Алгебра бикватернионов и ее реализация на языке Asymptote

Геворкня М. Н., Кулябов Д. С., Севастьянов Л. А., Королькова А. В

International Conference «Computer Algebra»
23–25 june 2025

June 24, 2025

Содержание презентации

1. Dual numbers
1.1 Определение
1.2 Алгебраические операции
1.3 Аналог тригонометрической формы числа
2. Quaternions
2.1 Определение
2.2 Кватернионное умножение
2.3 Дополнительные операции
3. Dual quaternions
3.1 Определение
3.2 Сопряжения
3.3 Произведение
3.4 Модуль
3.5 Дуальное представление
3.6 Произведение бикватерниона и дуального числа
3.7 Сравнительная таблица представления бикватернионов
3.8 Бикватернионное представление геометрических примитивов
4. Transference principle
4.1 Определения из теории абсолютно твердого тела
4.2 Принцип перенесения Котельникова–Штуди
5. Dual quaternions screw motion
5.1 Винтовое движение точки и вектора
5.2 Винтовое движение прямой
5.3 Винтовое движение плоскости
5.4 Сводка формул
5.5 Матричный вид бикватерниона
6. Asymptote implementation
6.1 Библиотека для языка Asymptote
6.2 Пример: винтовое движение прямой
6.3 Пример: построение геликоида
6.4 Пример: построение коноида Плюккера
7. Conclusion

Мотивация работы

При изучении геометрической алгебры (алгебры Клиффорда) авторы постоянно встречали упоминания винтов и бикватернионов, но без всякой конкретики. Это побудило найти материалы и последовательно разобраться в этих понятиях.

Цель

Реализовать алгебру бикватерионов программно и применить к решению некоторых задач по движению свободных объектов в пространстве

Задачи

- Последовательно изложить теорию бикватернионов, проведя параллели с проективной геометрией, евклидовой геометрией, геометрической алгеброй.
- Реализовать алгебру кватернионов программно.
- Применить к задачам движения свободного тела (винтового движения).

Dual numbers

Типы комплексных чисел

Рассмотрим комплексное число следующего вида $z = a + ib$, где $a, b \in \mathbb{R}$, i некоторое особое число, которое определяется следующим свойством:

- если $i^2 = -1$, то получаем обычные комплексные числа (эллиптические),
- если $i^2 = 1$ и при этом $i \neq 1$ то получаем гиперболические (двойные, паракомплексные, расщепленные) числа,
- если $i^2 = 0$ и при этом $i \neq 0$, то получаем параболические (дуальные) числа.

Теория бикватернионов требует знания свойств дуальных чисел и кватернионов.

Дуальным числом называется число следующего вида

$$z = a + b\varepsilon,$$

где a и b — действительные числа, а ε — параболическая мнимая единица определяемая тождеством $\varepsilon^2 = 0$, причем $\varepsilon \neq 0$.

- Число a — главная или действительная часть.
- Число b — дуальная или моментная часть.
- Специальное число ε также называют символом комплексности Клиффорда.

Источники: [1; 4—7]

Сложение, вычистание и умножение

Пусть даны два дуальных числа $z_1 = a_1 + b_1\varepsilon$ и $z_2 = a_2 + b_2\varepsilon$.

- Сложение: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\varepsilon$.
- Вычитание: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\varepsilon$.
- Умножение: $z_1 z_2 = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\varepsilon$.

Последнее верно в силу

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1\varepsilon)(a_2 + b_2\varepsilon) = a_1 a_2 + a_1 b_2 \varepsilon + b_1 a_2 \varepsilon + b_1 b_2 \varepsilon^2 = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\varepsilon,$$

так как $\varepsilon^2 = 0$.
Пользуясь формулой для умножения можно вычислить квадрат дуального числа:

$$z^2 = zz = a^2 + 2ab\varepsilon.$$

Сопряжение, модуль и обратное по умножению

- Дуальным сопряжением или просто сопряжением назовем следующую унарную операцию

$$\bar{z} = \overline{a + b\varepsilon} = a - b\varepsilon.$$

- Модулем дуального числа назовем действительное число $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |a|$.
- Также часто удобнее использовать выражение для квадрата модуля:

$$|z|^2 = z\bar{z} = (a + b\varepsilon)(a - b\varepsilon) = a^2 - ab\varepsilon + ab\varepsilon - b^2\varepsilon^2 = a^2.$$

- Обратное по умножению дуальное число z^{-1}

$$z^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\varepsilon.$$

Число z^{-1} находится из следующего соотношения:

$$1 = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = z\frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = z\frac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - b\varepsilon}{a^2} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\varepsilon.$$

Заметим также, что можно вычислить действительную часть найдя разность $z + \bar{z}$:

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(a + b\varepsilon + a - b\varepsilon) = a.$$

Условие существования обратного числа. Деление

Так как обратное по умножению дуальное число вычисляется как

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

то обязательным условием его существования является условие $|z| \neq 0$.
Операция деления определяется следующим соотношением:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\varepsilon}{a_2 + b_2\varepsilon} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2}\varepsilon,$$

что верно в силу следующей цепочки равенств:

$$\frac{a_1 + b_1\varepsilon}{a_2 + b_2\varepsilon} = \frac{(a_1 + b_1\varepsilon)(a_2 - b_2\varepsilon)}{(a_2 + b_2\varepsilon)(a_2 - b_2\varepsilon)} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2\varepsilon + b_1 a_2\varepsilon}{a_2^2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2}\varepsilon.$$

Для дуального числа z с ненулевым модулем $|z| \neq 0$ можно записать:

$$z = a + b\varepsilon = a\left(1 + \frac{b}{a}\varepsilon\right) = r(1 + \varphi\varepsilon), \quad r = |z| = |a|, \quad \varphi = \frac{b}{a}.$$

Число $\varphi = \operatorname{Arg} z = \dfrac{b}{a}$ – аргумент дуального числа (или параметр числа).

- Сопряжение: $\bar{z} = \overline{r(1 + \varphi\varepsilon)} = r(1 - \varphi\varepsilon)$.
- Умножение: $r_1(1 + \varphi_1\varepsilon)r_2(1 + \varphi_2\varepsilon) = r_1 r_2(1 + (\varphi_1 + \varphi_2)\varepsilon)$
- Деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(1 + \varphi_1\varepsilon)}{r_2(1 + \varphi_2\varepsilon)} = \dfrac{r_1}{r_2}(1 + (\varphi_1 - \varphi_2)\varepsilon)$.

