ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2017, № 2, с. 1–14

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.92+004.94

ЛОРАНОВЫ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ q-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *

© 2017 г. С. А. Абрамов, А. А. Рябенко, Д. Е. Хмельнов
Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН
ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333
E-mail: sergeyabramov@mail.ru, anna.ryabenko@gmail.com, dennis_khmelnov@mail.ru
Поступила в редакцию 10.07.2017

Рассматриваются системы линейных q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Уравнения системы могут иметь произвольные порядки. Для таких систем предлагаются алгоритмы поиска полиномиальных, рациональных и гипергеометрических решений, а также решений в виде лорановых рядов. Обсуждается реализация этих алгоритмов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгоритмы, связанные с q-разностными уравнениями, представляют интерес для многих разделов математики ([1]), особенно для комбинаторики и теории разбиений ([2], [3, п. 8.4]).

Ниже мы рассматриваем линейные системы линейных q-разностных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{K}[x]$, где $\mathbb{K} = K(q)$, и K — некоторое поле характеристики 0; q трансцендентно над K, x — обозначение для q^k, k — переменная, принимающая значения в $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Система имеет вид

$$A_r(x)y(q^r x) + \cdots + A_1(x)y(qx) + A_0(x)y(x) = b(x), \quad (1)$$

где

- $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_r(x)$ суть $m \times m$-матрицы, элементы которых принадлежат $\mathbb{K}[x]$ (запись: $A_0(x)$, $A_1(x)$, $\ldots$, $A_r(x) \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}[x])$), при этом предполагается, что матрицы $A_0(x)$, $A_r(x)$ ненулевые,
- $b(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_m(x))^T \in \mathbb{K}[x]^m$ — правая часть системы,
- $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))^T$ — столбец неизвестных.

Число r называется *порядком* системы. Система

$$A_r(x)y(q^r x) + \cdots + A_1(x)y(qx) + A_0(x)y(x) = 0 \quad (2)$$

— однородная система, соответствующая (1). Системы (1), (2) могут быть записаны в операторном виде: $L(y) = b(x)$, $L(y) = 0$, где

$$L = A_r(x)\sigma_q^r + \cdots + A_1(x)\sigma_q + A_0(x), \quad (3)$$

σ_q — это оператор q-сдвига: $\sigma_q y(x) = y(qx)$. Матрицы $A_r(x)$ и $A_0(x)$ называются *ведущей* и *трейлинговой* матрицами как систем (1), (2), так и оператора (3).

Одним из общих компьютерно-алгебраических подходов к поиску решений линейных систем уравнений является метод циклического вектора. Этот метод преобразует систему в скалярное уравнение, эквивалентное, в определенном смысле, исходной системе. Связанная с применением этого преобразования проблема — распухание коэффициентов, из-за чего метод работает только для систем небольших порядков. Последнее обстоятельство стимулирует развитие прямых, без построения эквивалентного скалярного уравнения, методов и алгоритмов.

*Частичная поддержка РФФИ, грант 16-01-00174-а.

В этой статье мы рассматриваем прямые алгоритмы поиска решений заданной системы вида (1), компоненты $y_1(x), \dots, y_m(x)$ которых принадлежат либо полю $\mathbb{K}((x))$ формальных лорановых рядов (в частности, кольцу $\mathbb{K}[[x]]$ формальных степенных рядов) над $\mathbb{K}$, либо кольцу $\mathbb{K}[x]$ полиномов над $\mathbb{K}$, либо полю рациональных функций $\mathbb{K}(x)$ над $\mathbb{K}$. Уравнения соответствующей однородной системы (2), как и исходной системы, предполагаются независимыми над $\mathbb{K}[x, \sigma_q, \sigma_q^{-1}]$ (будем называть такие системы системами *полного ранга*).

Решение $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))^T \in \mathbb{K}((x))^m$ системы называется *лорановым*. Решение $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))^T \in \mathbb{K}(x)^m$ называется *рациональным*. Если $y(x) \in \mathbb{K}[x]^m$, то это решение также является *полиномиальным* (частный случай рационального решения).

Примечание 1. Мы могли бы ограничиться случаем однородной системы, так как случай неоднородной системы с полиномиальной правой частью может быть легко приведен к случаю однородной системы с помощью приема, описанного, в частности, в работе [4]: если дана неоднородная система, то можно построить эквивалентную однородную систему, добавив одно дополнительное уравнение для постоянной функции, используя компоненты правой части исходной системы как коэффициенты этой новой функции.

Решение $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))^T \in \mathbb{K}((x))^m$ системы называется *лорановым*. Решение $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))^T \in \mathbb{K}(x)^m$ называется *рациональным*. Если $y(x) \in \mathbb{K}[x]^m$, то это решение также является *полиномиальным* (частный случай рационального решения).

Поиск лорановых решений дифференциальных систем рассматривался в [5, 6]; для разностных систем в [7] привлекались тропические вычисления. Вопросы поиска рациональных решений как для скалярных линейных разностных уравнений, так и для систем, а также смежные вопросы, обсуждались, например, в [8] – [17].

Для q-разностного случая известны (см., например, [18], [19], [20]) алгоритмы поиска всех рациональных решений скалярных линейных уравнений, а также нормальных линейных систем уравнений первого порядка, т.е. систем вида

$$y(qx) = A(x)y(x), \tag{4}$$

где $A(x)$ невырожденная в $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}(x))$ матрица. Поиск рациональных решений линейных q-разностных уравнений и систем представляет самостоятельный интерес и, кроме этого, входит как часть в различные компьютерно-алгебраические алгоритмы (см., например, разд. 6 настоящей статьи).

Вырожденность ведущей или трейлинговой матрицы создает препятствия при поиске решений систем (если систему (4) переписать как $I_m y(qx) - A(x)y = 0$, где I_m — единичная $m \times m$-матрица, то трейлинговой матрицей этой системы будет $-A(x)$). Это же можно сказать про возможную вырожденность ведущей или трейлинговой матрицы так называемой индуцированной рекуррентной (разностной) системы: если формальный лоранов ряд $\sum a_n x^n, a_n \in \mathbb{K}^m$ удовлетворяет исходной q-разностной системе, то последовательность (a_n) m-мерных векторов удовлетворяет этой индуцированной рекуррентной системе. В разделе 2 будет сказано об алгоритме EG-исключений, позволяющем преобразовывать исходную q-разностную или индуцированную рекуррентную систему в систему с невырожденной трейлинговой или ведущей матрицей. Такое преобразование индуцированной рекуррентной системы и последующее нахождение определителя ведущей матрицы позволяет затем легко найти нижнюю границу валюаций формальных лорановых решений исходной системы. Верхняя граница степеней полиномиальных решений вычисляется с привлечением ненулевого определителя трейлинговой матрицы индуцированной рекуррентной системы (см. п. 2.2).

