Аналитическая геометрия модели проективного пространства $\mathbb{R}P^3$ в терминах координат Плюккера и геометрической алгебры

Геворкян М. Н., Королькова А. В., Кулябов Д. С.

26 июня 2023

Российский университет дружбы народов
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

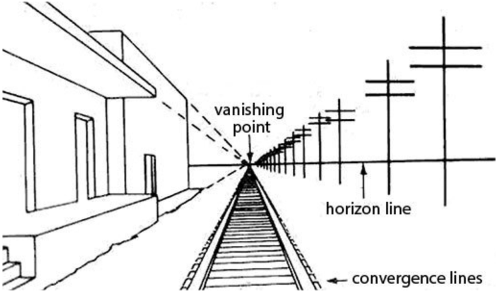
План доклада

- Мотивация работы и вводные сведения методологического характера.
- Классическая аналитическая проективная геометрия модели $\mathbb{R}^3P$.
- Проективная геометрия в терминах геометрической алгебры.
- Программная реализация для визуализации на языке Asymptote.
- Результаты работы и перспективы дальнейших исследований.

Мотивация работы

- Изучаем аппарат геометрической алгебры в своей научной работе.
- Варианты геометрической алгебры для евклидова и псевдоевклидова пространств хорошо разработаны: в наличии учебные материалы, программные библиотеки, в том числе и для CAS.
- Напротив, вариант геометрической алгебры для проективной геометрии разработан слабо.
- Проективная геометрия — математическая модель современной компьютерной графики.
- Авторы разрабатывают учебный курс «Компьютерная геометрия» в который логично ложится раздел по проективной геометрии.

Перспектива и проективная геометрия



Перспектива (лат. *perspicere* — смотреть сквозь) — техника изображения пространственных объектов в соответствии с искажением пропорций и формы изображаемых тел при их визуальном восприятии.

- Методично стала применяться в искусстве и архитектуре начиная с эпохи Возрождения.
- Математическая модель перспективы — проективная геометрия.
- Компьютерная графика переняла методы изобразительного искусства и проективную геометрию.

В создание основ проективной геометрии внесли вклад: Ж. Дезарг, Ж.-В. Понселе, М. Шаль, К. Г. Х. фон Штаудт, А. Ф. Мёбиус, Ю. Плюккер, Ф. Х. Клейн.

Ключевые преимущества с точки зрения вычислений:

- устраняет исключительные случаи (например, все прямые на плоскости пересекаются);
- как следствие упрощаются алгоритмы, зачастую сводятся к одной формуле;
- аффинные преобразования превращаются в линейные;
- в формулах отсутствует операция деления;
- как следствие возможно реализовать вычисления для целочисленной арифметики.

Синтетический и аналитический подходы к геометрии

Синтетический подход

- Вводят множества геометрических элементов разного рода: точки, прямые и плоскости.
- Задают отношения между ними в виде аксиом.
- Опираясь на аксиомы доказывают утверждения, опираясь на логику, геометрические построения и рассуждения.

Аналитический подход

- Правильнее — линейно-алгебраический (алгебраический).
- Задачи геометрии решаются алгебраическими методами («требует чернил больше, а соображать меньше»[a]).
- Наиболее естественный для алгоритмизации и реализации в виде программ.
- Современный подход предусматривает бескомпонентную запись формул — упрощение программирования, возможность векторизации (GPU, SIMD).

---

[a] Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. **От проективной геометрии — к неевклидовой (вокруг абсолюта).** / под ред. Т. А. Бурмистрова. Москва : Просвещение, 1979. 158 с. (Мир знаний), с. 89.

Можно выделить два подхода:

- Классический: основывается на однородных координатах (координаты Плюккера, 6-векторы).
- Геометрическая алгебра: основывается на алгебре мультивекторов — частном случаи алгебры Клиффорда.

Второй подход слабо разработан. Им занимаются специалисты по компьютерной графике. Терминология и обозначения не устоялись. Можно выделить две «школы».