Выражение для деления справедливо в силу следующей цепочки равенств:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(1 + \varphi_1\varepsilon)}{r_2(1 + \varphi_2\varepsilon)} = \frac{r_1(1 + \varphi_1\varepsilon)r_2(1 - \varphi_2\varepsilon)}{r_2 r_2(1 + \varphi_2\varepsilon)(1 - \varphi_2\varepsilon)} = \frac{r_1(1 + (\varphi_1 - \varphi_2)\varepsilon)}{r_2(1 - \varphi_2\varepsilon + \varphi_2\varepsilon)} = \frac{r_1}{r_2}(1 + (\varphi_1 - \varphi_2)\varepsilon)$$

Возведение в степень

Так как в показательной форме умножение дуального числа сводится к сложению аргументов и перемножению модулей, то для возведения в целую степень можем записать:

$$\big(r(1+\varphi\varepsilon)\big)^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n}\big(1 + (\varphi + \varphi + \cdots + \varphi)\varepsilon\big) = r^n(1 + n\varphi\varepsilon).$$

Отсюда:

$$z^n = \big(r(1+\varphi\varepsilon)\big)^n = r^n\big(1 + n\varphi\varepsilon\big)$$

$$z^n = (a + b\varepsilon)^n = a^n + na^{n-1}b\varepsilon.$$

В частности:

$$(a + b\varepsilon)^2 = a^2 + 2ab\varepsilon.$$

Для отрицательной степени:

$$(a + b\varepsilon)^{-n} = \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\varepsilon\right)^n = \frac{1}{a^n} - n\frac{1}{a^{n-1}}\frac{b}{a^2}\varepsilon = \frac{1}{a^n} - n\frac{b}{a^{n+1}}\varepsilon,$$

в частности:

$$(a + b\varepsilon)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}\varepsilon.$$

Извлечение корня

$$\sqrt[n]{r(1+\varphi\varepsilon)} = \sqrt[n]{r}\left(1+\frac{\varphi}{n}\varepsilon\right),$$

$$\sqrt[n]{a+\varepsilon b} = \sqrt[n]{a}\left(1+\frac{b\varepsilon}{na}\right) = \sqrt[n]{a}+\frac{b}{n}a^{\frac{1-n}{n}}\varepsilon,$$

$$\sqrt{a+\varepsilon b} = \sqrt{a}\left(1+\frac{b\varepsilon}{2a}\right) = \sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\varepsilon,$$

$$(a+b\varepsilon)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}}\left(1+\frac{n}{m}\frac{b}{a}\varepsilon\right) = a^{\frac{n}{m}}+\frac{n}{m}ba^{\frac{n}{m}-1}\varepsilon.$$

Элементарные функции от дуального числа

Формула $f(a+\varepsilon b) = f(a) + f'(a)b\varepsilon$ позволяет распространить элементарные функции на множество дуальных чисел, так как в правой части формулы находятся лишь значения функции f от действительного числа a. Приведем для иллюстрации небольшую сводку основных элементарных функций.

Тригонометрические функция	**Обратные тригонометрические функции**
$\sin(a+b\varepsilon) = \sin a + b\cos a\varepsilon$	$\arcsin(a+b\varepsilon) = \arcsin a + b\varepsilon/\sqrt{1-a^2}$
$\cos(a+b\varepsilon) = \cos a - b\varepsilon\sin a$	$\arccos(a+b\varepsilon) = \arccos a - b\varepsilon/\sqrt{1-a^2}$
$\mathrm{tg}(a+b\varepsilon) = \mathrm{tg}\, a + b\varepsilon/\cos^2 a$	$\mathrm{arctg}(a+b\varepsilon) = \mathrm{arctg}\, a + b\varepsilon/(1+a^2)$
$\mathrm{ctg}(a+b\varepsilon) = \mathrm{ctg}\, a - b\varepsilon/\sin^2 a$	$\mathrm{arcctg}(a+b\varepsilon) = \mathrm{arctg}\, a - b\varepsilon/(1+a^2)$

Степенные функции	**Логарифмические функции и экспонента**
$(a+b\varepsilon)^n = a^n + na^{n-1}b\varepsilon$	$\exp(a+b\varepsilon) = \exp\{a\} + b\exp\{a\}\varepsilon$
$\sqrt[n]{a+b\varepsilon} = \sqrt[n]{a}\left(1+\dfrac{b\varepsilon}{na}\right)$	$\log_c(a+\varepsilon b) = \log_c a + b\varepsilon/a\ln a$

Quaternions

Кватернионы

Кватернионом (эллиптическими кватернионами) называется гиперкомплексное число следующего вида

$$q = q_0 1 + q_1 \mathrm{i} + q_2 \mathrm{j} + q_3 \mathrm{k} = q_0 + \mathbf{q},$$

где q_0, q_1, q_2, q_3 — некоторые действительные числа.

Кватернион q также можно ассоциировать с точкой проективного пространства, записанной в однородных координатах $(q_1, q_2, q_3 \mid q_0)$. В этом случае базисный элемент 1 ассоциируется с собственной (конечной) точкой начала координат, а базисные элементы i, j, k с точками на бесконечности:

$$1 \leftrightarrow O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{i} \leftrightarrow \vec{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{j} \leftrightarrow \vec{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{k} \leftrightarrow \vec{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Кватернионное умножение

Правила умножения базисных элементов $\langle 1, i, j, k \rangle$ выводится аксиоматического соотношения Гамильтона:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Таблица умножения кватернионных базисных элементов примет вид:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	−k	−1	i
k	k	j	−i	−1

Формула для кватернионного умножения:

$$pq = (p_0 q_0 - (\mathbf{p}, \mathbf{q})) + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

В частности, для чистых кватернионов $p = 0 + \mathbf{p}$ и $q = 0 + \mathbf{q}$ формула упрощается:

$$\mathbf{pq} = -(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Сопряжение, квадрат и модуль

Введем операцию кватернионного сопряжения. Если дан кватернион $p = p_0 + \mathbf{p}$, то его сопряжение определяется следующей формулой:

$$p^* = p_0 - \mathbf{p} = p_0 - p_1\mathrm{i} - p_2\mathrm{j} - p_3\mathrm{k}.$$

Модулем кватерниона называется выражение

$$|p| = \sqrt{pp^*} = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

а нормой чистого кватерниона выражение

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{(\mathbf{p}, \mathbf{p})} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$$

Определим скалярное произведение кватернионов следующей формулой

$$(p, q) = \frac{1}{2}(pq^* + qp^*) = p_0q_0 + (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3.$$

Единичный кватернион следующего вида

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = a_x \mathrm{i} + a_y \mathrm{j} + a_z \mathrm{k},$$

задает вращение точки P при помощью сэндвич–оператора

$$p' = qpq^*,$$

где кватернион $p = 1 + \mathbf{p} = 1 + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ ассоциируется с аффинной точкой P, θ – угол поворота вокруг оси, проходящей через начало координат и имеющей направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, где $\|\mathbf{a}\| = 1$.