Поиск рациональных решений распадается на два этапа: 1) поиск так называемого универсального знаменателя и 2) поиск соответствующих числителей компонент решений. Числители находятся как компоненты полиномиальных решений системы, получающейся из исходной с помощью специальной подстановки, в которой участвует универсальный знаменатель. Построение универсального знаменателя на начальном его этапе использует ведущую и трейлинговую матрицы исходной q-разностной системы после применения EG-исключений. Этот этап позволяет получить все множители универсального знаменателя, отличные от множителя x^k. После этого подходящий показатель k может быть найден при рассмотрении рационального решения как формального лоранова решения и нахождения нижней границы валюации таких решений. Об этом — в разделе 5.

Первый алгоритм и пример построения полиномиальных решений q-разностных систем произвольного порядка был представлен в [21, Sect. 3.6]. Относительно универсальных знаменателей надо заметить, что, строго говоря, в статье [19] рассмотрены системы первого порядка, но в этой же статье сформулированы и общие принципы, которые позволяют находить рациональные решения и в случае систем высоких порядков. Так в [19] отмечено, что для построения части универсального знаменателя, содержащей только отличные от x множители, можно воспользоваться слегка модифицированным вариантом (с заменой $x + i \to xq^i$) алгоритма для разностного случая. Алгоритм для разностных систем произвольного порядка предлагался, например, в [22]. Рассмотрение рациональных решений как лорановых решений, предпринимаемое для работы с x^k в знаменателе, было также предложено в [19]. В настоящей статье мы следуем этому плану, получая алгоритм поиска рациональных решений систем вида (1) (при этом предполагается, что система имеет полный ранг). Для поиска полиномиальных решений используется алгоритм из [23], также основанный на EG-исключениях (см. разд. 4).

Таким образом, в обсуждаемых алгоритмах построения рациональных решений линейных q-разностных систем систематически привлекаются EG-исключения. Аналогичные алгоритмы предлагались ранее для линейных дифференциальных и разностных систем произвольного порядка ([21], [22]). (Для линейных разностных систем первого порядка $y(x + 1) = A(x)y(x)$ с невырожденной матрицей $A(x)$ в [9] предлагался алгоритм, который использовал средства супернеприводимости вместо EG-исключений.) И. Миддеке в [24] показал, что определение границ для показателя k в множителях вида x^k и для степеней полиномиальных решений может быть основано и на привлечении нормальной формы Попова (см. [25], [26]). При этом какие-либо сравнения различных подходов в [24] не проводились.

В разделе 6 рассматривается поиск гипергеометрических решений систем, т.е. решений, в которых каждая компонента $y_i(x)$ является конечной суммой гипергеометрических термов, т.е. таких $h(x)$, что $h(qx) = r(x)h(x)$ для некоторой рациональной функции $r(x)$. Для скалярных линейных q-разностных уравнений эта задача первоначально рассматривалась в [27], где был предложен алгоритм qHyper, являющийся q-версией алгоритма М.Петковшека для разностного случая ([28]). (Для разностного случая известны также алгоритмы, описанные в [29], [30].) Предлагаемый алгоритм для систем использует скалярный алгоритм, EG-исключения и разрешающие последовательности скалярных операторов, предложенные в [31]. Разрешающие последовательности сводят поиск решений системы к поиску решений нескольких скалярных уравнений, и, как показывают описанные в [31] эксперименты, оказываются по затрачиваемому времени более экономным инструментом, чем циклический вектор, о котором упоминалось выше.

В разделе 7 рассказывается о реализации предлагаемых алгоритмов в среде Maple [32].

Уместно заметить, что ранее уже были предложены детализированные версии EG-исключений, ориентированные на разностный и дифференциальный случаи, случай же q-разностных систем указывался в [33], [34] как один из возможных для применения EG-исключений, но без рассмотрения деталей. (Упомянутый выше пример построения полиномиального решения q-разностной системы получался применением EG-исключений к рекуррентной индуцированной системе.) В настоящей статье мы восполняем этот пробел. Результаты статьи анонсировались в расширенных аннотациях [35], [36].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. *Охватывающие системы*

Для любой имеющей полный ранг системы S вида (1) можно построить l-*охватывающую* систему $\bar{S}$

$$\bar{A}_r(x)y(q^r x) + \cdots + \bar{A}_1(x)y(qx) + \bar{A}_0(x)y(x) = \bar{b}(x), \quad (5)$$

ведущая матрица которой обратима в $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}(x))$, а множество решений содержит все решения системы S. Аналогично, можно построить t-*охватывающую* систему $\bar{\bar{S}}$

$$\bar{\bar{A}}_r(x)y(q^r x) + \cdots + \bar{\bar{A}}_1(x)y(qx) + \\ + \bar{\bar{A}}_0(x)y(x) = \bar{\bar{b}}(x), \quad (6)$$

ее трейлинговая матрица обратима в $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}(x))$, и множество решений содержит все решения системы S. При этом, если элементы матриц, входящих в (1), (2), и элементы правой части системы (1) принадлежат $\mathbb{K}[x]$, то же самое будет иметь место для (5), (6). Не исключается равенство нулю матриц $\bar{A}_0(x)$, $\bar{\bar{A}}_r(x)$ — как одной из них, так и обеих.

Построение охватывающих систем может быть выполнено с помощью EG-исключений ([21], [33], [37]).

Примечание 2. Если $\bar{S}$ и $\bar{\bar{S}}$ являются l- и t-охватывающими системами, построенными EG-исключениями для (1), то l- и t-охватывающие системы, построенные EG-исключениями для (2), совпадают с однородными системами, соответствующими $\bar{S}$ и $\bar{\bar{S}}$.

Алгоритм EG-исключений заключается в последовательном повторении двух этапов — *редукции* и *сдвига*; повторение продолжается, пока строки ведущей (трейлинговой) матрицы остаются линейно зависимыми над $\mathbb{K}(x)$. На этапе редукции находятся коэффициенты $p_1, \dots, p_m$ зависимости, а затем уравнение, отвечающее одной из зависимых строк, заменяется линейной комбинацией других уравнений, и строка ведущей (трейлинговой) матрицы становится нулевой. На этапе сдвига к новому уравнению применяется оператор σ_q (или соответственно σ_q^{-1}). Следование некоторому простому правилу выбора заменяемых уравнений гарантирует завершение выполнения алгоритма. Поясним это правило. Пусть система S имеет вид (1) и пусть i-е строки матриц $A_0, \dots, A_{k-1}$ нулевые, но i-я строка матрицы A_k ненулевая. Тогда назовем k *нижним порядком* i-го уравнения системы S. Соответственно если i-е строки матриц $A_r, A_{r-1}, \dots, A_{l+1}$ нулевые, но i-я строка матрицы A_l ненулевая, то назовем l *верхним порядком* i-го уравнения системы S. В процессе получения с помощью с помощью EG-исключений системы с невырожденной ведущей матрицей мы для замены выбираем среди уравнений, которым соответствуют ненулевые p_i, то, которое имеет наименьший нижний порядок (если таких уравнений несколько, то берем любое из них). При получении системы с невырожденной трейлинговой матрицей выбирается уравнение с наибольшим верхним порядком.

