —J. Math. Phys. —Vol.17 —P.1452–1467, 1976.
5. *Gerdt V.,Khvedelidze A.,Palii Yu.* On the ring of local unitary invariants for mixed $X-$states of two qubits. — Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, —to appear. —arXiv:quant-ph/1603.03262

УДК 512.714, 530.145

Описание перепутанных двухкубитных состояний в терминах полиномиальных инвариантов: вызов для компьютерной алгебры

В. П. Гердт

Лаборатория информационных технологий,
Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

В докладе будут рассмотрены вычислительные аспекты описания перепутанных двухкубитных смешанных состояний посредством полиномиальных инвариантов локальной унитарной группы $SU(2) \times SU(2)$. Несмотря на наличие в литературе целого ряда алгоритмов компьютерной алгебры, применимых к построению кольца локальных инвариантов, соответствующие вычисления оказываются "неподъемными" для этих алгоритмов. Для того, чтобы построить кольцо инвариантов методами компьютерной алгебры мы ограничимся подмножеством двухкубитных смешанных состояний, называемых $X-$состояниями, и изучим структуру соответствующего этим состояниям кольца полиномиальных инвариантов.

Ключевые слова: смешанное двухкубитное состояние, пространство перепутанных состояний, локальное унитарное преобразование, кольцо инвариантных многочленов, первичный инвариант, вторичный инвариант, нетерова нормализация, идеал сизигий, компьютерная алгебра.

УДК 514.7:514.8:519.6

Свойства тензорных систем компьютерной алгебры

Д. С. Кулябов[*†], **А. В. Королькова**[*], **Л. А. Севастьянов**[*‡]

[*] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*
[†] *Лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*
[‡] *Лаборатория теоретической физики, Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Тензорные системы компьютерной алгебры достаточно сильно отличаются от скалярных систем. Кроме того, можно выделить несколько типов тензорных расчетов. На основании этого можно сформулировать критерии, которым должна удовлетворять система компьютерной алгебры для работы с тензорами.

Ключевые слова: системы компьютерной алгебры; тензорные вычисления; компонентный подход; абстрактный подход.

1. Введение

Тензорные вычисления используются во многих областях физики. Следует заметить, что во всей своей мощи формализм тензорного анализа проявляется не во всех областях, достаточно часто используют его упрощенные варианты.

Каждая тензорная операция сама по себе достаточно проста. Однако даже при стандартных вычислениях приходится выполнять множество элементарных операций. А каждая тензорная операция является более громоздкой, чем соответствующая скалярная [1]. Именно поэтому в этой области крайне высок спрос на системы компьютерной алгебры [2].

2. Операции для тензорных систем компьютерной алгебры

Можно выделить несколько вариантов использования тензорных систем компьютерной алгебры.

Векторное исчисление — простейший вариант тензорного исчисления. Часто используемые операции — построение разнообразных дифференциальных операторов и замена базиса. Наиболее распространенные операторы: градиент, дивергенция, ротор (специфична для трехмерного пространства). Следует заметить, что в векторных вычислениях также часто используется специальный неголономный базис, позволяющий не различать контравариантные и ковариантные вектора, а также сохранять размерность при замене координат [3, 4].

Специальным случаем тензорных объектов являются спиноры. В частности спиноры являются представлениями группы Лоренца с полуцелым старшим весом. Обычные тензоры являются представлениями с целочисленным старшим весом.

По историческим причинам наиболее часто в исследованиях используются дираковские 4-спиноры, которые применяют для записи уравнений Дирака, описывающих фермионы со спином $\frac{1}{2}$. Обычно для манипуляции с дираковскими спинорами используют γ-матрицы, получаемые из уравнения Клиффорда–Дирака [5].

Общая теория относительности стала первой физической теорией, потребовавшей всю мощь дифференциальной геометрии и тензорных вычислений. В вычислениях возникают громоздкие тензорные конструкции, которые можно упрощать, учитывая симметрии тензоров. Обычно выделяют одноэлементные (monoterm) и многоэлементные

(multiterm) симметрии. Одним из основных элементов теории является тензор Римана, обладающий как простейшими одноэлементными, так и сложными многоэлементными симметриями типа тождеств Бьянки.

Можно выделить три типа записи тензоров: компонентная запись, запись с абстрактными индексами и безындексная запись. Каждый тип имеет свою специфику и область применения.

Компонентные индексы, фактически, превращают тензор в набор скалярных величин, применяемых при конкретных расчетах. Обычно оперировать с компонентными индексами есть смысл лишь после упрощения тензорного выражения и учета всех его симметрий.

Безындексную запись часто используют, если исследователя интересует не конечный результат, а симметрии тензоров. Однако эта форма записи страдает недостатком выразительности: тензор рассматривается как целостный объект, соответственно и симметрии возможно рассматривать лишь те, которые относятся к тензору в целом. Для работы с объектами сложной структуры приходится изобретать новые обозначения либо добавлять словесные пояснения.

Абстрактные индексы [6] следует рассматривать как усовершенствование безындексной записи тензора. Абстрактный индекс обозначает лишь принадлежность тензора к определенному пространству, а не следование тензорному правилу преобразования (в отличие от компонентных индексов). В этом случае возможно рассмотрение как симметрий, охватывающих весь тензор (все его индексы), так и симметрий отдельных групп индексов.

3. Заключение

На данный момент фактически отсутствуют системы с полностью удовлетворительной поддержкой тензоров.

Компонентные тензорные вычисления практически не требуют дополнительных возможностей от универсальной системы компьютерной алгебры. Поэтому пакеты, реализующие данный функционал, представлены наиболее широко. Чего нельзя сказать об эффективной работе с абстрактными тензорами.

Благодарности

Работа частично поддержана грантами РФФИ №№ 14-01-00628, 15-07-08795 и 16-07-00556.

Список литературы

1. *Korol'kova A. V., Kulyabov D. S., Sevast'yanov L. A.* Tensor computations in computer algebra systems // *Programming and Computer Software*. — 2013. — May. — Vol. 39, no. 3. — P. 135–142.
2. *Kulyabov D. S.* Using two types of computer algebra systems to solve maxwell optics problems // *Programming and Computer Software*. — 2016. — mar. — Vol. 42, no. 2. — P. 77–83.
3. *Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Korolkov V. I.* Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series «Mathematics. Information Sciences. Physics»*. — 2012. — no. 1. — P. 96–106.
4. *Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Sevastianov L. A.* A Naive Geometrization of Maxwell's Equations // The 15th small triangle meeting of Theoretical Physics. — Stara Lesna, 2013. — P. 104–111.
5. *Cartan E.* The Theory of Spinors. — Paris: Hermann, 1966.
6. *Penrose R., Rindler W.* Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields. — Cambridge University Press, 1987. — Vol. 1. — P. 478.

UDC 514.7:514.8:519.6

The Features of Tensor Computer Algebra Systems

D. S. Kulyabov[*†], **A. V. Korolkova**[*], **L. A. Sevastianov**[*‡]

[*] *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia
[†] *Laboratory of Information Technologies*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia
[‡] *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

Tensorial computer algebra systems are quite different from scalar one. Moreover, there are several types of tensor computations. We can formulate the criteria that must be satisfied by a computer algebra system dealing with tensors.

Key words and phrases: computer algebra system; tensor calculation; component approach; abstract approach.

UDC 517.925.5

Transforming Linear Functional Systems into Fully Integrable Systems

Z. Li[*], **M. Wu**[†]

[*] *Key Laboratory of Mathematics Mechanization (KLMM)*
Academy of Mathematics and System Sciences (AMSS), Academia Sinica
East Road, No. 55, Zhong Guan Cun, Beijing 100190, China
[†] *Shanghai Key Lab of Trustworthy Computing*
East China Normal University
Shhanghai 200063, China

A linear (partial) functional system consists of linear partial differential, difference equations or any mixture thereof. In this talk, we present an algorithm that determines whether linear functional systems are ∂-finite, and transforms ∂-finite systems to fully integrable ones. The algorithm avoids using Gröbner bases in Laurent-Ore modules when ∂-finite systems correspond to finite-dimensional Ore modules.

Key words and phrases: Linear functional systems, (fully) integrable systems, reflexive closures, localizations, Ore modules, Laurent-Ore modules.

1. Introduction

A linear functional system consists of linear partial differential, difference equations or any mixture thereof. Such a system is ∂-finite if its module of formal solutions is a finite-dimensional vector space over the ground field [1]. The dimension of this module is called the linear dimension of the given system, and corresponds to the dimension of its solution space. It is shown in [1, 5] that a ∂-finite system is equivalent to a fully integrable system, whose linear dimension equals the number of its unknowns. For fully integrable systems, a factorization algorithm is proposed in [4] , and a Galois theory is well developed These results motivate us to transform ∂-finite systems into fully integrable ones.

In this talk, we present an algorithm for transforming an integrable system to a fully integrable one, which requires merely solving several linear systems over the ground field. This algorithm evolves from the algorithm LinearReduction in [5, §2.5.2], but avoids handling the "differential portion" of the given integrable system.

2. Main section

Let F be a field, $\delta_1, \ldots, \delta_\ell$ be derivations on F, and $\sigma_{\ell+1}, \ldots, \sigma_m$ be automorphisms of F. Assume that all these maps commute pairwise. The *Ore algebra* ([2]) over F is the ring $\mathcal{S} = F[\partial_1, \ldots, \partial_\ell, \partial_{\ell+1}, \ldots, \partial_m]$ endowed with the following commutation rules: (i) $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ for $1 \le i < j \le m$; (ii) $\partial_i f = f\partial_i + \delta_i(f)$ for $1 \le i \le \ell$ and $f \in F$; and (iii) $\partial_j f = \sigma_j(f)\partial_j$ for $\ell + 1 \le j \le m$ and $f \in F$. The *Laurent-Ore algebra* ([1]) over F is defined as the ring extension $\mathcal{L} = F[\partial_1, \ldots, \partial_\ell, \partial_{\ell+1}, \partial_{\ell+1}^{-1}, \ldots, \partial_m, \partial_m^{-1}]$ of $\mathcal{S}$ with additional commutation rules:(iv) $\partial_j^{-1}a = \sigma_j^{-1}(a)\partial_j^{-1}$; (v) $\partial_j\partial_j^{-1} = \partial_j^{-1}\partial_j = 1$ for all $a \in F$ and i, j with $1 \le i \le m$, $\ell + 1 \le j \le m$.

A linear functional system over F is a system of the form $A(\mathbf{y}) = 0$ where $A \in \mathcal{S}^{p\times n}$ and $\mathbf{y}$ is a column vector of n unknowns. By a solution of $A(\mathbf{y}) = 0$ in an $\mathcal{L}$-module V, we mean a vector $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)^\tau$ with $\mathbf{v}_i \in V$ such that $A(\mathbf{v}) = 0$. The set of all solutions of $A(\mathbf{v}) = 0$ in V is denoted $\mathrm{sol}_V(A(\mathbf{y}) = 0)$, which is a linear space over C_F.

Given a linear functional system $\Sigma : A(\mathbf{y}) = 0$ where $A \in \mathcal{S}^{p\times n}$, the $\mathcal{S}$-submodule N generated by the row vectors of A in $\mathcal{S}^{1\times n}$ is called the *Ore submodule* associated with Σ, and the $\mathcal{L}$-module $\mathcal{L}^{1\times n}/\mathcal{L}N$, where $\mathcal{L}N$ stands for the $\mathcal{L}$-submodule generated by the row vectors of A in $\mathcal{L}^{1\times n}$, is called *the module of formal solutions* of Σ. The system Σ is ∂-finite if

its module of formal solutions is a finite-dimensional vector space over the ground field ([1]). The dimension of this module is called the linear dimension of Σ, and corresponds to the dimension of its solution space. Two linear functional systems are *equivalent* if their modules of formal solutions are isomorphic as $\mathcal{L}$-modules.

A naive way to transform a ∂-finite system Σ is to compute a Gröbner basis of the submodule N corresponding to Σ over a Laurent-Ore algebra (see [5]), and construct the desired fully integrable system from the matrices associated with the quotient module M/N. As Laurent-Ore algebras are localizations of Ore algebras, it is easier to compute Gröbner bases in free modules over Ore algebras (see [2]). This observation motivates us to transform ∂-finite systems by the latter Gröbner bases whenever possible. Moreover, we avoid computing Gröbner bases of any kind when transforming an integrable system, a common special case of linear functional systems.

Let us recall a standard way ([3, §0.9]) to localize a module over a noncommutative domain by a left Ore set. Let R be a (noncommutative) domain, and denote $R\setminus\{0\}$ by $R^\times$, which is a monoid. A submonoid T of $R^\times$ is called a *left Ore set* of R if $Rt\cap Tr\neq\emptyset$ for all $t\in T$ and $r\in R^\times$. In the Ore algebra $\mathcal{S}=F[\partial_1,\ldots,\partial_\ell,\partial_{\ell+1},\ldots,\partial_m]$, denote by T the monoid generated by $\partial_{\ell+1},\ldots,\partial_m$. Then T is a left Ore set and the localization $T^{-1}R$ is $\mathcal{L}=F[\partial_1,\ldots,\partial_\ell,\partial_{\ell+1},\partial_{\ell+1}^{-1},\ldots,\partial_m,\partial_m^{-1}]$, the *Laurent-Ore algebra* over F. The localizations help us to describe the transformation of a ∂-finite system into its equivalent fully integrable system more concisely.

Let R be a domain, T a left Ore set of R and M an R-module. A submodule N of M is *reflexive* w.r.t. T if $t\mathbf{v}\in N$ implies $\mathbf{v}\in N$ for $t\in T$ and $\mathbf{v}\in M$. The *reflexive closure* $\widehat{N}$ of a submodule N is the intersection of all reflexive submodules containing N. The property of reflexivity of submodules of an R-module is given as follows.

Proposition 1. Let R be a domain containing a field F and M be a finite-dimensional R-module. Then (i) all submodules of M are reflexive if and only if 0_M is reflexive; (ii) for every submodule N of M, $\widehat{N}=N+\widehat{0}_M$.

Below we describe how to find linear bases of (quotient) submodules of R-modules.

Algorithm LinearBasis. *Given an F-basis $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ of an R-module M, the associated matrices A_1, ..., A_p, and a finite set U of nonzero elements of M, compute an F-basis of the R_0-module R_0U, an F-basis of the R_0-module $M/(R_0U)$ and the associated matrices with the latter basis.*

Based on the above algorithm, an idea for computing an F-basis of $\widehat{0}_M$ was outlined in terms of first-order matrix equations from discussions with Manuel Bronstein in 2005. We translate this idea into a module-theoretic language. If $A_1,\ldots,A_p$ are all invertible, then $\widehat{0}_M=0_M$ and we are done. Otherwise, the nontrivial left kernel of A_i for some i with $1\leq i\leq p$ leads to some nonzero elements in $\widehat{0}_M$. Let U be the set of all the nonzero elements in $\widehat{0}_M$ obtained from left-kernel computations. Then FU is contained in $\widehat{0}_M$. Applying Algorithm LinearBasis to U yields an F-basis of R_0U, which is contained in $\widehat{0}_M$, and an F-basis of $M/(R_0U)$ together with the associated matrices. We then apply the same idea to $M/(R_0U)$ recursively. Finally, we attain (a): an F-basis of $\widehat{0}_M$; (b) an F-basis of $M/\widehat{0}_M$; (c) the matrices associated with the basis in (b).

The following lemma enables us to comput integrable connections of ∂-finite systems.

Lemma 1. *Let Σ be a ∂-finite system with n unknowns, and N the Ore module associated with Σ. (i) If $\mathcal{L}^{1\times n}/\mathcal{L}N$ has an F-basis $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_d$ with the associated matrices B_1, ..., B_m, then $\{\partial_i(\mathbf{z})=B_i\mathbf{z}\}_{1\leq i\leq m}$ is an integrable connection of Σ. (ii) Assume that $\mathcal{S}^{1\times n}/N$ is finite-dimensional over F. If $\mathcal{S}^{1\times n}/\widehat{N}$ has an F-basis $\mathbf{b}_1$, ..., $\mathbf{b}_d$ with the associated matrices B_1, ..., B_m, then $\{\partial_i(\mathbf{z})=B_i\mathbf{z}\}_{1\leq i\leq m}$ is an integrable connection of Σ.*

We now proceed to find an integrable connection of Σ. First, compute a Gröbner basis G of the submodule N in the free Ore module $\mathcal{S}^{1\times n}$. The basis G allows us to determine if $\mathcal{S}^{1\times n}/N$ is finite-dimensional over F. If it is, we construct an F-basis of $\mathcal{S}^{1\times n}/\widehat{N}$ using

Algorithm RefleixvieClosureOfZero. The F-basis yields an integrable connection by Lemma 1 (ii). Otherwise, we compute a Gröbner basis of $\mathcal{L}N$ in the free Laurent-Ore module $\mathcal{L}^{1\times n}$, and apply Lemma 1 (i).

3. Conclusions

We present how to construct a linear basis of an Ore localization of a finite-dimensional module M, and proved that $\widehat{N} = N + \widehat{0}_M$ for all submodules N of M. We extended an equivalence relation among linear ordinary differential (difference) equations to linear functional systems. An algorithm was presented for transforming a ∂-finite system Σ to its integrable connection, which is fully integrable and equivalent to Σ. Our algorithm manipulates merely the "difference portion" of Σ, and avoids computing Gröbner bases when Σ corresponds to a finite-dimensional Ore module.

Acknowledgments

The work is supported in part by the NSFC projects No. 10671200 and 10801052.

References

1. *Bronstein M., Li Z. and Wu M.* Picard–Vessiot extensions for linear functional systems //Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. — P. 68–75. — ACM Press, 2005.
2. *Chyzak F. and Salvy B.* Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate identities. —Journal of Symbolic Computation. — 26(2):187–228, 1998.
3. *Cohn P. M.* Free rings and their relations. — Academic Press, London, 1985.
4. *Li Z., Singer M. F., Wu M. and Zheng D.* A recursive method for determining the one-dimensional submodules of Laurent-Ore modules. —Procs of ISSAC'2006. — P. 220 – 227, ACM Press, 2006.
5. *Wu M.* On Solutions of Linear Functional Systems and Factorization of Modules over Laurent-Ore Algebras, PhD thesis. — Chinese Academy of Sciences and Université de Nice–Sophia Antipolis, 2005.

УДК 517.925.5

Преобразование линейных функциональных систем в полностью интегрируемые системы

З. Ли*, М. Ву†

* *Главная лаборатория математической механизации (ГЛММ)*
Академия математики и системных наук (АМСН), АН Китая
Восточная дорога, 55, Чжунгуаньцунь, Пекин 100190, Китай
† *Шанхайская главная лаборатория защищенных информационных систем*
Восточно-Китайский педагогический университет
Шанхай 200063, Китай

Линейная частно-функциональная система состоит из линейных уравнений с частными производными и разностями или любой их смеси. Мы приводим алгоритм, который определяет, является ли система ∂-конечной, и преобразует ∂-конечные системы в полностью интегрируемые. Алгоритм не использует базисов Гребнера в модулях Лорана-Оре, коль скоро ∂-конечные системы соответствуют модулям Оре конечной размерности.

Ключевые слова: линейные функциональные системы, (полностью) интегрируемые системы, рефлексивные замыкания, модули Оре, модули Лорана-Оре.

УДК 517.9

Об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений

М. Д. Малых[*†]

[*] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,*
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198
[†] *Факультет наук о материалах,*
МГУ имени М.В. Ломоносова,
Ленинские Горы, Москва, Россия, 119991

Проведено сравнение нескольких подходов к интегрированию дифференциальных уравнений в конечном виде и их реализации в системах компьютерной алгебры.

Ключевые слова: полиномиальная компьютерная алгебра, интегрирование дифференциальных уравнений в конечном виде, символьное интегрирование, DEtools, Lsolver, Sagemath.

1. Введение

При математическом моделировании физических явлений часто остается довольно широкий произвол в виде уравнений и значениях входящих в них параметров и часто при удачном их выборе системы компьютерной алгебры позволяют отыскать аналитическое решение или хотя бы какой-нибудь закон сохранения. В деле выбора уравнений и параметров, однако, приходится уповать на удачу: популярные солверы решают частные дифференциальные уравнения в символьном виде, но не дают советы относительно того, как неразрешенные уравнения следует поправить. Более того, в каждом конкретном случае более-менее понятно, почему то или иное выражение считается аналитическим решением, однако совершенно не ясно, что означает неспособность того или иного пакета отыскать аналитическое решение.

2. Интегрирование в алгебраических функциях

Простейшая и в то же время чисто алгебраическая трактовка понятия интегрирования дифференциального уравнения появилась в переписке Декарта и Дебона, в те времена, когда теория элементарных трансцендентных функций не была еще разработана.

Задача Дебона, 1630. Выяснить, допускает ли дифференциальное уравнение

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0, \quad p,q \in \mathbb{Q}[x,y] \tag{1}$$

алгебраический интеграл

$$r(x,y) = c, \quad r \in \mathbb{Q}(x,y),$$

и отыскать таковой в случае утвердительного ответа.

Несмотря на свою древность, эта задача не может быть решена популярными солверами; напр., DETool в Maple не всегда опознает дифференциальные уравнения, имеющие рациональный интеграл, и как правило выписывает для них очень длинную квадратуру.

Математики XVII-XIX веков смотрели на усилия Дебона и Декарта свысока, полагая, что теория трансцендентных функций и разложения в степенные ряды сделали эти исследования неактуальными. Новый интерес к этой задаче возник на рубеже XIX-XX веков, причем тогда ее связывали с именем Паункаре. Поводов к такому интересу было несколько. Во-первых, 1870-х годах Ян Пташицкий и Вейерштрасс обобщили метод Остроградского на интегралы от произвольных алгебраических функций; это давало основание предполагать, что и алгебраические интегралы дифференциальных уравнений могут быть найдены чисто арифметическим путем. Во-вторых, в 1887 году Брунс

доказал отсутствие новых алгебраических интегралов у задачи многих тел, что делало в конце XIX века исследование вопроса о существовании алгебраических законов сохранения динамических систем весьма популярной задачей, которой посвятили свои работы крупнейшие аналитики того времени "— Пенлеве и Пуанкаре. Методы решения задачи Дебона, предложенные в нач. XX века, казались тогда слишком трудными в чисто вычислительном плане; лишь сейчас с созданием систем компьютерной алгебры они приобретают практическую значимость.

Немногие известные методы решения задачи Дебона подразумевают, что задана оценка сверху для порядка искомого интеграла. При таком допущении методом неопределенных коэффициентов эту задачу можно свести к исследованию разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений. Система эта кажется очень сложной, но в 1913 г. Н.М. Лагутискому удалось отыскать для нее аналог формул Крамера из теории линейных алгебраических уравнений. При ближайшем рассмотрении оказывается, что теория, развитая М.Н. Лагутинским, "— очень общая и касается вообще дифференциальных колец с однозначным разложением на множители [1]. В докладе ее возможности будут показаны на вычислительных примерах. Проблема отыскании оценки сверху для порядка искомого интеграла по заданному дифференциальному уравнению до сих пор не решена и открывает дорогу для проникновения в теорию «бесконечности», что будет продемонстрировано в задачах с параметрами.

3. Интегрирование в квадратурах

Авторы XVIII века рассматривали теорию дифференциальных уравнений как раздел интегрального исчисления, полагая, что всякое дифференциальное уравнение надлежащей заменой сводится к квадратуре; при этом класс рассматриваемых функций никак не фиксировался, но активно использовались не только алгебраические, но и элементарные трансцендентные функции. В итоге решение ОДУ выписывалось в той самой весьма приметной форме, которую теперь требуют в элементарных курсах Дифференциальных уравнений в качестве единственно возможной формы ответа и которая подразумевается всякий раз, как заходит речь об «интегрировании в конечном виде», «символьном интегрировании» или отыскании «аналитического решения». Лишь в 1830-х года возникает современное представление: ОДУ, вообще говоря, не интегрируется в квадратурах; не случайно работы Коши, в которых для ОДУ общего вида предлагается способ приближенного решения, и работы Лиувилля, в которых доказывается неразрешимость некоторых классических дифференциальных уравнений в конечном виде, появляются почти одновременно.

Центральным понятием лиувиллиевской теории становится элементарная функция, понятая как выражение, которое можно записать при помощи нескольких действий: арифметических и трансцендентных, причем список последних является предметом договора. Это обстоятельство придает неразрешимости ОДУ в смысле Лиувилля социокультурный статус: уравнение не решается в тех функциях, которые изучаются в средней школе и оттого кажутся более привычными. Вероятно, по этой причине создатели Liouvillian Solver'a [2] уклонись от создания блока, устанавливающего неразрешимость уравнения. Между тем, элементарные функции совершенно не нужны для лиувиллиевской теории и появись там действительно по случайным обстоятельствам: интеграл появляется как предел суммы $\sum f(x_i)\Delta x$ в XVII веке, предел же произведения $\prod(1 + f(x_i)\Delta x)$ не получает никакого особого названия вплоть до работ Вольтерра, 1880-е годы. Для развития теории интегрирования в конечном виде достаточно признать, что к арифметическим операциям добавляются две трансцендентные "— вычисления S- и P-интегралов, которые являются естественным обобщением двух арифметических действий.

Задача об интегрировании в квадратурах. Выяснить, можно ли представить интегральные кривые дифференциального уравнения (1) уравнением $f(x, y, c) = 0$, где f выражается через x и y при помощи конечного числа S- и P-квадратур.

Если ситуация, описанная в задаче, возможна для заданного уравнения, то один из интегрирующих множителей этого уравнения является P-интегралом от точной формы $udx + vdy$ с рациональными коэффициентами u и v, а один из интегралов уравнения

непременно является S-интегралом. Отыскание такого множителя сводит эту задачу к задаче типа Дебона.

Эта теория позволяет подвести надежную алгебраическую базу под т.н. элементарные методы интегрирования дифференциальных уравнений, но вместе с тем и наследует все их недостатки. При таком «символьном» решении мы переходим от простого дифференциального уравнения к трансцендентному уравнению для интегральных кривых, а при построении графиков трансцендентных кривых мы, наоборот, следуя дифференциально-параметрическому методу, сводим трансцендентное уравнение к дифференциальному, которое легко решается методом конечных разностей.

4. Задача Пенлеве, двойственная к задаче Дебона

Стандартный подход к интегрированию ОДУ сосредоточен на зависимости общего решения от x, между тем двойственный подход, при котором общее решение рассматривается как функция константы, а x как фиксированный параметр, позволяет построить теорию трансцендентных функций от x чисто алгебраическим путем [3, 4]. Это обстоятельство долгое время ускользала от внимания алгебраистов и было впервые отмечено в работах Пенлеве.

Задача Пенлеве, 1890. Выяснить, допускает ли дифференциальное уравнение (1) общее решение, зависящее от константы алгебраически и отыскать таковое в случае утвердительного ответа.

Если ситуация, описанная в задаче, возможна для заданного уравнения, то уравнение допускает алгебраический интеграл

$$r(x, y) = c, \quad r \in K(y),$$

где K "— поле функций, имеющее конечную степень трансцендентности над $\mathbb{Q}(x)$, а его базис "— т.н. трансцендентные функции, вводимые интегрированием ОДУ. Согласно теореме Пенлеве такое ОДУ сводится алгебраической заменой к уравнению Риккати и поэтому его интегрирование вводит не какие угодно трансцендентные функции, но только решения некоторого уравнения Риккати.

В докладе будет представлен алгоритм, который позволяет конструктивно выяснить, сводится ли заданное ОДУ алгебраической подстановкой заданного порядка к уравнению Риккати или нет, и его реализация. Необходимость ограничивать порядок, как видно, наследуется из задачи Дебона.

В отличие от классического подхода к символьному интегрированию, задача Пенлеве хорошо согласуется с методом конечных разностей. Приближенные методы решения ОДУ всегда подразумевают сведения ОДУ к системе алгебраических дифференциальных уравнений, в том или ином смысле «приближающих» ОДУ. В процессе дискретизации обычно теряются важные в т.ч. алгебраические свойства ОДУ, если не предприняты специальные меры по их сохранению. Указанное в задаче Пенлеве свойство общего решения замечательно еще и тем, что всегда можно составить разностную схему, его наследующую. В докладе в том числе и на примере, оттолкнувшем Эйлера от метода конечных разностей, будет показано, что эти схемы позволяют проходить особые точки решения без заметного накопления ошибки [5]. Тем самым в рамках задачи Пенлеве противопоставление численных и аналитических методов снимается и получается задача о разыскании ОДУ, для которые можно написать идеальную разностную схему и в то же время точное общее решение которых содержит конечное число классических трансцендентных функций.