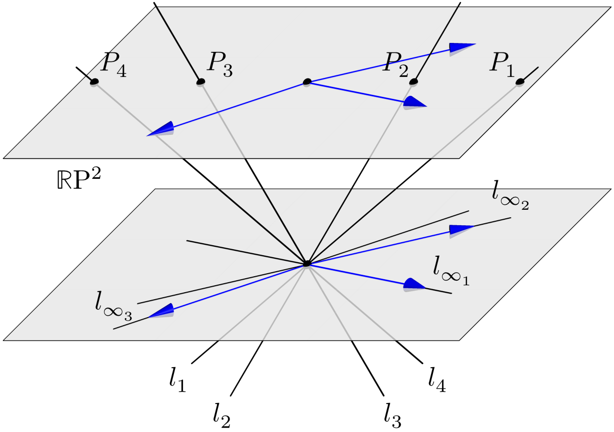
- Leo Dorst, Steven De Keninck и др., сайт `https://bivector.net/`.
- Eric Lengyel. Доступны наработки в виде плаката и статьи в блоге Projective Geometric Algebra Done Right. Последовательное изложение аналитической проективной геометрии и внешней алгебры в пособии[1].

[1] Lengyel E. Foundations of Game Engine Development. In 4 vols. Vol. 1. **Mathematics.** Lincoln, California : Terathon Software LLC, 2016. 195 p. ISBN 9780985811747. URL: `http://foundationsofgameenginedev.com`.

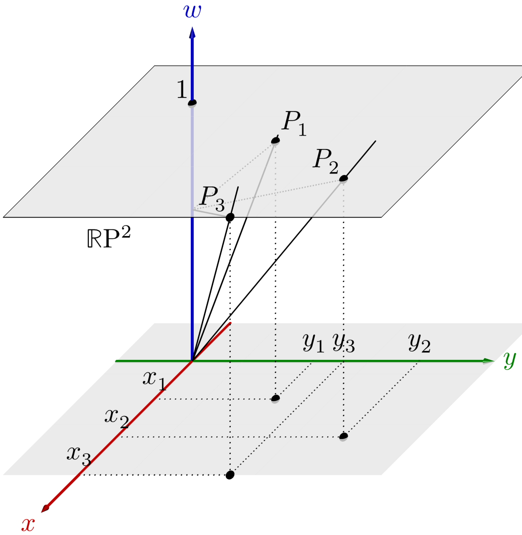
Плюккеровы координаты и геометрическая алгебра

- Оба подхода с вычислительной точки зрения равноценны.
- Подход на основе Плюккеровских координат сложнее поддается интерпретации. При доказательстве формул постоянное переключение между евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ и проективным пространством $\mathbb{R}P^3$.
- Подход на основе проективной геометрии более логичен и допускает четкую алгебраическую и геометрическую интерпретации.

Проективная плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$



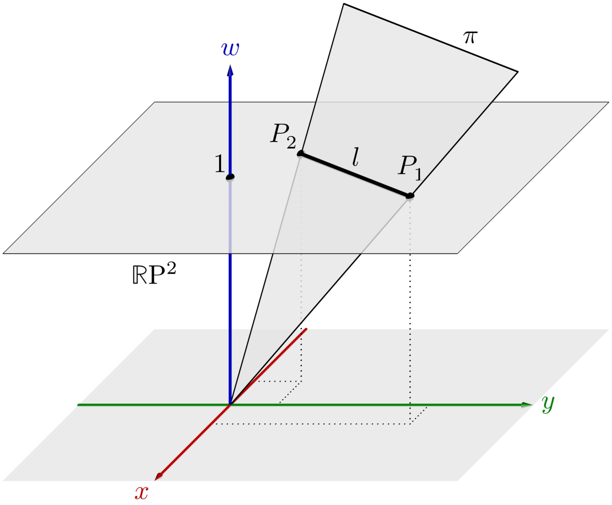
- Это **модель** проективной **плоскости**.
- Чертеж иллюстрирует модель проективных точек.
- Собственные точки P_1, P_2, P_3, P_4.
- Несобственные точки (направления).
- Все прямые пересекаются в бесконечности.
- Все несобственные точки лежат на несобственной прямой (абсолют).



Проективная плоскость моделируется трехмерным декартовым пространством.