Этот алгоритм может применяться также к разностным (рекуррентным) системам: вместо σ_q, σ_q^{-1} к уравнениям будут применяться σ, σ^{-1}: $\sigma f(x) = f(x+1), \sigma^{-1} f(x) = f(x-1)$. Важность этого обстоятельства будет обсуждаться в п. 2.2. Для таких систем нас, прежде всего, будут интересовать *секвенциальные* решения, т.е. решения в виде последовательностей. Алгоритм EG-исключений, кроме построения l- или t-охватывающей системы, дополнительно может построить конечное множество *линейных ограничений*, каждое из которых затрагивает конечное число элементов секвенциального решения и является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами этих элементов. Любое секвенциальное решение исходной разностной системы удовлетворяет построенным линейным ограничениям, и если для решения l- или t-охватывающей системы удовлетворены все линейные ограничения, то оно является также решением исходной разностной системы (не является "лишним" секвенциальным решением соответствующей охватывающей системы).

Примечание 3. Существует вариант этого алгоритма, который не требует специального выбора заменяемого уравнения. На этапе сдвига вместо σ_q применяется $\sigma_q - 1$ (в разностном случае вместо σ применяется $\sigma - 1$). Каждый такой этап сдвига увеличивает на единицу размерность пространства решений системы, имеющих компоненты в некотором специальном расширении поля $\mathbb{K}$. Эта размерность не может стать больше, чем rm, поэтому завершимость алгоритма гарантирована. Об изменении размерности пространств решений, компоненты которых принадлежат так называемым адекватным расширениям, см. в [38].

Примечание 4. В некоторых случаях, например, при построении разрешающей последовательности операторов для системы S, необходимо построить lt-охватывающую систему, т.е. охватывающую систему с невырожденными ведущей и трейлинговой матрицами. Сделать это можно следующим образом: построить t-охватывающую систему $\bar{\bar{S}}$ с помощью EG-исключений, затем для $\bar{\bar{S}}$ построить l-охватывающую систему с помощью EG-исключений, использующих на этапе сдвига оператор $\sigma_q - 1$ (см. примечание 3).

2.2. *Индуцированные рекуррентные системы*

Если формальный лоранов ряд $\sum a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{K}^m$, удовлетворяет исходной q-разностной системе (1), то последовательность (a_n) m-мерных векторов удовлетворяет *индуцированной* рекуррентной системе

$$P_l(n)a_{n+l} + \cdots + P_t(n)a_{n+t} = c_n, \tag{7}$$

где (c_n) — последовательность коэффициентов разложения в ряд правой части $b(x)$ исходной q-разностной системы. Индуцированную систему можно получить из исходной системы в три этапа:

1) переписать исходную систему в операторно-матричном виде $M\,y = b$, где $M \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}[x, \sigma_q])$,

2) в матрице M произвести замену

$$\sigma_q \to q^n, \;\; x \to \sigma^{-1},$$

где σ — оператор сдвига: $\sigma f_n = f_{n+1}$ для любой двусторонней последовательности (f_n),

3) переписать полученную систему в виде (7).

В дальнейшем при рассмотрении элементов кольца $\mathbb{K}[[x]]$ и поля $\mathbb{K}((x))$, нам понадобится понятие валюации ряда: для ненулевого формального степенного или лоранова ряда $f(x) = \sum f_i x^i$ его *валюацией*, обозначаемой через $\mathrm{val} f(x)$, называется целое число

$$\min\{i \in \mathbb{Z} \mid f_i \neq 0\},$$

при этом $\mathrm{val} f(x) = \infty$ для нулевого ряда $f(x)$. Валюацией вектора с элементами-рядами называется наименьшая из валюаций элементов этого вектора.

Соответственно степенью вектора с элементами-полиномами назовем наибольшую из степеней элементов-полиномов. Степень нулевого полинома равна $-\infty$. Это же значение имеет степень нулевого полиномиального вектора.

Если индуцированная система (7) имеет невырожденную ведущую матрицу $P_l(n)$, т.е. $\det P_l(n)$ является ненулевым полиномом от q^n, то это дает возможность оценить снизу валюации всех возможных лорановых решений исходной q-разностной системы; если же $\det P_t(n)$ является ненулевым полиномом от q^n, то можно оценить сверху степени всех возможных полиномиальных решений исходной q-разностной системы. В некоторых случаях мы можем сразу установить отсутствие лорановых или соответственно полиномиальных решений.

Следующая теорема является объединенным вариантом теорем 1, 2 из [19].

Теорема 1. *Пусть рекуррентная система (7) такова, что если некоторый формальный лоранов ряд $\sum a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{K}^m$, (в частности, полином над $\mathbb{K}^m$) удовлетворяет исходной q-разностной системе (1), то последовательность (a_n) m-мерных векторов удовлетворяет (7). Пусть $p_l(n) = \det P_l(n)$, $p_t(n) = \det P_t(n)$ (таким образом, $p_l(n), p_t(n)$ суть полиномы от q^n). В этом случае*

(i) Если правая часть $b(x)$ является лорановой и при этом

- *$p_l(n)$ – ненулевой полином от q^n,*
- *N_l — множество (не исключается, что пустое) всех целых корней уравнения $p_l(n) = 0$,*
- *число β не превосходит валюации правой части исходной q-разностной системы ($\beta = \infty$, когда правая часть $b(x)$ — нулевой вектор-столбец),*

то валюация любого лоранова решения системы (1) не может быть меньше, чем

$$\min(N_l \cup \{\beta\}) + l. \tag{8}$$

(ii) Если правая часть $b(x)$ является полиномиальной и при этом

- *$p_t(n)$ – ненулевой полином от q^n,*
- *N_t — множество (не исключается, что пустое) всех целых корней уравнения $p_t(n) = 0$,*

- *число γ не меньше степени правой части исходной q-разностной системы ($\gamma = -\infty$, когда правая часть $b(x)$ — нулевой вектор-столбец),*

то степень любого полиномиального решения системы (1) не превосходит

$$\max(N_t \cup \{\gamma\}) + t. \tag{9}$$

Если ведущая или соответственно трейлинговая матрица индуцированной системы вырождена, то мы можем сначала применить нужную версию EG-исключений, а затем с помощью теоремы 1 найти желаемые оценки валюаций и степеней и построить лорановы и полиномиальные решения. Об этом речь пойдет в разделах 3, 4.