Dual quaternions

Параболические (дуальные) бикватерноны

Рассмотрим дуальное число с коэффициентами в виде кватернионов:

$$Q = q + q^o\varepsilon, \quad q, q^o \in \mathbb{H}, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad \varepsilon \neq 0,$$

где $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$ – главная часть и $q^o = q_0^o + \mathbf{q}^o = q_0^o + q_1^o\mathrm{i} + q_2^o\mathrm{j} + q_3^o\mathrm{k}$ – моментная часть. Q можно записать в виде числа с 8 компонентами:

$$Q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} + q_0^o\varepsilon + q_1^o\mathrm{i}\varepsilon + q_2^o\mathrm{j}\varepsilon + q_3^o\mathrm{k}\varepsilon.$$

Гиперкомплексное число Q называют параболическим бикватернионом, а также дуальным кватернионом и дуальным бикватернионом.
Также можно рассмотреть базисные элементы $\langle 1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}, \varepsilon, \mathrm{i}\varepsilon, \mathrm{j}\varepsilon, \mathrm{k}\varepsilon\rangle$ и составить полную таблицу умножения 8×8 элементов.

	1	i	j	k	ε	$\mathrm{i}\varepsilon$	$\mathrm{j}\varepsilon$	$\mathrm{k}\varepsilon$
1	1	i	j	k	ε	$\mathrm{i}\varepsilon$	$\mathrm{j}\varepsilon$	$\mathrm{k}\varepsilon$
i	i	-1	k	$-\mathrm{j}$	$\mathrm{i}\varepsilon$	$-\varepsilon$	$\mathrm{k}\varepsilon$	$-\mathrm{j}\varepsilon$
j	j	$-\mathrm{k}$	-1	i	$\mathrm{j}\varepsilon$	$-\mathrm{k}\varepsilon$	$-\varepsilon$	$\mathrm{i}\varepsilon$
k	k	j	$-\mathrm{i}$	-1	$\mathrm{k}\varepsilon$	$\mathrm{j}\varepsilon$	$-\mathrm{i}\varepsilon$	$-\varepsilon$
ε	ε	$\mathrm{i}\varepsilon$	$\mathrm{j}\varepsilon$	$\mathrm{k}\varepsilon$	0	0	0	0
$\mathrm{i}\varepsilon$	$\mathrm{i}\varepsilon$	$-\varepsilon$	$\mathrm{k}\varepsilon$	$-\mathrm{j}\varepsilon$	0	0	0	0
$\mathrm{j}\varepsilon$	$\mathrm{j}\varepsilon$	$-\mathrm{k}\varepsilon$	$-\varepsilon$	$\mathrm{i}\varepsilon$	0	0	0	0
$\mathrm{k}\varepsilon$	$\mathrm{k}\varepsilon$	$\mathrm{j}\varepsilon$	$-\mathrm{i}\varepsilon$	$-\varepsilon$	0	0	0	0

Таблица составлена с использованием двух предположений:

- ассоциативность умножения
- коммутативности умножения дуальной мнимой единицы ε на эллиптические мнимые единицы i, j, k то есть:

$$\mathrm{i}\varepsilon = \varepsilon\mathrm{i}, \quad \mathrm{j}\varepsilon = \varepsilon\mathrm{j}, \quad \mathrm{k}\varepsilon = \varepsilon\mathrm{k}.$$

Сопряжения и скалярное произведение бикватерниона

В случае бикватернионов рассматривают три разных операции сопряжения:

- $Q^* = (q + q^o\varepsilon) = q^* + q^{o*}\varepsilon$ – кватернионное (комплексное) сопряжение;
- $\overline{Q} = \overline{q + q^o\varepsilon} = q - q^o\varepsilon$ – дуальное сопряжение;
- $Q^\dagger = (\overline{q + q^o\varepsilon})^* = q^* - q^{o*}\varepsilon$ – кватернионно дуальное сопряжение.

Для этих операций справедливы следующие свойства:

$$(PQ)^* = Q^*P^*, \quad \overline{QP} = \overline{PQ}, \quad (PQ)^\dagger = Q^\dagger P^\dagger.$$

Скалярное произведение двух бикватернионов $P = p + p^o\varepsilon$ и $Q = q + q^o\varepsilon$ определим следующим образом [1, p. 15]:

$$(P, Q) = \frac{1}{2}(PQ^* + QP^*) = (p, q) + [(p^o, q) + (p, q^o)]\varepsilon,$$

где $(p, q) = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$, $(p^o, q) = p_0^oq_0 + p_1^oq_1 + p_2^oq_2 + p_3^oq_3$ и $(p, q^o) = p_0q_0^o + p_1q_1^o + p_2q_2^o + p_3q_3^o$ – скалярные произведения кватернионов [1, p. 15].

Бикватернионое произведние бикватернионов

Для двух бикватернинов $P = p + p^o\varepsilon$ и $Q = q + q^o\varepsilon$ можно определить бикватернионное произведение

$$PQ = (p + p^o\varepsilon)(q + q^o\varepsilon) = pq + (pq^o + p^oq)\varepsilon,$$

где pq, pq^o и p^oq — кватернионные произведения.

Модуль бикватерниона

Квадрат модуля бикватерниона определим следующим выражением:

$$|Q|^2 = QQ^* = qq^* + (qq^{o*} + q^o q^*)\varepsilon = |q|^2 + 2(q, q^o)\varepsilon,$$

где $|Q|^2$ – дуальное число. Непосредственно модуль бикватерниона будет вычисляться следующим образом:

$$|Q| = \sqrt{QQ^*} = \sqrt{|q|^2 + 2(q, q^o)\varepsilon} = |q| + \frac{(q, q^o)}{|q|}\varepsilon = |q|\left(1 + \frac{(q, q^o)}{|q|^2}\varepsilon\right),$$

что справедливо в силу формулы для дуальных чисел $\sqrt{a + b\varepsilon} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{b}{2a}\varepsilon\right)$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

Действительное число $\dfrac{(q, q^o)}{|q|^2}$ называется параметром бикватерниона, а скалярное произведение кватернионов (q, q^o) называется инвариантом бикватерниона [6, с. 71].

Если бикватернион чистый, то есть $q_0 = 0$ и $q_0^o = 0$, то он является винтом $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^o\varepsilon$ и его параметр совпадает с параметром винта $\dfrac{(\mathbf{q}, \mathbf{q}^o)}{\|\mathbf{q}\|^2}$.

Бикватернион называется единичным, если его модуль равен 1, то есть $(q, q^o) = 0$ и $|q| = 1$.