Список литературы

1. *Малых М.Д.* Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 3. С. 35–44.
2. *J. Avellar, L.G.S. Duarte, S.E.S. Duarte, and L.A.C.P. da Mota.* `Lsolver` (Version 2.0). Computer Physics Communications Program Library, 2013. `http://cpc.cs.qub.ac.uk/summaries/ADZF_v1_0.html`.

3. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* Трансцендентные функции, вводимые интегрированием дифференциальных уравнений // Динамика сложных систем — XXI век. № 3 за 2010 г.
4. *Малых М.Д.* О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде // Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 432. 2015. Стр. 196–223.
5. *Малых М.Д.* О дифференциальных уравнениях, общее решение которых является алгебраической функцией константы // Вестник НИЯУ МИФИ, 2016. Том 5, № 2. С. 152–161

UDC 517.9

On Integration of Ordinary Differential Equations

M. D. Malykh[*†]

[*] *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia
[†] *MSU Department of Materials Science*
Leninskie gory, Moscow, 119991, Russia

There are several approaches to the description of the concept which is called briefly as integration of the differential equations in a finete terms or symbolical integration. In the report these approaches and progress in their realization in CAS are compared.

Key words and phrases: polynomial computer algebra, integration of ordinary differential equation in finite terms, symbolic integration, DEtools, Lsolver, Sagemath.

UDC 004.42+530.145

Computer Algebra Methods for Modeling in Celestial Mechanics

A. N. Prokopenya

Department of Applied Informatics and Mathematics
Warsaw University of Life Sciences – SGGW
Nowoursynowska str. 159, Warsaw, 02-776, Poland

We discuss here the basic computational problems arising when studying various models of celestial mechanics. As an example we consider the planar circular four-body problem formulated on the basis of collinear Euler solutions of the three-body problem. We show that the system under consideration has 18 equilibrium solutions and develop an algorithm for their calculation. Doing relevant symbolic computations, we reduce the Hamiltonian function to the normal form and analyse stability of the equilibrium solutions for different values of the system parameters. All relevant symbolic and numerical calculations are done with the computer algebra system Mathematica.

Key words and phrases: computer algebra, celestial mechanics, restricted four-body problem, equilibrium positions, stability.

1. Introduction

It is known that computer algebra is widely used for modeling in Celestial Mechanics, and different analytical methods have been developed for studying a motion of heavenly bodies [1]. As a rule, differential equations of motion in such models are not integrable and their study begins usually with a search of exact particular solutions and analysis of their stability. Note that such approach turned out to be very fruitful in case of the famous restricted three-body problem [2]. Circular restricted four-body problem formulated on the basis of the Lagrange triangular configurations was completely investigated in a similar way [3–5].

In this paper we consider a special case of the planar four-body problem, where three bodies P_0, P_1, and P_2 of mass m_0, m_1, and m_2, respectively, move uniformly in circular orbits around their common center of mass and their configuration is always collinear. The fourth body P_3 having negligible mass does not influence the motion of the three primaries and moves in their gravitational field. As a general solution of the equations of motion cannot be found in analytical form we look for a special class of exact particular solutions, namely, the homographic ones. Combining symbolic and numerical calculations, we have found 18 such solutions and investigated their stability. Our main purpose is to demonstrate and discuss the basic computational problems arising when models of such kind are studied.

2. Equilibrium solutions

The three-body problem has an exact particular solution found first by L.Euler that describes planar motion of the three massive bodies P_0, P_1, and P_2 in circular orbits with the same angular velocity. In the rotating coordinate system this solution determines the equilibrium positions of the bodies located at the Ox axis, for example. Without loss of generality, one can assume that the most massive body P_0 is located at the origin, and the x coordinate of the body P_1 is a positive constant ($X > 0$). It is known that there are three collinear equilibrium positions of the body P_2. Denoting its x coordinate by aX, one can write an equation determining a dimensionless coordinate a of the body P_2 in the form

$$a(1+\mu_1)+\mu_2 a\left(\frac{|a|}{a^3}-\frac{|a-1|}{(a-1)^3}\right)=\mu_1\left(1+\frac{|a-1|}{(a-1)^3}\right)+(1+\mu_2)\frac{|a|}{a^3}\,, \qquad (1)$$

where $\mu_1 = m_1/m_0$, $\mu_2 = m_2/m_0$. This equation has three different roots in the intervals $0 < a_1 < 1$, $a_2 > 1$ and $a_3 < 0$. These roots cannot be found in analytical form but we can

compute their numerical values with required precision for any given values of parameters μ_1, μ_2.

Assuming the body P_3 moves in the plane xOy and using dimensionless coordinates x, y, one can write the Hamiltonian function of the system in the form

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - p_y x + p_x y + \frac{x}{\kappa}\left(\mu_1 + \mu_2 \frac{|a|}{a^3}\right) -$$

$$-\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\mu_1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right) , \qquad (2)$$

where x, p_x and y, p_y are pairs of canonically conjugate coordinates and momentums, and

$$\kappa = 1 + \mu_1 + \mu_2\left(\frac{|a|}{a^3} + \frac{|1-a|}{(1-a)^3}\right) . \qquad (3)$$

It is easy to verify that the equations of motion

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} , \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y} , \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} , \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} , \qquad (4)$$

determined by the Hamiltonian function (2) are nonlinear, and their general solution cannot be found in an analytical form. The simplest particular solutions of system (4) are the stationary ones which determine equilibrium values of coordinates and momentums. Eliminating momentums p_x, p_y from (4), we obtain the system of equations determining equilibrium positions of the body P_3 in the plane xOy in the form

$$\kappa x - \mu_1 - \mu_2 \frac{|a|}{a^3} - \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\mu_1(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\mu_2(x-a)}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}} = 0 ,$$

$$y\left(\kappa - \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\mu_1}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\mu_2}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}}\right) = 0 , \qquad (5)$$

where parameter a is a root of equation (1).

System (5) has two parameters, with all physically distinct cases of bodies location being determined by parameters values lying in the intervals $0 \le \mu_{1,2} \le 1$. In case of $\mu_2 = 0$ system (5) reduces to the restricted three-body problem that was entirely investigated in [2]. The case $\mu_1 = \mu_2$ was completely studied in [6,7]. Here we consider a general case of system (5) and study stability of the equilibrium positions for different values of the system parameters $\mu_{1,2}$.

Note that each equation of system (5) determines a curve in the plane xOy. In Fig. 1, they are shown by the bold solid and dashed lines. The coordinates x and y of each point of intersection of these curves determine a solution to system(5). One can readily see that there are six intersection points: S_1, $S_2, \ldots,$ S_6. If $\mu_2 \to 0$ for a fixed μ_1 the points S_2 and S_3 degenerate into one point P_2, which coincides with the libration point L_2 in the restricted three-body problem. The rest four equilibrium points S_1, S_4, S_5, and S_6 turn to the libration points L_1, L_3, L_4, and L_5, respectively [2]. Thus, at point P_2 we have branching of solutions of system (5) for $\mu_2 > 0$ and a fixed value of μ_1. This may be shown also if we represent solutions of system (5) in the form of power series in terms of μ_2 in the neighborhood of the libration point L_2.

Similar results is obtained if the point P_2 is located between points P_0 and P_1 $(0 < a < 1)$ or the x coordinate of point P_2 is negative $(a < 0)$. As a result, we obtain 18 equilibrium positions of body P_2 for different values of parameters μ_1, μ_2.

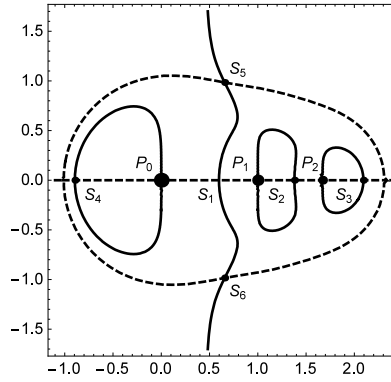


Figure 1. The curves determined by system (5) for $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.2$, and $a > 1$.

3. Conclusions

To investigate stability of an equilibrium position we have to expand the Hamiltonian function (2) in power series in terms of coordinates and momentums in the neighborhood of the equilibrium solution up to six order. Then the Hamiltonian function is reduced to the normal form, the corresponding procedure has been described in detail in [2, 8]. However, very cumbersome symbolic calculations are involved and application of the computer algebra system Mathematica, for example, turns out to be very helpful. Taking into account only the terms up to second order in the Hamiltonian expansion, we have studied stability of the equilibrium positions in linear approximation. We have shown that only the equilibrium points S_5, S_6 may be stable and the corresponding domains of parameters μ_1, μ_2 values have been found in the $\mu_1 O \mu_2$ plane. Analyzing the higher order terms in the Hamiltonian expansion, we have proved stability of equilibrium positions S_5, S_6 in Lyapunov's sense for all values of parameters μ_1, μ_2 from the domain of their linear stability, except for such values of $\mu_{1,2}$, for which the third or fourth order resonance takes place in the system. The corresponding resonance curves have been constructed in the $\mu_1 O \mu_2$ plane, as well.

Thus, all equilibrium solutions in the planar circular restricted four-body problem formulated on the basis of Euler collinear solutions in the three-body problem have been found and their stability has been investigated. This model was used to demonstrate and discuss the most important and useful algorithms for solving similar problems which are often met in Celestial Mechanics.

References

1. *Brumberg V. A.* Analytical techniques of celestial mechanics. — Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
2. *Markeev A. P.* The Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics. — Moscow: Nauka, 1978.
3. *Budzko D. A., Prokopenya A. N.* Symbolic-numeric analysis of the equilibrium solutions in the restricted four-body problem // Programming and Computer Software, 2010. — Vol. 36, no. 2. — P. 68–74.
4. *Budzko D. A., Prokopenya A. N.* On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem // Computer Algebra in Scientific Computing / CASC'2011, Gerdt V. P., Koepf W., Mayr E. W., Vorozhtsov E. V., Eds., LNCS, vol. 6885. — Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. — P. 88–100.

5. *Budzko D. A., Prokopenya A. N.* Symbolic-numeric methods for searching equilibrium states in a restricted four-body problem // Programming and Computer Software, 2013. — Vol. 39, no. 2. — P. 74–80.
6. *Gadomski L., Grebenikov E. A., Prokopenya A. N.* Studying the stability of equilibrium solutions in the planar circular restricted four-body problem // Nonlinear Oscillations, 2007. — Vol. 10, no. 1. — P. 66–82.
7. *Schmidt D., Vidal C.* Stability of the planar equilibrium solutions of a restricted $1 + N$ body problem // Regular and Chaotic Dynamics, 2014. — Vol. 19, no. 5. — P. 533–547.
8. *Prokopenya A. N.* Hamiltonian normalization in the restricted many-body problem by computer algebra methods // Programming and Computer Software, 2012. — Vol. 38, no. 3. — P. 156–166.

УДК 004.42+530.145

Методы компьютерной алгебры для моделирования в небесной механике

А. Н. Прокопеня

Кафедра прикладной информатики и математики,
Варшавский университет естественных наук – SGGW,
ул. Новоурсыновская, д.159, Варшава, Польша, 02-776

Обсуждаются основные вычислительные проблемы, возникающие при исследовании различных моделей небесной механики. В качестве примера рассматривается плоская круговая ограниченная задача четырех тел, сформулированная на основе коллинеарных решений Эйлера задачи трех тел. Показано, что рассматриваемая проблема имеет 18 равновесных решений и разработан алгоритм вычисления этих решений. Выполняя необходимые символьные вычисления, мы приводим функцию Гамильтона системы к нормальной форме и исследуем устойчивость положений равновесия при различных значениях параметров системы. Все необходимые символьные и численные вычисления выполняются с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, небесная механика, ограниченная задача четырех тел, положения равновесия, устойчивость.

Сессионные доклады

UDC 519.7

Liouvillian Sequences and Convolution

S. A. Abramov*, M. Petkovšek†, H. Zakrajšek‡

* *Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Vavilov str. 40, CCAS, Moscow, 119333, Russia*

† *Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana Jadranska 19, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*

‡ *Faculty of Mechanical Engineering, University of Ljubljana Aškerčeva 6, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*

We demonstrate by examples that a convolution of two hypergeometric sequences need not be Liouvillian, hence neither the ring of d'Alembertian sequences nor the ring of Liouvillian sequences is closed under convolution. On the positive side, we show that d'Alembertian sequences are closed under convolution with rationally d'Alembertian sequences, and Liouvillian sequences are closed under convolution with rationally Liouvillian sequences.

Key words and phrases: hypergeometric sequences, d'Alembertian sequences, Liouvillian sequences, closure under convolution.

1. Introduction

Liouvillian sequences are the elements of the least ring of sequences containing all hypergeometric sequences and closed under shift, inverse shift, indefinite summation, and interlacing. Liouvillian difference ring extensions and Liouvillian sequences were defined, in analogy to Liouvillian differential field extensions and Liouvillian functions, by Franke [2] resp. by Hendriks and Singer [3]. Following Stanley [5], we call a sequence *polynomially-recursive* (or P-recursive) if it satisfies a non-trivial homogeneous linear recurrence with polynomial coefficients. Since hypergeometric sequences are P-recursive (of order 1), and the difference ring $\mathcal{P}$ of P-recursive sequences is closed under the four operations defining Liouvillian sequences, the ring of Liouvillian sequences $\mathcal{L}$ is a subring of $\mathcal{P}$. It is well known that $\mathcal{P}$ is closed also under convolution of sequences, hence a natural question arises: Is $\mathcal{L}$ closed under convolution as well, and if not, what can be said about convolution of Liouvillian sequences?

2. Definitions and notation

By a *sequence* we mean a mapping $a : \mathbb{N} \to K$ where K is a computable algebraically closed field of characteristic 0, and $\mathbb{N} = \{k \in \mathbb{Z}; k \geq 0\}$. We consider the following operations in the set $K^{\mathbb{N}}$ of all sequences:

- unary operations $a \mapsto c$:
  1. *shift:* $c(n) = (Ea)(n) := a(n+1)$
  2. *(indefinite) summation:* $c(n) = (a * 1)(n) := \sum_{k=0}^{n} a(k)$
- binary operations $(a, b) \mapsto c$:
  3. *addition:* $c(n) = (a + b)(n) := a(n) + b(n)$
  4. *multiplication:* $c(n) = (ab)(n) := a(n)b(n)$
  5. *convolution:* $c(n) = (a * b)(n) := \sum_{k=0}^{n} a(k)b(n-k)$
- polyadic operations $(a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}) \mapsto c$ (for $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$):

6. *interlacing:* $c(n) = \left(\Lambda_{j=0}^{d-1} a_j\right)(n) := a_{n \bmod d}(n \mathrm{div} d)$

We say that a set $\mathcal{C} \subseteq K^{\mathbb{N}}$ of sequences is *closed under inverse shift* if

$$Ea \in \mathcal{C} \Longrightarrow a \in \mathcal{C}$$

for all sequences $a \in K^{\mathbb{N}}$.

For $d \in \mathbb{N}$ and $p_0, p_1, \ldots, p_d \in K[n]$, the mapping $L : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}$ defined by

$$L = \sum_{k=0}^{d} p_k(n)\, E^k \tag{1}$$

is a *linear recurrence operator* with polynomial coefficients, acting on $a \in K^{\mathbb{N}}$ by $(La)(n) = \sum_{k=0}^{d} p_k(n)\, a(n+k)$. If $p_0 p_d \neq 0$ in (1), we say that L has *order* d. $K[n]\langle E\rangle$ denotes the *algebra of linear recurrence operators with polynomial coefficients.*

Definition 1. *A sequence $a \in K^{\mathbb{N}}$ is:*

1. rational *if there is a rational function $r \in K(n)$ such that $a(n) = r(n)$ for all large enough $n \in \mathbb{N}$;*
2. hypergeometric *if $a(n) \neq 0$ for all large enough $n \in \mathbb{N}$, and there is a first-order operator $L_1 \in K[n]\langle E\rangle$ such that $L_1 a(n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$;*
3. d'Alembertian *if there are $d \in \mathbb{N}$ and first-order operators $L_1, L_2, \ldots, L_d \in K[n]\langle E\rangle$ such that $L_1 L_2 \cdots L_d\, a(n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$;*
4. rationally d'Alembertian *if it is d'Alembertian, and (with $L_1, L_2, \ldots, L_d$ as in the preceding item) the kernel of L_i consists of rational sequences for $i = 1, 2, \ldots, d$;*
5. Liouvillian *if it belongs to the least subring of $K^{\mathbb{N}}$ containing all hypergeometric sequences and closed under shift, inverse shift, summation, and interlacing;*
6. rationally Liouvillian *if it belongs to the least subring of $K^{\mathbb{N}}$ containing all rational sequences and closed under shift, inverse shift, summation, and interlacing.*

For additional information on d'Alembertian and Liouvillian sequences, see [1] and [4].

3. Results and conclusions

Example 1. *This example demonstrates the range of possibilities for the nature of a convolution of two hypergeometric sequences.*

1. *The convolution of $1/n!$ with itself*

$$\frac{1}{n!} * \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{2^n}{n!}$$

is hypergeometric.

2. *The convolution of $n!$ with itself*

$$y(n) := n! * n! = \sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!) = \frac{(n+1)!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k+1}$$

is d'Alembertian but not hypergeometric.

3. *The convolution of $n!$ with $1/n!$*

$$y(n) := n! * \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(n-k)!}$$

can be shown to be non-Liouvillian.

So we conclude that neither the multiplicative group of hypergeometric sequences nor the rings of d'Alembertian resp. of Liouvillian sequences are closed under convolution. However, we have the following positive results:

Theorem 1. *The convolution of a d'Alembertian sequence with a rationally d'Alembertian sequence is d'Alembertian.*

Theorem 2. *The convolution of a Liouvillian sequence with a rationally Liouvillian sequence is Liouvillian.*

Acknowledgments

The work of the first author has been supported in part by RFBR grant No 16-01-20379, and the work of the second and third authors by ARRS grant P1-0294.

References

1. *Abramov S. A., Petkovšek M.* D'Alembertian solutions of linear operator equations // Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 1994 / Association for Computing Machinery. — P. 169–174.
2. *Franke C. H.* Picard-Vessiot theory of linear homogeneous difference equations. — Trans. Amer. Math. Soc., Sept. 1963, vol. 108. — P. 491–515.
3. *Hendriks P. A., Singer M. F.* Solving difference equations in finite terms. — J. Symbolic Comput., 1999, vol. 27, no. 3. — P. 239–259.
4. *Petkovšek M., Zakrajšek H.* Solving linear recurrence equations with polynomial coefficients // Computer algebra in quantum field theory: integration, summation and special functions / Texts and monographs in symbolic computation, Springer 2013. — P. 259–284.
5. *Stanley R. P.* Differentiably finite power series. — European J. Combin., 1980, vol. 1, no. 2. — P. 175–188.

УДК 519.7

Лиувиллевы последовательности и конволюция

С. А. Абрамов[*], М. Петковшек[†], Х. Закрайшек[‡]

[*] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333*

[†] *Факультет математики и физики, Люблянский Университет Ядранска 19, SI-1000 Любляна, Словения*

[‡] *Факультет машиностроения, Люблянский Университет Ашкерчева 6, SI-1000 Любляна, Словения*

Приводятся примеры, показывающие, что конволюция двух гипергеометрических последовательностей не обязательно является лиувиллевой, и, следовательно, кольца даламберовых и лиувиллевых последовательностей не замкнуты относительно конволюции. При этом устанавливается, что даламберовы последовательности замкнуты относительно конволюции с рационально-даламберовыми последовательностями, а лиувиллевы последовательности замкнуты относительно конволюции с рационально-лиувиллевыми последовательностями.

Ключевые слова: гипергеометрические последовательности, даламберовы последовательности, лиувиллевы последовательности, замкнутость относительно конволюции.

UDC 512.62+004.421.6

Resonance Set of Polynomial and its Applications

A. B. Batkhin[*†]

[*] *Department of Singular Problems,*
Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS,
Miusskaya sq. 4, Moscow, 125047, Russia
[†] *Department of Theoretical Mechanics,*
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

We consider the resonance set of a real polynomial, i. e. the set of all the points of the coefficient space at which the polynomial has commensurable roots. The constructive algorithm of computation of polynomial parametrization of the resonance set is provided. The structure of the resonance set of a polynomial of degree n is described in terms of partitions of the number n. The algorithm for computation of parametric representation of the resonance set is implemented as a library of the CAS `Maple`. Obtained results are used for solving the problem of formal stability of a stationary point of a multiparametric Hamiltonian problem with three degrees of freedom.

Key words and phrases: elimination theory, subresultant, computer algebra, formal stability of a stationary point.

1. Introduction

Let $f_n(x)$ be a monic polynomial of degree n with real coefficients

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n. \tag{1}$$

The space $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ of its coefficients $a_1, \ldots a_n$ is called the *coefficient space* of (1).

Definition 1. A pair of roots t_i, t_j, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, of (1) is called $p : q$-*commensurable* if $t_i : t_j = p : q$.

We consider that $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $q \in \mathbb{N}$, i. e. we exclude the case when (1) has zero roots.

Definition 2. Resonance set $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ of (1) is called the set of all points of Π at which (1) has at least a pair of $p : q$-commensurable roots, i.e.

$$\mathcal{R}_{p:q}(f_n) = \{P \in \Pi : \exists i, j = 1, \ldots, n, t_i : t_j = p : q\}. \tag{2}$$

2. Condition on $p : q$-commensurability of polynomial roots

Let polynomial (1) has a pair of $p : q$-commensurable roots. It means that two polynomials $f_n(px)$ and $f_n(qx)$ has common root. In the case when $p = q$ both polynomials $f_n(px)$ and $f_n(qx)$ have exactly n common roots. In case $a_n = 0$ one of the root is equal to zero, therefore resultant $\mathrm{Res}_x(f_n(px), f_n(qx))$ can be written in the form

$$\mathrm{Res}_x(f_n(px), f_n(qx)) = a_n (p - q)^n \, \mathrm{GD}_{p:q}(f_n), \tag{3}$$

where $\mathrm{GD}_{p:q}(f_n)$ is so called *generalized discriminant* of (1) introduced in [1].

Definition 3. The **chain** $\mathrm{Ch}^{(k)}_{p:q}(t_i)$ **of** $p : q$**-commensurable roots** of length k (shortly **chain of roots**) is called the finite part of geometric progression with common ratio p/q and scale factor t_i, each member of which is a root of (1). The value t_i is called the **generating root** of the chain.

The detail structure of (2) can be described with the set of *i-th generalized subdiscriminants* $\mathrm{GD}^{(i)}_{p:q}(f_n)$ [2], which are nontrivial factors of i-th subresultants of pair of polynomials $f_n(px)$ and $f_n(qx)$. Such subresultants can be computed as i-th inners of Sylvester matrix constructed from the coefficients of mentioned above polynomials. For more details see [3].

Theorem 1. *Polynomial $f_n(x)$ has exactly $n-d$ different chains of roots $\mathrm{Ch}^{(i)}_{p:q}(t_j)$, $j=1,\dots,n-d$ if and only if in the sequence $\left\{\mathrm{GD}^{(i)}_{p:q}(f_n), i=0,\dots,n-1\right\}$ of i-th generalized subdiscriminants of $f_n(x)$ the first nonzero subdiscriminant is d-th generalized subdiscriminant $\mathrm{GD}^{(d)}_{p:q}(f_n)$.*

3. Parametrization of the resonance set

Any partition λ of degree n of (1) defines a certain structure of its $p:q$-commensurable roots and it corresponds to some algebraic variety $\mathcal{V}^i_l$, $i=1,\dots,p_l(n)$ of dimension l in the coefficient space Π. The number of such varieties of dimension l is equal to $p_l(n)$ and total number of all varieties consisting the resonance set $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ is equal to $p(n)-1$.

Algorithm for parametric representation of any variety $\mathcal{V}_l$ from the resonance set (2) is based on the following

Theorem 2. *Let $\mathcal{V}_l$, $\dim\mathcal{V}_l=l$, be a variety on which (1) has l different chains roots and the chain $\mathrm{Ch}^{(m)}_{p:q}(t_1)$ has length $m>1$. Let $\mathbf{r}_l(t_1,t_2,\dots,t_l)$ is a parametrization of variety $\mathcal{V}_l$. Therefore the following formula*

$$\mathbf{r}_l(t_1,\dots,t_l,v)=\mathbf{r}_l(t_1,\dots,t_l)+\frac{p(v-p^{m-1}t_1)}{t_1(p^m-q^m)}\left[\mathbf{r}_l(t_1,\dots,t_l)-\mathbf{r}_l((q/p)t_1,\dots,t_l)\right] \quad (4)$$

gives parametrization of the part of variety $\mathcal{V}_{l+1}$, on which there exists $\mathrm{Ch}^{(m-1)}_{p:q}(t_1)$, simple root v and other chains of roots are the same as on the initial variety $\mathcal{V}_l$.

From the geometrical point of view Theorem 2 means that part of variety $\mathcal{V}_{l+1}$ is formed as ruled surface of dimension $l+1$ by the secant lines, which cross its directrix $\mathcal{V}_l$ at two points defined by such values of parameters t^1_1 and t^2_1 that $t^1_1:t^2_1=q:p$. If (1) has on the variety $\mathcal{V}_{l+1}$ pairs of complex-conjugate roots it is necessary to make continuation of obtained parametrization (4).

Let start from the partition $\left[n^1\right]$ which corresponds to variety $\mathcal{V}_1$ with the only chain $\mathrm{Ch}^{(n)}_{p:q}(t_1)$ of roots on it. One can apply transformation (4) in succession and finally one can obtain parametrization of variety $\mathcal{V}_{n-1}$ of the maximal dimension $\dim\mathcal{V}_{n-1}=n-1$. There exists only one chain of roots of the length 2 on it and other roots are simple.

Let define the following three operations, which make it possible to obtain parametrization of each variety $\mathcal{V}_l$ of dimensions from 2 to $n-1$.

ASCENT allows to pass from variety $\mathcal{V}_i$ to the part of another variety $\mathcal{V}_{i+1}$ with dimension one greater.

CONTINUATION allows to get the parametrization of the entier variety $\mathcal{V}_{i+1}$ obtained on the previous step.

DESCENT allows to pass from variety $\mathcal{V}_j$, on which there exist two chains of roots with equal length, say k, to variety $\mathcal{V}_{j-1}$, on which there exists a chain of roots with length $2k$.

One can combine successively mentioned above operations to obtain parametric representation of each variety $\mathcal{V}_i$ from the resonance set (2).

Statement 1. Resonance set $\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$ of real polynomial $f_n(x)$ for a certain value of commensurability coefficient $p:q$ allows polynomial parametrization of each its variety $\mathcal{V}_l\subset\mathcal{R}_{p:q}(f_n)$.

4. Application to the problem of formal stability

Resonance set of a cubic polynomial can be used for solving the problem of formal stability of a stationary point (SP) of a Hamiltonian system with three degrees of freedom. Let Hamiltonian function $H(\mathbf{z})$ is expanded in SP $H(\mathbf{z}) = \sum_{i=2}^{\infty} H_i(\mathbf{z})$, where $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{q}$ and $\mathbf{p}$ — are coordinates and momenta, $H_i(\mathbf{z})$ — are homogeneous functions of degree i. Characteristic polynomial $f(\lambda)$ of the linearized system $\dot{\mathbf{z}} = JA\mathbf{z}$, $A = \operatorname{Hess} H_2$, can be considered as is a monic cubic polynomial. Resonance sets (2) for $p = 1, 4, 9, 16$, $q = 1$, give the boundaries of subdomains in Π, where Bruno's Theorem of formal stability can be applied [1]. See [2, § 4.1] for details.

References

1. *Batkhin A. B.* Segregation of stability domain of the hamilton nonlinear systems // Automation and Remote Control. — 2013. — Vol. 74, no. 8. — P. 1269–1283.
2. *Batkhin A. B.* Structure of the resonance set of a real polynomial // Preprints of KIAM. — 2016. — no. 29. — (in Russian).
3. *Batkhin A. B.* Parameterization of the discriminant set of a polynomial // Programming and Computer Software. — 2016. — Vol. 42, no. 2. — P. 65–76.

УДК 512.62+004.421.6

Резонансное множество многочлена и его приложения

А. Б. Батхин[*†]

[*] *Отдел № 4, Сектор сингулярных задач,*
Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук»,
Миусская пл. 4, Москва, Россия, 125047
[†] *Кафедра теоретической механики,*
Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия, 141700

Изучается резонансное множество вещественного многочлена, т. е. множество всех значений пространства коэффициентов, при которых последний имеет соизмеримые корни. Предлагается конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации резонансного множества в пространстве коэффициентов многочлена. Структура резонансного множества многочлена степени n описывается в терминах разбиения числа n. Алгоритм параметрического представления всех компонент резонансного множества реализован в виде библиотеки в системе компьютерной алгебры `Maple`. Приведено описание резонансного множества кубического многочлена, а также дано приложение полученных результатов к решению проблемы формальной устойчивости положения равновесия многопараметрической системы Гамильтона с тремя степенями свободы.