3. ЛОРАНОВЫ РЕШЕНИЯ

В случае вырожденной ведущей матрицы индуцированной системы для поиска лорановых решений строим l-охватывающую рекуррентную систему с помощью EG-исключений. При этом возникает конечное множество линейных ограничений.

Разложение лоранова решения в ряд представляется начальными членами, их количество выбирается так, что, во-первых, вычисление последующих членов уже не требует учета линейных ограничений и, во-вторых, определитель ведущей матрицы l-охватывающей рекуррентной системы в ходе этого вычисления уже не обращается в нуль. Найдя нижнюю границу валюаций решений с помощью формулы (8), мы можем выписать и решить систему линейных алгебраических уравнений для этих начальных членов. Следующие члены могут быть получены с помощью найденной l-охватывающей рекуррентной системы.

Вопрос о сходимости рядов мы не рассматриваем.

4. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Верхнюю границу степеней всех полиномиальных решений системы (1) можно получить по формуле (9). В случае если используемая в этих вычислениях трейлинговая матрица индуцированной системы (7) вырождена, то предварительно применяются EG-исключения для построения t-охватывающей системы того же вида (7), и вычисления по формуле (9) проводятся уже для этой системы.

После того, как определена верхняя граница ρ степеней, для нахождения самих полиномиальных решений можно применить не только метод неопределенных коэффициентов, но и более эффективное построение коэффициентов полиномиальных решений с помощью индуцированной рекуррентной системы ([23]).

Рекуррентная система позволяет вычислять коэффициенты либо в прямом направлении, начиная от младших к старшим, либо в обратном направлении, начиная от старших к младшим. При вычислении следующего коэффициента в случае прямого направления главную роль играет ведущая матрица, а в случае обратного направления — трейлинговая. Так как для поиска границы степени полиномиального решения в общем случае применяется построение t-охватывающей системы, то эту же t-охватывающую систему разумно использовать и для построения полиномиального решения поскольку для вычисления коэффициентов также удобно использовать невырожденную матрицу.

Перепишем построенную t-охватывающую систему (7) в виде

$$P_t(n)a_{n+t} = c_n - P_{t+1}(n)a_{n+t+1} - \\ - \cdots - P_l(n)a_{n+l}. \tag{10}$$

Пользуясь тем, что $a_n = 0$ при $n > \rho$, найдем последовательно

$$a_\rho,\ a_{\rho-1},\ \ldots,\ a_0,\ a_{-1},\ \ldots,\ a_{-l+t}.$$

Для этого при фиксированном n мы рассматриваем (10) как систему линейных алгебраических уравнений относительно a_{n+t}. При $n = \rho - t, \rho - t - 1, \ldots$ в решения таких систем будут входить постоянные, набор которых будет меняться при переходе к следующему значению n, коль скоро матрица в левой части очередной системы (10) оказывается вырожденной. С одной стороны, система должна быть совместной, и это может давать соотношения (линейные алгебраические уравнения) для ранее введенных постоянных, с другой стороны, возникают новые постоянные, число которых равно разности m и ранга матрицы левой части. К полученным линейным алгебраическим уравнениям надо, во-первых, добавить уравнения

$$a_{-1} = 0,\ a_{-2} = 0,\ \ldots, a_{-l+t} = 0 \tag{11}$$

относительно постоянных, и, во-вторых, линейные ограничения, в которые подставлены нули вместо неизвестных a_η при $\eta < 0$ и $\eta > \rho$. Полученное в итоге множество выражений $a_\rho x^\rho + a_{\rho-1}x^{\rho-1} + \cdots + a_0$ является множеством всех полиномиальных решений исходной системы (постоянные входят линейно в $a_\rho, a_{\rho-1}, \ldots, a_0$).

Примечание 5. Если, например, благодаря подходу, упомянутому в примечании 1, алгоритм применяется к однородной системе, то $c_n = 0$ в левой части (10). В этом случае, как и в алгоритмах из [9, 11], не обязательно перебирать последовательно все степени коэффициентов, что является важным достоинством в случае разреженных решений. Для этого ведется подсчет числа подряд идущих уже вычисленных нулевых коэффициентов решения, и если это число превышает порядок левой части системы (10), то вычисления продолжаются, сразу начиная со значения n, соответствующего следующему по порядку целому корню определителя трейлинговой матрицы $P_t(n)$.

5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

При построении рациональных решений сперва определяются такие $U(x) \in \mathbb{K}(x)$ $(U(0) \neq 0)$ и $k \in \mathbb{Z}$, что любое рациональное решение $y(x)$ системы может быть записано как

$$y(x) = \frac{x^k}{U(x)} z(x), \tag{12}$$

где $z(x)$ — полиномиальный вектор. Затем в системе делается замена (12) неизвестной $y(x)$ на $z(x)$, и после упрощения для новой системы выполняется поиск полиномиальных решений, — в разделе 4 говорилось, как этот поиск выполняется. Различие между x и неприводимыми множителями полинома $U(x)$ состоит в том, что если полином $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ неприводим и $p(0) \neq 0$, то $p(q^h x)$ является неприводимым полиномом, взаимно простым с $p(x)$ при любом $h \in \mathbb{Z}$, при этом разные h дают разные неприводимые полиномы. Однако все не так для полинома x, который не взаимно прост с qx. Это и придает неприводимому полиному x особый статус, чего нет, например, в разностном случае, где любой неприводимый $p(x)$ (не исключая случая $p(x) = x$) взаимно прост с $p(x + 1)$.

Уже говорилось, что каждое рациональное решение может быть рассмотрено как лораново решение. Поэтому теорема 1(ii) дает возможность определить показатель k в множителе x^k. Что касается полинома $U(x)$, то, в соответствии со схемой, намеченной в разделе 1, мы находим его "разностным" алгоритмом с заменами сдвигов σ^i соответствующими q-сдвигами σ_q^i, исключив при этом из рассмотрения множители x. Дадим некоторые определения и затем представим алгоритм.

Для рациональной функции $F(x)$ обозначим через $\mathrm{den}F(x)$ ее *знаменатель*, т.е. такой полином со старшим коэффициентом 1, что $F(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{den}F(x)}$ для некоторого взаимно простого с $\mathrm{den}F(x)$ полинома $f(x)$. Если $F(x)$ является полиномом (в частности — нулевым полиномом), то $\mathrm{den}F(x) = 1$. Если $F(x)$ является вектором с компонентами — рациональными функциями, $F_1(x), \ldots, F_m(x)$, то $\mathrm{den}F(x)$ совпадает с наименьшим общим кратным (lcm) полиномов $\mathrm{den}F_1(x), \ldots, \mathrm{den}F_m(x)$.