Иным способом дуальные бикватернионы получаются из кватернионов $q = q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k}$ с помощью процедуры удвоения при замене действительных коэффициентов q_0, q_1, q_2, q_3 на дуальные числа Q_0, Q_1, Q_2, Q_3.

$$Q = Q_0 + Q_1\mathrm{i} + Q_2\mathrm{j} + Q_3 k = Q_0 + \mathbf{Q}, \quad Q_i = q_i + q_i^o\varepsilon, \quad q_i, q_i^o \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

где Q_0 – скалярная часть (дуальное число), а $\mathbf{Q}$ – винтовая часть (дуальный вектор).
Для двух бикватернионов

$$Q = Q_0 + Q_1\mathrm{i} + Q_2\mathrm{j} + Q_3 k = Q_0 + \mathbf{Q}, \quad \text{и} \quad P = P_0 + P_1\mathrm{i} + P_2\mathrm{j} + P_3 k = P_0 + \mathbf{P},$$

можно аналогично кватернионам доказать формулу для бикватернионного произведения

$$PQ = P_0Q_0 - (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) + P_0\mathbf{Q} + Q_0\mathbf{P} + \mathbf{P} \times \mathbf{Q},$$

где $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ – скалярное, а $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ – векторное произведения винтов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Для чистых бикватернионов:

$$\mathbf{PQ} = -(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}, \quad \mathbf{PP} = -\|\mathbf{P}\|^2 .$$

Скалярное произведение вычисляется следующим образом:

$$(P, Q) = P_0Q_0 + P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3.$$

Рассмотрим бикватернион в кватернионном представлении $Q = q + q^o \varepsilon$ и умножим его на дуальное число $\mathrm{A} = \alpha + \alpha^o \varepsilon$:

$$(\alpha + \alpha^o \varepsilon)(q + q^o \varepsilon) = \alpha q + (\alpha q^o + \alpha^o q)\varepsilon.$$

Аналогично в дуальном представлении $Q = Q_0 + Q_1 \mathrm{i} + Q_2 \mathrm{j} + Q_3 \mathrm{k}$, $Q_i = q_i + q_i^o \varepsilon$, $i = 0, 1, 2, 3$ можно записать:

$$\mathrm{A}Q_i = (\alpha + \alpha^o \varepsilon)(q_i + q_i^o \varepsilon) = \alpha q_i + (\alpha q_i^o + \alpha^o q_i)\varepsilon.$$

Кватернионное и дуальное представления бикватернионов

$$Q = q + q^o\varepsilon, \quad q, q^o \in \mathbb{H}, \quad \varepsilon^2 = 0, \quad \varepsilon \neq 0,$$

где q — главная часть, q^o — моментная часть.

$$q = q_0 + q_1 \mathrm{i} + q_2 \mathrm{j} + q_3 \mathrm{k}, \quad q^o = q_0^o + q_1^o \mathrm{i} + q_2^o \mathrm{j} + q_3^o \mathrm{k}.$$

Бикватернионное умножение:

$$PQ = pq + (pq^o + p^o q)\varepsilon,$$

где pq, pq^o, $p^o q$ — кватернионные умножения.
Скалярное произведение бикватернионов:

$$(P, Q) = (p, q) + [(p^o, q) + (p, q^o)]\varepsilon,$$

(p, q), (p^o, q), (p, q^o) — скалярные произведения кватернионов. Квадрат модуля бикватерниона:

$$|Q|^2 = |q|^2 + 2(q, q^o)\varepsilon.$$

$$Q = Q_0 + Q_1 \mathrm{i} + Q_2 \mathrm{j} + Q_3 \mathrm{k} = Q_0 + \mathbf{Q}$$

Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 — дуальные числа, Q_0 — скалярная часть, $\mathbf{Q}$ — винтовая часть.
Бикватернионное умножение

$$PQ = P_0 Q_0 - (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) + P_0 \mathbf{Q} + Q_0 \mathbf{P} + \mathbf{P} \times \mathbf{Q},$$

где $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ — скалярное и винтовое умножения винтов, $P_0 \mathbf{Q}$, $Q_0 \mathbf{P}$ —умножение винта на дуальное число.
Скалярное произведение бикватернионов:

$$(P, Q) = P_0 Q_0 + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3$$

Квадрат модуля бикватерниона:

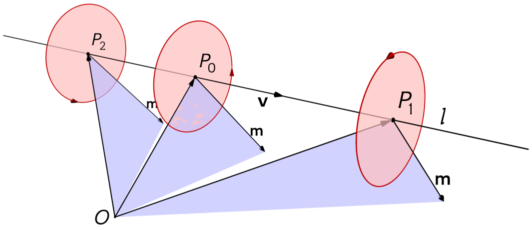
$$|Q|^2 = Q_0^2 + (\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$$

Бикватернионное представление точки, прямой и плоскости

Бикватернионы позволяют сопоставить точке, вектору, прямой и плоскости разные алгебраические объекты, способом, показанным в таблице.

Геометрический объект	Бикватернионное представление	Однородные координаты	Трехмерное декартово пространство
Аффинная точка	$P = 1 + \mathbf{p}\varepsilon, \mathbf{p} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$	$\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p} \mid 1) = (x, y, z \mid 1)$	$\mathbf{p} = (x, y, z)^T$
Точечная масса	$P = w + \mathbf{p}\varepsilon$	$\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p} \mid w) = (x, y, z \mid w)$	$\mathbf{p} = (x/w, y/w, z/w)$
Вектор	$\mathbf{V} = \mathbf{v}\varepsilon, \mathbf{v} = v_x\mathrm{i} + v_y\mathrm{j} + v_z\mathrm{k}$	$\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \mid 0) = (v_x, v_y, v_z \mid 0)$	$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$
Прямая	$\mathbf{L} = \mathbf{v} + \mathbf{m}\varepsilon$ $P(t) = P_0 + \mathbf{v}t\varepsilon,$ $P_0 = 1 + \dfrac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}}{\lVert\mathbf{v}\rVert^2}\varepsilon$	$\vec{\mathbf{L}} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ $\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{v} \times \mathbf{m} \mid \lVert\mathbf{v}\rVert^2)$	$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}t$
Плоскость	$\Pi = \mathbf{n} + d\varepsilon,$ $\mathbf{n} = n_x\mathrm{i} + n_y\mathrm{j} + n_z\mathrm{k}$	$\vec{\boldsymbol{\pi}} = [\mathbf{n} \mid d]$	$ax + by + cz + d = 0$

Прямая — чистый бикватернион



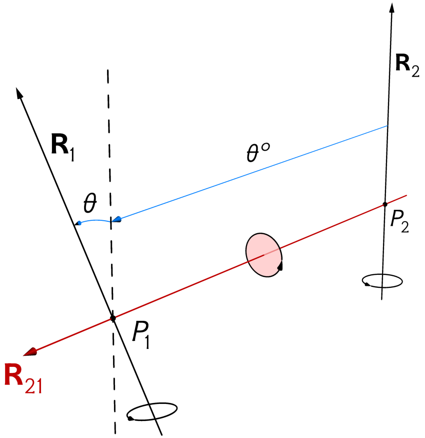
Любой пары векторов $\{\mathbf{v} \mid \mathbf{m}\}$ для которых выполняется условие Плюккера $(\mathbf{v}, \mathbf{m}) = 0$ можно сопоставить чистый бикватернион

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{m}$$

и однозначно интерпретировать его как ось, проходящую через точку с радиус вектором $\mathbf{p} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}$ по направлению $\mathbf{v}$.
Шесть компонент

$$\{v_x, v_y, v_z \mid m_x, m_y, m_z\}$$

называются координатами Плюккера.