Ключевые слова: теория исключения, субрезультант, компьютерная алгебра, формальная устойчивость положения равновесия.

UDC 519.677

Computing Polynomial Solutions to Hypergeometric Systems

D. V. Bogdanov, T. M. Sadykov

Department of Mathematics and Computer Science
Plekhanov Russian University
125993, Moscow, Russia

We present a Mathematica-based package for computing polynomial solutions to holonomic systems of partial differential equations of hypergeometric type.

Key words and phrases: Hypergeometric functions, amoebas, holonomic systems of partial differential equations.

Polynomial instances of hypergeometric functions in one and several variables are very diverse. They comprise the classical Chebyshev polynomials of the first and the second kind, the Gegenbauer, Hermite, Jacobi, Laguerre and Legendre polynomials as well as their numerous multivariate analogues [1].

Despite the diversity of families of hypergeometric polynomials, most of them share the following key properties that justify the usage of the term "hypergeometric":

1. The polynomials are dense (possibly after a suitable monomial change of variables).

2. The coefficients of a hypergeometric polynomial are related through some recursion with polynomial coefficients.

3. For univariate polynomials, there is typically a single representative (up to a suitable normalization) of a given degree within a family of hypergeometric polynomials.

4. All polynomials in the family satisfy a differential equation of a fixed order with polynomial coefficients (or a system of such equations) whose parameters encode the degree of a polynomial.

5. In the case of one dimension, the absolute values of the roots of a classical hypergeometric polynomial are all different (possibly after a suitable monomial change of variables).

6. Many of hypergeometric polynomials enjoy various extremal properties.

In the talk, we will introduce a definition of a multivariate hypergeometric polynomial in $n \geq 2$ complex variables that is coherent with the properties 1-6 listed above. Namely, with any integer convex polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ we associate a multivariate hypergeometric polynomial whose set of exponents is $\mathbb{Z}^n \cap P$. For this polynomial to be truly hypergeometric, we need to assume that any pair of points in $\mathbb{Z}^n \cap P$ can be connected by a polygonal line with unit sides and integer vertices. This assumption does not affect the generality of the results since any polytope that does not satisfy this condition gives rise to a finite number of hypergeometric polynomials that can be considered independently.

The hypergeometric polynomial associated with the polytope P is defined uniquely up to a constant multiple and satisfies a holonomic system of partial differential equations of Horn's type [4,5]. We prove that under certain nondegeneracy conditions the zero locus of any such polynomial is optimal in the sense of [2]. Generally speaking, this means that the topology of the amoeba [2,3] of such a polynomial is as complicated as it could possibly be. This property is the multivariate counterpart of the property of having different absolute values of the roots for a polynomial in a single variable. We will present software for computing multivariate hypergeometric polynomials and investigating distributions of their zeros.

Acknowledgments

The second author was supported by the grants of the Russian Foundation for Basic Research no. 15-31-20008-mol-a-ved and 14-01-00544-a.

References

1. *Dunkl C. F., Xu Y.* Orthogonal Polynomials of Several Variables. — Cambridge University Press, 2014.
2. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A. K.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas. — Adv. Math. **151** (2000) — P. 45-70.
3. *Mikhalkin G.* Real algebraic curves, the moment map and amoebas, Ann. Math. (2) **151**, (2000) — P. 309-326.
4. *Sadykov T. M.* On a multidimensional system of hypergeometric differential equations, Siberian Math. J. **39** (1998) — P. 986-997.
5. *Sadykov T. M., Tsikh A. K.* Hypergeometric and Algebraic Functions in Several Variables (Russian) — Nauka, 2014.

УДК 519.677

Вычисление полиномиальных решений гипергеометрических систем

Д. В. Богданов, Т. М. Садыков

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
Стремянный пер., 36, Москва, Россия, 117997

В докладе будет представлен пакет в системе компьютерной алгебры Mathematica для вычисления полиномиальных решений голономных систем дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа.

Ключевые слова: Гипергеометрические функции, амебы, голономные системы уравнений в частных производных.

УДК 519.632.4

Численно-аналитический алгоритм решения задачи Штурма-Лиувилля при большом значении параметра

А. А. Гусев*, О. Чулуунбаатар*, С. И. Виницкий*, Л. Л. Хай*, В. Л. Дербов†

* *Лаборатория теоретической физики, Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

† *Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, 410012, г. Саратов*

Представлен алгоритм решения параметрической задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на конечном интервале при больших значениях параметра. Решение ищется методом сшивки численного решения на одном из подынтервалов и аналитического решения на другом подынтервале. Эффективность алгоритма показана сравнением вычисленных решений с решениями параметрической задачи на собственные значения методом конечных элементов на всем интервале изменения независимой переменной при больших значениях параметра.

Ключевые слова: Параметрическая задача Штурма-Лиувилля, ОДУ второго порядка.

1. Введение

Математическая модель процессов туннелирования двухатомной молекулы через отталкивающие барьеры в s-волновом приближении описывается эллиптической краевой задачей в двумерной области [1]. Решение двумерной краевой задачи в якобиевских координатах ищется в виде разложения по собственным функциям задачи на собственные значения для ОДУ по относительной координате, а в полярных координатах в виде разложения Канторовича по набору угловых базисных функций — решений задачи на собственные значения, зависящей от радиальной переменной как от параметра, соответственно, ниже и выше порога диссоциации молекулы. В данной работе представлен алгоритм вычисления асимптотик собственных значений и угловых базисных функций при больших значениях параметра.

2. Постановка задачи

Уравнение, описывающее динамику задачи по относительной координате $x \geq 0$,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}(x) - \tilde{\varepsilon}\right)\phi(x) = 0, \tag{1}$$

имеет дискретный спектр, состоящий из конечного числа n связанных состояний с собственными функциями $\phi_j(x)$, $j = 1, n$ и собственными значениями $\tilde{\varepsilon}_j = -|\tilde{\varepsilon}_j|$ и непрерывный спектр собственных значений $\tilde{\varepsilon} > 0$ с соответствующими собственными функциями $\phi_{\tilde{\varepsilon}}(x)$.

При замене переменных $x{=}\rho\sin\varphi$, соответствующее уравнение Штурма-Лиувилля, описывающее динамику задачи по относительной координате $\varphi{\in}[0, \pi)$,

$$\left(-\frac{d^2}{d\varphi^2}+\rho^2 V(\rho\sin\varphi)-\varepsilon_j(\rho)\right)\phi_j(\varphi;\rho){=}0, \quad \int\limits_0^\pi d\varphi\phi_i(\varphi;\rho)\phi_j(\varphi;\rho){=}\delta_{ij}, \tag{2}$$

имеет вещественный дискретный спектр $\varepsilon_j(\rho) < 0$, $j = 1, n$ и $j = n+1, \ldots$ при всех значениях параметра $0 < \rho < \infty$. При больших значениях параметра ρ собственные

функции $\phi_j(\varphi;\rho)$, $j=1,n$ соответствуют собственным функциям $\phi_j(x)$ дискретного спектра задачи (‡), а собственные функции $\phi_j(\varphi;\rho)$, $j=n+1,...$ соответствуют собственным функциям $\phi_\varepsilon(x)$ непрерывного спектра задачи (‡). Антисимметричные относительно перестановки двух тождественных частиц решения удовлетворяют граничному условию Дирихле $\phi_j(0;\rho)=\phi_j(\pi;\rho)=0$. Поскольку потенциал краевой задачи (2) симметричен относительно $\varphi=\pi/2$, то четные и нечетные решения рассматриваются раздельно на интервале $\varphi\in[0,\pi/2]$. Более детально, на примере частиц, с потенциалом взаимодействия Морзе, постановка задачи и ее редукция Канторовича представлена в работе [1]. Цель данной работы состоит в построении алгоритма для вычисления асимптотик собственных значений и собственных функций задачи (2) при больших значениях параметра ρ.

3. Алгоритм вычисления асимптотик собственных значений и угловых собственных функций при больших значениях параметра

При больших ρ ширина потенциальной ямы $V(\rho\sin\varphi)$ в уравнении (2) убывает с ростом ρ. Этот факт позволяет линеаризовать аргумент $\rho\sin\varphi-\hat{x}_{eq}\ \to\ \rho(\varphi-\arcsin(\hat{x}_{eq}/\rho))$, в окрестности точки минимума потенциала $\hat{x}_{eq}$, т.е., при $|x-\hat{x}_{eq}|/\rho\ll 1$ в выражении потенциала $V(\rho\sin\varphi)$. Уравнение (2), в котором потенциал $V(\rho\sin\varphi)$ заменен на $V(\rho\varphi)$, заменой переменных $x=\rho\varphi$ сводится к уравнению (‡).

Как известно, собственные функции *дискретного спектра* $\varepsilon_j(\rho)<0$, $j=1,...,n$ локализованы внутри потенциальной ямы и экспоненциально малы вне ее, поэтому решения краевой задачи (2), в рамках указанных приближений, определяются из решений краевой задачи для уравнения (‡): $\varepsilon_j(\rho)=\rho^2\tilde{\varepsilon}_j$, $\phi_j(\varphi=x/\rho;\rho)=\sqrt{\rho}\phi_j(x)$.

Собственные функции *псевдосостояний* $\varepsilon_j(\rho)\ge 0$, $j=n+1,...$, в отличие собственных функций дискретного спектра не локализованы внутри потенциальной ямы, при этом $(n-1)$й узел находится около ее границы. Отсюда следует оценка собственных значений для псевдосостояний $\varepsilon_j(\rho)\approx(j-n)^2$, т.е. собственное значение $\tilde{\varepsilon}_j=\varepsilon_j(\rho)/\rho^2$ краевой задачи для уравнения (‡) будет малой величиной.

Алгоритм вычисления собственных значений и угловых собственных функций при больших значениях параметра.

1. Интервал $\varphi_0\le\varphi\le\pi/2$ делится на два подинтервала точкой $\varphi_\varepsilon=x_\varepsilon/\rho$: $\varphi_0<\varphi\le\varphi_\varepsilon$ и $\varphi_\varepsilon<\varphi\le\pi/2$. В общем случае $\varphi_0=x_0/\rho=0$, однако в случае высокого барьера в точке парного удара, когда собственные функции в ее окрестности экспоненциально убывают, в численных расчетах в качестве граничной точки выбираем $\varphi_0=x_0/\rho>0$. В численных расчетах, точка x_ε выбираем из условия $|V^{pair}(x>x_\varepsilon)|<eps$, где $eps>0$ заранее заданное малое число.

2. Собственные функции $\phi_j(\varphi;\rho)$ вычисляются в виде

$$\phi_j(\varphi;\rho)=\begin{cases} A_j(\rho)B_j(\varphi;\rho), & \varphi_0\le\varphi\le\varphi_\varepsilon,\\ C_j(\rho)\sqrt{\frac{2}{\pi}}F(\sqrt{\varepsilon_j(\rho)}(\varphi-\pi/2)), & \varphi_\varepsilon<\varphi\le\pi/2,\end{cases}\qquad(3)$$

где $F(*)=\sin(*)$ для нечетных собственных функций или $F(*)=\cos(*)$ для четных собственных функций, $A_j(\rho)$ и $C_j(\rho)$ – нормировочные множители.

3. Значения функций $B_j(\varphi_i;\rho):=B_j(x_i)$ и производных $B'_j(\varphi_i;\rho):=\rho B'_j(x_i)$ на заданной сетке $\Omega_\varphi=\{\varphi_1=\varphi_0,...,\varphi_i=x_i/\rho,...,\varphi_N=\varphi_\varepsilon\}$ определяются через значения функций $B_j(x_i)=B_i^{(0)}+B_i^{(1)}\tilde{\varepsilon}_j+B_i^{(2)}\tilde{\varepsilon}_j^2$ и производных $B'_j(x_i)=b_i^{(0)}+b_i^{(1)}\tilde{\varepsilon}_j+b_i^{(2)}\tilde{\varepsilon}_j^2$ на сетке $\Omega_x=\{x_1=x_0,...,x_i,...,x_N=x_\varepsilon\}$, вычисленные решением уравнения (‡) методом Рунге-Кутты с заданными начальными условиями $B_j(x_0)=0$, $B'_j(x_0)=1$, в котором отбрасываются третья и более высокие степени малой величины $\tilde{\varepsilon}_j=\varepsilon_j(\rho)/\rho^2$.

4. Уравнение для $\varepsilon_j(\rho)$ выводится из условия непрерывности решения $\phi_j(\varphi;\rho)$ и его производной $\phi'_j(\varphi;\rho)$ при $\varphi=\varphi_\varepsilon$.

Таблица 1
Сходимость разложения собственных значений $\varepsilon_j(\rho)$ псевдосостояний при $\rho = 50$ и их сравнение с численными результатами (NUM) метода конечных элементов

$(j-n)^2$	1.00000000	4.00000000	9.00000000	16.00000000
$+\varepsilon_j^{(1)}/\rho$	1.09010413	4.36041653	9.81093720	17.44166614
$+\varepsilon_j^{(2)}/\rho^2$	1.09619320	4.38477280	9.86573880	17.53909120
NUM	1.09614800	4.38462804	9.86554769	17.53908477

5. Собственное значение, $\varepsilon_j(\rho)$, ищется в виде ряда по обратным степеням параметра ρ: $\varepsilon_j(\rho)=(j-n)^2+\varepsilon_j^{(1)}/\rho+\varepsilon_j^{(2)}/\rho^2$, подстановка которого в уравнение шага **4**, приводит к системе линейных алгебраических уравнений, из которой определяются коэффициенты разложения $\varepsilon_j^{(1)}$ и $\varepsilon_j^{(2)}$, а затем коэффициенты $A_j(\rho)$ и $C_j(\rho)$.

В тестовом примере, в качестве потенциала взаимодействия $\tilde{V}(x)$ в уравнении (‡) был выбран потенциал Морзе $\tilde{V}^M(x) = \hat{D}\{\exp[-2(x-\hat{x}_{eq})\hat{\rho}]-2\exp[-(x-\hat{x}_{eq})\hat{\rho}]\}$ при $\hat{D} = 236.510003758401$, $\hat{x}_{eq} = 2.47$, $\hat{\rho} = 2.96812423381643$. Представленный алгоритм реализован в системе Maple. Полученные с его помощью асимптотические разложения совпадают с численным решением методом конечных элементов с точностью 4-5 значащих цифр для собственных значений и 2-3 значащие цифры для собственных функций, например, см. таблицу 1.

Благодарности

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-00420).

Список литературы

1. *Гусев А. А., Хай Л. Л.* Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Математика. Информатика. Физика — 2015 — № 1— С. 15–36.

UDC 519.632.4

Symbolic-Numerical Algorithm for Solving the Sturm–Liouville Problem at Large Values of Parameter

A. A. Gusev*, O. Chuluunbaatar*, S. I. Vinitsky*, L. L. Hai*, V. L. Derbov†

* *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia
† *National Research Saratov State University,*
83 Astrakhanskaya Street, Saratov, 410012

Algorithm for solving a parametric eigenvalue problem for the ordinary second order differential equation in a finite interval at large values of a parameter is presented. Solution are sought using matching method of numerical solution in one of subintervals and solution in analytical form in other subinterval. The efficiency of the algorithm is demonstrated by comparison of calculated solutions with solution of the parametric eigenvalue problem by finite element method on whole interval of independent variable at large values of the parameter.

Key words and phrases: parametric Sturm–Liouville problem, second order ODE.

УДК 519.632.4

Алгоритмы решения краевых задач для системы ОДУ второго порядка с кусочно-постоянными потенциалами

А. А. Гусев*, О. Чулуунбаатар*, С. И. Виницкий*, Л. Л. Хай*, В. Л. Дербов†

* *Лаборатория теоретической физики, Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*
† *Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, 410012, г. Саратов*

Представлены алгоритмы решения многоканальной задачи рассеяния и задачи на собственные значения волноводного типа для системы ОДУ второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами на оси. Дано сравнение результатов, полученных решением краевой задачи методом конечных элементов и методом сшивки фундаментальных решений системы ОДУ в точках разрыва коэффициентов.

Ключевые слова: Многоканальная задача рассеяния, задача на собственные значения, система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

1. Введение

Краевые задачи для систем N обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка волноводного типа

$$\left(-\mathbf{I}\frac{d^2}{dz^2}+\mathbf{V}(z)-E\,\mathbf{I}\right)\mathbf{\Phi}(z)=0,\quad \mathbf{\Phi}(z)=(\Phi_1(z),\ldots,\Phi_N(z))^T, \tag{1}$$

с матрицей кусочно-постоянных потенциалов $\mathbf{V}(z)=\{V_{ji}(z)\}$, $i,j=1,...,N$:

$$V_{ji}(z)=\{V_{ji;1},z{\leq}z_1,V_{ji;2},z{\leq}z_2,...,V_{ji;k-1},z{\leq}z_{k-1},V_{ji;k},z{>}z_{k-1}\} \tag{2}$$

возникают, например, при исследовании оптических многослойных систем.

2. Алгоритм сшивки фундаментальных решений

Шаг 1. На каждом из подынтервалов $z\in(z_{m-1},z_m)$, $m=1,...,k$, система N ОДУ (1) есть система ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\left(-\mathbf{I}\frac{d^2}{dz^2}+\mathbf{V}_m-E\,\mathbf{I}\right)\mathbf{\Phi}_m(z)=0, \tag{3}$$

которая имеет общее решение, явно зависящее от спектрального параметра E

$$\mathbf{\Phi}_m(z){=}\sum_{i=1}^{N}\left(A_i^{(m)}\exp\left(-\sqrt{\lambda_i^{(m)}{-}E}z\right)\mathbf{\Psi}_i^{(m)}{+}B_i^{(m)}\exp\left(\sqrt{\lambda_i^{(m)}{-}E}z\right)\mathbf{\Psi}_i^{(m)}\right). \tag{4}$$

Здесь $A_i^{(m)}$ и $B_i^{(m)}$ – неизвестные коэффициенты, $\mathbf{\Psi}_i^{(m)}$ и $\lambda_i^{(m)}$ – решения алгебраической задачи на собственные значения $\mathbf{V}_m\mathbf{\Psi}_i^{(m)}=\lambda_i^{(m)}\mathbf{\Psi}_i^{(m)}$, которые вычисляются численно.

Шаг 2.1. Для связанных состояний $E{<}\lambda_i$ асимптотические условия при $z\to\pm\infty$ описывают экспоненциально убывающие решения

$$\mathbf{\Phi}_*(z)=\sum_{i=1}^{N}A_i\exp\left(-\sqrt{\lambda_i{-}E}|z|\right). \tag{5}$$

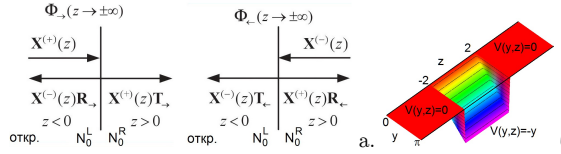


Рис. 1. а. асимптотические решения: «падающая волна + уходящие волны».
б. Двумерный потенциал

Шаг 2.2. Для метастабильных состояний $E^M = \mathrm{Re}\, E^M + \imath\, \mathrm{Im}\, E^M$, $\mathrm{Im}\, E^M < 0$ асимптотические условия при $z \to \pm\infty$ в открытых каналах, описывающие уходящие волны, в закрытых каналах экспоненциально убывающие решения

$$\mathbf{\Phi}_*(z) = \sum_{i=1}^{N} A_i \begin{cases} \exp\left(-\sqrt{\lambda_i - E^M}|z|\right) & \mathrm{Re}\, E^M < \lambda_i, \\ \exp\left(\imath\sqrt{E^M - \lambda_i}|z|\right), & \mathrm{Re}\, E^M > \lambda_i. \end{cases} \tag{6}$$

Шаг 2.3. Для многоканальной задачи рассеяния (при фиксированном значении $E \equiv \mathrm{Re}\, E$) вычисляется искомая матрица решений $\mathbf{\Phi}(z)$ с асимптотикой "падающая волна + уходящие волны" (см. рис. 1а) искомые $\mathbf{R}_{\rightarrow}$ и $\mathbf{R}_{\leftarrow}$ квадратные матрицы амплитуд отражения размерности $N_o^L \times N_o^L$ и $N_o^R \times N_o^R$, и $\mathbf{T}_{\rightarrow}$ и $\mathbf{T}_{\leftarrow}$ прямоугольные матрицы амплитуд прохождения размерности $N_o^R \times N_o^L$ и $N_o^L \times N_o^R$, где N_o^L и N_o^R число открытых каналов в асимптотических областях.

Шаг 3. Из условия непрерывности решений и их производных в точках разрыва z_m потенциалов (2), для многоканальной задачи рассеяния следует система $2N(k-1)$ неоднородных линейных уравнений с $2N(k-1)$ неизвестными, а для задачи на связанные или метастабильные состояния с учетом условия нормировки следует нелинейная система $2N(k-1)+1$ уравнений с $2N(k-1)+1$ неизвестными.

Шаг 4. Решается система уравнений, полученная на **шаге 3.**

3. Задачи на связанные и метастабильные состояния

В качестве примера, рассмотрим задачу на связанные и метастабильные состояния для уравнения Шредингера в области $\Omega_{yz} = \{y \in (0,\pi), z \in (-\infty,+\infty)\}$, с кусочно-непрерывным потенциалом $V(y,z) = \{-y, |z| < 2; 0, |z| \geq 2\}$, представленным на Рис. 1б. Решение ищется в виде разложения $\Psi(y,z) = \sum_i B_i(y)\Phi_i(z)$ по набору базисных функций $B_i(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin(iy)$, что приводит к системе ОДУ (1) с матрицей эффективных потенциалов (2)

$$V_{ij} = \{i^2\delta_{ij}, z \leq -2; i^2\delta_{ij} - \int_0^{\pi} y\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin(iy)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin(jy)dy, z \leq 2; i^2\delta_{ij}, z > 2\}.$$

Эта задача имеет два связанных и два метастабильных состояния. Собственные значения были вычислены при $N = 4$ с помощью алгоритма, реализующего метод сшивки фундаментальных решений в системе Maple: $E_1 = -0.357678006157$, $E_2 = 0.497673092637$ и $E_1^M = 2.767982443939 - \imath 0.000009778719$, $E_2^M = 3.59902052643 - \imath 0.02021392350$. Данные значения использовались для тестирования алгоритма и программы KANTBP 4M, реализующих метод конечных элементов (МКЭ) в системе Maple [1]. Расчеты МКЭ выполнялись с эрмитовыми элементами седьмого порядка (p'=7, p=3, $\kappa^{\max}$=2) на конечноэлементной сетке $\Omega_z = \{-8(4) - 2(4)2(4)8\}$, где в скобках указано число элементов. Расчеты связанных состояний с условиями Неймана и Дирихле дают

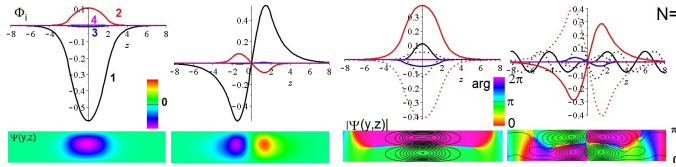


Рис. 2. Связанные и метастабильные состояния двумерной краевой задачи и соответствующей системы ОДУ

нижнюю и верхнюю оценки $\delta E_i = |E_i - E_i^{(\text{МКЭ})}|$ с точностью $\delta E_1 \approx 2.5 \cdot 10^{-7}$ и $\delta E_2 \approx 1.1 \cdot 10^{-4}$. Расчеты собственных значений связанных и метастабильных состояний и элементов матриц амплитуд отражения $\mathbf{R}$ и прохождения $\mathbf{T}$ многоканальной задачи рассеяния, полученные сшивкой фундаментальных решений на оси и МКЭ на сетке $\Omega_z' = \{-2(4)2\}$ с граничными условиями третьего рода и асимптотиками решений **шага 2**, совпадают с точностью порядка 10^{-10}.

Благодарности

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-00420).

Список литературы

1. *Гусев А.А., Хай Л.Л., Чулуунбаатар О., Виницкий С.И.*, Программа KANTBP 4M решения краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, 2015 – http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/kantbp4m.

UDC 519.632.4

Algorithms for Solving Boundary Value Problems for a System of Second-Order ODE with Piecewise Constant Potentials

A. A. Gusev*, O. Chuluunbaatar*, S. I. Vinitsky*, L. L. Hai*, V. L. Derbov†

* *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia
† *National Research Saratov State University,*
83 Astrakhanskaya Street, Saratov, 410012

The algorithms for solving the multichannel scattering and eigenvalue problems of the waveguide type for a system of the second order ODEs with piecewise constant coefficients in the axis. A comparison of the results obtained by the solution of the boundary value problem by the finite element method and matching method of fundamental solutions of the system of ODEs in the points of a discontinuities of potentials.

Key words and phrases: Multichannel scattering problem, eigenvalue problem, system of second order ordinary differential equations.

УДК 519.6:530.145.7:531.19

Системы компьютерной алгебры при исследовании статистических систем

Е. Г. Еферина[*], **А. В. Королькова**[*], **Д. С. Кулябов**[*†], **Л. А. Севастьянов**[*‡]

[*] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*

[†] *Лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

[‡] *Лаборатория теоретической физики, Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Методика стохастизации одношаговых процессов базируется на разложении основного кинетического уравнения и получении приближенных моделей. Для исследования самого основного кинетического уравнения предлагается использовать статистическую теорию возмущений, подобную реализованной в рамках квантовой теории поля. Для этого описана методика и создан аналитический программный комплекс приведения основного кинетического уравнения к операторной форме в фоковском представлении. Для решения получившегося уравнения в рамках программного комплекса проводится генерация фейнмановских диаграмм для соответствующего порядка теории возмущений. В качестве системы символьных вычислений была применена система FORM.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения; основное кинетическое уравнения; уравнение Фоккера–Планка; системы компьютерной алгебры; система FORM.

1. Введение

При стохастизации одношаговых процессов в результате получается три вида дифференциальных уравнений: основное кинетическое уравнение, уравнение типа уравнения Фоккера–Планка и стохастическое диференциальное уравнение типа уравнения Ланжевена [1]. Последние два получаются как приближенный вариант основного кинетического уравнения. И если методы решения стохастических дифференциальных уравнений хорошо известны (например, стохастические методы Рунге–Кутты), то решение дифференциальных уравнений в частных производных представляет определенную проблему.

В качестве методики решения данных уравнений предлагается использовать методы статистической теории возмущений, подобные методам, разработанным в рамках квантовой теории поля [2, 3].

Основное кинетическое уравнение записывается в представлении Фока. Схемам взаимодействия ставятся в соответствие диаграммы Фейнмана. Далее для основного кинетического уравнения вычисляются фейнмановские диаграммы для соответствующего порядка теории возмущения. Построение фейнмановских диаграмм производится на основе системы компьютерной алгебры FORM [4, 5].

2. Представление Фока

Для реализации абстрактного подхода используется представление чисел заполнения. Для изменения состояния системы используют операторы рождения и уничтожения. Методика применения формализма вторичного квантования для неквантовых систем (статистических, детерминированных) была рассмотрена в целом ряде статей [2, 6].

Взаимодействие элементов системы описывается с помощью схем взаимодействия (рис. 1 и 2):

$$I_j^{i\underline{\alpha}}\varphi^j \underset{-k_{\underline{\alpha}}}{\overset{+k_{\underline{\alpha}}}{\rightleftharpoons}} F_j^{i\underline{\alpha}}\varphi^j, \tag{1}$$

здесь греческие индексы задают количество взаимодействий, а латинские — размерность системы. Коэффициенты ${}^{+}k_{\underline{\alpha}}$ и ${}^{-}k_{\underline{\alpha}}$ имеют смысл интенсивности (скорости) взаимодействия.

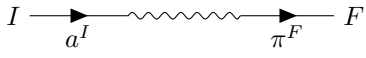


Рис. 1. Прямая реакция

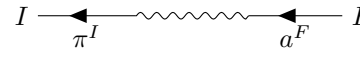


Рис. 2. Обратная реакция

Здесь используются операторы рождения (π) и уничтожения (a):

$$\pi\,|n\rangle = |n+1\rangle\,, \quad a\,|n\rangle = n\,|n-1\rangle\,, \qquad [a,\pi] = 1. \tag{2}$$

В формализме чисел заполнения основное кинетическое уравнение переходит в уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,|\varphi(t)\rangle = L\,|\varphi(t)\rangle\,. \tag{3}$$

Оператор Лиувилля, записывается через схемы взаимодействия (1) в следующем виде:

$$L = \sum_{\underline{\alpha},\underline{i}} \left[{}^{+}k_{\underline{\alpha}} \left(\pi_{\underline{i}}{}^{F^{\underline{i\alpha}}} - \pi_{\underline{i}}{}^{I^{\underline{i\alpha}}} \right) a_{\underline{i}}{}^{I^{\underline{i\alpha}}} + {}^{-}k_{\underline{\alpha}} \left(\pi_{\underline{i}}{}^{I^{\underline{i\alpha}}} - \pi_{\underline{i}}{}^{F^{\underline{i\alpha}}} \right) a_{\underline{i}}{}^{F^{\underline{i\alpha}}} \right]. \tag{4}$$

3. Заключение

Введенный формализм представляется удобным для унифицированного описания стохастических систем.