Для $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ будем писать $f(x)\perp g(x)$, если эти полиномы взаимно просты и $f(x)\not\perp g(x)$, если у этих полиномов имеется общий делитель положительной степени.

Любой полином $f(x) \in \mathbb{K}(x) \setminus \{0\}$ может быть представлен в виде $f(x) = x^v s(x)$, где $v \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и полином $s(x)$ не делится на x, т.е. $s(0) \neq 0$. Назовем $s(x)$ в этом случае *основой* $f(x)$, а для v будем использовать обозначение $\nu(f(x))$. Если $\nu(f(x)) = \nu(g(x)) = 0$, то мы можем рассматривать *q-дисперсионное множество* полиномов $f(x)$ и $g(x)$:

$$\mathrm{qds}\,(f(x), g(x)) = \{h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \mid f(x)\not\perp g(q^h x)\} \tag{13}$$

и их *q-дисперсию*:

$$\mathrm{qdis}\,(f(x), g(x)) = \max(\mathrm{qds}\,(f(x), g(x)) \cup \{-\infty\}). \tag{14}$$

Аналогично разностному случаю, q-дисперсия либо является неотрицательным целым числом, либо равна $-\infty$, причем последнее имеет место если и только если $f(x)\perp g(q^h x)$ для всех целых неотрицательных h.

Мы говорили, что если полином $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ неприводим и $\nu(p(x)) = 0$, то полином $p(q^h x)$, $h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, тоже неприводим, и при разных значениях h такие полиномы взаимно просты. Из этого и из единственности разложения произвольного полинома на неприводимые множители, получаем, что если $\nu(f(x)) = \nu(g(x)) = 0$, то множество $\mathrm{qds}\,(f(x), g(x))$ конечно. Это множество может быть найдено либо вычислением всех корней вида $\lambda = q^h$, $h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, уравнения $R(\lambda) = 0$, где $R(\lambda) = \mathrm{Res}_x(f(x), g(\lambda x))$, либо аналогом разностного алгоритма И. Мана и Ф. Райта ([39]), т.е. рассмотрением неприводимых множителей полиномов $f(x)$ и $g(x)$ и использованием того, что если неприводимый $p(x)$ имеет вид $p(x) = x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \dots$, то $p(q^h x) = q^{lh}(x^l + q^{-h}a_{l-1}x^{l-1} + \dots)$; существенно, что $\deg g(x) = \deg g(q^h x)$ для любого $h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. (В [40] предложен алгоритм, охватывающий случай, когда q — алгебраическое число, не являющееся корнем из единицы.)

Итак, после того, как найдено k, надо построить такой полином $U(x)$, что

- $\nu(U(x)) = 0$,
- если исходная система имеет рациональное решение со знаменателем $u(x)$, то $U(x)$ делится на основу полинома $u(x)$.

Когда k и $U(x)$ найдены, мы можем привлечь

$$x^k \cdot \frac{1}{U(x)} \tag{15}$$

для подстановки (12).

Найти $U(x)$ можно по аналогии с тем, как находится универсальный знаменатель в разностном случае ([22]). В алгоритме будем прибегать к обозначению $\gcd(f(x), g(x))$ для наибольшего общего делителя полиномов $f(x), g(x)$.

Положить
$A(x) = (\mathrm{den}\bar{A}_r^{-1}(q^{-r}x))/x^{a_r}$,
$B(x) = (\mathrm{den}\bar{\bar{A}}_0^{-1}(x))/x^{a_0}$,
где $a_r = \nu\,(\mathrm{den}\bar{A}_r^{-1}(q^{-r}x))$, $a_0 = \nu\,(\mathrm{den}\bar{\bar{A}}_0^{-1}(x))$.
Найти $H = \mathrm{qds}\,(A(x), B(x))$. *Если* $H = \varnothing$, *то закончить выполнение алгоритма с результатом* $U(x) = 1$ *(далее предполагается, что* $H = \{h_1, h_2, \dots, h_s\}$ *и* $h_1 > h_2 > \dots > h_s$, $s \geqslant 1$*). Положить* $U(x) = 1$ *и поочередно для всех* h_i *в порядке их убывания, начиная с* h_1*, выполнять группу присваиваний:*
$N(x) = \gcd(A(x), B(q^{h_i}x))$
$A(x) = A(x)/N(x)$
$B(x) = B(x)/N(q^{-h_i}x)$
$U(x) = U(x)\prod_{j=0}^{h_i} N(q^{-j}x)$.
Заключительное значение $U(x)$ *даст полином, который можно использовать в (15).*

Подобно тому, как это делалось, например, в [18], [22] для разностного случая, здесь может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть любое рациональное решение исходной* q*-разностной системы (1) является также решением систем (5), (6), и при этом определители* $\det\bar{A}_r(x)$ *и* $\det\bar{\bar{A}}_0(x)$ *не равны нулю. Тогда полином* $U(x)$*, получаемый представленным выше алгоритмом, таков, что* $\nu(U(x)) = 0$ *и при этом если исходная система имеет рациональное решение со знаменателем* $u(x)$*, то* $U(x)$ *делится на основу полинома* $u(x)$*.*

Основная идея доказательства аналогична использованной в [12], [14], [22] для разностного случая. Назовем валюацией полинома $f(x)$ по отношению к неприводимому полиному $p(x)$ (обозначение: $\mathrm{val}_{p(x)}f(x)$) наибольшее целое n такое, что $f(x)$ делится на $p(x)^n$; в случае нулевого полинома $f(x)$ полагаем $\mathrm{val}_{p(x)}f(x) = \infty$. Валюацией рациональной функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ будем считать разность $\mathrm{val}_{p(x)}f(x) - \mathrm{val}_{p(x)}g(x)$. Валюацией вектора, состоящего из полиномов или рациональных функций, будем называть наименьшую из валюаций компонент этого вектора. Тогда при выполнении условия теоремы 2, для любого рационального решения $y(x)$ и любого неприводимого $p(x)$ будет выполняться неравенство

$$\mathrm{val}_{p(x)}y(x) \geqslant \max\left\{-\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}s}\mathrm{val}_{p(q^n x)}A(x),\right.$$
$$\left. -\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}s}\mathrm{val}_{p(q^{-n}x)}B(x)\right\}. \tag{16}$$

Доказывается, что $\mathrm{val}_{p(x)}U(x)$ не превосходит валюации правой части (16).

Добавим, что по аналогии с тем, как это сделано в [14] для разностного случая, на неравенстве (16) могут быть основаны и другие алгоритмы нахождения полинома $U(x)$. Но представленный выше в этом разделе алгоритм значительно проще и удобнее для реализации.