Дуальным углом $\Theta = \theta + \theta^o\varepsilon$ между двумя осями $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ называется фигура, образованная этими осями и отрезком прямой P_2P_1, пересекающей оси под прямым углом.

- Чистый бикватернион $\mathbf{A}_{21}$ с осью в виде прямой (P_2P_1) — ось дуального угла.
- Дуальная часть угла $\theta^o = \|\mathbf{P_2P_1}\|$.
- Действительная часть угла $\theta = \measuredangle(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1)$.

Дуальный угол Θ определяется чистым бикватернионом

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta\mathbf{A}_{21} = (\theta + \theta^o\varepsilon)\mathbf{A}_{21}.$$

Для вычисления тригонометрических функций от дуального угла используются следующие формулы:

$$\sin\Theta = \sin(\theta + \theta^o\varepsilon) = \sin\theta + \theta^o\cos\theta\varepsilon,$$
$$\cos\Theta = \cos(\theta + \theta^o\varepsilon) = \cos\theta - \theta^o\sin\theta\varepsilon,$$
$$\operatorname{tg}\Theta = \operatorname{tg}(\theta + \theta^o\varepsilon) = \operatorname{tg}\theta + \frac{\theta^o}{\cos^2\theta}\varepsilon.$$

Transference principle

Некоторые определения из теории абсолютно твердого тела

Неизменяемая система — система материальных точек, в которой расстояние между двумя любыми точками постоянно. При непрерывном распределении масс такая система идеальный образ твердого тела и называется абсолютно твердым телом [3, с. 48].
Различают абсолютно твердые тела:

- с одной неподвижной точкой,
- свободные.

Теорема Эйлера

всякое перемещение абсолютно твердого тела около неподвижной точки можно получить одним только поворотом тела вокруг определенной оси, проходящей через эту точку и называемой осью конечного вращения [3, с. 132].

Теорема Шаля

всякое перемещение свободного абсолютно твердого тела может быть осуществлено одним винтовым движением около некоторой винтовой оси, называемой осью конечного винтового перемещения. [3, с. 153].

Принцип перенесения Котельникова–Штуди

Принцип перенесения

Все формулы теории конечных поворотов и кинематики движения твердого тела с одной неподвижной точкой при замене в них вещественных величин на дуальные аналоги переходят в формулы теории конечных перемещений и кинематики движения свободного твердого тела [6, с. 67].

Иначе говоря, если в формулах для вращения точки в пространстве заменить вещественные числа, векторы, углы и кватернионы на дуальные числа, чистые бикватернионы (винты), дуальные углы и бикватернионы, то получатся корректные формулы для винтового движения.
Принцип сформулирован Котельниковым Александр Петровичем и Эдуардом Штуди (Eduard Study) [4, с. 12—13]. В англоязычной литературе явная формулировка данного принципа нами не найдена.

Dual quaternions screw motion

Вычисление винтового движения с помощью бикватернионов

Применим принцип перенесения Котельникова–Штуди, чтобы вывести формулу для бикватернионного винтового движения. Известно, что единичный кватернион следующего вида

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = a_x\mathrm{i} + a_y\mathrm{j} + a_z\mathrm{k},$$

где θ – угол поворота вокруг оси, проходящей через начало координат и имеющей направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, где $\|\mathbf{a}\| = 1$, задает вращение точки P при помощи сэндвич–оператора

$$p' = qpq^*,$$

где кватернион $p = 1 + \mathbf{p} = 1 + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ задает точку P.
Согласно принципу перенесения, бикватернион, задающий винтовое движение (трансляция + вращение) получится из вращательного кватерниона путем следующей замены:

- $\theta \longrightarrow \Theta = \theta + \theta^o\varepsilon$ – угол заменяется на дуальный угол;
- $\mathbf{a} \longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^o\varepsilon$ – вектор заменяется чистый бикватернион (винт).

Бикватернион винтового движения (вращение + трансляция)

Бикватернион винтового движения запишется следующим образом:

$$\Lambda = \cos\frac{\Theta}{2} + \sin\frac{\Theta}{2}\mathbf{A}, \quad \Theta = \theta + \theta^{o}\varepsilon, \quad \mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^{o}\varepsilon.$$

Так как $\mathbf{A}$ задает прямую, что должно выполняться условие Плюккера $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^{o}) = 0$, а также будем полагать, что $\|\mathbf{a}\| = 1$, то есть $\mathbf{A}$ – единичный винт (единичный чистый бикватернион).

- Дуальное число $\Theta = \theta + \theta^{o}\varepsilon$ – дуальный угол с осью $\mathbf{A}$.
- Угол θ задает угол поворота вокруг оси $\mathbf{A}$.
- Число θ^{o} задает расстояние трансляции вдоль оси $\mathbf{A}$.

Подставим выражения для $\sin\frac{\Theta}{2}$ и $\cos\frac{\Theta}{2}$ и запишем бикватернион Λ в следующем виде:

$$\boxed{\Lambda = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^{o}\varepsilon) + \left(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\theta^{o}}{2}\varepsilon}$$

- При $\theta^{o} = 0$ получаем чистое вращение вокруг произвольной оси $\mathbf{A}$ задаваемое бикватернионом $R = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^{o}\varepsilon)$.
- При $\theta = 0$ получаем чистую трансляцию вдоль оси $\mathbf{A}$ задаваемую бикватернионом $T = 1 + \frac{\theta^{o}}{2}\mathbf{a}\varepsilon$.

Чистое вращение точки вокруг произвольной оси

Аффинная точка P представляется следующим бикватернионом:

$$P = p + p^{o}\varepsilon = 1 + \mathbf{p}\varepsilon, \quad p = 1 + \mathbf{0}, \quad p^{o} = 0 + \mathbf{p}.$$

Вращение точки вокруг оси $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^{o}\varepsilon$ на угол обычный θ осуществляется по следующей сэндвич-формуле:

$$P' = RPR^{\dagger}, \quad R = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^{o}\varepsilon), \quad R^{\dagger} = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^{o}\varepsilon).$$

Для точки:

$$P' = RPR^{\dagger} = 1 + \Big(\cos\theta\mathbf{p} + \sin\theta\mathbf{a}\times\mathbf{p} + (1-\cos\theta)(\mathbf{a},\mathbf{p})\mathbf{a} + \sin\theta\mathbf{a}^{o} + (1-\cos\theta)\mathbf{a}\times\mathbf{a}^{o}\Big)\varepsilon.$$