Программный комплекс содержит две принципиальные части. Первая часть реализует методику стохастизации одношаговых процессов. Вторая создает структуру для решения основного кинетического уравнения в операторном подходе теории возмущений.

Данный подход представляется крайне продуктивным при решении статистических задач: популяционная динамика, эпидемиологические модели, моделей телекоммуникационных систем [7]. Данный подход не ограничен рамками одношаговых моделей. Вполне возможным представляется его расширение и на другие стохастические процессы.

Благодарности

Работа частично поддержана грантами РФФИ №№ 14-01-00628, 15-07-08795 и 16-07-00556.

Список литературы

1. *Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A.* The method of stochastization of one-step processes // Mathematical Modeling and Computational Physics. — Dubna : JINR, 2013. — P. 67.
2. *Doi M.* Second quantization representation for classical many-particle system // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1976. — Vol. 9, no. 9. — P. 1465–1477.
3. *Hnatič M., Eferina E. G., Korolkova A. V. et al.* Operator Approach to the Master Equation for the One-Step Process // *EPJ Web of Conferences*. — 2016. — Vol. 108. — P. 02027. — 1603.02205.

4. *Hahn T.* Generating and Calculating One-loop Feynman Diagrams with FeynArts, FormCalc, and LoopTools. — 1999. — P. 5. — 9905354.
5. *Vermaseren J. A. M., Kuipers J., Tentyukov M. et al.* FORM version 4.1 Reference manual. — 2013.
6. *Doi M.* Stochastic theory of diffusion-controlled reaction // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1976. — Vol. 9, no. 9. — P. 1479–1495.
7. *Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A.* The method of constructing models of peer to peer protocols // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE, 2014. — P. 557–562. — 1504.00576.

UDC 519.6:530.145.7:531.19

Application of Computer Algebra Systems for the Study of the Statistical Systems

E. G. Eferina[*], A. V. Korolkova[*], D. S. Kulyabov[*†], L. A. Sevastianov[*‡]

[*] *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia
[†] *Laboratory of Information Technologies*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia
[‡] *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

Methodology of stochastization of one-step processes is based on the expansion of the master equation and obtaining the approximate models. It is proposed to treat the master equation with the help of statistic perturbation theory (as in the frame of quantum field theory). For this purpose, the methodology was described and the analytical software complex was constructed to put the main kinetic equation in the operator form in the Fock representation. To solve the resulting equation the software complex generates Feynman diagrams of the corresponding order of perturbation theory. We applied the FORM system as a system of symbolic computation.

Key words and phrases: stochastic differential equations; master equation; Fokker–Planck equation; computer algebra software; FORM CAS.

UDC 519.62; 530.145; 519.614

Calculation of Transition Probabilities for the Atoms and Ions with One Valence Electron in the Operational Model of Quantum Measurements Using Methods of Computer Algebra

A. V. Gorbachev*, L. A. Sevastianov*†

* *Peoples' Friendship University of Russia*
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia
† *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

Recent findings proved the consistency of the Kuryshkin-Wódkiewicz model of quantum measurements with implementation of Weyl-Kuryshkin quantization rule applied to the extended quantum Kepler problem of quantum systems with one valence electron, such as alkali metal atoms. In this work computer algebra methods of Maple were used to formulate a procedure for calculating transition probabilities in quantum systems with one valence electron based on Kuryshkin-Wódkiewicz model of quantum measurements. Calculations of transition propabilities were developed as a module integrated into dedicated QDF package containing mathematical apparatus of the quantum measurement model.

Key words and phrases: computer algebra, quantum measurement model, quantization rule, transition probabilities.

1. Introduction

The key problem in calculation of the probabilities of radiative transitions of the atom is determination of the wave functions. This problem is particularly important in case of many-electron atoms as Schrödinger equation can not be solved immediately neither with analytical nor numerical methods. In [1] the Kuryshkin-Wódkiewicz model with implementation of Weyl-Kuryshkin quantization rule [2,3] was applied to the quantum systems with one valence electron like alkali metal atoms. The proof of the consistency of the model is based on two Kato theorems [4]. The explicit form of the discrete spectrum of the valence electron for various spectral series, depending on the serial parameters of the disturbance spectrum of an isolated object in the process of quantum measurement was achieved. In this work we use Maple computer algebra system to implement a procedure for computing transition probabilities in quantum measurement model.

2. Calculation of the probabilities of radiative transitions of the alkali-like atoms

The scheme of calculating the transition probabilities in quantum measurement model can be divided into six main stages (Figure 1):

1. Symbolic computation of the Ritz matrix.
2. Solution of the generalized eigenvalue problem(atom spectrum calculation).
3. Fitting the calculated eigenvalues to measured experimentally spectral series.
4. Extraction of the eigenvectors C_{nlm} belonging to a certain spectral series.
5. Calculation of the polarizations.
6. Transition probabilities calculation.

Ritz matrix and atom spectra are calculated using predefined functions in dedicated QDF package for Maple [5]. Considering the fact that symbolic calculations of high-dimensional Ritz matrix is a time-consuming process, this process was made as a stand-alone module with import/export functionality.

The transition probabilities are calculated by the Galerkin method with Sturm's functions of the hydrogen atom as coordinate functions, which allows to reduce calculation to algebraic operations with matrix elements calculated analytically.

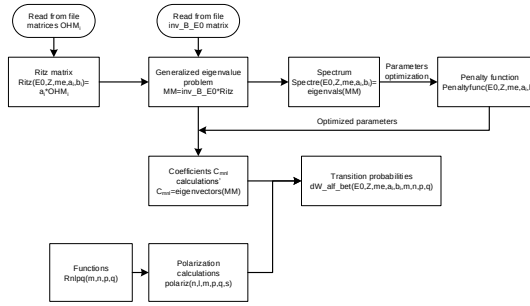


Figure 1. Transition probabilities computation in quantum measurement model

Spectral optical wave functions of the electron in the alkali metal atoms are linear combinations of the basis Sturm's functions, therefore:

$$\psi_i(\vec{r}) = \sum C^i_{nlm} S_{nl}\left(\frac{r}{b^i_{nr}}\right) Y_{lm}(\vartheta,\phi), \tag{1}$$

where S_{nl} - Sturm's functions and Y_{lm} - spherical harmonics, both calculated in CAS Maple, i = 1..N, where N - number of basis functions.

General expression for the probability of transition from the state of α in the state β with the emission of a photon with a polarization $\vec{e}_\rho$ in the direction of $\vec{k}$ is

$$dW_{\rho\vec{k}}(\alpha,\beta) = \frac{e^2\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\left|\vec{e}_{\rho\vec{k}}\left\langle\psi_\alpha\left|\vec{r}\right|\psi_\beta\right\rangle\right|^2 \tag{2}$$

The contribution of the polarization in the calculation of the transition probability is determined by the formula

$$\vec{e}_{\rho\vec{k}}\sum\sum\left\langle nlm\left|\vec{r}\right|pqs\right\rangle = \sum_{nlm} C^\alpha_{nlm}\sum_{pqs}\bar{C}^\beta_{pqs}\left\langle nlm\left|z\right|pqs\right\rangle +$$
$$+\sum_{nlm} C^\alpha_{nlm}\sum_{pqs}\bar{C}^\beta_{pqs}\left\langle nlm\left|x+iy\right|pqs\right\rangle + \sum_{nlm} C^\alpha_{nlm}\sum_{pqs}\bar{C}^\beta_{pqs}\left\langle nlm\left|x-iy\right|pqs\right\rangle. \tag{3}$$

If there no preferred directions in space defined by external perturbation, the atom can be with equal probability in any of the states $\alpha = (\alpha_r\alpha_\vartheta\alpha_\phi)$. Therefore, the probability of transition from the level of $(\alpha_r\alpha_\vartheta)$ to the level $(\beta_r\beta_\vartheta)$ can be obtained by summing (2) on β_ϕ and averaging over α_ϕ (i.e., summing over α_ϕ and dividing by $(2\alpha_\vartheta+1)$):

$$dW_{\rho\vec{k}}(\alpha_r\alpha_\vartheta,\beta_r\beta_\vartheta) = \frac{e^2\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\frac{1}{2\alpha_\vartheta+1}\sum_{\alpha_\phi,\beta_\phi}\left|\vec{e}_{\rho\vec{k}}\left\langle\alpha\left|\vec{r}\right|\beta\right\rangle\right|^2 \tag{4}$$

As a result we have a Maple procedure

```
dW_alf_bet(E0,b1,...,bi,a1,..,ai,Z,me,matrsize,m,n,p,q)
```

depending on parameters and dimension of Ritz matrix and set of constants. Maple allows us to study the behavior of the model by varying these parameters without additional numeric calculations.

3. Conclusion

In previous studies [6] was shown the process of using the quantum measurements model of Kuryshkin-Wódkiewicz to recover the spectrum of the quantum oscillator. Recent work [1] made it possible to use this model for a wide class of quantum systems with one valence electron, such as alkali metals. Here we present the way to analytical calculate transition probabilities for such systems. This opens up the possibility of a numerical study of the optical properties of alkali metal atoms in a model of quantum measurement.

References

1. A.V. Gorbachev, L.A. Sevastianov, A.V. Zorin: Kuryshkin-Wódkiewicz model of quantum measurements for atoms and ions with one valence electron. Bull. PFUR. Ser. MIPh, No 2, 2016.
2. A.V. Zorin, L.A. Sevastianov, and G.A. Belomestny. Numerical search for the states with minimal dispersion in quantum mechanics with non–negative quantum distribution function. In Numerical Analysis and Its Applications, pages 613–620. Springer, 2004.
3. A.V. Zorin and L.A. Sevastianov. Kuryshkin-Wódkiewicz quantum measurement model. Bull. PFUR, ser. MIPh, 3:98–103, 2010.
4. A.V. Zorin and L.A. Sevastianov. Hydrogen-like atom with nonnegative quantum distribution function. Physics of Atomic Nuclei, 70:792–799, 2007.
5. L. Sevastianov, A. Zorin, A. Gorbachev. Pseudo-Differential Operators in the Operational Model of a Quantum Measurement of Observables. Lecture Notes in Computer Science., vol. 7125, 174-181 (2012)
6. A.V. Zorin, L.A. Sevastianov, and N. P. Tretyakov. Computer modeling of hydrogen-like atoms in quantum mechanics with nonnegative distribution function. Programming and Computer Software, v. 33, No 2, 94–104 (2007)

УДК 519.62; 530.145; 519.614

Применение методов компьютерной алгебры для расчета переходных вероятностей атомов и ионов с одним валентным электроном в модели квантовых измерений

А. В. Горбачев[*], **Л. А. Севастьянов**[*†]

[*] *Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*
[†] *Лаборатория теоретической физики, Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Ранее была доказана состоятельность модели квантовых измерений Курышкина-Вудкевича, реализующая правило квантования Вейля-Курышкина в приложении к квантовой задаче Кеплера для квантовых систем с одним валентным электроном, таких как атомы щелочных металлов. В данной работе методы компьютерной алгебры реализованные на базе ПО Maple были использованы для численного расчета переходных вероятностей атомов щелочных металлов в рамках модели Курышкина-Вудкевича. Расчет переходных вероятностей реализован в виде модуля к разработанному ранее программному пакету QDF с математическим аппаратом модели квантовых измерений Курышкина-Вудкевича.

Ключевые слова: Компьютерная алгебра, модель квантовых измерений, правило квантования, переходные вероятности.

UDC 517.925.7

The Maillet-Malgrange Type Theorem for Generalized Power Series

R. R. Gontsov*, I. V. Goryuchkina†

* *Institute for Information Transmission Problems of RAS*
Bolshoy Karetny per. 19, Moscow, 127994, Russia
† *Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS*
Miusskaya sq. 4, Moscow, 125047, Russia

There is proposed the Maillet–Malgrange type theorem for a generalized power series (having complex power exponents) formally satisfying an algebraic ordinary differential equation. The theorem describes the growth of the series coefficients.

Key words and phrases: algebraic ODE, generalized power series solution, Maillet theorem.

1. Introduction

Our talk concerns the theory of formal solutions of differential equations in a complex domain. For classical power series solutions there exist standard program functions of computer algebra that allow to compute such formal solutions or their sums. Moreover, when one can not compute the sum of a series by means of standard functions, some results of the French school are applied to determine the growth of coefficients (the Gevrey order of a series). In some cases this allows to choose a method of a series summation.

As for generalized power series (that is, power series with complex power exponents) they also appear rather often among formal solutions of differential equations. There exist some methods of their computation based on selecting leading terms of an equation by means of the Newton-Bruno polygon. These methods are partially programmed by students of professor Bruno. It is worth to note that a standard mathematical software does not contain such functions.

The first step on the way of possible constructing a similar summation theory for generalized power series is, as in the classical case, to obtain estimates for the growth of a series coefficients. Here we propose such estimates generalizing the (classical) Maillet-Malgrange theorem.

2. Main section

Let us consider an ordinary differential equation (ODE)

$$F(x, y, \delta y, \dots, \delta^m y) = 0 \tag{1}$$

of order m with respect to the unknown y, where $F(x, y_0, y_1, \dots, y_m) \not\equiv 0$ is a polynomial of $m+2$ variables, $\delta = x\frac{d}{dx}$.

The classical Maillet theorem [1] asserts that any formal power series solution $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ of (1) is a power series of Gevrey order $1/k$, for some $k \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$. This means that the power series

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\Gamma(1+n/k)}\, x^n$$

converges in a neighbourhood of zero, where Γ is the Euler gamma-function. In other words,

$$|c_n| \leqslant A\, B^n\, (n!)^{1/k},$$

for some $A, B > 0$.

First exact estimates for the Gevrey order of a power series formally satisfying an ODE were obtained by J.-P. Ramis [2] in the linear case,

$$Ly = a_m(x)\delta^m y + a_{m-1}(x)\delta^{m-1}y + \ldots + a_0(x)y = 0, \qquad a_i \in \mathbb{C}\{x\}.$$

He has proved that such a power series is of the *exact* Gevrey order $1/k \in \{0, 1/k_1, \ldots, 1/k_s\}$, where $k_1 < \ldots < k_s < \infty$ are all of the positive slopes of the Newton polygon $\mathcal{N}(L)$ of the operator L. This polygon is defined as the boundary curve of a convex hull of a union $\bigcup_{i=0}^m X_i$,

$$X_i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leqslant i,\ x_2 \geqslant \operatorname{ord}_0 a_i\}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m.$$

The exactness of the Gevrey order means that there is no $k' > k$ such that the power series is of the Gevrey order $1/k'$.

The result of Ramis has been further generalized by B. Malgrange and Y. Sibuya for a non-linear ODE of the general form (1).

Theorem 1 (Malgrange [3]). *Let $\varphi \in \mathbb{C}[[x]]$ satisfy the equation (1), that is $F(x, \Phi) = 0$, where $\Phi = (\varphi, \delta\varphi, \ldots, \delta^m\varphi)$, and $\frac{\partial F}{\partial y_m}(x, \Phi) \neq 0$. Then φ is a power series of Gevrey order $1/k$, where k is the least of all the positive slopes of the Newton polygon $\mathcal{N}(L_\varphi)$ of a linear operator*

$$L_\varphi = \sum_{i=0}^m \frac{\partial F}{\partial y_i}(x, \Phi)\, \delta^i$$

(or $k = +\infty$, if $\mathcal{N}(L_\varphi)$ has no positive slopes).

The refinement of Theorem 1 belongs to Sibuya [4, App. 2]. This claims that φ is a power series of the *exact* Gevrey order $1/k \in \{0, 1/k_1, \ldots, 1/k_s\}$, where $k_1 < \ldots < k_s < \infty$ are all of the positive slopes of the Newton polygon $\mathcal{N}(L_\varphi)$.

The main result of the present talk is an analog of the Maillet theorem (more precisely, of the Malgrange theorem) for a generalized power series

$$\varphi = \sum_{n=0}^\infty c_n x^{s_n}, \qquad c_n \in \mathbb{C}, \qquad s_n \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

with the power exponents satisfying conditions

$$0 \leqslant \operatorname{Re} s_0 \leqslant \operatorname{Re} s_1 \leqslant \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} s_n = +\infty.$$

Theorem 2. *Let the generalized power series (2) formally satisfy the equation (1), $\frac{\partial F}{\partial y_m}(x, \Phi) \neq 0$, and for each $i = 0, 1, \ldots, m$ one have*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(x, \Phi) = A_i x^\lambda + B_i x^{\lambda_i} + \ldots, \qquad \operatorname{Re}\lambda_i > \operatorname{Re}\lambda,$$

where not all A_i equal zero. Let k be the least of all the positive slopes of the Newton polygon $\mathcal{N}(L_\varphi)$ (or $k = +\infty$, if $\mathcal{N}(L_\varphi)$ has no positive slopes). Then for any sector S of sufficiently small radius with the vertex at the origin and of the opening less than 2π, the series

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{\Gamma(1 + s_n/k)}\, x^{s_n}$$

converges uniformly in S.

Remark 1. For the generalized power series (2) one may naturally define the *valuation*

$$\operatorname{val}\varphi = s_0,$$

and this is also well defined for any polynomial in $x, \varphi, \delta\varphi, \dots, \delta^m\varphi$. Then the Newton polygon of L_φ is described similarly to the classical case: this is the boundary curve of a convex hull of a union

$$\bigcup_{i=0}^{m} \Big\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leqslant i,\ x_2 \geqslant \operatorname{Re}\operatorname{val}\frac{\partial F}{\partial y_i}(x, \Phi) \Big\}.$$

Note that $k = +\infty$ in Theorem 2 if and only if $A_m \neq 0$. In this case φ converges in S.

Remark 2. From Theorem 2 one deduces the following estimate for the coefficients c_n of the formal series solution (2) of (1):

$$|c_n| \leqslant A\, B^{\operatorname{Re} s_n} |\Gamma(1 + s_n/k)|,$$

for some $A, B > 0$.

Acknowledgments

The work is supported by RFBR-CNRS grant No 16-51-150005.

References

1. *Maillet E.* Sur les séries divergentes et les équations différentielles // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. — Vol. 3 (1903). — P. 487–518.
2. *Ramis J.-P.* Dévissage Gevrey // Astérisque — Vol. 59/60 (1978). — P. 173–204.
3. *Malgrange B.* Sur le théorème de Maillet // Asympt. Anal. — Vol. 2 (1989). — P. 1–4.
4. *Sibuya Y.* Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation // Transl. Math. Monographs. — Vol. 82, A.M.S., 1990.

УДК 517.925.7

Теорема Майе-Мальгранжа для обобщенных степенных рядов

Р. Р. Гонцов*, И. В. Горючкина†

* *Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН*
Большой Каретный переулок 19, Москва, Россия, 127994
† *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*
Миусская площадь 4, Москва, Россия, 125047

Предлагается теорема Майе-Мальгранжа для обощенного степенного ряда (имеющего комплексные показатели степени), формально удовлетворяющего алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению. Эта теорема описывает рост коэффициентов такого ряда.

Ключевые слова: алгебраическое ОДУ, обобщенный степенной ряд, формальное решение, теорема Майе.

УДК 629.07.01

Применение методов компьютерной алгебры для исследования влияния аэродинамических сил на стационарные движения спутника

С. А. Гутник[*], **В. А. Сарычев**[†]

[*] *Кафедра информатики и вычислительной матаематики, Московский физико-технический институт, Институтский переулок, д.9, г. Долгопрудный, Россия, 141700*

[†] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл. дом 4, Москва, Россия, 125047*

С использованием методов компьютерной алгебры исследованы свойства нелинейной алгебраической системы, определяющей стационарные движения спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Найдены бифуркационные значения параметров задачи, при которых изменяется число положений равновесия. Проведен детальный символьно-численный анализ эволюции областей существования различного числа равновесий в пространстве безразмерных параметров

Ключевые слова: компьютерная алгебра, базис Гребнера, спутник, аэродинамический момент, равновесия.

1. Введение

В данной работе представлены результаты применения методов компьютерной алгебры в астродинамике. К одному из крупных разделов астродинамики относится тема исследования задач пассивной ориентации искусственных спутников Земли. При разработке пассивных систем ориентации можно использовать свойства гравитационного и магнитного полей, эффект сопротивления атмосферы и давление солнечного излучения, гироскопические свойства вращающихся тел и др. Важное свойство пассивных систем ориентации заключается в возможности функционировать продолжительное время без расходования энергии. Учет влияния на спутник аэродинамических сил позволяет получить новые, более сложные, положения равновесия спутника, интересные для практических приложений. В представленной работе предложен метод, основанный на алгоритмах построения базисов Гребнера и понятия результанта, определения всех положений равновесия спутника при заданных значениях вектора аэродинамического момента и главных центральных моментов инерции и получены условия их существования в зависимости от безразмерных параметров системы. Найдены бифуркационные значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия. Проведен детальный символьно-численный анализ эволюции областей существования различного числа равновесий в пространстве безразмерных параметров.

2. Исследование стационарных движений спутника

Рассмотрим движение спутника–твердого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Введем орбитальную систему координат $OXYZ$ и связанную со спутником систему координат $Oxyz$.

Ориентацию системы $Oxyz$ относительно системы $OXYZ$ определим с помощью самолетных углов α, β и γ. Направляющие косинусы осей Ox, Oy, Oz в орбитальной системе координат задаются выражениями, представленными в [1], [2], а уравнения движения спутника относительно его центра масс запишутся в виде

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr - 3\omega_0^2(C-B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(H_2a_{13} + H_3a_{12}) = 0,\\ B\dot{q} + (A-C)rp - 3\omega_0^2(A-C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(H_3a_{11} + H_1a_{13}) = 0,\\ C\dot{r} + (B-A)pq - 3\omega_0^2(B-A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(H_1a_{12} + H_2a_{11}) = 0; \end{aligned} \qquad (1)$$

$$p = (\dot\alpha + \omega_0)a_{21} + \dot\gamma, \quad q = (\dot\alpha + \omega_0)a_{22} + \dot\beta\sin\gamma,$$
$$r = (\dot\alpha + \omega_0)a_{23} + \dot\beta\cos\gamma.$$

В уравнениях (1) $H_1 = -Qa/\omega_0^2$, $H_2 = -Qb/\omega_0^2$, $H_3 = -Qc/\omega_0^2$; A, B и C – главные центральные моменты инерции спутника; p, q, r – проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси Ox, Oy, Oz; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите; Q – действующая на спутник сила сопротивления; a, b, c – координаты центра давления спутника в системе координат $Oxyz$.

Положив в (1) $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0-$ постоянные величины, получим с использованием безразмерных параметров $h_i = H_i/(B-C)$, $\nu = (B-A)/(B-C)$ при $A \neq B \neq C$ алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33} + h_2a_{13} - h_3a_{12} &= 0,\\ (1-\nu)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - h_3a_{11} + h_1a_{13} &= 0,\\ \nu(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{12} + H_2a_{11} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) вместе шестью условиями ортогональности для направляющих косинусов

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3} = \delta_{ij}, \tag{3}$$

где δ_{ij} символ Кронекера $(i, j = 1, 2, 3)$, образуют алгебраическую систему девяти уравнений для определения всех направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Для системы уравнений (2) и (3) ставится следующая задача: для заданных параметров задачи требуется определить все девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника.

В данной работе с использованием методов компьютерной алгебры проводится исследование положений равновесия гиростата для общего случая, когда $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$, $h_3 \neq 0$. [3], [4] и для случаев, когда вектор аэродинамического момента параллелен плоскости любых двух главных центральных осей инерции, например, Oxy ($h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$, $h_3 = 0$) [1].

Для нахождения решения алгебраической системы (2), (3) применялся алгоритм построения базисов Гребнера [5] и понятие результанта. Используя реализованный в системе компьютерной алгебры Maple [6] пакет построения базисов Гребнера Groebner[gbasis] с опцией линейного упорядочения по степеням $tdeg$, был построен базис Гребнера для системы полиномов (2), (3). Получить алгебраическое уравнение от одной неизвестной в базисе Гребнера не удается вследствие большого числа параметров. Тем не менее, учитывая однородность двух уравнений в базисе Гребнера и переходя к новым неизвестным $x = a_{31}/a_{33}$, $y = a_{32}/a_{33}$, можно получить алгебраическую систему двух уравнений относительно переменных x и y. После исключения из системы двух уравнений y с использованием понятия результанта, можно получить путем символьных вычислений определителя матрицы результанта алгебраическое уравнение двенадцатого порядка относительно x

$$\begin{aligned} p_0x^{12} &+ p_1x^{11} + p_2x^{10} + p_3x^9 + p_4x^8 + p_5x^7 +\\ &+ p_6x^6 + p_7x^5 + p_8x^4 + p_9x^3 + p_{10}x^2 + p_{11}x + p_{12} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

коэффициенты которого представляют собой полиномы 8 степени от параметров системы h_1, h_2, h_3 и ν:

$$\begin{aligned} p_0 &= h_1^4h_3^4\nu^6,\ p_1 = -2\nu^5h_1^3h_3^3[2h_1^2 + h_2^2(1-\nu) - 2\nu h_3^2 - 3\nu(1-\nu)], \dots\\ p_{11} &= 2h_1^3h_3^3[(2h_1^2 + h_2^2(1-\nu) - 2\nu h_3^2 - 3\nu(1-\nu)], \quad p_{12} = h_1^4h_3^4. \end{aligned} \tag{5}$$

Выражения коэффициентов уравнения (4) представляют собой очень громоздкий вид и занимают более 2 страниц текста (78 строк) [4].

Уравнения (4), (5) позволяют определить все положения равновесия спутника при заданных значениях параметров. Зависимость числа действительных решений уравнения (4) от значений параметров исследовалась численно с использованием пакета Mathematica 8.0 [7]. Численный анализ числа действительных корней уравнения (4) проводился при положительных значениях h_1, h_2, h_3 и при условии $0 < \nu < 1$. Вычисления выполнялись в узлах равномерной сетки на плоскости (h_1, h_2) при фиксированных значениях ν и h_3. Численно определялись граничные точки в которых происходит смена числа действительных корней. Фактически вычислялся двумерный срез дискриминантной гиперповерхности, который задается неявно алгебраическим уравнением от двух параметров $g(h_1, h_2) = 0$.

С учетом того, что уравнение (4) было получено при условии $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$, $h_3 \neq 0$, решения для нулевых значений параметров h_1, h_2, h_3 определялись из исходной системы (2), (3) путем построения базиса Гребнера с опцией лексикографического упорядочения *plex*. В результате для случая, когда, например, $h_3 = 0$ в базисе Гребнера было получено биквадратное уравнение от одной неизвестной $z = a_{33}$ в виде

$$P(z) = P_1(z)P_2(z) = 0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
P_1(z) &= z(z^2-1),\\
P_2(z) &= p_0 z^4 + p_1 z^2 + p_2,\\
p_0 &= 9(1-\nu)^2 p_3^2,\\
p_1 &= p_3(h_1^6 - (1-\nu)(6\nu-(3-\nu)h_2^2)h_1^4 -\\
&- (1-\nu)^2((2\nu-3)h_2^4 + 9\nu^2(2h_2^2-1))h_1^2 + (1-\nu)^4(h_2^2+3\nu)^2),\\
p_2 &= -\nu^2 h_1^2 h_2^2(h_1^6 - (1-\nu)(5\nu+1-(3-\nu)h_2^2)h_1^4 -\\
&- (1-\nu)^2((2\nu-3)h_2^4 + 2(5\nu^2-\nu+1)h_2^2 - 3\nu(2+\nu))h_1^2\\
&+ (1-\nu)^4(h_2^2-1)(h_2^2+3\nu)^2),\\
p_3 &= h_1^4 + 2(1-\nu)(h_2^2-3\nu)h_1^2 + (1-\nu)^2(h_2^2+3\nu)^2.
\end{aligned}$$

Для определения всех равновесий при $h_3 = 0$ необходимо было рассмотреть три случая из (6) $a_{33} = 0$, $a_{33}^2 = 1$ и $P_2(a_{33}^2) = 0$, которые позволяют определить аналитические кривые границ областей с равным числом положений равновесия. В первом случае при $a_{33} = 0$ такая кривая, разделяющая области с четырьмя и восемью решениями, имеет вид астроиды

$$h_1^{2/3} + h_2^{2/3} = (3\nu)^{2/3}. \tag{7}$$

Из анализа численных результатов следует, что при увеличении величины параметра h_3 области с постоянным числом действительных корней становятся меньше, пока не исчезают совсем. Определены бифуркационные значения в пространстве параметров, начиная с которых не существуют области с определенным числом действительных корней. Показано, что при $0 < \nu < 1$ в плоскости (h_1, h_2) при малых значениях h_3 существуют области с числом равновесий равным 24, 20, 16, 12 и 8. При $h_3 = 0$ границы этих областей имеют аналитический вид (7).