- Векторы точек $\vec{\mathbf{p}} = (x, y, w)$.
- Векторы направлений $\vec{\mathbf{v}} = (x, y, 0)$.
- В силу однородности $\vec{\mathbf{p}} = (x/w, y/w, 1) = (x : y : 1)$.
- Легко переходить из декартового пространства в проективное с помощью нормировки делением на вес w.

Прямая в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$



- Прямые на $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ – плоскости $Ax + By + Cw = 0$ при $w = 1$ в объемлющем декартовом пространстве.
- Отсюда, однородное уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$.
- Направляющий вектор нормали $\mathbf{N} = (A, B)$.
- Расстояние от O до прямой: $d = C/\|N\|$.
- Нормальное уравнение прямой $n_x x + n_y y + d = 0$, где $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}$.

Координаты Плюккера в $\mathbb{RP}^3$

- Необходимо использовать модель проективного пространства $\mathbb{RP}^3$ и установить проективный вид прямых и плоскостей.
- Проективный вид прямая приобретает в координатах Плюккера (другое название координаты Грассмана).

- Точки: $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p} \mid w) = (x : y : z : w)$, начало координат $\vec{\mathbf{O}} = (0 : 0 : 0 : 1)$.
- Прямая: $\vec{\mathbf{l}} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$.
  - Требуется 6 параметров: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ и $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)^T$.
  - Параметры связаны условием Плюккера $(\mathbf{v}, \mathbf{m}) = 0$.
  - Вектор $\mathbf{v}$ – направляющий вектор, $\mathbf{m}$ – момент прямой.
  - Пара $(\mathbf{v}, \mathbf{m})$ – дуальный вектор или мотор теории винтов.
- Плоскость $\vec{\boldsymbol{\pi}} = [\mathbf{n} \mid d]$ – нормальное уравнение плоскости, где $\mathbf{n}$ – нормаль, а d – расстояние от плоскости до начала координат.

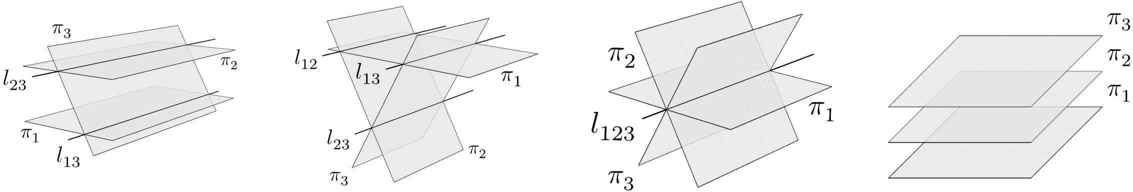
Представление прямой как $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ не интуитивно и плохо поддается геометрической интерпретации.