Для вектора:

$$\mathbf{V}' = R\mathbf{V}R^{\dagger} = R\mathbf{v}\varepsilon R^{\dagger} = \Big(\cos\theta\mathbf{v} + \sin\theta\mathbf{a}\times\mathbf{v} + (1-\cos\theta)(\mathbf{a},\mathbf{v})\mathbf{a}\Big)\varepsilon,$$

Чистая трансляция точки и вектора вдоль оси

Рассмотрим теперь бикватернион

$$T = 1 + \frac{\theta_0}{2}\mathbf{a}\varepsilon,$$

который задает трансляцию на расстояние θ^0 по направлению **a**. Здесь θ^o — дуальная часть дуального угла Θ.
Трансляция точки:

$$P' = TPT^\dagger = \left(1 + \frac{\theta_0}{2}\mathbf{a}\varepsilon\right)(1 + \mathbf{p}\varepsilon)\left(1 + \frac{\theta_0}{2}\mathbf{a}\varepsilon\right) = 1 + (\mathbf{p} + \theta^o\mathbf{a})\varepsilon.$$

Трансляция вектора:

$$\mathbf{V}' = T\mathbf{V}T^\dagger = \left(1 + \frac{\theta_0}{2}\mathbf{a}\varepsilon\right)\mathbf{v}\varepsilon\left(1 + \frac{\theta_0}{2}\mathbf{a}\varepsilon\right) = \left(1 + \frac{\theta_0}{2}\mathbf{a}\varepsilon\right)\left(\mathbf{v}\varepsilon + \frac{\theta^o}{2}\mathbf{p}\mathbf{a}\varepsilon^2\right) = \left(1 + \frac{\theta_0}{2}\mathbf{a}\varepsilon\right)\mathbf{v}\varepsilon = \mathbf{v}\varepsilon = \mathbf{V}$$

Как и полагается, на свободный вектор трансляция не действует.

Можно показать, что

$$\Lambda = RT = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^o\varepsilon) + \left(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\theta^o}{2}\varepsilon,$$

и винтовое движение точки можно записать как:

$$P' = \Lambda P \Lambda^\dagger = RTP(RT)^\dagger.$$

Важно, что трансляция $\mathbf{T}$ осуществляется вдоль той же оси, вокруг которой происходит вращение. Тогда движение будет являться винтовым и операции R и T коммутируют:

$$RT = TR.$$

Использование отдельных бикватернионов R и T позволяет осуществлять трансляции и вращения с разными осями.
Дополнительно запишем:

$$\Lambda^\dagger = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^o\varepsilon) + \left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a}\right)\frac{\theta^o}{2}\varepsilon.$$

Винтовое движение прямой

Для прямой, заданной винтом $\mathbf{L} = \mathbf{v} + \mathbf{m}\varepsilon$ винтовое движение задается тем же самым бикватернионом Λ, однако сэндвич-формула выглядит несколько иначе:

$$\mathbf{L}' = \Lambda \mathbf{L} \Lambda^*,$$

$$\Lambda = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^O\varepsilon) + \left(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\theta^O}{2}\varepsilon,$$
$$\Lambda^* = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^O\varepsilon) + \left(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\theta^O}{2}\varepsilon.$$

Эту формулу можно непосредственно получить из принципа перенесения, заменив в сэндвич-формуле для кватернионов кватернионы на бикватернионы, так как тут используется кватернионное сопряжение $*$, а не его комбинация с дуальным $\dagger$.

Чистое вращение и чистая трансляция прямой

Рассмотрим чистое вращение прямой с помощью бикватерниона R

$$\boxed{\mathbf{L}' = R\mathbf{L}R^*} \quad R = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^o\varepsilon), \quad R^* = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^o\varepsilon).$$

Можно вычислить:

$$\mathbf{L}' = R\mathbf{L}R^* = R\big(\mathbf{v} + \mathbf{m}\varepsilon\big)R^* = \cos\theta\mathbf{v} + \sin\theta\mathbf{a}\times\mathbf{v} + (1-\cos\theta)(\mathbf{a},\mathbf{v})\mathbf{a} +$$
$$+ \Big(\sin\theta\mathbf{a}^o\times\mathbf{v} + (1-\cos\theta)\mathbf{v}\times\mathbf{a}\times\mathbf{a}^o + \cos\theta\mathbf{m} + \sin\theta\mathbf{a}\times\mathbf{m} + (1-\cos\theta)(\mathbf{a},\mathbf{m})\mathbf{a}\Big)\varepsilon$$

Рассмотрим чистую трансляцию прямой с помощью бикватерниона T

$$\boxed{\mathbf{L}' = T\mathbf{L}T^*} \quad T = 1 + \frac{\theta^o}{2}\mathbf{a}\varepsilon, \quad T^* = 1 - \frac{\theta^o}{2}\mathbf{a}\varepsilon.$$

Можно вычислить:

$$\mathbf{L}' = T\mathbf{L}T^* = \mathbf{v} + (\mathbf{m} + \theta^o\mathbf{a}\times\mathbf{v})\varepsilon$$

Винтовое движение плоскости

Для плоскости, заданной бикватернионом $\Pi = \mathbf{n} + d\varepsilon$ винтовое движение задается также бикватернионом Λ, а сэндвич-формула выглядит выглядит также как и для точки:

$$\Pi' = \Lambda \Pi \Lambda^{\dagger},$$

$$\Lambda = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^{O}\varepsilon) + \left(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\theta^{O}}{2}\varepsilon,$$
$$\Lambda^{\dagger} = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^{O}\varepsilon) + \left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a}\right)\frac{\theta^{O}}{2}\varepsilon.$$

Рассмотрим отдельно вращение плоскости и трансляцию.

Чистое вращение и чистая трансляция плоскости плоскости

Рассмотрим чистое вращение плоскости $\Pi = \mathbf{n} + d\varepsilon$ с помощью бикватерниона R

$$\Pi^\dagger = R\Pi R^\dagger, \quad R = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^o\varepsilon), \quad R^\dagger = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^o\varepsilon)$$

Можно вычислить:

$$\Pi' = R\Pi R^\dagger = \cos\theta\mathbf{n} + \sin\theta\mathbf{a}\times\mathbf{n} + (1-\cos\theta)(\mathbf{n},\mathbf{a})\mathbf{a} + \big(d - \sin\theta(\mathbf{a}^o,\mathbf{n}) - (1-\cos\theta)(\mathbf{a},\mathbf{n},\mathbf{a}^o)\big)\varepsilon.$$

Рассмотрим чистую трансляцию плоскости с помощью бикватерниона T

$$\Pi' = T\Pi T^\dagger, \quad T = 1 + \frac{\theta^o}{2}\mathbf{a}\varepsilon, \quad T^\dagger = 1 + \frac{\theta^o}{2}\mathbf{a}\varepsilon = T$$

Можно вычислить:

$$\Pi' = T\Pi T^\dagger = \mathbf{n} + (d + \theta^o(\mathbf{a},\mathbf{n}))\varepsilon$$