Примечание 6. Предложенный алгоритм построения $U(x)$ остается правильным после замены $\mathrm{den}\bar{A}_r^{-1}(q^{-r}x), \mathrm{den}\bar{\bar{A}}_0^{-1}(x)$ соответственно на $\det \bar{A}_r(q^{-r}x), \det \bar{\bar{A}}_0(x)$, потому что $\det \bar{A}_r(q^{-r}x)$ делится на $\mathrm{den}\bar{A}_r^{-1}(q^{-r}x)$ и $\det \bar{\bar{A}}_0(x)$ делится на $\mathrm{den}\bar{\bar{A}}_0^{-1}(x)$. Неравенство (16) тоже сохраняется после этой замены. Эта замена несколько упрощает алгоритм, но может привести к повышению степени получаемого полинома $U(x)$.

6. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

6.1. *Гипергеометрические термы, сертификаты*

Согласно [27, 41], функция $h(x)$ называется *гипергеометрическим термом* над $\mathbb{K}$, если отношение $h(qx)/h(x)$ является рациональной функцией от x с коэффициентами из $\mathbb{K}$; эта рациональная функция называется *сертификатом* $h(x)$. Обозначим $\mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)}$ множество всех гипергеометрических термов. Через $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)})$ обозначим множество всех конечных сумм элементов из $\mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)}$, оно является линейным пространством над $\mathbb{K}$.

Пусть $\mathbb{M} = \overline{\mathbb{K}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{K}$. Для скалярного q-разностного уравнения произвольного порядка

$$a_r y(q^r x) + \cdots + a_1 y(qx) + a_0 y(x) = 0,$$

$a_r(x), \ldots, a_0(x) \in \mathbb{K}[x]$, в [27] предложен алгоритм qHyper, который строит множество сертификатов $r_1(x), \ldots, r_s(x) \in \mathbb{M}(x)$, соответствующие которым $h_1(x), \ldots, h_s(x) \in \mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)}$ являются базисом пространства решений из $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)})$ данного уравнения. Представим сертификат $r(x)$ в нормальной форме (см. [27, Theorem 1]):

$$r(x) = z\frac{a(x)}{b(x)}\frac{c(qx)}{c(x)}\frac{d(x)}{d(qx)} = z\,U(x)\frac{V(qx)}{V(x)}, \quad (17)$$

где $z \in \mathbb{K}$; $a(x), b(x), c(x), d(x) \in \mathbb{K}[x]$ — приведенные (их старшие коэффициенты равны единице) полиномы; $a(x) \perp b(q^n x)$ для $n \in \mathbb{Z}$; $a(x) \perp c(x)d(qx)$; $b(x) \perp c(qx)d(x)$; $c(0) \neq 0$ и $d(0) \neq 0$; $U(x) = a(x)/b(x)$, $V(x) = c(x)/d(x)$. Такое представление для рациональной функции единственно.

Тогда, соответствующий гипергеометрический терм $h(x) = h(q^k)$, где k — переменная, принимающая значения из $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, можно записать в виде

$$h(q^k) = Cz^k V(q^k) \prod_{j=k_0}^{k-1} U(q^j),$$

где $C \in \mathbb{K}$ и q^j не является полюсом $U(q^k)$ для $j \in \mathbb{Z}_{\geqslant k_0}$. В случае $U(x) = 1$ и $z = q^j$, где $j \in \mathbb{Z}$, $h(x)$ является рациональной функцией от $x = q^k$.

Пусть $h_1(x), h_2(x) \in \mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)}$, тогда $h_1(x)$ и $h_2(x)$ называются *подобными*, если их отношение является рациональной функцией от x: $h_1(x)/h_2(x) \in \mathbb{K}(x)$. Пусть для $h_1(x)$, $h_2(x)$ их сертификаты имеют нормальные формы $r_1(x) = z_1 U_1(x) V_1(qx)/V_1(x)$ и $r_2(x) = z_2 U_2(x) V_2(qx)/V_2(x)$, соответственно. Тогда $h_1(x)$, $h_2(x)$ являются подобными, если и только если

$$U_1(x) = U_2(x) \text{ и } \frac{z_1}{z_2} = q^j, \text{ где } j \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

6.2. *Разрешающие последовательности операторов*

Переформулируем для q-разностного случая определение и предложение из [31].

Пусть ведущая и трейлинговая матрицы системы (2) невырождены, и $l_1, \ldots, l_p$ — не превосходящие m попарно различные положительные целые числа. Пусть скалярные операторы $L_1, \ldots, L_p \in \mathbb{K}[\sigma_q, x]$ таковы, что если $y_{l_1}(x) = \cdots = y_{l_j}(x) = 0$ при $j \leqslant p$ для некоторого решения $y(x)$ системы (2), то

- в случае $j = p$ все компоненты этого решения равны нулю:

$$y_1(x) = y_2(x) = \cdots = y_m(x) = 0,$$

- в случае $j < p$ для компоненты $y_{l_{j+1}}(x)$ этого решения выполнено

$$L_{j+1}(y_{l_{j+1}}(x)) = 0.$$

Тогда конечная последовательность

$$L_1, \ldots, L_p \quad (19)$$

называется *разрешающей последовательностью операторов* для данной системы ([31]).

Для системы (2) с вырожденной ведущей или трейлинговой матрицей разрешающей последовательностью операторов называется разрешающая последовательность операторов какой-либо ее lt-охватывающей системы (см. примечание 4).

Предложение 1. *Пусть* $y(x) = h(x)R(x)$ *— ненулевое решение системы* (2), *где* $h(x) \in \mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)}$, $R(x)$ *— вектор-столбец* m *рациональных функций из* $\mathbb{M}(x)$. *Пусть также* (19) *— разрешающая последовательность для* (2). *Тогда найдется такое* s, $1 \leqslant s \leqslant p$, *что скалярное уравнение* $L_s z(x) = 0$ *имеет подобное* $h(x)$ *решение:* $z(x) = h(x)f(x)$, *где* $f(x) \in \mathbb{M}(x)$.

Доказательство. Согласно определению разрешающей последовательности, найдется индекс j такой, что $j < p$, $y_{l_1}(x), \ldots, y_{l_j}(x)$ — нулевые компоненты решения, $y_{l_{j+1}}(x) = h(x)R_{l_{j+1}}(x)$ — ненулевая компонента, и, тем самым, выполняется $L_{j+1}(h(x)R_{l_{j+1}}(x)) = 0$. □

6.3. *Построение гипергеометрических решений для систем*

Предлагается алгоритм построения гипергеометрических решений однородной системы q-разностных уравнений (2), т.е. решений из $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)})^m$. Этот алгоритм, аналогично алгоритму из [31] для случая систем разностных уравнений, использует алгоритм построения последовательности разрешающих операторов (см. [31]), алгоритм qHyper и алгоритм построения рациональных решений для систем q-разностных уравнений (см. раздел 5).