		Формула	Описание
A	(2.1)	$\{\mathbf{v} \mid \mathbf{p} \times \mathbf{v}\}$	Прямая, проходящая через точку P по направлению $\mathbf{v}$.
B	(2.2)	$\{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \mid \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2\}$	Прямая, проходящая через две точки P_1 и P_2.
C	(2.6)	$\{\mathbf{p} \mid \mathbf{0}\}$	Прямая, проходящая через начало координат и точку P.
D	(2.3)	$\{w_1\mathbf{p}_2 - w_2\mathbf{p}_1 \mid \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2\}$	Прямая, проходящая через две точки $\vec{\mathbf{p}}_1 = (\mathbf{p}_1 \mid w_1)$ и $\vec{\mathbf{p}}_2 = (\mathbf{p}_2 \mid w_2)$.
E	(2.15)	$\{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \mid d_1\mathbf{n}_2 - d_2\mathbf{n}_1\}$	Прямая линия пересечения двух плоскостей $[\mathbf{n}_1 \mid d_1]$ и $[\mathbf{n}_2 \mid d_2]$.
F	(2.16)	$(\mathbf{m} \times \mathbf{n} + d\mathbf{v} \mid -(\mathbf{n}, \mathbf{v}))$	Точка пересечения плоскости $[\mathbf{n} \mid d]$ и прямой $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$.
F.a	(2.24)	$[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \mid (\mathbf{v}_2, \mathbf{m}_1)]$	Точка пересечения двух прямых $\{\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{m}_1\}$ и $\{\mathbf{v}_2 \mid \mathbf{m}_2\}$
F.b	(2.13)	$(d_1\mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_2 + d_2\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3 + d_3\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1 \mid (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3))$	Точка пересечения трех плоскостей $[\mathbf{n}_1 \mid d_1]$, $[\mathbf{n}_2 \mid d_2]$ и $[\mathbf{n}_3 \mid d_3]$
G	(2.4)	$(\mathbf{v} \times \mathbf{m} \mid (\mathbf{v}, \mathbf{v}))$	Точка, ближайшая к началу координат на прямой $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$.
H	(2.17)	$(-d\mathbf{n} \mid (\mathbf{n}, \mathbf{n}))$	Точка, ближайшая к началу координат на плоскости $[\mathbf{n} \mid d]$.
I	(2.19)	$[\mathbf{v} \times \mathbf{u} \mid -(\mathbf{u}, \mathbf{m})]$	Плоскость, содержащая прямую $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ и направление $\mathbf{u}$.
J	(2.20)	$[\mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{m} \mid -(\mathbf{p}, \mathbf{m})]$	Плоскость, содержащая прямую $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ и точку $(\mathbf{p} \mid 1)$.
K	(2.21)	$[\mathbf{m} \mid 0]$	Плоскость, содержащая прямую $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ и начало координат.
L	(2.18)	$[\mathbf{v} \times \mathbf{p} + w\mathbf{m} \mid -(\mathbf{p}, \mathbf{m})]$	Плоскость, содержащая прямую $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ и точку $(\mathbf{p} \mid w)$.
L.a	(2.22)	$[\mathbf{v} \times \mathbf{u} \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p})]$	Плоскость, содержащая точку $(\mathbf{p} \mid 1)$ и направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$.
M		$[\mathbf{m} \times \mathbf{v} \mid (\mathbf{m}, \mathbf{m})]$	Плоскость с прямой $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$, наиболее отдаленная от O.
N		$[-w\mathbf{p} \mid (\mathbf{p}, \mathbf{p})]$	Плоскость с точкой $(\mathbf{p} \mid w)$, наиболее отдаленная от O.
O	(2.23)	$\dfrac{\lvert(\mathbf{v}_1, \mathbf{m}_2) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{m}_1)\rvert}{\lVert\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\rVert}$	Расстояние между прямыми $\{\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{m}_1\}$ и $\{\mathbf{v}_2 \mid \mathbf{m}_2\}$.
P	(2.7)	$\dfrac{\lvert\mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{m}\rvert}{\lVert\mathbf{v}\rVert}$	Расстояние между прямой $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ и точкой $(\mathbf{p} \mid 1)$.
Q	(2.5)	$\lVert\mathbf{m}\rVert / \lVert\mathbf{v}\rVert$	Расстояние от прямой $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ до начала координат.
R	(2.9)	$\dfrac{\lvert(\mathbf{n}, \mathbf{p}) + d\rvert}{\lVert\mathbf{n}\rVert}$	Расстояние от плоскости $[\mathbf{n} \mid d]$ до точки $(\mathbf{p} \mid 1)$.
S	(2.8)	$\lvert d\rvert / \lVert\mathbf{n}\rVert$	Расстояние от плоскости $[\mathbf{n}\lvert d]$ до начала координат.

Расположение плоскостей в проективном пространстве

В проективном пространстве все прямые пересекаются в собственной или несобственной точке.

- Точка пересечения
  - Несобственная
    - Прямая пересечения
      - Несобственная
      - Собственная
  - Собственная

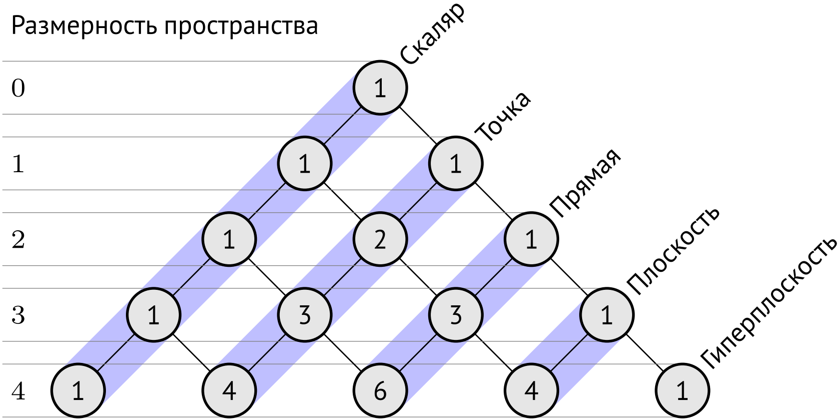


Для проективной **плоскости** двойственны термины:

- «точка» $\longleftrightarrow$ «прямая»;
- «точка лежит на прямой» $\longleftrightarrow$ «прямая проходит через точку» $\longleftrightarrow$ «прямая и точка инцидентны»;

В проективном **пространстве** принцип двойственности можно сформулировать следующим образом:

Ранг	**Исходная**	**Двойственная**
4	Точка $(\mathbf{p} \mid w)$	Плоскость $[\mathbf{p} \mid w]$
6	Прямая $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$	Прямая $\{\mathbf{m} \mid \mathbf{v}\}$
4	Плоскость $[\mathbf{n} \mid d]$	Точка $(\mathbf{n} \mid d)$



Следует заметить, что $\dim \mathbb{R}\mathrm{P}^2 = 3$ и $\dim \mathbb{R}\mathrm{P}^3 = 4$.

Геометрическая алгебра

Основные понятия.

- Внешняя алгебра (алгебра Грассмана) — линейное пространство с операцией внешнего произведения $\wedge$ и $p-$векторами (или $p-$формами).
- Геометрическая алгебра — линейное пространство с операцией геометрического произведения и мультивекторами (градуированная алгебра).
- Для ортонормированного базиса достаточно определить геометрическое произведение для векторов. Далее оно конструктивно распространяется на любые мультивекторы.

Особенности.

- Специализированный вариант тензорной алгебры, более простой для освоения.
- Обобщение комплексных чисел (эллиптических, параболических, гиперболических), кватернионов, бикватернионов, винтов и т.д.
- Может быть использована для описания пространства Минковского, релятивистской записи уравнений Максвелла и других областях физики.

Внешнее произведение векторов

Внешним произведением векторов из линейного пространства L называется операция $\wedge$, которая для любых векторов $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ из L обладает следующими свойствами:

1. $1 \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u} \wedge 1 = \mathbf{u}$, где $1 \in \mathbb{R}$;
2. $\alpha \wedge \beta = \alpha \cdot \beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
3. $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ – ассоциативность;
4. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ – правая дистрибутивность;
5. $\mathbf{w} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$ – левая дистрибутивность;
6. $\mathbf{u} \wedge (\alpha \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$;
7. $\boxed{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}}$ – антикоммутативность (антисимметричность, кососимметричность).

Свойство антисимметричности равносильно следующему:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0.$$

Проективное пространство в терминах геометрической алгебры

L – линейное пространство $\dim L = 4$, базисные векторы $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$. Операция скалярного произведения, без условия положительной определенности векторов. Для базисных векторов положим:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1, \ \ (\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4) = 0, \text{ причем } \mathbf{e}_4 \neq \mathbf{0}.$$

Внешнее произведение базисных векторов

Тип	Базис	Ранг/антиранг
Скаляр	1	0/4
Векторы	$\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$ $\mathbf{e}_4$	1/3
Бивекторы	$\mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ $\mathbf{e}_{31} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_{43} = \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3$ $\mathbf{e}_{42} = \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_{41} = \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1$	2/2
Тривекторы	$\mathbf{e}_{321} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_{124} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4$ $\mathbf{e}_{314} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4$ $\mathbf{e}_{234} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$	3/1
Псевдоскаляр	$\mathbf{e}_{1234} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$	4/0

Геометрическое произведение базисных векторов

Геометрическое произведение ортонормированных базисных векторов

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{13} = -\mathbf{e}_{31}$	$\mathbf{e}_{14} = -\mathbf{e}_{41}$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{21}$	1	$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{24} = -\mathbf{e}_{42}$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{31}$	$\mathbf{e}_{32} = -\mathbf{e}_{23}$	1	$\mathbf{e}_{34} = -\mathbf{e}_{43}$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_{41}$	$\mathbf{e}_{42}$	$\mathbf{e}_{43}$	0

Точки, прямые и плоскости

Проективная точка

Задается вектором (4 компоненты)

$$\vec{\mathbf{p}} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z + w\mathbf{e}_4,$$

где $\mathbf{p} = (x, y, z)$ – радиус вектор в $\mathbb{R}^3$ и w – вес.