Винтовое движение с помощью бикватернионов

$$\Lambda = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^O\varepsilon) + \left(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\theta^O}{2}\varepsilon,$$
$$\Lambda^* = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^O\varepsilon) + \left(\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{\theta^O}{2}\varepsilon,$$
$$\Lambda^\dagger = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^O\varepsilon) + \left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a}\right)\frac{\theta^O}{2}\varepsilon.$$

- Для точки $P' = \Lambda P \Lambda^\dagger$
- Для прямой $\mathbf{L}' = \Lambda \mathbf{L} \Lambda^*$
- Для плоскости $\Pi' = \Lambda \Pi \Lambda^\dagger$

Связь бикватернионов с проективными матрицами I/II

Запишем бикватернион, задающий винтовое движение в кватернионной форме:

$$\Lambda = \lambda + \lambda^o \varepsilon = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{a} + \left(\sin\frac{\theta}{2}\mathbf{a}^o + \frac{\theta^o}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a} - \frac{\theta^o}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\varepsilon,$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{i} + \lambda_2 \mathrm{j} + \lambda_3 \mathrm{k} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{a}, \quad \lambda^o = \lambda_0^o + \lambda_1^o \mathrm{i} + \lambda_2^o \mathrm{j} + \lambda_3^o \mathrm{k} = \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{a}^o + \frac{\theta^o}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{a} - \frac{\theta^o}{2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Кватернион λ задает вращение, а кватернион λ^o ответственен за трансляционные операции.
Матрица проективного преобразования, задающая вращение и трансляцию выглядит следующим образом:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} R & \mathbf{t} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} r_1^1 & r_2^1 & r_3^1 & t_x \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & t_y \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

где матрица R записывается через кватернионные коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ как

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

Связь бикватернионов с проективными матрицами II/II

Покажем, что вектор-столбец **t** можно вычислить по формуле

$$\mathbf{t} = 2\lambda^{o}\lambda^{*}.$$

Используя условие Плюккера $(\mathbf{a}, \mathbf{a}^{o}) = 0$ и единичность вектора **a** можно доказать:

$$2\lambda^{o}\lambda^{*} = \theta^{o}\mathbf{a} + \sin\theta\mathbf{a}^{o} + 2\sin^{2}\frac{\theta}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{a}^{o} = \theta^{o}\mathbf{a} + \sin\theta\mathbf{a}^{o} + (1-\cos\theta)\mathbf{a}\times\mathbf{a}^{o}.$$

Здесь два слагаемых:

- $\sin\theta\mathbf{a}^{o} + (1-\cos\theta)\mathbf{a}\times\mathbf{a}^{o}$ — совпадает с частью формулы вращения вокруг произвольной оси (перенос и возврат начала координат);
- $\theta^{o}\mathbf{a}$ — задает трансляцию вдоль оси **a** на расстояние θ.

В случае, если задана матрица M, а надо найти бикватернион Λ, то вычисление коэффициентов λ осуществляется по специальному алгоритму [2, p. 241–242], а вычисление λ^{o} по формуле:

$$\lambda^{o} = \frac{1}{2}\mathbf{t}\lambda = \frac{1}{2}t\lambda, \quad t = 0 + \mathbf{t}.$$

Формулу справедлива в силу

$$\mathbf{t} = 2\lambda^{o}\lambda^{*} \Rightarrow \frac{1}{2}\mathbf{t}\lambda = \frac{1}{2}2\lambda^{o}\underbrace{\lambda^{*}\lambda}_{=1} = \lambda^{o}$$

Сравнение проективных матриц 4×4 и бикватернионов

Критерий сравнения	**Матрицы**	**Бикватернионы**
Количество скалярных коэффициентов	$4 \times 4 = 16$	$4 + 4 = 8$
Умножения (композиции)	48 перемножений скаляров	48 перемножений скаляров
Движение точки	12 перемножений скаляров	96 перемножений скаляров

- В вычислительном плане бикватернионы менее эффективны, чем матрицы.
- С помощью бикватернионов удобнее задать произвольную ось.
- С помощью бикватернионов легче делать эвристические умозаключения.

Asymptote implementation

Язык Asymptote

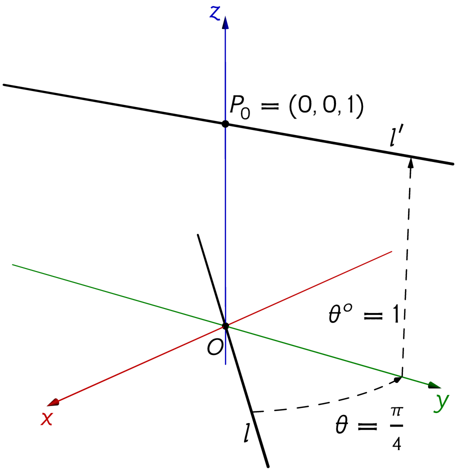
- Asymptote — специализированный язык для создания векторных изображений.
- Синтаксис C-подобный.
- Ближайший аналог $PGF/TikZ$, однако Asymptote императивный, а не декларативный.
- Выбор пал на него в первую очередь из-за возможности непосредственной визуализации вычисленных объектов.

Структура программы

Основной целью данной работы была реализация бикватернионов в виде структуры языка Asymptote, что, однако, невозможно без реализации дуальных чисел и кватернионов.
Структура нашей небольшой библиотеки имеет следующий вид:

```
/
├── struct
│   ├── dual.asy
│   ├── quaternion.asy
│   └── dualquaternion.asy
├── test
│   ├── dual.asy
│   ├── quaternion.asy
│   └── dualquaternion.asy
├── img
│   ├── helicoid.asy
│   └── plucker_conoid.asy
└── config.asy
```

Простой пример винтового движения прямой



Рассмотрим винтовое движения прямой l с направляющим вектором $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$ и проходящей через начало координат.

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} + \mathbf{0}\varepsilon, \text{ т.к. } \mathbf{m} = \mathbf{0} \times \mathbf{v}.$$

Ось винтового движения — ось Oz и ее задает бикватернион

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^o\varepsilon = \mathbf{a}.$$