- Построить разрешающую последовательность операторов (19) для (2).
- Положить $\ell = \varnothing$.
- Для $s = 1, \ldots, p$ с помощью qHyper построить множество сертификатов b_s для уравнения $L_s z(x) = 0$. Поместить в ℓ только те элементы b_s, для которых не выполняется условие (18) ни с одним элементом из ℓ. Таким образом, ℓ содержит сертификаты неподобных гипергеометрических термов.
- Для каждого $r_j(x)$ из $\ell = \{r_1(x), ..., r_d(x)\}$, представленного в нормальной форме $z_j U_j(x) V_j(qx)/V_j(x)$, выполнить подстановку
$$y(x) = \frac{h_j(x)R(x)}{V_j(x)}$$
в исходную систему (2), где $R(x)$ — вектор-столбец новых неизвестных, $h_j(x)$ имеет сертификат $r_j(x)$. После деления всех уравнений на $h_j(x)/V_j(x)$, получается система с коэффициентами из $\mathbb{M}(x)$:
$$B_r R(q^r x) + \cdots + B_1 R(qx) + B_0 R(x) = 0, \quad (20)$$
где для $i = 0, 1, \ldots, r$
$$B_i = z^i U(q^{i-1}x) \cdots U(qx)\, U(x) A_i.$$
- С помощью алгоритма из раздела 5 найти все рациональные решения системы (20). Пусть $R_{j,1}(x), \ldots, R_{j,s_j}(x) \in \mathbb{M}(x)^m$ — базис пространства рациональных решений, тогда $h_j(x)R_{j,1}(x)/V_j(x), \ldots, h_j(x)R_{j,s_j}(x)/V_j(x)$ — линейно независимые решения исходной системы (2). Множество всех решений $h_j(x)R_{j,i}$ ($1 \leqslant j \leqslant d$, $1 \leqslant i \leqslant s_j$) согласно предложению 1 является базисом пространства всех гипергеометрических решений системы (2).

7. РЕАЛИЗАЦИЯ

Представленные в статье алгоритмы реализованы в среде Maple 2017 (см. [32]) в виде процедур пакета `LqRS` (Linear q-Recurrence Systems). Пакет предлагает процедуры построения:

- охватывающих систем для q-разностной системы;
- лорановых решений для (1);
- полиномиальных решений для (1);
- универсального знаменателя (т.е., в данном случае, рациональной функции вида $\frac{x^k}{U(x)}$), рациональных решений для (1);
- разрешающей последовательности операторов для (2);
- гипергеометрических решений для (2).

В реализации алгоритмов для случая неоднородных систем использован подход, описанный в примечании 1, а в реализации алгоритма построения охватывающих систем q-разностной системы использован шаг сдвига, описанный в примечании 3 (применяемая для работы с индуцированными рекуррентными системами реализация алгоритма для разностных систем из пакета Maple `LinearFunctionalSystems` использует на шаге сдвига подход с выбором уравнения системы).

Реализация выполнена для систем, коэффициенты которых — рациональные функции одной переменной, например, x, над $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q)$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, q — имя.

Каждая из систем вида (1) и (2) задается во входных параметрах процедур как линейное q-разностное уравнение с матричными коэффициентами, либо традиционным для Maple способом — как множество из r уравнений для r неизвестных функций.

На рис. 1 задана однородная система с вырожденной ведущей матрицей. Построить для нее l-охватывающую систему можно с помощью процедуры `EG`, первый аргумент которой — ключевое слово `'lead'`, второй — система, третий — имя вектора неизвестных. Процедура возвращает охватывающую систему и `true`, это означает, что заданная система имеет полный ранг. Вызов процедуры и результат ее работы см. на рис. 2.

С помощью процедуры `LaurentSolution` строятся лорановы решения системы. Если задано только два аргумента — система и имя вектора неизвестных, процедура вычисляет столько начальных слагаемых ряда, сколько необходимо для определения размерности пространства решений. Имена $\_c_1$, $\_c_2, \ldots$ обозначают произвольные постоянные:

```
>LqRS:-LaurentSolution(S, y(x));
```

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\_c_1}{q^4}\, x^{-2} + \mathrm{O}(x^{-1}) \\[2ex] \mathrm{O}(x^{-1}) \end{bmatrix}$$

Чтобы получить больше слагаемых, нужно указать их число третьим параметром процедуры:

```
>LqRS:-LaurentSolution(S, y(x), 3);
```

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\_c_1}{q^4}\, x^{-2} + \mathrm{O}(x^4) \\[2ex] -\dfrac{\_c_1}{q^3}\, x^{-1} + \dfrac{\_c_1}{q^2} + \mathrm{O}(x) \end{bmatrix}$$

Полиномиальных решений система S с рис. 1 не имеет:

```
> LqRS:-PolynomialSolution(S, y(x));
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Универсальный знаменатель:

```
> LqRS:-UniversalDenominator(S, y(x));
```

$$\frac{q}{x^2(q\,x+1)}$$

Рациональные решения:

```
>LqRS:-RationalSolution(S, y(x));
```

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\_c_1}{x^2} \\[2ex] \dfrac{\_c_1\, q}{x\,(q\,x+1)} \end{bmatrix}$$

Разрешающую последовательность уравнений для данной системы см. на рис. 3. При построении гипергеометрических решений необходимо третьим аргументом процедуры указать имя переменной k такой, что $x = q^k$:

```
>LqRS:-HypergeometricSolution(S, y(x), k);
```

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\_c_1}{(q^k)^2} \\[2ex] \dfrac{\_c_1\, q}{q^k\,(q\,q^k+1)} + q^{\binom{k}{2}}\, q^k\, \_c_2 \end{bmatrix}$$

В качестве примера системы, имеющей полиномиальные решения, рассмотрим систему $S1$ (см. рис. 4).