Когда значения параметра аэродинамического момента h_3 превышает 3, для спутника существуют только 8 равновесных ориентаций. Этот результат соответствует физическим соображениям, при большой величине вектора аэродинамического момента равновесия спутника жестко ограничиваются направлением и величиной данного момента.

3. Заключение

В заключение можно сделать вывод, что использование методов компьютерной алгебры позволяет провести детальное исследование влияния аэродинамических сил на положения равновесия спутника. Полученные результаты могут быть использованы на этапе предварительного проектирования аэродинамической системы ориентации спутника

Список литературы

1. Sarychev, V. A., Mirer, S. A., Degtyarev, A. A.: Equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques with pressure cente in a principal plane of inertia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2008. Vol. 100, no.4, P. 301–318.
2. Сарычев В. А., Гутник С. А.: Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Космические исследования. 2012. Т. 50. №5. С. 394–402.
3. Сарычев В. А., Гутник С. А.: Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // Космические исследования. 2015. Т. 53. №6. С 488–496.
4. Gutnik, S. A.: Symbolic-numeric investigation of the aerodynamic forces influence on satellite dynamics. In: Gerdt, V.P., Koepf, W., Mayr, E.W., Vorozhtsov, E.V. (eds.) CASC 2011. LNCS, vol. 6885, P. 192–199. Springer, Heidelberg
5. Buchberger, B.: Theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms// SIGSAM Bulletin. 1976. P. 19–29.
6. Char, B. W., Geddes, K. O., Gonnet, G. H., Monagan, M. B., Watt, S. M.: Maple Reference Manual. Watcom Publications Limitid, Waterloo, Canada (1992)
7. http://www.wolfram.com/mathematica

UDC 629.07.01

Application of Computer Algebra Methods for Investigation of the Aerodynamic Forces Influence on Stationary Motions of Satellite

S. A. Gutnik*, V. A. Sarychev†

* *Department of Informatics and Computational Mathematics*
Moscow Institute of Physics and Technology
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia
† *Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences)*
4, Miusskaya Square, Moscow, 125047, Russia

With the help of computer algebra methods the properties of non-linear algebraic system, which determines the stationary motion of a satellite on a circular orbit by the action of gravitational and aerodynamic moments are investigated. All bifurcation values of parameters at which there is a change of numbers of equilibrium orientations are determined. Evolution of domains in the space of parameters of the system which correspond to various numbers of equilibria are carried out in detail.

Key words and phrases: computer algebra, Groebner basis, satellite, aerodynamic torque, equilibria.

УДК 004.04, 519.688

О распараллеливании рекурсивных блочных алгебраических алгоритмов: алгоритмы и эксперименты

Е. А. Ильченко

Лаборатория алгебраических вычислений,
Тамбовский государственный университет,
ул. Интернациональная, д.33, Тамбов, Россия, 392000

Дается описание общей схемы распараллеливания блочных рекурсивных алгоритмов, которая рассматривается на примере вычисления присоединенной матрицы, приводятся результаты экспериментов на вычислительном кластере «МВС-10Р»

Ключевые слова: параллельный алгоритм; децентрализованное управление; расширенная присоединенная матрица; Adjoint; система Mathpar; SPMD вычислительная парадигма; MPI; многопоточность; hybrid parallel programming model; C++; GMP..

1. Краткий обзор работы

Рассмотрим блочный алгоритм обращения матрицы, имеющий сложность матричного умножения [1,2]. Если $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ является обратимой матрицей и A ее обратимый блок, то верно равенство:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -A^{-1}C \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & (D - BA^{-1}C)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ -B & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{I}$ - единичная матрица. Раскрывая скобки, получим:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}C\Big(D - BA^{-1}C\Big)^{-1}BA^{-1} & -A^{-1}C\Big(D - BA^{-1}C\Big)^{-1} \\ -\Big(D - BA^{-1}C\Big)^{-1}BA^{-1} & \Big(D - BA^{-1}C\Big)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим обращение матрицы как функцию $\mathfrak{g}(M) = E$, тогда полученная формула примет вид:

$$\mathfrak{g}(M) = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix},$$

где

$$B_0 = \mathfrak{g}(A) + \mathfrak{m}\Big(\mathfrak{m}\Big(\mathfrak{m}\big(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}(C, B_3)\big), B\Big), \mathfrak{g}(A)\Big), B_1 = -\mathfrak{m}\big(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{m}(C, B_3)\big),$$

$$B_2 = -\mathfrak{m}\Big(B_3, \mathfrak{m}\big(B, \mathfrak{g}(A)\big)\Big), B_3 = \mathfrak{g}\Big(D - \mathfrak{m}\big(\mathfrak{m}\big(B, \mathfrak{g}(A)\big), C\big)\Big).$$

Как мы видим, в формуле для нахождения $\mathfrak{g}(M)$ в различной форме встречается суперпозиция функций $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{g}$. Рассмотрим один из случаев, например $\mathfrak{m}\big(B, \mathfrak{g}(A)\big)$, что означает матричное умножение $B \times A^{-1}$. Чтобы выполнить матричное умножение, сначала нужно вычислить A^{-1}. Эту и другие зависимости порядка вычислений одних функций от других можно представить в виде графа, где вершинами будут все функции, из которых состоит рекурсивный алгоритм, а связи будут задавать порядок вычислений вершин. К примеру, если между вершинами a и b есть дуга (a, b), то это означает, что вершина b должна быть посчитана строго после вершины a. Обозначим

$-A^{-1} = V$, $V \times C = X$, $B \times V = Y$, $Y \times C = Q$, $(D + Q)^{-1} = Z$, $Z \times Y = W$, тогда формула для нахождения обратной матрицы будет выглядеть следующим образом:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X \times W + A^{-1} & X \times Z \\ W & Z \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Для алгоритма нахождения обратной матрицы мы имеем два типа вершин - функции $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{g}$.

Отсюда и далее вершину графа алгоритма со всеми присущими ей особенностями мы будем называть *задачей*. Если более формально, то *задача* - это множество входных данных A для алгоритма, множество выходных данных B, алгоритм F, отображающий $A \to B$. С задачей всегда будет связан некоторый граф G, определяющий подзадачи алгоритма и порядок их вычислений. Еще одно важное свойство любой задачи заключается в том, что она *может* быть посчитана параллельно. Если же некоторую последовательность операций алгоритма нет смысла выполнять параллельно, мы не будем выделять эти действия в отдельную вершину, или создавать для них отдельную задачу, а вынесем эти действия в предварительную или постобработку данных для некоторой вершины.

Рассмотрим вершину с номером 0 для алгоритма нахождения обратной матрицы. Входные данные для задачи - матрица A, выходными будет $\mathfrak{g}(A) = A^{-1}$. Но поскольку нам нужна матрица $-A^{-1}$, а не A^{-1}, то после того, как эта вершина будет посчитана, необходимо выполнить некоторые преобразования матрицы A^{-1}. Действия, заключающиеся в некотором преобразовании выходных данных вершины, мы будем называть *постобработкой*. Действия, заключающиеся в инициализации входных данных вершины, мы будем называть *инициализацией вершины*. Инициализация происходит в тот момент, как только вершина становится *доступной* - то есть тогда, когда все зависимые для нее вершины посчитаны. Постобработка происходит в тот момент, как только получены выходные данные для этой задачи и данные, необходимые для постобработки этой вершины.

Входные данные для вершины с номером k будем обозначать как I_k, результат будем обозначать как R_k (под результатом понимаются данные, полученные по завершению постобработки вершины). Тогда, принимая во внимание описание вершин из таблицы 2, уравнение (2) можно записать в виде:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} R_7 & R_6 \\ R_5 & R_4 \end{pmatrix}.$$

Для реализации поставленной задачи используется стратегия, при которой на каждом вычислительном узле кластера будет запущено по одному MPI-процессу, каждый из которых будет иметь по одному диспетчерскому и несколько вычислительных потоков (в зависимости от количества ядер на узле).

2. Заключение

Для исследований алгоритма была написана программа на C++. Исследовались различные алгоритмы для умножения разреженных матриц, алгоритм вычисления присоединенной матрицы. Для реализации многопоточности была выбрана библиотека Pthreads, для реализации арифметики многократной точности была взята библиотека GMP. Эксперименты проводились на кластере «МВС-10Р», которые показали хорошую эффективность и масштабируемость. Результаты эксперимента с алгоритмом блочного матричного умножения показаны на рисунке 1. Результаты других экспериментов будут представлены в докладе.

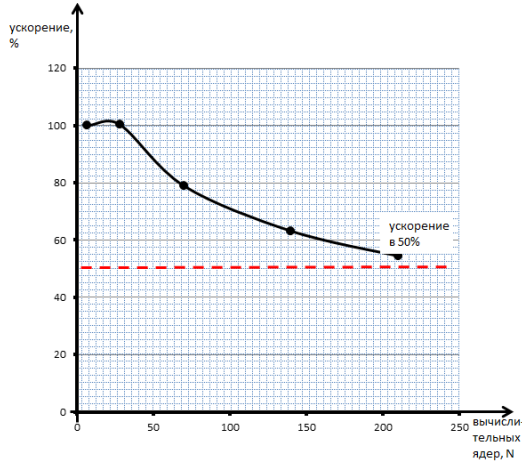


Рис. 1. Эффективность параллельной реализации алгоритма блочного матричного умножения, где размер исходных матриц равнялся 2048x2048, плотность была 100%.

Благодарности

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 16-07-00420.

Список литературы

1. *Strassen V.* Gaussian Elimination is not optimal. Numerische Mathematik. 1969. —**13**, P.354-356.
2. *Malaschonok G.I.* Matrix calculation methods in commutative rings. —Tambov: Publishing House of Tambov State University, 2002.

UDC 004.04, 519.688

About Parallelizing Recursive Block Algebraic Algorithms: Algorithms and Experiments

E. A. Ilchenko

Laboratory for algebraic computations
Tambov State University
Internatsionalnaya,33, Tambov, Russia, 392000

We describe an algorithm for the decentralized control of parallel computing process which is based on the SPMD computational paradigm and present the results of experiments on a cluster «MVS-10P».

Key words and phrases: Parallel algorithm, decentralized control, Adjugate matrix, the system Mathpar, SPMD computational paradigm, adjoint, MPI, multithreading, hybrid parallel programming model, C++, GMP. .

УДК 519.613

Параллельный алгоритм обращения матрицы: результаты экспериментов

С. А. Хворов

Лаборатория алгебраических вычислений,
Тамбовский государственный университет,
ул. Интернациональная, д.33, Тамбов, Россия, 392000

Исследуется параллельный алгоритм вычисления обратной матрицы. Параллельный алгоритм основан на использовании китайской теоремы об остатках и последовательном алгоритме, который имеет сложность матричного умножения и реализован в системе компьютерной алгебры Math Partner.

Ключевые слова: присоединенная матрица, определитель, неравенство Адамара, параллельный алгоритм, метод Ньютона.

1. Введение

Мы исследуем параллельный алгоритм вычисления обратной матрицы. Данный алгоритм основан на китайской теореме об остатках. В его основе лежит последовательный алгоритм [1], который вычисляет определитель $\det\{A\}$ матрицы A и присоединенную матрицу A^* и имеет сложность матричного умножения. Обратная матрица равна A^{-1} вычисляется как $A^*/\det\{A\}$.

2. Основная часть

Данный алгоритм использует китайскую теорему об остатках и алгоритм Ньютона для получения решения в рациональных числах.

Алгоритм Ньютона может быть записан следующим образом:
$c_1 = r_1;\ \overline{c}_1 = c_1\ mod\ m_2$,
$c_2 = c_1 + (r_2 - \overline{c}_1)m_1 n_{12};\ \overline{c}_2 = c_2\ mod\ m_3$ и так далее,
$c_n = c_{n-1} + (r_n - \overline{c}_{n-1})m_1 ... m_n n_{1n} ... n_{n-1n}$,

Результат: $x = c_n\ mod\ M$,

Здесь $m_1, m_2, ..., m_n$ – попарно взаимно простые модули, $r_1, r_2, ..., r_n$ – целые числа, $M = m_1 m_2 ... m_n$, n_{ij} – это обратный к m_i элемент по модулю m_j.

Такой алгоритм имеет два преимущества по сравнению с алгоритмом, в котором все вычисления производятся в целых числах: сложность вычислений в n раз уменьшается и становятся доступны параллельные потоки вычислений. В каждом простом поле вычисления происходят независимо и общее количество арифметических машинных операций в таком алгоритме будет $\sim (mn^{1+\log_2 7} + n^2 m^2)$. Здесь n – размер матрицы, а m – разрядность коэффициентов.

Для оценки абсолютного значения наибольшего числового коэффициента используется неравенство Адамара: $|det(A)| \leqslant \prod_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2)^{1/2}$.

Так как знак определителя может быть произвольный, то будем вычислять удвоенное выражение, стоящее справа. Учитывая, что в общем случае, некоторые строки могут оказаться нулевыми, будем вычислять такое выражение:

$$Had_2 = 2\prod_{i=1}^{n} v_i, \text{ где } v_i = \begin{cases} 1 & \text{если } \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} = 0 \\ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} & \text{если } \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Пусть дан набор всех простых чисел $p_1 < p_2 < \cdots < p_{m-1} < p_m$, размер которых не превышает 32 бит. Будем выбирать простые числа до тех пор пока их произведение не станет удовлетворять неравенству (2):

$$\prod_{i=q}^{m} p_i \geq 2Had_2{}^{\frac{1}{2}} + 2 \tag{2}$$

Дополним полученный список простых чисел так, чтобы их количество было кратно числу процессоров. Тогда все процессоры будут равномерно загружены. В итоге получится следующий набор простых чисел: $p_l, p_{l+1}, \ldots, p_{m-1}, p_m$.

Параллелизм обеспечивается простым двухуровневым деревом алгоритма и равномерным распределением простых модулей по листовым процессорам.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Нулевой процессор рассылает исходную матрицу A всем остальным процессорам.
2. Каждый процессор $\mathbf{Pr}_k$ генерирует общий массив модулей, опираясь на оценку Had_2, и выбирает из него подмассив P_k тех простых чисел, с которым он будет вычислять обратную матрицу. Но вычисления запускаются на со всеми этими модулями, а только примерно в корень раз меньше.
3. Каждый процессор k переводит матрицу A из кольца Z в кольцо Z_{p_i}, где $p_i \in P_k$, вычисляет присоединенную матрицу и определитель в кольце Z_{p_i}.
4. Процессоры распределяют и рассылают между собой строки присоединенных матриц так, чтобы каждому нужно было восстановить примерно одинаковое число строк.
5. Процессоры отсылают определители, полученные в кольцах Z_{p_i} нулевому процессору для последующего восстановления;
6. Каждый процессор восстанавливает строчки присоединенной матрицы по методу Ньютона. Если хотя бы одно из чисел было восстановлено неверно (модулей не хватило), то процессор посылает всем остальным сообщение об этом. В массив модулей добавляется некоторое количество модулей, равное числу процессоров в группе, и алгоритм возвращается к шагу[3];
7. Если же все элементы всех строк были восстановлены правильно, процессоры отсылают восстановленные строки нулевому процессору;
8. Нулевой процессор собирает все присланные строки в искомую присоединенную матрицу в кольце Z и вычисляет обратную матрицу.

Таким образом алгоритм использует четыре вида пересылок данных между процессорами:

1. Рассылка исходной матрицы с нулевого процессора всем процессорам.
2. Рассылка строк матриц, которые получены в конечных полях, между всеми процессорами для восстановления.
3. Рассылка сообщения о необходимости продолжить выполнение алгоритма и добавить модули.
4. Пересылка восстановленных строк присоединенной матрицы от каждого процессора нулевому.

3. Заключение

На основе данного подхода были разработаны алгоритмы и программы. Эти алгоритмы находятся в стадии тестирования и экспериментирования. В докладе будут сообщены результаты экспериментов, которые будут проведены с кластером, содержащим сотни процессоров, и имеющим распределенную память.

Благодарности

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 16-07-00420.

Список литературы

1. *Малашонок Г.И.* Матричные методы вычислений в коммутативных кольцах. Монография. Тамбов: Изд-во ТГУ им. Г.Р.Державина, 2002.
2. *Малашонок Г.И.* Параллельная компьютерная алгебра. Тамбов: Изд-во Тамбовского университета, 2011

UDC 519.613

Parallel Algorithm for Matrix Inversion: Results of Experiments

S.A. Khvorov

Laboratory for algebraic computations
Tambov State University
Internatsionalnaya,33, Tambov, Russia, 392000

We study parallel algorithm for computing the inverse matrix. This parallel algorithm is based on the use of the Chinese remainder theorem and sequential algorithm, which has a complexity of matrix multiplication and is implemented in the system of computer algebra Math Partner.

Key words and phrases: adjoint matrix, determinant, Chinese remainder theorem, inequality of Hadamard, parallel algorithm, Newton method .

UDC 530.145,004.94

Quantum Evolution Model Based on Symmetric Group

V. V. Kornyak

Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

The evolution of a quantum system is a sequence of observations (measurements) with unitary transitions between them. From a mathematical point of view, the measurement is a projection of a vector of a Hilbert space into the subspace specified by the measuring device. In conventional quantum mechanics it is assumed that between observations, the system evolves deterministically according to the Schrödinger equation. In contrast to this simple deterministic picture, we assume that there is a bunch of all possible gauge connections (ways of identification of the state vectors in the transitions between adjacent observations), and the unique Schrödinger's evolution is only the dominant element in the bunch. We consider a constructive model based on the natural and standard representations of the symmetric group. Within this model we study some quantum-mechanical problems. Our strategy in the investigation of these problems consists in searching dominant structures and dominant evolutions. As the main computational tool we use the Monte Carlo method. The method — which is inherently well suited to the "irreducible quantum randomness" — proved to be highly efficient and precise when applied to our problems.

Key words and phrases: constructive model of quantum evolution, symmetric group, gauge connection, dominant structures, Monte Carlo method.

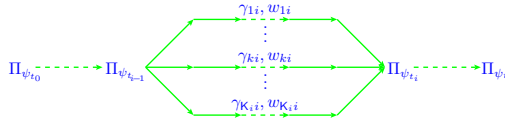
1. Introduction

Epistemic approach to explain the empirically observable indeterminism of quantum behavior implies the existence of "ontic" states (full information about them is unavailable) and "epistemic" states (which carry partial information about the quantum system and can be represented by vectors in a Hilbert space $\mathcal{H}$). Various, sometimes artificial, mechanisms to explain the loss of information are offered. For example, the Spekkens model is based on *the knowledge balance principle* [1]: "...for every system, at every time, the amount of knowledge one possesses about the ontic state of the system at that time must equal the amount of knowledge one lacks."

The "ontic" states in our model are collections of elements of a finite set Ω on which the group $\mathrm{Sym}\,(\Omega) \simeq \mathsf{S}_\mathsf{N}$ acts ($\mathsf{N} = |\Omega|$). The loss of information occurs quite naturally: one can observe only *the relations that are invariant* under the action of $\mathrm{Sym}\,(\Omega)$.

2. Main section

Discrete model of quantum evolution can be represented by the following scheme



Here $t_i \in \{0, 1, \ldots\}$ is *time of observation* (elementary ("Planck") time unit is 1); the *projector* $\Pi_{\psi_{t_i}} = |\psi_{t_i}\rangle\langle\psi_{t_i}|$ represents the measuring device configured to the state ψ_{t_i}; γ_{ki} are all possible products of $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ elements of a finite *gauge group* G with unitary representation U in $\mathcal{H}$; $w_{ki} \geq 0$ is the *weight* of γ_{ki}; K_i is the number of γ_{ki}'s.

Standard quantum mechanics implies a single unitary evolution between measurements, i.e. for some $a \in \mathsf{G}$ the product $a^{\Delta t_i}$ has weight 1, and all other products have zero weights. The unitary evolution can be written as $U = \mathrm{U}\left(a^{\Delta t_i}\right)$, or, introducing the *Hamiltonian* $H = \mathrm{i}\ln \mathrm{U}(a)$, as $U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\Delta t_i}$. However, we will study the case of general weights suggesting that a unique unitary evolution should occur as a dominant element in the set of all possible evolutions. The gauge connection combinatorics is rather complicated since the weights depend on both the properties of group elements and the state vectors. Besides, the behavior of the model — as it is typical for quantum mechanics — depends on the choice of

time intervals between measurements Δt_i. However, the Monte Carlo simulation may help to cope with these difficulties.

The main problem in the study of the evolution is the search for the most probable trajectories. The *one-step transition probability* is given by the formula

$$\mathbf{P}_{\psi_{t_{i-1}}\to\psi_{t_i}} = \sum_{k=1}^{\mathsf{K}_i} w_{ki}\,\mathrm{tr}\left(\Pi_{\varphi_{ki}}\Pi_{\psi_{t_i}}\right), \quad \text{where} \quad \varphi_{ki} = \mathrm{U}(\gamma_{ki})\,\psi_{t_{i-1}}.$$

The probability of the whole trajectory can be calculated as the product

$$\mathbf{P}_{\psi_{t_0}\to\cdots\to\psi_{t_N}} = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{P}_{\psi_{t_{i-1}}\to\psi_{t_i}}.$$

It is convenient to introduce the *one-step entropy* $\mathbf{S}_{\psi_{t_{i-1}}\to\psi_{t_i}} = \log \mathbf{P}_{\psi_{t_{i-1}}\to\psi_{t_i}}$ — discrete analog of the *Lagrangian* $\mathcal{L}$ — and replace the product of probabilities by the *entropy of trajectory*

$$\mathbf{S}_{\psi_{t_0}\to\cdots\to\psi_{t_N}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_{\psi_{t_{i-1}}\to\psi_{t_i}}.$$

This is a discrete counterpart of the continuous *action* $\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dt$.

The gauge group of our model is S_N. To study the model we use the N-dimensional *natural* and $(\mathsf{N}-1)$-dimensional irreducible *standard* representations of S_N. We consider the constructive version of natural representation that is obtained by replacing the complex space $\mathbb{C}^\mathsf{N}$ by the module $\mathbb{N}^\mathsf{N}$, where $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$. Then, the constructive version of standard representation is obtained by the projection.

Planck's formula $E = h\nu$ associates the energy with the periods of underlying microscopic processes. By analogy, we define the *"energy"* of a permutation p as its frequency: $\varepsilon_p = \dfrac{1}{\mathrm{ord}\, p}$. Of course, this definition is only approximate because the unitary operator associated with the permutation contains many frequencies: they are inverses of the lengths $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_M$ of disjoint cycles that constitute the permutation and the period of the permutation is equal to $\mathrm{ord}\, p = \mathrm{lcm}\,(\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_M)$. However, the definition is useful for classifying the elements of permutation groups from a "physical point of view". Moreover, the permutations of the dominant conjugacy classes usually contain a small number (typically 1) of dominating frequencies and the definition becomes "almost exact".

To compare Monte Carlo simulation with exact computation consider the group S_{50}. Its numerical characteristics are: $|\mathsf{S}_{50}| = 50! \approx 3.04 \times 10^{64}$; number of conjugacy classes $= 204226$; number of different periods $= 1056$; maximum period $= 180180$. FIGURE 1 shows the "energy spectra" obtained by both exact and Monte Carlo computations for the dominant in each period classes in the range of periods [1..300]. We have generated 10^6 elements of the group S_{50}, which is negligible part ($\approx 3 \times 10^{-59}$) of the whole population. The task took about 10 sec on a 3.3 GHz PC. We see that the Monte Carlo method is highly efficient and precise when applied to our studies.

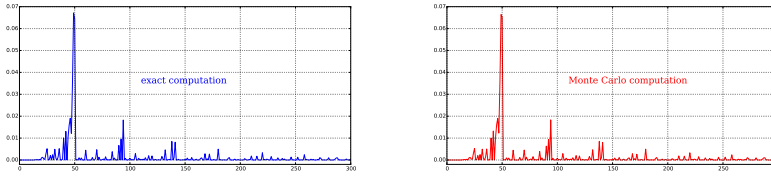


Figure 1. Energy spectrum of S_{50}. Exact vs Monte Carlo computations.

3. Conclusions

Our main goal is to develop methods to search for specific emergent phenomena in various problems of quantum mechanics. These phenomena appear as dominant structures and evolutions and, we hope, can be efficiently found by the Monte Carlo method.

References

1. *Spekkens R. W.* Evidence for the epistemic view of quantum states: A toy theory. Physical Review A **75** (3): 032110, 2007.
2. *Kornyak V. V.* Combinatorial Approach to Modeling Quantum Systems. EPJ Web of Conferences 108, 01007 (2016), DOI:10.1051/epjconf/201610801007.
3. *Kornyak V. V.* Discrete dynamical models: combinatorics, statistics and continuum approximations. Mathematical Modelling and Geometry, 2015, **3**, No 1, pp. 1–24.

УДК 530.145,004.94

Модель квантовой эволюции, основанная на симметрической группе

В. В. Корняк

Лаборатория информационных технологий,
Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

Эволюция квантовой системы представляет собой последовательность наблюдений (измерений) с унитарным переходами между ними. С математической точки зрения, измерение представляет собой проектирование вектора гильбертова пространства в подпространство, фиксируемое измерительным прибором. В традиционной квантовой механике предполагается, что в промежутках между наблюдениями, система эволюционирует детерминистически в соответствии с уравнением Шредингера. В отличие от этой простой детерминистической картины, мы предполагаем существование множества всех возможных калибровочных связностей (способов отождествления векторов состояния при переходах между соседними наблюдениями), а единственная шредингеровская эволюция представляет собой доминирующий элемент этого множества. Мы рассматриваем конструктивную модель, основанную на натуральном и стандартном представлениях симметрической группы. В рамках этой модели мы изучаем некоторые квантово-механические задачи. Наша стратегия при исследовании этих задач состоит в поиске доминантных структур и доминантных эволюций. В качестве основного вычислительного средства мы используем метод Монте-Карло. Этот метод, который по своей природе хорошо соответствует “несводимой квантовой случайности”, демонстрирует высокую эффективность и точность в применении к нашим задачам.

Ключевые слова: конструктивная модель квантовой эволюции, симметрическая группа, калибровочная связность, доминантные структуры, метод Монте-Карло.

УДК 510.53, 51.001.8

Math Partner — компьютерная алгебра нового поколения

Г. И. Малашонок

Лаборатория алгебраических вычислений,
Тамбовский государственный университет,
ул. Интернациональная, д.33, Тамбов, Россия, 392000

Приводятся общие характеристики математического сервиса MathPartner, который теперь свободно доступен по адресу mathpar.cloud.unihub.ru. Сервис ориентирован на самое широкое применение как в науке и образовании, так и в индустрии и в технике. Обсуждаются особенности нового поколения систем компьютерной алгебры и их возможное влияние на общество. Прогнозируются возможные кардинальные изменения, которые может претерпеть система образования под влиянием новых технических возможностей, которые они предоставляют.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, MathPartner, математическое образование, параллельные вычисления; облачная математика.

1. Введение

Системы символьно-численных вычислений, как приложения для компьютеров, совершенствуются уже не одно десятилетие, улучшаясь от версии к версии. В последнее десятилетие информационные технологии претерпевают сильные изменения – быстрыми темпами развиваются облачные технологий. Это привело к появлению нового поколения систем компьютерной алгебры – математических серисов широкого назначения.

Одним из первых в этом классе систем компьютерной алгебры является Math Partner [1]. Сегодня этот сервис стал доступен по адресу mathpar.cloud.unihub.ru.

Настоящее сообщение посвящено описанию его особенностей и тем новым возможностям, которые он предоставляет самому широкому кругу пользователей: от узких профессионалов математиков – до младших школьников, от учителей математики и физики – до инженеров и физиков-теоретиков.

Можно ожидать, что кардинальные изменения претерпят, как система среднего и высшего образования, так и сам статус математического знания в современном обществе. Сегодня появляется возможность пользоваться достижениями математики во всех сферах деятельности человека. Для этого нужно очень короткое время и малые затраты.

Новый сервис является бесплатным. Каждый может заводить в нем свою облачную математическую тетрадь и делать в ней необходимые вычисления.