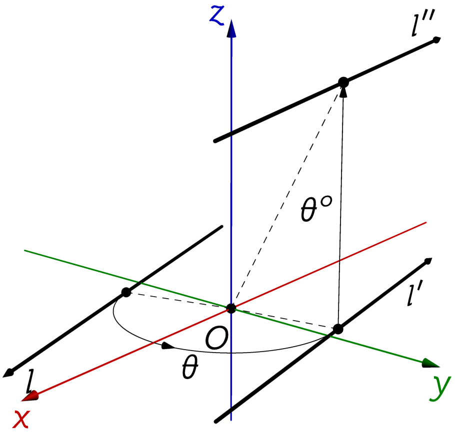
Зададим дуальный угол $\Theta = \frac{\pi}{4} + 1$ и бикватернион винтового движения запишется как:

$$\Lambda = \cos\frac{\Theta}{2} + \sin\frac{\Theta}{2}\mathbf{a}$$

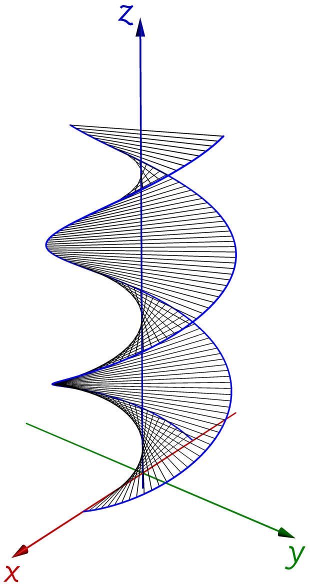
Винтовое движение задается формулой $\mathbf{L}' = \Lambda\mathbf{L}\Lambda^*$, что после вычислений дает прямую

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\varepsilon, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{v}' \times \mathbf{m}'$$

Более сложный пример винтового движения прямой



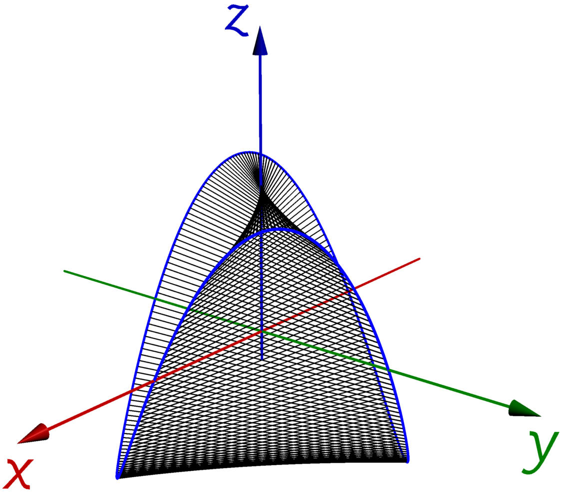

```
triple P = (0, -1/2, 0);
triple v = dir(colatitude=90, longitude=15);
triple m = cross(P, v);
DualQuaternion L = screw(v, m);

DualQuaternion A = screw(Z, cross(O, Z));
Dual Theta = Dual(radians(175), 1);

ScrewMotion Rotation =
↪  LineSandwichFormula(Theta=Dual(real(Theta), 0), A=A);
ScrewMotion Translation = LineSandwichFormula(Theta=Dual(0,
↪  dual(Theta)), A=A);
ScrewMotion Motor = LineSandwichFormula(Theta=Theta, A=A);

DualQuaternion L1 = Rotation(L);
DualQuaternion L2 = Translation(L1);
DualQuaternion L2_alt = Motor(L);

triple P0 = cross(vec(L.q), vec(L.qo));
triple P10 = cross(vec(L1.q), vec(L1.qo));
triple P20 = cross(vec(L2.q), vec(L2.qo));
```



Геликоид на рисунке слева получен путем равномерного винтового движения прямой Ox вдоль оси Oz. Вычисления проводились с помощью бикватернионов.

- Винт (чистый бикватернион) $\mathbf{L} = \mathbf{v} + \mathbf{m}\varepsilon$, где $\mathbf{v} = (1, 0, 0)^T$ и $\mathbf{m} = (0, 0, 0)^T$ представлял прямую Ox.
- Винт (чистый бикватернион) $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{a}^o$, где $\mathbf{a} = (0, 0, 1)^T$ и $\mathbf{a}^o = (0, 0, 0)^T$ представлял ось Oz, вдоль которой осуществляется винтовое движение.
- Дуальный угол $\Theta = \dfrac{\pi}{40} + \dfrac{\pi}{80}\varepsilon$ задавал шаги винтового движения.
- Бикватернионы $P_1 = 1 + \mathbf{v}\varepsilon$ и $P_2 = 1 - \mathbf{v}\varepsilon$ задавали точки отрезка, они же точки винтовой линии (нарисована синим цветом).
- Был построен единичный бикватернион $\Lambda = \cos\dfrac{\Theta}{2} + \sin\dfrac{\Theta}{2}\mathbf{A}$, который был использован в сендвич-формулах для винтового движения прямой $\mathbf{L}' = \Lambda\mathbf{L}\Lambda^*$ и точки $P' = \Lambda P \Lambda^\dagger$.
- Многократное применение сендвич-формулы позволило получить все отображенные на рисунке образующие поверхности геликоида.

Коноид, полученый путем винтового движения



- Коноид Плюккера получается при вращении отрезка вокруг оси Oz и одновременных колебательных движений вдоль этой же оси в приделах отрезка $[-1, 1]$.
- В данном случае не возможно обойтись одним фиксированным дуальным углом, поэтому был использован угол

$$\Theta = t + \sin(2t)\varepsilon.$$

- Параметр t пробегал значения $[0, 2\pi]$ и для каждого из них производилось одно винтовое движения.
- Все положения отрезка, которые при этом получились, визуально образуют поверхность.

Conclusion

Результаты

- Бикватернионы проигрывают в скорости вычислений матричным вычислениям.
- Также как и кватернионы, бикватернионы избавлены от эффекта складывания рамок (gimbal lock).
- Бикватернионы легко поддаются ренормализации в отличии от матриц.
- Позволяют вращать плоскости и прямые как целое.
- Требуют меньше памяти для хранения параметров.

Созданная программа позволяет легко манипулировать бикватернионами и сразу же визуализировать их в виде точек, прямых и плоскостей.

Список литературы

1. Goldman R. — Dual Quaternions and Their Associated Clifford Algebras. — Boca Raton, London, New York : CRC Press Taylor & Francis Group, 2024. — 279 p. — ISBN 9781032502977.
2. Lengyel E. Foundations of Game Engine Development. In 4 vols. Vol. 1. — Mathematics. — Lincoln, California : Terathon Software LLC, 2016. — 195 p. — ISBN 9780985811747. — URL: http://foundationsofgameenginedev.com.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. В 2 т. Т. 1. — Кинематика, статика, динамика материальной точки. /. — Под ред. И. А. Маркузон. — 6, переработанное и дополненное С. М. Тарогом. — Москва : Наука, 1965. — 468 с.
4. Диментберг Ф. М. — Винтовое исчисление и его приложение в механике. /. — Под ред. И. Л. Антонов. — Москва : Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы, 1965. — 200 с.
5. Диментберг Ф. М. — Теория винтов и ее приложения. /. — Под ред. И. А. Маркузон. — Москва : Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы, 1978. — 328 с.
6. Челноков Ю. Н. — Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. /. — Под ред. И. Л. Легостаева. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 512 с. — ISBN 5922106805.
7. Яглом И. М. — Комплексные числа и их применение в геометрии. /. — Под ред. М. М. Горяча, И. Е. Морозова. — Москва : Физматгиз, 1963. — 192 с.