Проективная прямая

Задается бивектором (6 компонент)

$$\vec{\mathbf{l}} = \mathbf{v}_x\mathbf{e}_{41} + \mathbf{v}_y\mathbf{e}_{42} + \mathbf{v}_z\mathbf{e}_{43} + \mathbf{m}_x\mathbf{e}_{23} + \mathbf{v}_y\mathbf{e}_{31} + \mathbf{m}_z\mathbf{e}_{12},$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – касательный вектор, $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$ – момент прямой.

Плоскость

Задается тривектором (4 компоненты)

$$\vec{\pi} = \mathbf{n}_x\mathbf{e}_{234} + \mathbf{n}_y\mathbf{e}_{314} + \mathbf{n}_z\mathbf{e}_{321} + d\mathbf{e}_{321},$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали, d – расстояние от центра координат до плоскости.

Программная реализация

Существует ряд пакетов для открытых систем CAS, реализующих аппарат геометрической алгебры.

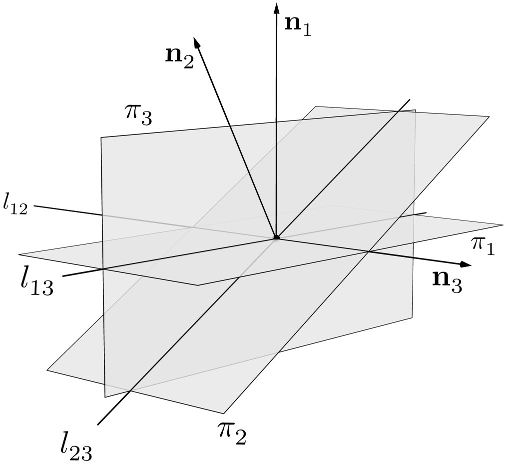
- Для языка Python и на базе SymPy — GAlgebra
- Для языка Julia — Grassmann.jl
- Для Maxima — Clifford

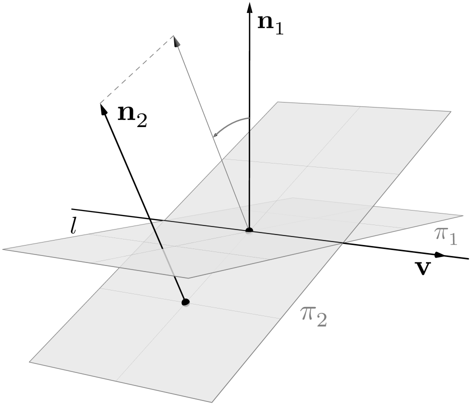
Ни одна известная авторам система не поддерживает случай проективного пространства.

Авторами реализована небольшая библиотека для языка Asymptote (язык для создания векторных двумерных и трехмерных иллюстраций).

- Определены структуры `Line2D`, `Line3D` и `Plane3D`.
- Используется подход на основе классической аналитической проективной геометрии.
- Определены функции, привязанные к структурам, реализующие формулы из таблицы выше.
- Перегружены некоторые стандартные функции Asymptote, что позволяет визуализировать результаты вычислений.

Некоторые примеры иллюстраций





Результаты

- Произведен подробный вывод формул аналитической проективной геометрии с опорой на материал и обозначения из Foundations of Game Engine Development.
- В результате дополнена и расширена таблица из Foundations of Game Engine Development.
- Написана библиотека для языка Asymptote, позволяющая задавать точки, прямые и плоскости в однородных координатах, находить пересечения и визуализировать результаты.

Дальнейшая работа.

- Вывод аналогичных формул в терминах геометрической алгебры.
- Связь с бикватернионами и теорией винтов.
- Реализация прототипа модуля для системы компьютерной алгебры SymPy (возможно на базе GAlgebra).