Важнейшим фактом, связанным с его появлением, является создание письменного язык математики. Этот язык понимает и человек и компьютер. Этим языком теперь могут пользоваться не только те, кто пишет тексты на TeXe, но любой школьник, который воспользуется в своей облачной математической тетради сервисом выпадающего меню. В меню он может найти большой запас слов, предложений и математических операторов, за которыми стоят полезные алгоритмические конструкции, используемые в приложениях.

Можно предполагать, что на этом новом языке математики будут создавться и хранится математические знания в учебниках. А сами учебники будут сохранятся в общедоступных базах и ими можно будет легко воспользоваться. Достаточно просто скопировать формулы и перенести их себе в рабочую тетрадь.

Самую большую отдачу для общества можно будет получить в результате интенсификации и индивидуализации образования, снятия стрессовой нагрузки на учителя, который вынужден сегодня работать в большом классе, одновременно со всеми.

2. О языке Mathpar

Язык Mathpar является расширением языка TeX, путем добавления оператора присвоения, операторов вычисления, операторов управления, операторов установки окружения и операторов вывода графиков. Текст, содержащий запись на языке – это простой текстовый файл, который может создаваться, редактироваться и сохраняться также как тексты в языке TeX.

Имеется группа операторов вычисления, которые предназначены для использования многопроцессорного кластера при проведении вычислении.

Имеются операторы задания окружения – задания пространства, в котором находятся математические объекты. Окружение определяет основное числовое множество, типы операций в этом множестве, имена переменных и константы.

Добавлены правила, которые позволяют вести запись подобную естественной математической записи. Они дают возможность воспроизводить привычную математическая запись, отображать тексты научных и технических публикаций, тексты учеников и задачников в которых используются математические выражения. Исходный текст и результаты отображаться в двух видах: в исходном виде и в виде pdf. Они появляются в одном и том же окне, а сменить вид окна можно с помощью кнопки-переключателя.

Основному тексту программы могут предшествовать *процедуры и функции*. И имеются операторы *управления*: **if**(){}**else**{}, **while**(){}, **for**(; ;){} . Кроме того имеются специальные операторы: операторы *вывода значения выражений*, операторы *вывода графиков* и операторы *настройки окружения*.

Пользователь может выбирать следующие числовые множества: Z=$\mathbb{Z}$, Zp=$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p >2), Zp32=$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p $< 2^{31}$), Z64=$\{z \in \mathbb{Z} : -2^{63} \le z < 2^{63}\}$, Q=$\mathbb{Q}$, R – множество приближенных действительных чисел, у которых число цифр в мантиссе задается пользователем, R64 – действительные числа (52 разряда – мантиссой, 11 разрядов – порядок), R128 – действительные числа (128 бит). Еще 8 числовых множеств получаются в результате комплексификации первых восьми множеств: CZ, CZp, CZp32, CZ64, CQ, C, C64, C128.

Выделим некоторые группы операторов.

Операции над числами: $max(a,b)$, $min(a,b)$, $sign(a)$, $abs(a)$, $floor(a)$, $ceil(a)$, $round(a)$.

Операции над целыми числами: $divRem(a,b)$, $div(a,b)$, $rem(a,m)$, $mod(a,m)$, $fact(a) = a!$, $GCD(a,b)$, $LCM(a,b)$.

Операции с дробями и рациональными функциями: $num(fr)$, $denom(fr)$, $cancel(fr)$, $properForm(fr)$, $quotient(fr)$, $remainder(fr)$, $quotientAndRemainder(fr)$.

Операции над многочленами многих переменных: $value(f,[x_0,y_0])$ (подставить $x = x_0$, $y = y_0$), $expand()$, $factor()$, $quotient(a,b,x)$, $remainder(a,b,x)$, $GCD()$, $LCM()$, $quotientAndRemainder(a,b,x)$, $reduceByGB(g,[f_1,f_2,..,f_c])$ – редукция полинома g с помощью полиномов f_1, f_2,.., $solveNAE(f_1,f_2,..)$ – решение нелинейных уравнений $f_1 = 0, f_2 = 0,..$, $groebner(f,..,g)$.

Матрицы и векторы Векторы отмечаются квадратными скобками, а матрицы - двойными квадратными скобками, например; $A = [[1,2],[x,y]]$. Чтобы адресовать элементы матрицы нужно дать им наименование: a=$elementOf(A)$, и потом можно брать отдельные элементы : a_{i,j} –элемент матрицы A, a_{i,?} – строка i, a_{?,j} –столбец j. \O_{n,m} — нулевая матрица размера $n \times m$; \I_{n,m} — $n \times m$ матрица с единицами на главной диагонали. Нулевая вектор-строка: \O_{n}.

Другие матричные функции: $charPolynom(A)$, kernel(A), transpose(A) или $A\hat{}\{T\}$, conjugate(A) или $A\hat{}\{\backslash ast\}$, toEchelonForm(A), det(A), inverse(A) или $A\hat{}\{-1\}$, adjoint(A) или $A\hat{}\{\backslash star\}$, genInverse(A) или $A\hat{}\{+\}$ (обобщенная обратная матрица Мурра-Пенроуза), closure(A) или $A\hat{}\{\backslash times\}$ — замыкание, $I + A + A^2 + A^3 + \ldots$б или $(I - A)^{-1}$, LDU(A) — треугольная LDU-факторизация матрицы. Результатом являются пять матриц $[L, D, U, P, Q]$, $A = LDU$. BruhatDecomposition(A) — разложение Брюа матрицы. Результатом являются три матрицы $[V, w, U]$, $A = VwU$.

Определены следующие элементарные функции: $exp()$, $ln()$, $lg()$, $log(a,b)$ или log_a(b) – логарифм числа b по основанию a, $sgrt()$ – корень квадратный, $cubrt()$ – корень кубический, $rootof(a,n)$ – корень из числа a степени n, $a\widehat{}\{n\}$ – число a в степени n, $sin()$, $cos()$, $tg()$, $ctg()$, $arcsin()$, $arccos()$, $arctg()$c, $arcctg()$, $sh()$, $ch()$, $th()$, $cth()$, $arcsh()$, $arcch()$, $arctgh()$, $arcctgh()$.

Представлены в системе и такие важные разделы как преобразование Лапласа и решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, вычисления в тропической математике, линейное программирование, логические операции и операции теории множеств, параллельные вычисления на компьютере с распределенной памятью, 2D и 3D графики и др.

RESTFul протокол мог бы использоваться для обмена данными между этим сервисом и другими облачными устройствами, для этого достаточно оснастить его небольшим интерфейсом.

3. Заключение

Math Partner – это система компьютерной математики нового поколения. Появление таких систем скажется на всех прикладных сферах: в науке, технике, экономике. Кардинальные изменения может претерпеть образование, так как создаются условия для интенсификации и индивидуализации образования, появляется обратная связь между учащимся и образовательной системой, когда действия учащегося оцениваются и сохраняются в его облачном дневнике. Каждый учащийся может имеет рейтинг, более точно отражающий его способности и уровень знаний, чем современные государственные проверочные средства.

Благодарности

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 16-07-00420.

Список литературы

1. *Malaschonok G.I.* Way to Parallel Symbolic Computations. International conference «Cloud computing. Education. Research. Development» Moscow, 2011.
2. *Malaschonok G.I.* Language Guide "Mathpar". Tambov: Publishing House of Tambov State University, 2013, 133 pp.

UDC 510.53, 51.001.8

Math Partner—Computer Algebra of New Generation

G. I. Malaschonok

Laboratory for algebraic computations
Tambov State University
Internatsionalnaya,33, Tambov, Russia, 392000

We give the general characteristics of the mathematical service MathPartner, which is now freely available at mathpar.cloud.unihub.ru. This mathematical service focused on the most extensive use in science and education, as well as in industry and technology. We discuss the characteristics of the new generation of computer algebra systems and their possible impact on society. We build forecasts of possible cardinal changes that can get accustomed education system under the influence of new technical capabilities that they provide. We build forecasts of possible cardinal changes that can happen in the education system under the influence of new technical capabilities that they provide.

Key words and phrases: computer algebra, Math Partner, math education, parallel computing, cloud math,

UDC 517.926.7

The Laplace Transform Method in an Algorithm of Solving Differential Equations with Delayed Argument

N. A. Malashonok

Laboratory for algebraic computations
Tambov State University
Internatsionalnaya, 33, Tambov, Russia, 392000

The method is used for linear differential equations with delayed argument. There is constructed an algorithm, which is symbolic-numerical. The numerical component concerns a representation of functions, involved into the process by some kind of series.

Key words and phrases: linear differential equations, delayed argument, symbolic-numerical algorithm.

1. Introduction

There is a class of physical problems, which is associated with action of some kind of complementary forces - forces which are involved at various not initial time moments. Such problems frequently lead to the so called differential equations with delayed argument. Different ways of dealing with such equations exist. See for example [1,2]. We consider linear equations with constant coefficients and right-hand parts of exponential increase.

Applications of the Laplace transform method are well known. It permits to reduce an infinitesimal problem to an algebraic one that may be solved symbolically or symbolic-numerically. Moreover, it gives means to estimate an accuracy of calculations. However there are some facts which prevent using this method in a symbolic way. Some difficulties, for example, are connected with a form of the solution of the Laplace image of the input differential equations, i.e. the exponential polynomials, which appears in the solution of algebraic equation. We suggest the usage of series expansion of some kind for symbolic-numerical solution with a necessary accuracy. It extends the class of equations to be solved by this method.

We restrict ourselves to the consideration of one equation, but the method works similarly with systems of equations of such type.

2. A differential equation with delayed argument and application of Laplace transform

We consider all functions, either unknown or standing at the right-hand parts of equations, on the segment $\mathbf{T} : 0 \le t \le T$. Split $\mathbf{T}$ into parts by rational points $0 < t_k < t_{k+1} < T, k = 0, \dots, N$. All functions of the argument t are supposed to satisfy the conditions for existing of their Laplace transform, i.e. they have an exponential increase. Consider an equation

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{N} a_{jk} x^{(n-j)}(t - t_k) = f(t), \tag{1}$$

with initial conditions $x^{(n-j)}(0) = x_0^{(n-j)}, j = 1..n$. As the right-hand members of equations we consider here a composite function $f(t)$, whose components are represented as finite sums of exponents with polynomial coefficients. $f(t) = f_k(t),\ t_k < t < t_{k+1},\ k = 1..N$, where $f_k(t) = \sum_{s_k=1}^{S_k} P_{s_k}(t) e^{b_{s_k} t},\ k = 1..N$, and $P_{s_k}(t) = \sum_{m=0}^{M_{s_k}} c_{s_k m} t^m$.

The first step is to prepare the equation (1) for performance of Laplace transform. Uing the Heaviside function $\eta(t)$ we obtain the following form of the equation (1)

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N} a_{jk}\eta(t-t_k)x^{(n-j)}(t-t_k) = f(t),$$

$f(t)$ must also be written by means of Heaviside function.

It permits to write symbolically the Laplace image of the equation (1):

$$\left(p^n + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N} a_{jk}e^{-pt_k}p^{n-j}\right)X(p) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} p^{j-1}x_0^{(n-j)} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N} a_{jk}p^{j-1}x_0^{(n-j)}e^{-pt_k} + F(p),$$

where $X(p)$ and $F(p)$ are the Laplace images of $x(t)$ and $f(t)$, correspondingly, and $F(p)$ is also a sum of exponents with polynomial coefficients. Denote

$$Q(p) = \sum_{j=1}^{n} p^{j-1}x_0^{(n-j)} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N} a_{jk}p^{j-1}x_0^{(n-j)}e^{-pt_k} + F(p),$$

$$D(p) = p^n + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N} a_{jk}e^{-pt_k}p^{n-j}, \text{ then } X(p) = \frac{Q(p)}{D(p)}.$$

The last step of the algorithm is the Inverse Laplace transform. We must find a half-plane to chose a vertical line for inverse transform and for a series expansion.

Consider $X(p)$ and its denominator $D(p)$. There exists a half-plane, where $X(p)$ is holomorphic. To find it we must find a half-plane, where $D(p)$ is non-zero. Let us find $\sigma > 0$ such that $D(p) \neq 0$ for all $p : \mathrm{Re}\ p > \sigma$. As $D(p) \to \infty$ while $p \to \infty$ then for each $\delta > 0$ there exists σ such that $D(p) > \delta$ if $p : \mathrm{Re}\ p > \sigma$.

We have for sufficiently large $|p|$

$$|D(p)| \geq |p|^N(1 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N} |a_{jk}||p|^{(n-j)/N}).$$

Denote $A = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N}|a_{jk}|$, and take $\sigma = max\left\{\delta, \frac{\delta}{1-A}\right\}$. If $\mathrm{Re}\ p > \sigma$, then $|D(p)| > \delta$. So we may take the half-plane $\mathrm{Re}\ p > \sigma$, $X(p)$ is holomorphic in it.

We must mention, that the line $\mathrm{Re}\ p = \tilde{\sigma}, \tilde{\sigma} \geq \sigma$, may be taken as line of integration for numerical calculation of the inverse Laplace transform.

At last we must expand the solution in one special series Writing t_k as $t_k = \frac{\tau_k}{\sigma_k}$, denote $\sigma = LCM_k(\sigma_k)$, and $t_k = \frac{\tilde{\tau}_k}{\sigma}$. Denote $e^{-\frac{p}{\sigma}} = z$. Then

$$X(p) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p^{j-1}x_0^{(n-j)} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N} a_{jk}p^{j-1}x_0^{(n-j)}z^{\tilde{\tau}_k} + F(p)}{p^n + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N} a_{jk}z^{\tilde{\tau}_k}p^{n-j}}. \qquad (2)$$

We do not write the exact expression of such kind for $F(p)$, as it is rather bulky, mention only, that the exponents are the same, because we take the same split points. Formally we expand (2) in a Taylor series by z at the point $z = 0$. It corresponds to $p : \mathrm{Re}\ p = +\infty$.

Substituting $e^{-\frac{p}{\sigma}}$ instead of z, we obtain the series for $X(p)$ by $e^{-\frac{np}{\sigma}}$, which converges in some neighbourhood of ∞:

$$\sum_n A_n e^{-\frac{np}{\sigma}}, \tag{3}$$

where A_n are proper fractions, and can be represented as sums of partial fractions.

For the series (3) the Inverse Laplace transform may be written symbolically. A problem is to define n and Re p sufficient for designed accuracy of the differential equation.

Let us take the $n-th$ Taylor approximation of $X(p)$ and find its inverse Laplace image. Denote by $\tilde{x}(t)$ an approximate solution of (1), which is equal to this image. The accuracy of such solution we denote by ϵ, i.e. $\max_{\mathbf{T}}|x(t)-\tilde{x}(t)|<\epsilon$.

The remainder term of (3) may be written in the form $\sum_{k=n}\frac{\alpha_k}{p^k}e^{-\frac{kp}{\sigma}}$. Demand $|p||\alpha_n|/(\text{Re } p)^n e^{-(n\text{Re } p)/\sigma}<\epsilon$. Then we obtain it for each $t\in\mathbf{T}$.

3. Conclusions

In the conclusion let us mention the advantages of our method:

1. The algebraization of the problem makes possible to apply fast and efficient method for solving algebraic linear system with polynomial coefficients. It is actual because it permits to solve huge problems.

2. The expansion into the series of exponent with polynomial coefficients extends the class of equations which may be solved by means of Laplace transform.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 16-07-00420.

References

1. *Asl, F. M. and Ulsoy, A. G.* Analysis of a system of linear delay differential equations. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control 125, — P. 215–223, 2003.
2. *Baker, C. T. H., Paul, C. A. H. and Wille, D. R.* Issues in the numerical solutions of evolutionary delay differential equations. Adv. Comp. Math. 3, — P.171–196, 1995.

УДК 517.926.7

Преобразование Лапласа при решении дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами

Н. А. Малашонок

Лаборатория алгебраических вычислений,
Тамбовский государственный университет,
ул. Интернациональная 33, Тамбов, Россия, 392000

Предлагается символьно-численный алгоритм решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Численная компонента алгоритма содержит представление функций некоторым специальным рядом.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, запаздывающий аргумент, численно-символьный алгоритм.

УДК 372.851

Курс математического анализа с точки зрения компьютерной алгебры

М. Д. Малых[*†]

[*] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,*
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198
[†] *Факультет наук о материалах,*
МГУ имени М.В. Ломоносова,
Ленинские Горы, Москва, Россия, 119991

В докладе будут изложены некоторые соображения о применении систем компьютерной алгебры в учебном процессе, основанные на личном опыте чтения общематематических курсов в МГУ и РУДН и применения Microsoft Mathematics и Sage.

Ключевые слова: компьютерные науки, математический анализ, компьютерная алгебра, образование.

Разработка систем компьютерной алгебры заставляет по-новому взглянуть на классические вопросы и их освещение в курсе Высшей математики. Одно из важнейших и старейших достижений CAS в области анализа "— реализация алгоритмов символьного дифференцирования и интегрирования элементарных функций. Значительная часть задач, предлагаемых студентам в 1-м семестре, посвящена этому же вопросу. Однако мы тщетно будем искать определение элементарной функции в курсах Анализа или описания этих алгоритмов. Теорема о том, что производная элементарной функции опять является элементарной используется на семинарах постоянно, но многие ли лекционные курсы упоминают о ней? Зато там традиционно описывают т.н. основные методы вычисления интегралов "— метод подстановки и интегрирования по частям. Между тем еще 1950-х годах при создании первого интегратора выяснилось, что эти методы не поддаются удовлетворительной формализации, и в современных системах заменены на методы, взятые из забытых в XX веке работ Лиувилля, Остроградского, Яна Пташицкого [1, 2].

Не менее странным молчанием диатрибическая литература обходит понятия, связанные с элементарными функциями. В старые времена задачи на построение эскизов графиков на миллиметровой бумаге занимали важное место в курсе математики. Но теперь эти задачи выглядят анахронизмом и, следовательно, возникает вопрос, что такое эскиз графика? Мы вновь не найдем определения в [3], между тем множество функций делится на классы эквивалентности, образованные функциями, графики которых имеют одинаковые интервалы возрастания/убывания и выпуклости, а эскиз "— произвольный представитель этого класса. Одному классу могут принадлежат и очень простые и очень сложные в аналитическом плане функции. Напр., $\sin x, \sin\sin x, \sin\sin\sin x, \ldots$ и эллиптический синус $\operatorname{sn}\omega x$, при надлежащем выборе константы ω. В таком случае, возникает очень красивая задача об отыскании элементарного представителя для решения того или иного дифференциального уравнения. Очень может быть, что теория эллиптический функций не вошла в арсенал общеупотебительных сведений именно потому, что для эллиптических функций можно отыскать такой эрзац, достаточный для большинства приложений.

В нашем курсе [4, 5] мы развиваем понятие функций постепенно, отдав первый семестр под развитие Анализа для элементарных функций. В [4] подробно разбирается вопрос о дифференцировании элементарной функции, весьма полезной для чего оказалась серия статей Тихона Тарнавского в «Linux Format» [6]. В [5] описываются классические методы интегрирования элементарных функций с критическими замечаниями, восходящими к работам Дж. Мозеса [1]. Здесь же мы пытаемся дать элементарное представление о методе Лиувилля и численных методах вычисления интегралов, которые «не берутся». В неизданной пока 3-ей части (второй семестр) мы переходим к функциям,

заданным рядами. Здесь возникает возможность, не отвлекаясь на элементарные вопросы, рассмотреть примеры «плохих» функций, для графика которых нельзя построить эскиз. Такое изложение кажется необычным, однако оно вполне точно отражает развитие понятия функции в исторической ретроспективе: хорошо известно, что появление в задачах математической физики рядов Фурье радикально изменило само понятие функции [7].

Взгляд на классический курс Анализа с позиций компьютерной алгебры неизбежно указывает и на неожиданный перекос учебных задач в строну символьных вычислений. Грубо говоря, математические курсы определенно предпочитают символьный ответ

$$\int\limits_{x=0}^{1} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{8}\sqrt{2}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{2}\log\left(\sqrt{2}+2\right) - \frac{1}{8}\sqrt{2}\log\left(-\sqrt{2}+2\right)$$

приближенному ответу

$$\int\limits_{x=0}^{1} \frac{dx}{1+x^4} = 0.8669729873399107 \pm 9.625333722728231 \cdot 10^{-15}.$$

Для практика, напр., для физика, напротив, второй ответ более разумен. Осознание того, что символьные и численные методы ”— это различные методы решения одних и тех же уравнений, неизбежно приводит к давно назревшему вопросу о месте курса Численных методов в университетском курсе.

Список литературы

1. *Joel Moses.* Symbolic integration. MIT, 1967.
2. *Bronstein M.* Symbolic integration I (transcendental functions). Springer-Verlag, 1997.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
4. *Васильев С.А., Малых М.Д., Севастьянов Л.А.* Дифференциальное исчисление вместе с Microsoft Mathematics. М.: Изд-во РУДН, 2015.
5. *Васильев С.А., Малых М.Д., Севастьянов Л.А.* Интегральное исчисление вместе с Microsoft Mathematics. М.: Изд-во РУДН, 2015.
6. *Тарнавский Т.* Maxima — максимум свободы символьных вычислений // «Linux Format» №7 (81), июль 2006 г.
7. *Маркушевич А.И.* Элементы теории аналитических функций. Учпедгиз, 1944.

UDC 372.851

Calculus from the Computer Algebra Viewpoint

M. D. Malykh[*†]

[*] *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia
[†] *MSU Department of Materials Science*
Leninskie gory, Moscow, 119991, Russia

The report is about use of computer algebra systems in education, personal experience of reading mathematical courses in MSU and PFUR and applications of Microsoft Mathematics and Sage.

Key words and phrases: computer science, calculus, computer algebra, education.

УДК 519.178

Аналитическая сложность кластерных деревьев в задачах анализа данных большого объема

А. И. Нормов

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
Стремянный пер., 36, Москва, Россия, 117997

В докладе будет дано определение аналитической сложности кластерного дерева и предложен алгоритм ее вычисления.

Ключевые слова: Кластеризация, двоичные деревья, аналитическая сложность, данные большого объема.

Анализ данных большого объема требует, как правило, их систематизации и классификации. Формируемые классы (кластеры) объектов многочисленной генеральной совокупности данных, подлежащей изучению, могут сравниваться друг с другом путем их отождествления с элементами некоторой комбинаторной структуры (графа, дерева, матрицы и пр.). Эта группа методов анализа данных включает в себя, в числе прочих, дискриминантный анализ, кластеризацию и факторный анализ данных [2]. При этом возникает задача сравнения свойств и характеристик комбинаторных структур, сопоставляемых большим совокупностям исследуемых данных при помощи перечисленных методов. В частности, актуальной является задача сравнения структур кластерных деревьев, которые строятся при помощи кластерного анализа [2].

Если измерения выполнены с достаточно высокой точностью, а используемая метрика позволяет различать все параметры рассматриваемых объектов, то построенное по этим данным кластерное дерево будет двоичным. Действительно, повышение точности измерений соответствует малому возмущению набора данных, содержащего информацию об изучаемой совокупности объектов, а значит, и расстояний между ними в смысле используемой метрики. По теореме Сарда множество конфигураций, три или более элемента которых лежат на одинаковом расстоянии друг от друга (в смысле произвольной фиксированной достаточно гладкой функции расстояния) имеет нулевую меру. Это и означает, что соответствующее данной конфигурации кластерное дерево будет двоичным.

В докладе будет введено понятие аналитической сложности двоичного дерева. Аналитическая сложность функции $f(x, y)$ двух переменных — это ее числовая характеристика со значениями в $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, содержащая информацию о возможных представлениях $f(x, y)$ в виде суперпозиций функций одной переменной и фиксированной функции $s(x, y)$ двух переменных, в качестве которой всюду в дальнейшем используется сумма аргументов: $s(x, y) = x + y$ [1]. В докладе будут изложены свойства аналитической сложности двоичных деревьев и предложен алгоритм ее вычисления. Под аналитической сложностью двоичного дерева понимается аналитическая сложность функции двух переменных, сопоставленной этому дереву некоторым каноническим образом. Полученные результаты применяются для анализа и сравнения структур кластерных деревьев.

Список литературы

1. *Белошапка В. К.* Об аналитической сложности функций двух переменных. — Российский журнал математической физики. **14:3** (2007) — С. 243-249.
2. *Миркин Б. Г.* Методы кластерного анализа для поддержки принятия решений. — М.: Изд. дом Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», 2011.

UDC 519.178

The Analytic Complexity of Cluster Trees in Big Data Analysis

A. I. Normov

Department of Mathematics and Computer Science
Plekhanov Russian University
125993, Moscow, Russia

We introduce the definition of the analytic complexity of a cluster tree and provide an algorithm to compute it.

Key words and phrases: Cluster analysis, binary trees, analytic complexity, big data.

UDC 517.926

On Determination of Satellite Unknowns in Linear Differential Systems

A. A. Panferov[*†]

[*] *Department of Computational Mathematics and Cybernetics*
Moscow State University
Moscow, 119991 Russia

[†] *Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences,*
Vavilov str. 40, CCAS, Moscow, 119333, Russia

We consider a linear homogeneous differential system with selected unknowns. We present an algorithm to determine a set of *satellite* unknowns, i. e. unselected unknowns that belong to the same differential extension as the selected ones.

Key words and phrases: computer algebra, differential systems, selected unknowns, Picard-Vessiot extension, Hrushovski's algorithm, satellite unknowns.

1. Introduction

Let $K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$ be a differential field of rational functions with derivation d/dx. Let S be a differential system of the form

$$y' = Ay, \tag{1}$$

where $A \in \mathrm{M}_n(K)$ and $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Let $s = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\}, 0 < k < n$ be a given set of *selected* unknowns (components of vector y). Denote by K_S a Picard–Vessiot extension of K containing the full solution space V_S of system S.

Let F_s be a differential extension of K satisfying:

1. $\pi_s(V_S) \subseteq F_s^k$, where $\pi_s(V_S)$ is a projection of V_S onto the selected unknowns s.
2. For any $F \supseteq K$ if $\pi_s(V_S) \subseteq F^k$, then $F_s \subseteq F$.

We will use y_i to denote the i-th unknown of S. Without any possible ambiguity, we will also use y_i to denote the i-th component of solution to S. Thus, we have $\forall y_i \in s \Rightarrow y_i \in F_s$. The unselected unknown y_j is called *satellite* unknown for the set of selected unknowns s if $y_j \in F_s$.

We will consider the following problem. Given a system S with selected unknowns s, find all satellite unknowns. To solve this problem we need an algorithm to recognize if an unselected component y_j of unknown vector is a satellite unknown. In the next section, we shall present such algorithm.

2. Algorithm

We will use the AB-algorithm proposed by S. A. Abramov and M. Bronstein in [1]. This algorithm for the given differential system S of the form (1) and the set of selected unknowns s produces a new differential system $z' = Bz$, where B is a square matrix over K and the components of the unknown vector z are the selected components from s and, possibly, some their derivatives. Denote by S_s^{AB} the resulting system produced by the AB-algorithm applied to the system S with selected unknowns s. Then the field F_s, mentioned in Introduction, may be formally defined as $F_s = K_{S_s^{\mathrm{AB}}}$, i. e. F_s is a Picard–Vessiot extension for the system S_s^{AB}.

By $|S|$ denote the size of the system S (the number of equations). Then the algorithm to determine if the unselected unknown y_j is an satellite unknown for s consists of the following steps:

1. By using the AB-algorithm, build systems S_s^{AB} and $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, where $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.

2. If $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S|$, then all unselected unknowns (not only y_j) are satellite unknowns and we have done, otherwise go to the next step.
3. If $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}|$, then y_j is a satellite unknown by [1, Prop. 1 (iii)], otherwise go to the next step.
4. If $|S_s^{\mathrm{AB}}| < |S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}|$, then for y_j to be a satellite unknown it is necessary and sufficient to have

$$K_{S_s^{\mathrm{AB}}} = K_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}}. \tag{2}$$

The problem to check if for two given differential systems of the form (1) their Picard–Vessiot extensions coincide was previously considered in [2, Sect. 5.3.3 (H)]. By the properties of the AB-algorithm, we have $K_{S_s^{\mathrm{AB}}} \subseteq K_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}}$, so it is sufficient to check the condition

$$K_{S_s^{\mathrm{AB}}} \supseteq K_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}}. \tag{3}$$

Therefore, we may use the methods similar to the ones from [2]. Denote by $G_{S_s^{\mathrm{AB}}}$, $G_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}}$ differential Galois groups of extensions $K_{S_s^{\mathrm{AB}}}$, $K_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}}$ over K respectively. Consider a map $\pi\colon G_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}} \to G_{S_s^{\mathrm{AB}}}$. It is clear that π is surjective. Therefore, the condition (3) holds iff π is injective. From Hrushovski's algorithm [3] (or its improved version [4]) we can compute the defining polynomial equations of the Galois groups $G_{S_s^{\mathrm{AB}}}$ and $G_{S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}}$ in their matrix representations associated with the given systems, and, using Gröbner bases, decide if π is injective.

3. Linear differential-algebraic systems

The algorithm can be extended to handle differential systems (of full rank) of the form

$$A_0 y' + A_1 y = 0, \tag{4}$$

where $A_0, A_1 \in \mathrm{M}_n(K)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Any linear homogeneous differential system of arbitrary order can be reduced to the form (4).

In order to use the algorithm from the section 2 we can transform the system (4) to (1) by the Extract algorithm [5, 6]. As previously we consider the task of determination if the unselected unknown y_j is a satellite unknown for s. Taking into account the specific of the problem, we should apply the Extract algorithm to the system (4) w.r.t. $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$. We need slightly modify the second stage of the algorithm. Namely, when eliminating the unknown from the set $\tilde{s}$ y_j should be eliminated if possible. As a result of the Extract algorithm we obtain a differential system S_d for the part of unknowns $\tilde{y} \subseteq y$ and an algebraic system S_a to express unknowns from $\tilde{s}$ that are not a part of $\tilde{y}$. If y_j is expressed from S_a, then y_j is a satellite unknown. If it is not, then y_j is an unknown of S_d system and we may use the algorithm described in the section 2.

4. Sol-satellite unknowns

Considered satellite unknowns are defined by subfield F_s of K_S. This subfield is determined by the selected components of all system solutions. So we will refer to these satellite unknowns as *sys-satellite* unknowns. We also may discuss satellite unknowns, when subfield F_s is determined only by the selected unknowns of some particular solution to the system. An unknown y_j is called *sol-satellite* if for any solution to the system a component y_j belongs to the same extension as all selected components of this solution. The problems to determine all sol-satellite unknowns and all sys-satellite unknowns are seems to be similar. But they are two different problems. The algorithm to solve the second is presented in the section 2, but the algorithmic solution of the first is an open problem.

Acknowledgments

The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 16-01-00174.

References

1. Abramov S. A., Bronstein M. Solving linear systems of differential and difference equations with respect to a part of the unknowns. — Comput. Math. Math. Phys., 2006, vol. 46, no. 2. — P. 218–230.
2. Minchenko A., Ovchinnikov A., Singer M. F. Reductive linear differential algebraic groups and the Galois groups of parameterized linear differential equations. — International Mathematics Research Notices, 2015, vol. 215, Issue 7. — P. 1733–1793.
3. Hrushovski E. Computing the Galois group of a linear differential equation. — Banach Center Publications 58, 2002. — P. 97–138.
4. Feng R. Hrushovski's algorithm for computing the Galois group of a linear differential equation. — Advances in Applied Mathematics 65, 2015. — P. 1–37.
5. Panferov A. A. Differential equation systems with selected part of the unknowns. — Programming and Computer Software, Vol. 41, No. 2, 2015. — P. 90–97.
6. Panferov A. A. Partitions of the set of selected unknowns in linear differential-algebraic systems. — Programming and Computer Software, Vol. 42, No. 2, 2016. — P. 84–89.

УДК 517.926

Определение сателлитных неизвестных в линейных дифференциальных системах

А. А. Панферов[*†]

[*] *Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Воробьевы горы*
[†] *Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333.*

Рассматриваются линейные однородные дифференциальные системы с выделенными неизвестными. Предлагается алгоритм определения множества *сателлитных* неизвестных, т. е. невыделенных неизвестных, принадлежащих тому же дифференциальному расширению, что и выделенные.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, дифференциальные системы, выделенные неизвестные, расширение Пикара-Вессио, алгоритм Хрущевского, сателлитные неизвестные.

UDC 004.421.6+510.5

On Universal Denominator of Rational Function Solutions of Partial Differential and Difference Equations

S. V. Paramonov[*†]

[*] *Department of Computational Mathematics and Cybernetics*
Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory str. 1, Moscow, 119991, Russia
[†] *Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences*
Vavilov str. 40, CCAS, Moscow, 119333, Russia

We consider the problem of finding a universal denominator for linear partial differential and difference equations with polynomial coefficients. In the case of ordinary equations, known algorithms for finding rational function solutions are based on constructing a universal denominator. In the multivariate case a universal denominator does not exist for an arbitrary equation but there are algorithms for difference equations that find certain information about rational function solutions and build a "partial" universal denominator. We prove that the problem of testing the existence of universal denominators for linear partial differential and difference equations is algorithmically undecidable.

Key words and phrases: differential equations, difference equations, universal denominator, algorithmic undecidability.

1. Rational solutions and universal denominator

We consider linear partial differential equations

$$\sum_{s\in S} a_s(x_1,\dots,x_m)\frac{\partial^{s_1+\dots+s_m} y(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_m^{s_m}} = 0 \tag{1}$$

and linear partial difference equations of the similar form

$$\sum_{s\in S} a_s(x_1,\dots,x_m)y(x_1+s_1,\dots,x_m+s_m) = 0, \tag{2}$$

where S is a finite subset of $\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$, $x_1,\dots,x_m$ are independent variables, $a_s(x_1,\dots,x_m)$ are polynomial coefficients.

Known algorithms for finding rational function solutions for ordinary (i.e. when $m=1$) differential and difference equations of such type contain the search for universal denominator [1]. The universal denominator is a polynomial $q(x)$ such that any solution $y(x)\in\mathbb{K}(x)$ of the equation could be represented as $y(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ where $p(x)\in\mathbb{K}[x]$. When we found such $q(x)$, we can transform the equation into another one that has a solution $p(x)\in\mathbb{K}[x]$ if and only if the initial equation has solution $\frac{p(x)}{q(x)}$, thus we can reduce the search for rational function solutions to the search for polynomial solutions.

The existence testing problem for polynomial solutions, as well as rational function solutions, to linear partial differential and difference equations with polynomial coefficients is algorithmically undecidable [5, 7]. Nevertheless the problem of constructing the universal denominator for these equations is still interesting because the reduction of the search for rational function solutions to the search for the polynomial solutions can be useful. Although the latter problem is unsolvable in general, it is solvable if e.g. we have the upper bound for the degree of solution.

M. Kauers and C. Schneider consider the problem of the search for the universal denominator of difference equations in [4, 5]. They introduce the classification of multivariate polynomials $p(x_1,\dots,x_m)$ into periodic and aperiodic:

1. a polynomial $p(x_1, \ldots, x_m)$ is periodic if the set of such $d \in \mathbb{Z}^m$ that

$$\gcd(p(x_1, \ldots, x_m), p(x_1 + d_1, \ldots, x_m + d_m)) \neq 1$$

   is infinite,
2. otherwise $p(x_1, \ldots, x_m)$ is aperiodic.

Any polynomial can be factorized uniquely to the periodic and aperiodic parts. The algorithm presented in [5] can find "partial" universal denominator for difference equation with polynomial coefficients that contains all aperiodic factors and covers the wide class of periodic factors of the denominators of all rational function solutions. Using this algorithm one can construct the universal denominator for an ordinary difference equation because all polynomials are aperiodic in the univariate case, but in the general multivariate case this algorithm cannot find the universal denominator. Moreover, some equations don't have the universal denominator, e.g. $y(x_1 + 1, x_2) - y(x_1, x_2 + 1) = 0$.

2. Main result

We prove the following theorem:

Theorem. *It is algorithmically undecidable whether there exists a universal denominator for a given differential or difference equation of the form* (1) *or* (2).

The proof is based on Davis-Matiyasevich-Putnam-Robinson theorem that is negative solution of Hilbert's tenth problem. This theorem implies that the problem to test the existence of integer solution for given Diophantine equation is algorithmically undecidable. We show that this problem can be reduced to the testing of the existence of the universal denominator. For this purpose we consider differential and difference equations of the special kind that are used also in [3, 5]:

$$P\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, x_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) y(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

$$P(x_1 \Delta_1, \ldots, x_m \Delta_m) y(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

where $\Delta_i y(x_1, \ldots, x_m) = y(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_m) - y(x_1, \ldots, x_m)$, P is a polynomial. Such equations have the properties that allow to associate the existence of solutions of some forms to the existence of integer solutions of the Diophantine equation $P(n_1, \ldots n_m) = 0$.

Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR grant No 16-01-00174.

References

1. Abramov S. A. Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coefficients // Proceedings of ISSAC'95, p. 285–289, 1995.
2. Abramov S. A., Petkovšek M. On Polynomial Solutions of Linear Partial Differential and (q-)Difference Equations // Proceedings of CASC 2012, p. 1–11, 2012.
3. Denef J., Lipshitz L. Power series solutions of algebraic differential equations // Mathematische annalen, Vol. 267, №. 2, p. 213–238, 1984.
4. Kauers M., Schneider C. Partial Denominator Bounds for Partial Linear Difference Equations // Proceedings of ISSAC'10, p. 211–218, 2010.
5. Kauers M., Schneider C. A Refined Denominator Bounding Algorithm for Multivariate Linear Difference Equations // Proceedings of ISSAC'11, p. 201–208, 2011.
6. Matiyasevich Y. V. Hilbert's Tenth Problem // MIT Press, Cambridge, 1993.
7. Paramonov S. V. On rational solutions of linear partial differential or difference equations // Programming and Computer Software, № 2, p. 57–60, 2013.

УДК 004.421.6+510.5

Об универсальном знаменателе решений в виде рациональных функций уравнений в частных производных и разностях

С. В. Парамонов[*†]

[*] *Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, ул. Ленинские Горы, 1, Москва, Россия, 119991*
[†] *Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333*

Рассматривается задача поиска универсального знаменателя для линейных уравнений в частных производных или разностях с полиномиальными коэффициентами. Для обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений алгоритмы нахождения универсальных знаменателей известны. Они лежат в основе алгоритмов построения решений в виде рациональных функций. В случае нескольких переменных универсальный знаменатель существует не для любого уравнения, однако для разностных уравнений существуют алгоритмы, позволяющие определять некоторую информацию о решениях в рациональных функциях и строить «частичный» универсальный знаменатель. В этой работе мы доказываем, что задача проверки существования универсального знаменателя для линейных уравнений в частных производных или разностях с полиномиальными коэффициентами является алгоритмически неразрешимой.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, разностные уравнения, универсальный знаменатель, алгоритмическая неразрешимость.

УДК 512.628.2

Дифференциальный аналог теоремы о примитивном элементе

Г. А. Погудин

Кафедра высшей алгебры,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
ул. Ленинские горы, д.1, Москва, Россия, 119234

В 1942 году Э. Колчин доказал следующую дифференциальную версию классической теоремы о примитивном элементе.

Пусть дифференциальное поле E конечно порождено над дифференциальным полем F, всякий элемент из E удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнения с коэффицентами из F, и F содержит неконстанту. Тогда E над F можно породить одним элементом.

Вопрос о том, верна ли эта теорема, если F состоит из констант, а E содержит неконстанту, был долгое время открыт и только недавно решен положительно. В докладе будет рассказано, почему этот случай интересен, в чем его отличие от теоремы Колчина.

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, дифференциальные поля.

Аддитивное отображение D из кольца A в себя называется *дифференцированием*, если удовлетворяет тождеству Лейбница: $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. Обычно мы будем обозначать $D(x)$ и $D^n(x)$ через x' и $x^{(n)}$ соответственно. Коммутативное кольцо с выделенным дифференцированием будем называть *дифференциальным кольцом*.

Дифференциальное кольцо, являющееся полем, называется *дифференциальным полем*. Пусть $F \subset E$ — расширение дифференциальных полей и $a \in E$. Мы будем обозначать дифференциальное подполе в E, порожденное a и F, через $F\langle a\rangle$. Элемент $a \in E$ называется *дифференциально алгебраическим* над F, если он удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению с коэффициентами из F. Расширение $E \supset F$ называется *дифференциально алгебраическим*, если каждый элемент $a \in E$ дифференциально алгебраичен над F. Элемент $a \in E$ называется *примитивным*, если $E = F\langle a\rangle$.

Колчин доказал ([1]) дифференциальный аналог теоремы о примитивном элементе:

Теорема. *Пусть $E = F\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, и расширение $E \supset F$ дифференциально алгебраично. Пусть также F содержит неконстанту (то есть элемент f такой, что $f' \neq 0$). Тогда существует $b \in E$ такой, что $E = F\langle b\rangle$.*

Следствие Пусть $E = F\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ и расширение $E \supset F$ дифференциально алгебраично. Пусть также E содержит неконстанту. Тогда существуют $b, c \in E$ такие, что $E = F\langle b, c\rangle$.

Замечание В [1] Колчин рассматривал более общий случай нескольких коммутирующих дифференцирований. Мы рассматриваем случай только одного дифференцирования.

Последнее условие теоремы не может быть исключено. Действительно, рассмотрим поле $E = \mathbb{Q}(x, y)$ с нулевым дифференцированием. Легко видеть, что у расширения $F = \mathbb{Q} \subset E$ нет примитивного элемента.

Однако, ряд примеров показывают, что во многих естественных ситуациях, где теорема Колчина не применима, примитивный элемент все-таки есть.

Пример 1. Рассмотрим расширение $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(x, e^x)$ со стандартным дифференцированием. Легко видеть, что через $a = x + e^x$ выражаются оба порождающих: $e^x = a''$, $x = a - a''$.

В доказательстве Колчина примитивный элемент b строится как линейная комбинация порождающих $a_1, \ldots, a_n$ с коэффициентами из F. Как показывают следующие примеры, в случае, когда основное поле расширения состоит из констант, примитивный элемент может не обнаружиться среди таких линейных комбинаций.

Пример 2. Рассмотрим расширение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(x, y)$ с дифференцированием $x' = 1$, $y' = 0$. Ни один из элементов вида $x + \lambda y$ не порождает всего поля, но $\mathbb{Q}(x, y) = \mathbb{Q}\langle x^2 + y\rangle$.

Пример 3. Рассмотрим расширение $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(x, \ln x, \ln(x+1))$ со стандартным дифференцированием. Как расширение дифференциальных полей оно может быть порождено двумя элементами $\ln x$ и $\ln(x+1)$. Рассмотрим некоторый элемент вида $a = \ln x + \alpha \ln(x+1)$ ($\alpha \in \mathbb{C}$). Дифференцируя, получаем, что $\mathbb{C}\langle a' \rangle \subseteq \mathbb{C}(x)$, то есть степень трансцендентности расширения $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\langle a \rangle$ не превосходит двойки, в то время как $\operatorname{trdeg} \mathbb{C}(x, \ln x, \ln(x+1)) = 3$. Значит, среди элементов вида $a = \ln x + \alpha \ln(x+1)$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) нет примитивного.

В работе [2] была доказана следующая усиленная теорема о примитивном элементе, под условия которой все приведенные примеры подходят.

Теорема. *Пусть $E = F\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, и E дифференциально алгебраично над F. Тогда существует $b \in E$ такой, что $E = F\langle a \rangle$.*

В этом доказательстве примитивный элемент находится в виде многочлена с целыми коэффициентами от порождающих E над F. Рассуждение конструктивно и может служить основой для построения алгоритма нахождения примитивного элемента в расширении дифференциальных полей.

Список литературы

1. Kolchin E.R., *Extensions of differential fields, I*, Annals of Mathematics, vol. 43, 1942.
2. Pogudin G.A., *The primitive element theorem for differential fields with zero derivation on the base field*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol 219(9), pp. 4035-4041, 2015.

UDC 512.628.2

Differential Analogue of the Primitive Element theorem

G. A. Pogudin

Chair of Higher Algebra
Moscow State University
Leninskie gory, Moscow, 119234, Russia

In 1942 E. Kolchin obtained the following differential analogue of the Primitive Element theorem.

Let E be a finitely generated differential field extension of a differential field F. Assume that every element of E satisfies an algebraic differential equation over F and F contains a nonconstant element. Then, there exists a in E such that E is generated by a and F.

It was unknown for several decades if the theorem holds in the case when F consists of constants and E contains a nonconstant element. Recently, this question was answered affirmatively.

Key words and phrases: differential algebra, differential fields.

УДК 519.7

Построение разрешающих последовательностей для систем, заданных полиномами Оре

А. А. Рябенко

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,
ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333

Представляется модификация алгоритма (и его реализации в Maple 2015) построения разрешающих последовательностей операторов для случая систем линейных операторных уравнений, заданных полиномами Оре.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, системы линейных уравнений, полиномы Оре.

1. Введение

В [1] было предложено понятие разрешающей последовательности для нормальной системы разностных уравнений первого порядка. Затем, в [2] это понятие было сформулировано для линейных дифференциальных и разностных систем произвольного порядка. Был предложен алгоритм построения разрешающих последовательностей, его реализация в системе Maple 2015 ([3]). Приведены алгоритмы, использующие разрешающие последовательности, — построения гипергеометрических решений разностных систем, формальных экспоненциально-логарифмических решений дифференциальных систем.

Алгоритмы построения разрешающей последовательности в разностном и дифференциальном случае имеют много общего. Они могут быть описаны единообразно, используя понятие некоммутативных полиномов Оре ([4], [5, §3,§4.5]). В системе Maple существует реализация основных операций в кольце полиномов Оре — пакет `OreTools`, что позволило реализовать алгоритм построения разрешающих последовательностей для произвольных систем линейных операторных уравнений.

2. Разрешающая последовательность операторов

Пусть $\mathbb{K}$ — поле характеристики 0 с автоморфизмом σ и дифференцированием δ относительно σ таким, что выполняются условия: $\delta(a+b) = \delta a + \delta b$ и $\delta(ab) = \sigma(a)\delta b + (\delta a)b$ для любых $a, b \in \mathbb{K}$.

Пусть далее $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ — линейное пространство над $\mathbb{K}$. Рассматриваем системы операторных уравнений вида

$$A_n\xi^n y + \cdots + A_1\xi y + A_0 y = 0, \tag{1}$$

где $A_k \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $m \in \mathbb{N}_{>0}$, $A_n \neq 0$, $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ — вектор-столбец неизвестных. Отображение $\xi : \mathcal{L}_{\mathbb{K}} \mapsto \mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ — псевдолинейно относительно σ и δ, т.е. $\xi(u+v) = \xi(u) + \xi(v)$, $\xi(au) = \sigma(a)\xi(u) + \delta(a)u$ для любых $a \in \mathbb{K}$, $u, v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}$.

Определение разрешающей последовательности операторов, сформулированное в [2, раздел 2.3] для частных случаев $\xi = \delta$, $\sigma = \mathrm{id}$ и $\xi = \sigma$, $\delta = 0$, легко обобщается:

Определение 1. Пусть (1) — система полного ранга. Пусть также $l_1, \ldots, l_p$ — попарно различные положительные числа, не превосходящие m, и пусть скалярные операторы $L_1, \ldots, L_p \in \mathbb{K}[\xi]$ таковы, что если $y_{l_1} = \cdots = y_{l_j} = 0$ (при $j \leq p$) для некоторого решения $y \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^m$ системы (1), то

- в случае $j = p$ все компоненты этого решения равны нулю: $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$,
- в случае $j < p$ для компоненты $y_{l_{j+1}}$ этого решения выполнено $L_{j+1}(y_{l_{j+1}}) = 0$.

Тогда конечная последовательность операторов $L_1, \ldots, L_p$ называется *разрешающей последовательностью* данной системы, а вектор $(l_1, \ldots, l_p)$ — *индикатором* этой последовательности.

Один из этапов алгоритма построения разрешающей последовательности — нахождение уравнения $L_1(y_{l_1}) = 0$, которое называется y_{l_1}-*разрешающим* для (1). Формулы этого этапа, предложенные в [2, раздел 2.1], модифицируются на общий случай следующим образом. Вместо

$$c^{[0]} = c, \;\; c^{[i]} = c^{[i-1]}A + \delta c^{[i-1]} \;\; \text{(дифференциальный случай: } \xi = \delta)$$

и

$$c^{[0]} = c, \;\; c^{[i]} = \sigma(c^{[i-1]})A \;\; \text{((q-)разностный случай: } \xi = \sigma)$$

используем формулу

$$c^{[0]} = c, \;\; c^{[j]} = \sigma(c^{[j-1]})A + \delta c^{[j-1]}.$$

3. Реализация

В [2, раздел 6.1] представлена Maple-процедура `ResolvingSequence` построения разрешающих последовательностей для линейных обыкновенных дифференциальных, разностных и q-разностных систем. Возможности этой процедуры, которая теперь является частью пакета `RS`, расширены на случай любой системы (1), заданной с помощью полинома Оре $A_n\xi^n + \cdots + A_1\xi + A_0$ с матричными коэффициентами.

В предлагаемой реализации поле $\mathbb{K}$ является полем рациональных функций одной переменной над $\overline{\mathbb{Q}}$. Аргументы процедуры: полином Оре с матричными коэффициентами и представление кольца Оре, созданное с помощью стандартной Maple-процедуры `SetOreRing` пакета `OreTools`. Полином Оре в Maple представляется выражением `OrePoly`$(A_0, A_1, \ldots, A_n)$. Процедура возвращает последовательность разрешающих операторов как список полиномов Оре. Индикатор построенной последовательности возвращается процедурой `Indicator` пакета `RS`.

Пакет `OreTools` предоставляет возможность описать любое кольцо Оре. Например, кроме указанных выше, в компьютерной алгебре используются Δ-разностные операторы ($\delta y(x) = \Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$; $\sigma y(x) = y(x+1)$); операторы с дифференцированием Эйлера ($\delta = x\frac{d}{dx}$; $\sigma = \mathrm{id}$) и другие. На help-странице `SetOreRing` следующим образом задается Δ-разностный случай:

```
>OR := OreTools:-SetOreRing(x, 'Delta',
  'sigma' = proc(p, x) eval(p, x=x+1) end,
  'sigma_inverse' = proc(p, x) eval(p, x=x-1) end,
  'delta' = proc(p, x) eval(p, x=x+1) - p end,
  'theta1' = 0);
```

Для системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -x-5 & -x-2 \\ 0 & 2x+10 & x+2 \\ 1 & x+5 & x+2 \end{pmatrix} \Delta^2 y(x) + \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & 0 \\ -2x-4 & -2x-4 & 0 \\ -x-3 & -x-3 & 0 \end{pmatrix} \Delta y(x) + \begin{pmatrix} -x & 2 & x+2 \\ 2x & -2 & -x-2 \\ x & 0 & -x-2 \end{pmatrix} y(x) = 0 \quad (2)$$

получаем последовательность разрешающих операторов:

```
> RS:-ResolvingSequence(
   OrePoly(<<-x | 2 | x+2>, <2*x | -2 | -x-2>, <x | 0 | -x-2>>,
           <<x+1 | x+1 | 0>, <-2*x-4 | -2*x-4 | 0>, <-x-3 | -x-3 | 0>>,
           <<1 | -x-5 | -x-2>, <0 | 2*x+10 | x+2>, <1 | x+5 | x+2>>),
   OR);
```

$$[OrePoly(-x+1, 2x+3, -3, -2x-7, x+6), OrePoly(-1, 0, 1)]$$

и индикатор этой последовательности:

```
> RS:-Indicator()
```

$$[1, 3]$$

Пакет `RS` и примеры использования его процедур доступны по адресу http://www.ccas.ru/ca/doku.php/resolvingsequence.

Благодарности

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 16-01-00174 А.

Список литературы

1. *Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A.* Hypergeometric solutions of first-order linear difference systems with rational-function coefficients // *CASC'2015 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science.* — 2015. — Vol. 9301. — P. 1–14.
2. *Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A.* Resolving sequences of operators for linear ordinary differential and difference systems // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2016. — Vol. 56, no. 5. — P. 894–910.
3. Maple online help. — URL: `http://www.maplesoft.com/support/help/`.
4. *Ore O.* Theory of non-commutative polynomials // *Annals of Mathematics.* — 1933. — Vol. 34. — P. 480–508.
5. *Абрамов С.* Элементы компьютерной алгебры линейных обыкновенных дифференциальных, разностных и q-разностных операторов. — Москва : МЦМНО, 2012.

UDC 519.7

Construction of Resolving Sequences for Systems given by Ore Polynomials

A. A. Ryabenko

Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences,
Vavilov str. 40, CCAS, Moscow, 119333, Russia

A modification of the algorithm (and its implementation in Maple 2015) to construct resolving sequences for the case of linear operator systems given by Ore polynomials is presented.

Key words and phrases: symbolic computation, linear operator systems, Ore polynomials.

UDC 519.615.4

Efficient Computation of Bounds of Polynomial Roots

D. Ştefănescu

Department of Theoretical Physics and Mathematics
University of Bucharest
Bd. M. Kogălniceanu, No. 36-46
050107 Bucharest, Romania

We discuss the efficiency of the computation of bounds for polynomial roots. We overview some classical devices and we discuss recent trends concerning the location of roots of univariate polynomials with real or complex coefficients.

Key words and phrases: computer polynomial algebra, bounds for roots.

1. Introduction

There are known many bounds for the absolute values of univariate polynomials with complex coefficients. A natural question is to know how far such bounds are from the true bounds. If P is such a polynomial we denote by $B(P)$ a bound for the absolute values of the roots and by $T(P)$ the true bound for the moduli of the roots. We discuss the relation between $B(P)$ and $T(P)$.

2. Bounds for polynomial roots

We know, by the Fundamental Theorem of Algebra, that any nonconstant univariate polynomial has complex roots and that their number, counted with multiplicities, is equal to the degree. However, this beautiful theorem does not give an algorithmic device to compute the roots. But in the real life we need to compute these roots. This is done by - hopefully accurate - numerical approximations. A key step in the numerical computation of the roots is their location, i.e. the computation of bounds for the moduli of the roots. Bounds for complex roots were obtained, among other, by Cauchy, Kuniyeda, Fujiwara and others.

3. Complex Polynomials

Theorem 1. *(A-L. Cauchy, 1829) All the roots of the nonconstant complex polynomial* $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ *are contained in the disk* $|z| \leq \xi$, *where* ξ *is the unique positive solution of the equation*

$$|a_d|X^d = |a_0| + |a_1|X + \cdots + |a_{d-1}|X^{d-1}. \qquad (1)$$

One of the most efficient is the following bound of Fujiwara:

$$Fw(P) = 2 \cdot \max \left| \frac{a_{d-i}}{a_d} \right|^{1/i}$$

In fact, the previous bound is a general one for complex roots AND can be easily deduced from a Theorem of Lagrange. It can be also be obtained from a theorem of Kuniyeda.

4. Real Polynomials

Theorem 2. *(J. B. Kioustelidis, 1986) Let*

$$P(X) = X^d - b_1X^{d-m_1} - \cdots - b_kX^{d-m_k} + \sum_{j\neq m_1,\ldots,m_k} a_jX^{d-j},$$

with $b_1,\ldots,b_k > 0$ *and* $a_j \geq 0$ *for all* $j \notin \{m_1,\ldots,m_k\}$.

The number

$$K(P) = 2\cdot\{b_1^{1/m_1},\ldots,b_k^{1/m_k}\}$$

is an upper bound for the positive roots of P.

Theorem 3. *(D. Ştefănescu, 2005) Let*

$$P(X) = X^d - b_1X^{d-m_1} - \cdots - b_kX^{d-m_k} + \sum_{j\neq m_1,\ldots,m_k} a_jX^{d-j},$$

with $b_1,\ldots,b_k > 0$ *and* $a_j \geq 0$ *for all* $j \notin \{m_1,\ldots,m_k\}$.

The number

$$B_1(P) = \max\{(kb_1)^{1/m_1},\ldots,(kb_k)^{1/m_k}\}$$

is an upper bound for the positive roots of P.

Theorem 4. *(D. Ştefănescu, 2005) Let* $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ *be such that the number of sign variations of its coefficients is even. If*

$$P(X) = a_1X^{d_1} - b_1X^{m_1} + \cdots + a_sX^{d_s} - b_sX^{m_s} + g(X),$$

where $g(X) \in \mathbb{R}_+[X]$, $a_j > 0$, $b_j > 0$, $d_j > m_j$ *for all* j, *the number*

$$St(P) = \max_{1\leq j\leq s}\left\{\left(\frac{b_j}{a_j}\right)^{1/(d_j-m_j)}\right\}$$

is an upper bound for the positive roots.

5. Current trends

Theorem 5. *(Lagrange, 1767) Let* F *be a nonconstant monic polynomial of degree* n *over* $\mathbb{R}$ *and let* $\{a_j\,;\, j\in J\}$ *be the set of its negative coefficients. An upper bound for the positive real roots of* F *is given by the sum of the largest and the second largest numbers in the set*

$$\left\{\sqrt[j]{|a_j|}\,;\, j\in J\right\}.$$

Theorem 6. *Let* $F(X) = X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_{d-1}X + a_d$ *be a polynomial with complex coefficients, with* $d > 0$ *and* $a_d \neq 0$. *Suppose that* $|a_{i_1}|^{1/i_1} \geq |a_{i_2}|^{1/i_2} \geq \cdots \geq |a_{i_d}|^{1/i_d}$ *and put* $R = |a_{i_1}|^{1/i_1}$, $\rho = |a_{i_2}|^{1/i_2}$, $i_1 = j$ *and*

$$C_j = \begin{cases} \dfrac{R+\rho+\sqrt{R^2-2R\rho+5\rho^2}}{2} & \text{if} \quad j=1, \\ (R^{j-1}+R^{j-2}\rho+\cdots+\rho^{j-1})^{1/(j-1)} & \text{for} \quad j=2,\ldots,d. \end{cases}$$

Then for any complex root z of F we have

$$|z| \le \max\left\{C_j,\ \frac{R+\rho+\sqrt{R^2-2R\rho+5\rho^2}}{2}\right\}.$$

Theorem 7. *Let $F(X) = X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_{d-1}X + a_d$ be a polynomial with complex coefficients, with $d > 0$ and $a_d \neq 0$ and*

$$|a_{i_1}|^{1/i_1} \ge |a_{i_2}|^{1/i_2} \ge \cdots \ge |a_{i_d}|^{1/i_d}.$$

We put $R = |a_{i_1}|^{1/i_1}$, $\rho = |a_{i_2}|^{1/i_2}$ and $j = i_1$. Then the positive root of the polynomial

$$u(X) = (X-2\rho)X^j - (R^j - \rho^j)(X-\rho)$$

is an upper bound for the absolute values of the roots of the polynomial F.

References

1. *Cauchy A.–L.*, *Exercices de Mathématiques*, t. 4, Paris (1829).
2. *Kioustelidis J. B.*, Bounds for positive roots of polynomials. J. Comput. Appl. Math. 16, 241–244 (1986)
3. *Hong H.*, Bounds for absolute positiveness of multivariate polynomials. J. Symb. Comp. 25, 571–585 (1998)
4. *Lagrange J.–L.*, *Traité de la résolution des équations numériques*, Paris (1798).
5. *Mignotte M., Ştefănescu D.*, *Polynomials – An Algorithmic Approach*, Springer Verlag (1999).
6. *Mignotte M., Ştefănescu D.*, On an estimation of polyomial roots by Lagrange,Prépubl. IRMA, 25/2002, 17 pag., Strasbourg (2002).
7. *Ştefănescu D.*, New bounds for positive roots of polynomials. Univ. J. Comput. Sci. 11, 2125–2131 (2005)
8. *Ştefănescu D.*, A new polynomial bound and its efficiency, in V. Gerdt, W. Koepf, W. Seiler, E. Vorozhtsov (Eds.), *Computer Algebra in Scientific Computing*, LNCS 9301, Springer Verlag (2015).

УДК 519.615.4

Эффективное вычисление границ корней полиномов

Д. Штефанеску

Факультет теоретической физики и математики
Бухарестский университет
Бульвар М. Когэлничану, 36–46
050107 Бухарест, Румыния

Обсуждается эффективность вычисления границ корней полиномов. Дается обзор как классических результатов, так и недавних достижений, касающихся анализа расположения корней полиномов одной переменной с вещественными или комплексными коэффициентами.

Ключевые слова: компьютерная алгебра полиномов, границы корней.

УДК 81.139+004.415.2

Система синтеза текста на русском языке passare.ru

Т. А. Жуков, Т. М. Садыков

Российский экономический университет
им. Г. В. Плеханова
Стремянный пер., 36, Москва, Россия, 117997

Задачи синтеза грамматически правильного текста на естественном языке и автоматизированной коррекции текста известны своей сложностью. Они тесно связаны с задачей автоматизированного перевода, которая, несмотря на значительные усилия, вряд ли может считаться решенной. В докладе будут представлены основные алгоритмы, лежащие в основе работы сайта автоматизированной обработки лингвистических данных и синтеза грамматически правильного текста passare.ru.

Ключевые слова: Автоматизированный синтез текста, компьютерная коррекция текста, автоматизированный перевод.

Анализ, синтез и коррекция текста на естественном языке образуют класс трудных задач компьютерной обработки данных. Они тесно связаны с задачей автоматизированного перевода текста [1], которая в настоящий момент является, по-видимому, непомерно сложной для существующих вычислительных систем и имеющейся алгоритмической базы и требует создания качественно новых подходов к ее решению [2, 3]. В докладе будут представлены основные возможности и алгоритмы, лежащие в основе работы сайта www.passare.ru, содержащего функции анализа и синтеза грамматически корректного текста на русском языке.

Русский язык отличается развитой грамматикой и обилием форм заданного слова [4]. Например, среднее значение различных форм прилагательного русского языка без учета степеней сравнения близко к 12, в то время как среднее значение глагольных форм (с учетом причастных и деепричастных оборотов) достигает 44. С точки зрения компьютерной обработки текста данное обстоятельство облегчает решение задачи распознавания слова и части речи, к которой оно относится, и затрудняет решение задачи формирования грамматически правильного текста.

Формирование грамматически правильного текста на русском языке требует, в частности, реализации алгоритма видоизменения отдельного слова по тем параметрам, от которых может зависеть его форма. Исходными данными в этом случае являются инфинитив слова [5] и набор значений параметров. Система автоматизированного синтеза текста passare.ru включает в себя, в числе прочих, следующие функции:

1. Определение рода существительного русского языка.
2. Определение спряжения и модели глагола русского языка.
3. Видоизменение существительных, прилагательных, глаголов, наречий, причастий и местоимений (личных, притяжательных и указательных) русского языка.
4. Осуществление согласования членов словосочетаний и предложений на русском языке по числу, роду, падежу, одушевленности и т.п.
5. Синтез грамматически правильного текста на русском языке на отдельные темы по числовым данным.

В докладе будут освещены эти и другие возможности сетевого сервиса passare.ru.

Благодарности

Второй автор был поддержан грантом РФФИ 15-31-20008-мол-а-вед.

The second author was supported by the grant of the Russian Foundation for Basic Research no. 15-31-20008-mol-a-ved.

Список литературы

1. *Бакулов А. Д., Леонтьева Н. Н.* Теоретические основы машинного перевода. Искусственный интеллект: в 3 кн. Кн. 1 Системы общения и экспертные системы: Справочник под ред. Попова Э. В., М.: Радио и связь, 1990.
2. *Болдасов М. В.* Генерация текстов на естественном языке – теории, методы, технологии / НТИ. Сер. 2, Информационные процессы и системы. — 2006. № 7. С. 12–22.
3. *Иомдин Л. Л.* Автоматическая обработка текста на естественном языке: модель согласования. — М.: Наука, 1990.
4. *Корпусные исследования по русской грамматике* / Под ред. Киселевой К. Л., Плунгяна В. А., Рахилиной Е. В., Татевосова С. Г. — М.: ПРОБЕЛ-2000, 2009.
5. *Han I. et al.* LEPOR: A Robust Evaluation Metric for Machine Translation with Augmented Factors. Proceedings of the 24th International Conference on Computational Linguistics (2012), P. 441-450.

UDC 81.139+004.415.2

Passare.ru: a Web-service for Automatic Text Synthesis in Russian

T. A. Zhukov, T. A. Sadykov

Department of Mathematics and Computer Science
Plekhanov Russian University
125993, Moscow, Russia

The problems of synthesis of a grammatically correct text in a natural language and of an automated correction of a text are known to be highly complex. They are closely related to the problem of computer-aided translation that can hardly be considered to be solved despite the considerable effort. The present paper presents the main algorithms used in the web-service passare.ru which is aimed at automatic processing of linguistic data.

Key words and phrases: Automated synthesis of text, computer-aided text correction, automated translation.

УДК 517.95: 519.62: 535.4

Вывод системы уравнений для коэффициентных функций метода поперечных сечений для интегрально–оптического волновода с помощью пакета символьных вычислений Maple

А. Л. Севастьянов*, Л. А. Севастьянов*†, А. А. Тютюнник*

* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*

† *Лаборатория теоретической физики, Объединенный институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

В работе получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентных функций метода поперечных сечений для направляемых мод плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода с помощью системы компьютерной алгебры.

Ключевые слова: плавно-нерегулярный интегрально-оптический волновод, система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентных функций метода поперечных сечений.

1. Введение

В основе метода поперечных сечений лежит адиабатическое приближение асимптотического разложения локально–плоских волн, упрощенное двумя предположениями: 1) в производных адиабатических волноводных мод учитываются только вклады нулевого порядка; 2) вместо касательных плоскостей в точках нерегулярных границ для формулировки граничных условий используются их приближения «горизонтальными проекциями». Использование второго предположения сводит перечисление полной системы мод метода к системе мод регулярного волновода сравнения. Использование первого предположения приводит к появлению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентных функций разложения общего решения.

2. Вывод системы уравнений

Для описания распространения электромагнитного излучения в нерегулярном (в одномерном направлении) интегрально-оптическом волноводе Шевченко В.В. разработал [1] метод поперечных сечений, обобщающий метод поперечных сечений для закрытых нерегулярных (в одномерном направлении) волноводов Каценеленбаума Б.З. [2]. Для реализации данного метода в плавном переходе между двумя планарными волноводами необходимо получить (вывести) систему интегро-дифференциальных уравнений для коэффициентных функций метода, а затем решить эту систему подходящим численным методом. На первом этапе существенную роль играет полная система классических и обобщенных собственных мод регулярного планарного волновода сравнения, а также таблица скалярных произведений этих мод между собой.

Рассмотрим плавно–нерегулярный волновод, изображенный на рис. 1. в предположении, что $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$.

Выражение для электромагнитного поля содержит как прямые, так и обратные волны т.е. имеет вид [1, 4, 5]: $\psi(x,z) = \psi^+(x,z) + \psi^-(x,z)$, где $\psi^\pm(x,z) = \sum\limits_j C_j^\pm(z)\,\Psi_j^\pm(x;z) + \int\limits_{-n_s^2}^{\infty} dk_s C_s^\pm(k_s,z)\,\Psi_j^\pm(k_s,x;z) + \int\limits_{-n_c^2}^{\infty} dk_c C_c^\pm(k_c,z)\,\Psi_j^\pm(k_c,x;z)$.

Полная система мод регулярного планарного волновода описана в работах [3–5], причем представление [4, 5] является, по нашему мнению, более подходящим для наших целей. Хотя, следует отметить, что различные представления полной системы мод эквивалентны между собой.

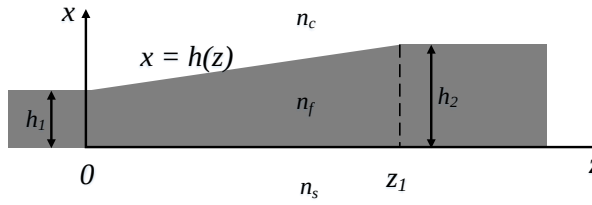


Рис. 1. Схема плавно–нерегулярного волновода

В работе [1] вывод системы уравнений выполнен вручную для простейшего случая нерегулярного открытого интегрально–оптического волновода. В более общем случае плавно–нерегулярного открытого перехода между двумя планарными волноводами такой вывод вручную встречает почти непреодолимые трудности в связи с громоздкостью как производимых преобразований, так и окончательных выражений. В связи с этими сложностями нами выбран путь получения системы дифференциальных уравнений для коэффициентных функций метода поперечных сечений для интегрально–оптических волноводов с помощью символьных вычислений, реализованных в пакетах Maple и Maxima.

Ранее, в работах [6–8] нами были получены системы уравнений для функциональных рядов по полной системе собственных волноводных мод планарных волноводов сравнения. В настоящей работе мы, на основании полученных ранее соотношений, выводим систему интегро–дифференциальных уравнений для коэффициентных функций.

Особый практический интерес представляет собой укороченная система для коэффициентных функций при направляемых (прямых и обратных) волноводных модах. В результате проведения всех символьных вычислений получим следующую систему $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dz} + i\,(k_0 - 1)\,\mathbb{B}\,(z)\right)\vec{C}^{+}\,(z) = \vec{0} \\ \left(-i\mathbb{B}\,(z)\,\frac{d}{dz} + \mathbb{P}\,(z)\right)\vec{C}^{+}\,(z) = \vec{0}, \end{cases} \tag{1}$$

$$\mathbb{B}\,(z) = \begin{pmatrix} \beta_1^{+}\,(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_n^{+}\,(z) \end{pmatrix}, \quad \vec{C}^{+}\,(z) = \begin{pmatrix} C_1^{+}\,(z) \\ \vdots \\ C_n^{+}\,(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}\,(z) = \begin{pmatrix} p_{11}\,(z) & \dots & p_{1n}\,(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}\,(z) & \dots & p_{nn}\,(z) \end{pmatrix}.$$

При этом $\mathrm{p}_{jk}\,(z) = \int \chi_j^2\,(x;z)\,\Psi_j^{+}\,(x;z)\,\overline{\Psi_k^{+}\,(x;z)}dx + \left(k^2 - k_0\left(\beta_j^{+}\,(z)\right)^2 - i\frac{d\beta_j^{+}(z)}{dz}\right)\delta_{jk}$.

Для нее мы можем с помощью парциальных условий сформулировать краевую задачу, которую предстоит решить подходящим численным методом.

3. Заключение

В работе получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентных функций, т.е. расчетная формула метода поперечных сечений в случае

наличия N направляемых мод волновода. Для расчета распространения поляризованного электромагнитного излучения следует проинтегрировать полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, дополнив ее соответствующими граничными условиями. При $n = 1$ формулы аналогичны формулам, выведенным Шевченко В.В. для открытых плавно–нерегулярных волноводов с одноточечным дискретным спектром.

Список литературы

1. *Шевченко В. В.* Плавные переходы в открытых волноводах (Введение в теорию). — М.: Наука, 1969.
2. *Каценеленбаум Б. З.*Теория нерегулярных волноводов с медленно изменяющимися параметрами. — М.: Изд. АН СССР, 1961.
3. *Шевченко В. В.* О спектральном разложении по собственным и присоединенным функциям одной несамосопряженной задачи типа Штурма–Лиувилля на всей ос. // ДУ, 1979. — Т.15, no. 11. — С. 2004–2020.
4. *Севастьянов Л. А.* Полная система мод открытого планарного волновода // Тезисы докладов VI Межд. науч.-тех. конф. «Лазеры в науке, технике, медицине», 1995, Суздаль. — М.: Изд. ИРЭ РАН, 1995. — С. 72–76.
5. *Gevorkyan M. N., Kulyabov D. S., Lovetskiy K. P., Sevastyanov A. L., Sevastyanov L. A.* Waveguide modes of a planar optical waveguide // Mathematical Modelling and Geometry, 2015. — Vol. 3, no. 1. — P. 43–63.
6. *Sevastyanov A. L., Sevastyanov L. A., Tyutyunnik A. A.* Analytical Calculations in Maple to Implement the Method of Adiabatic Modes for Modeling Smoothly Irregular Integrated Optical Waveguide Structures // Lecture Notes in Computer Science, 2014. — Vol. 8660. — P. 419–431.
7. *Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А.* Аналитические вычисления вывода системы дифференциальных уравнений в частных производных для коэффициентных функций Канторовича // Математическое моделирование, 27(7), 2015. — С. 103–110.
8. *Sevastianov A. L., Sevastianov L. A., Tiutiunnik A. A., Nikolaev N. E.* Scalar Product in the Space of Waveguide Modes of an Open Planar Waveguide // EPJ Web of Conferences, 108, 2016. — 02041–7.

UDC 517.95: 519.62: 535.4

Derivation of Equations for the Coefficient Functions of the Method of Cross-Sections for the Integrated Optical Waveguide Using the Maple Symbolic Computation Package

A. L. Sevastianov[*], **L. A. Sevastianov**[*†], **A. A. Tiutiunnik**[*]

[*] *Department of Applied Probability and Informatics*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia
[†] *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia

We obtain a system of ordinary differential equations for the coefficient functions of the method of cross–sections for the guided modes of a smoothly irregular integrated-optical waveguide using a computer algebra system.

Key words and phrases: a smoothly irregular integrated–optical waveguide, system of ordinary differential equations for the coefficient functions of the method of cross-sections.

УДК 512.62

Базисы Гребнера некоторых параметрических семейств

А. И. Зобнин[*], **М. И. Тихонова**[†]

[*] *Факультет компьютерных наук,*
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
Кочновский пр., д. 3., Москва, Россия, 125319
[†] *Механико-математический факультет*
МГУ имени М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, Москва, Россия, 119991

Мы изучаем базисы Гребнера идеалов в кольце многочленов $k[x_0, \ldots, x_n, \ldots]$ от счетного набора переменных, порожденных конечным набором параметрических многочленов особого вида. У таких идеалов существует конечный эквивариантный базис Гребнера.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, базисы Гребнера.

1. Введение

Базис Гребнера— хорошо изученный инструмент компьютерной алгебры. Пусть k — поле, $R_n = F[x_0, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов над k. При каждом допустимом мономиальном упорядочении у всякого идеала $I \lhd R$ существует конечный базис Гребнера G. Доказательство этого факта опирается на лемму Диксона и связано с теоремой Гильберта о базисе.

Нас будут интересовать базисы Гребнера идеалов особого вида в кольце многочленов от счетного набора переменных. Кольцо многочленов $R_\infty = k[x_0, \ldots, x_n, \ldots]$ не является нетеровым, и, хотя для идеалов этого кольца можно определить базис Гребнера, он, вообще говоря, уже будет бесконечным. Однако если образующие идеала заданы некоторым параметрическим способом, то иногда и базис Гребнера тоже можно аналогично запараметризовать.

Рассмотрим следующий пример:

$$I = \langle x_0 x_{k+1} - x_1 x_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle. \tag{1}$$

У этого идеала при лексикографическом упорядочении, таком, что $x_0 \prec x_1 \prec \ldots$, базис Гребнера состоит из двух серий многочленов:

$$x_0 x_{k+1} - x_1 x_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$x_1 x_k x_{l+1} - x_1 x_{k+1} x_l, \quad k, l \in \mathbb{N},\ k < l. \tag{3}$$

Фактически, первая серия — это исходные образующие, а вторая серия — их S-полиномы.

С параметрическими идеалами связан замечательный факт: идеал в R_∞, устойчивый относительно действия группы S_∞ на переменных, S_∞-конечно порожден (и обладает конечным аналогом базиса Гребнера). Этот факт был открыт Коэном [1] и переоткрыт в работах [2, 3]. Аналогичное утверждение имеется и про идеалы, устойчивые относительно действия полугруппы возрастающих функций (то есть, сдвигов номеров переменных), что находит применение при исследовании разностных многочленов [4, 5]. Такие конструкции были обобщены на случай действия произвольного моноида, а соответствующие аналоги базисов Гребнера называются эквивариантными базисами Гребнера [6–8].

Также с параметрическими системами связано понятие дифференциального стандартного базиса [9], где в роли параметра выступает порядок дифференцирования.

Мы будем рассматривать системы, похожие в некотором смысле на (1): часть переменных в многочленах будет «зафиксирована», а другая часть будет иметь вид x_k,

x_{k+1}, x_{k+2} и т. д., где k — неотрицательный параметр. Из-за наличия «фиксированной» части такие системы уже не являются устойчивыми относительно действия полугруппы возрастающих функций. Однако при некоторых ограничениях у таких систем также имеется конечный аналог базиса Гребнера.

2. Обозначения

Введем формальные обозначения для многочлена, содержащего параметрические переменные. Зависеть от параметра в нашем случае будут только переменные, причем эта зависимость будет линейной. В показателях и в коэффициентах параметры появляться не будут (хотя можно обобщить результаты и на такой случай). Пусть s — количество параметров. Будем обозначать сами параметры символами k_i (или просто k, когда параметр один). Рассмотрим формальное кольцо параметрических многочленов:

$$P_s = R_\infty[\mathbf{x}_{k_i+j} \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ j \geqslant 0].$$

Для каждого набора значений параметров $p = (p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{N}_0^s$ существует отображение подстановки

$$\sigma_p : P_s \to R_\infty,$$
$$\mathbf{x}_{k_i+j} \mapsto x_{p_i+j}.$$

Пусть $F \subset P_s$. Множество всевозможных подстановок $\{\sigma_p f \mid f \in F\}$ будем обозначать через $\sigma(F)$.

Рассмотрим элемент $f \in P_s$ как многочлен и от параметрических переменных, и от переменных из R_∞. Тогда естественным образом определяется его полная степень. Будем говорить, что f однороден по весу, если для всех его слагаемых сумма индексов всех переменных (с учетом их степеней) одинакова (как линейная функция от параметров). Так, параметрический многочлен из примера (1) имеет степень 2 и является однородным по весу (при этом его вес равен $k + 1$).

3. Основной результат

Пусть зафиксировано мономиальное упорядочение на мономах от $x_0, \ldots, x_n, \ldots$, устойчивое относительно произвольного сдвига номеров переменных, причем $x_i \prec x_{i+1}$. В качестве примера можно взять лексикографическое упорядочение.

Пусть конечная система $F = (f_1, \ldots, f_m) \subset P_s$ такова, что

1. каждый $f \in F$ зависит не более чем от одного параметра k_i, причем степень f по параметрическим переменным не превосходит 1;
2. каждый $f \in F$ однороден по весу и по степени;

Тогда мы утверждаем, что идеал $I = \langle \sigma(F) \rangle$ обладает конечной системой $G \subset P_s$, такой, что $\sigma(G)$ — (бесконечный, вообще говоря нередуцированный) базис Гребнера идеала I. Более того, эта система может быть построена за конечное число шагов с помощью алгоритма, аналогичного алгоритму Бухбергера и алгоритму, строящему эквивариантный базис Гребнера [8, 10].

Например, для системы (1) алгоритм построит систему

$$x_0\mathbf{x}_{k_1+1} - x_1\mathbf{x}_{k_1},$$
$$x_1\mathbf{x}_{k_1}\mathbf{x}_{k_2+1} - x_1\mathbf{x}_{k_1+1}x_{\mathbf{k_2}}.$$

Мы готовим реализацию такого алгоритма в системе компьютерной алгебры Sage.

4. Заключение

Мы утверждаем, что для определенного класса параметрических систем многочленов от счетного набора переменных, в которых параметр участвует в номерах переменных, имеется конечный аналог эквивариантного базиса Гребнера, который может быть построен за конечное число шагов.

Список литературы

1. *Cohen D. E.* Closure relations, Buchberger's algorithm, and polynomials in infinitely many variables // Computation theory and logic. — Springer, 1987. — P. 78–87.
2. *Aschenbrenner M., Hillar C.* Finite generation of symmetric ideals // *Transactions of the American Mathematical Society.* — 2007. — Vol. 359, no. 11. — P. 5171–5192.
3. *Hillar C. J., Sullivant S.* Finite Gröbner bases in infinite dimensional polynomial rings and applications // *Advances in Mathematics.* — 2012. — Vol. 229, no. 1. — P. 1–25.
4. *La Scala R.* Gröbner bases and gradings for partial difference ideals // *Mathematics of Computation.* — 2015. — Vol. 84, no. 292. — P. 959–985.
5. *Gerdt V., La Scala R.* Noetherian quotients of the algebra of partial difference polynomials and Gröbner bases of symmetric ideals // *Journal of Algebra.* — 2015. — Vol. 423. — P. 1233–1261.
6. *La Scala R., Levandovskyy V.* Skew polynomial rings, Gröbner bases and the letterplace embedding of the free associative algebra // *Journal of Symbolic Computation.* — 2013. — Vol. 48. — P. 110–131.
7. *Dung D. H.* Equivariant Gröbner bases. — 2010.
8. *Brouwer A., Draisma J.* Equivariant Gröbner bases and the Gaussian two-factor model // *Mathematics of Computation.* — 2011. — Vol. 80, no. 274. — P. 1123–1133.
9. *Zobnin A.* Admissible orderings and finiteness criteria for differential standard bases // Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation / ACM. — 2005. — P. 365–372.
10. *Aschenbrenner M., Hillar C. J.* An algorithm for finding symmetric Gröbner bases in infinite dimensional rings // Proceedings of the twenty-first international symposium on Symbolic and algebraic computation / ACM. — 2008. — P. 117–124.

UDC 512.62

Gröbner Bases of Some Parametric Systems

A. I. Zobnin*, M. I. Tikhonova†

* *Faculty of Computer Science*
National Research University Higher School of Economics
Kochnovsky pr. 3, Moscow, 125319, Russia
† *Faculty of Mechanics and Mathematics*
Moscow State University
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

We study Gröbner bases of ideals in polynomial ring $k[x_0, \ldots, x_n, \ldots]$ in infinitely many variables. These ideals are generated by parametric polynomials of special form. We show that these ideals posess finite equivariant Gröbner basis.

Key words and phrases: computer algebra, Gröbner bases.

Authors index

A
Abramov S. A. (Абрамов С. А.) sergeyabramov@mail.ru 33

B
Batkhin A. B. (Батхин А. Б.) batkhin@gmail.com 36
Bogdanov D. V. (Богданов Д. В.) bogdv@rambler.ru 39
Bruno A. D. (Брюно А. Д.) brunoa@mail.ru 8

C
Chuluunbaatar O. (Чулуунбаатар О.) chuka@jinr.ru 41, 44

D
Derbov V. L. (Дербов В. Л.) 41, 44

E
Eferina E. G. (Еферина Е. Г.) eg.eferina@gmail.com 47
Evtushenko Yu. G. (Евтушенко Ю. Г.) evt@ccas.ru 12

G
Gerdt V. P. (Гердт В. П.) gerdt@jinr.ru 16
Gontsov R. R. (Гонцов Р. Р.) gontsovrr@gmail.com 53
Gorbachev A. V. (Горбачев А. В.) alexarus1986@gmail.com 50
Goryuchkina I. V. (Горючкина И. В.) igoryuchkina@gmail.com 53
Gusev A. A. (Гусев А. А.) gooseff@jinr.ru 41, 44
Gutnik S. A. (Гутник С. А.) s.gutnik@inno.mgimo.ru 56

H
Hai L. L. (Хай Л. Л.) luonglehai_tcl@yahoo.com.vn 41, 44

I
Ilchenko E. A. (Ильченко Е. А.) ilchenkoea@gmail.com 60

K
Khvorov S. A. (Хворов С. А.) griffter@yandex.ru 63
Kornyak V. V. (Корняк В. В.) vkornyak@gmail.com 66
Korolkova A. V. (Королькова А. В.) akorolkova@sci.pfu.edu.ru 19, 47
Kulyabov D. S. (Кулябов Д. С.) yamadharma@gmail.com 19, 47

L
Li Z. (Ли З.) zimingli66@gmail.com 22

M
Malashonok G. I. (Малашонок Г. И.) malaschonok@narod.ru 69
Malashonok N. A. (Малашонок Н. А.) namalaschonok@gmail.com 72
Malykh M. D. (Малых М. Д.) malykhmd@yandex.ru 25, 75

N
Normov A. I. (Нормов А. И.) normch88@mail.ru 77

P
Panferov A. A. (Панферов А. А.) ast.a_s@mail.ru 79
Paramonov S. V. (Парамонов С. В.) mister.cepera@gmail.com 82
Petkovšek M. (Петковшек М.) marko.petkovsek@fmf.uni-lj.si 33
Pogudin G. A. (Погудин Г. А.) pogudin.gleb@gmail.com 85
Prokopenya A. N. (Прокопеня А. Н.) prokopenya@brest.by 29

R
Ryabenko A. A. (Рябенко А. А.) anna.ryabenko@gmail.com 87

S
Sadykov T. M. (Садыков Т. М.) sadykov1976@mail.ru 39, 93
Sarychev V. A. (Сарычев В. А.) 56
Sevastianov A. L. (Севастьянов А. Л.) alsevastyanov@gmail.com 95
Sevastianov L. A. (Севастьянов Л. А.) sevast@sci.pfu.edu.ru 19, 47, 50, 95
Ştefănescu D. (Штефанеску Д.) doru.stefanescu@gmail.com 90

T
Tikhonova M. I. (Тихонова М. И.) m_tikhonova94@mail.ru 98
Tyutyunnik A. A. (Тютюнник А. А.) nastya.tyutyunnik@gmail.com 95

V
Vinitsky S. I. (Виницкий С. И.) vinitsky2008@gmail.com 41, 44

W
Wu M. (Ву М.) mwu@sei.ecnu.edu.cn 22

Z
Zakrajšek X. (Закрайшек Х.) helena.zakrajsek@fs.uni-lj.si 33
Zhukov T. A. (Жуков Т. А.) tim29093@gmail.com 93
Zobnin A. I. (Зобнин А. И.) al_zobnin@mail.ru 98
Zubov V. I. (Зубов В. И.) vladimir.zubov@mail.ru 12