```
> LqRS:-PolynomialSolution(S1, z(x));
```

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\_c_1}{q} - \_c_1\, x \\[2ex] \_c_1\, x \end{bmatrix}$$

Пакет, описания и примеры использования его процедур доступны по адресу http://www.ccas.ru/ca/lqrs.

$$> S := \begin{bmatrix} -\dfrac{q^2 x^2}{q x + 1} & -q x \\ -\dfrac{x\left(1 + q^2 x^2 + q\left(q^2 + 1\right) x\right)}{q x + 1} & -q^2 x - q x^2 \end{bmatrix} \cdot y(x) + \begin{bmatrix} \dfrac{q^2 x}{q^2 x + 1} & 1 \\ \dfrac{-1 + q^2\left(q^2 + 1\right) x^2 + q^3 x}{q^2 x + 1} & x + q \end{bmatrix} \cdot y(q x) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot y\left(q^2 x\right) :$$

Рис. 1.

$$> LqRS\text{:-}EG('lead', S, y(x));$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{q^2 x^2}{q x + 1} & q x \\ -\dfrac{x\left(q^3 x + q^2 x^2 + q x + 1\right)}{q x + 1} & -q^2 x - q x^2 \end{bmatrix} \cdot y(x) + \begin{bmatrix} -\dfrac{q^4 x^2}{q^2 x + 1} - \dfrac{q^2 x}{q^2 x + 1} & -q^2 x - 1 \\ \dfrac{q^4 x^2 + q^3 x + q^2 x^2 - 1}{q^2 x + 1} & x + q \end{bmatrix} \cdot y(q x) + \begin{bmatrix} \dfrac{q^3 x}{q^3 x + 1} & 1 \\ q^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot y\left(q^2 x\right),$$

$$true$$

Рис. 2.

$$> L := LqRS\text{:-}ResolvingSequence(S, y(x));$$

$$L := \left[\left(q x^2 + q x\right) y_1(x) + \left(-q^3 x^2 - q^3 x - q^2 x - q x^2 + q x + q\right) y_1(q x) + \left(q^4 x + q^3 x^2 - q^3 x - q^3 - q - x\right) y_1\left(q^2 x\right) + \left(q^3 + q^2 x\right) y_1\left(q^3 x\right), y_2(q x) - q x y_2(x)\right]$$

Рис. 3.

$$> S1 := \begin{bmatrix} -\dfrac{q^3}{(q x + 1)^2} & -\dfrac{q^2}{x (q x + 1)} \\ -\dfrac{q\left(q^2 x^2 + 1 + q\left(q^2 + 1\right) x\right)}{x (q x + 1)^2} & \dfrac{q\left(-q^2 x - q x^2\right)}{x^2 (q x + 1)} \end{bmatrix} \cdot z(x) + \begin{bmatrix} \dfrac{q}{x\left(q^2 x + 1\right)^2} & \dfrac{1}{q x^2\left(q^2 x + 1\right)} \\ \dfrac{-1 + q^2\left(q^2 + 1\right) x^2 + q^3 x}{q x^2\left(q^2 x + 1\right)^2} & \dfrac{x + q}{q x^2\left(q^2 x + 1\right)} \end{bmatrix} \cdot z(q x) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{q x^2\left(q^3 x + 1\right)} & 0 \end{bmatrix} \cdot z\left(q^2 x\right) :$$

Рис. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кац В.Г., Чен П.* Квантовый анализ. М.: МЦНМО, 2005.

2. *Andrews G.E.* q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra // CBMS Regional Conference Series, AMS, R.I. 1986. V. 66.

3. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Физматлит, 1982.

4. *van Hoeij M.* Rational solutions of linear difference equations // Proceedings of ISSAC'98. 1998. P. 120–123.

5. *Abramov S.A., Barkatou M.A., Khmelnov D.E.* On full rank differential systems with power series coefficients // J. of Symbolic Computation. 2015. V. 68. P. 120–137.

6. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Процедуры поиска локальных решений линейных дифференциальных систем с бесконечными степенными рядами в роли коэф-

фициентов // Программирование. 2016. № 2. С. 75–86.

7. *Abramov S.A., Khmelnov D.E.* On valuations of meromorphic solutions of arbitrary-order linear difference systems with polynomial coefficients // Proceedings of ISSAC'12. 2012. P. 12–19.

8. *Абрамов С.А.* Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 11. С. 1611–1620.

9. *Abramov S.A., Barkatou M.A.* Rational solutions of first order linear difference systems // Proceedings of ISSAC'98. 1998. P. 124–131.

10. *Barkatou M.A.* Rational solutions of matrix difference equations: problem of equivalence and factorization, Proceedings of ISSAC'99. 1999. P. 277–282.

11. *Barkatou M.A.* On rational solutions of systems of linear differential equations // J. of Symbolic Computation. 1999. V. 28. P. 547–567.

12. *Abramov S.A., Gheffar A.* Valuations of rational solutions of linear difference equations at irreducible polynomials // Adv. in Appl. Maths. 2010. V. 47. P. 352–364.

13. *Абрамов С.А., Геффар А., Хмельнов Д.Е.* Рациональные решения линейных разностных уравнений: универсальные знаменатели и границы знаменателей // Программирование. 2011. № 2. С. 28–39.

14. *Abramov S.A., Gheffar A., Khmelnov D.E.* Factorization of polynomials and gcd computations for finding universal denominators // Proceedings of CASC'2010. 2010. P. 4–18.

15. *Хмельнов Д.Е.* Улучшенные алгоритмы решения разностных и q-разностных уравнений // Программирование. 2000. № 2. С. 70–78.

16. *Баранов М.И.* Локальные уточнения нижних границ валюаций решений линейных разностных систем с мероморфными коэффициентами // Программирование. 2014. № 2. С. 69–74.

17. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Особые точки решений линейных обыкновенных дифференциальных систем с полиномиальными коэффициентами // Фунд. и прикл. мат. 2011/2012. Т. 17. № 1. С. 3–21.

18. *Абрамов С.А.* Рациональные решения линейных разностных и q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Программирование. 1995. № 6. С. 3–11.

19. *Abramov S.A.* A direct algorithm to compute rational solutions of first order linear q-difference systems // Discrete Mathematics. 2002. V. 246. P. 3–12.

20. *Gheffar A.* Linear differential, difference and q-difference homogeneous equations having no rational solutions // ACM Commun. Comput. Algebra. 2010. V. 44. Iss. 3. P. 78–83.

21. *Abramov S.A.* EG–eliminations // J. of Difference Equations and Applications. 1999. V. 5. P. 393–433.

22. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Знаменатели рациональных решений линейных разностных систем произвольного порядка // Программирование. 2012. № 2. С. 45–54.

23. *Хмельнов Д.Е.* Поиск полиномиальных решений линейных функциональных систем с помощью индуцированных рекурренций // Программирование. 2004. № 2. С. 8–16.

24. *Middeke J.* Denominator bounds and polynomial solutions for systems of q-recurrences over $\mathbb{K}(t)$ for constant $\mathbb{K}$ // Proceedings of ISSAC'17. 2017. P. 325–332.

25. *Beckermann B., Labahn G., Villard G.* Normal forms for general polynomial matrices // J. of Symbolic Computation. 2006. V. 41. P. 708–737.

26. *Middeke J.* A computational view on normal forms of matrices of Ore polynomials // Ph.D. thesis, Johannes Kepler University, Linz, July 2011, Research Institute for Symbolic Computation (RISC).

27. *Abramov S.A., Petkovšek M., Paule P.* q-Hypergeometric solutions of q-difference equations // Discret. Math. 1998. V. 180. P. 3–32.

28. *Petkovšek M.* Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients // J. of Symbolic Computation. 1992. V. 14. P. 243–264.

29. *van Hoeij M.* Finite singularities and hypergeometric solutions of linear recurrence equations // J. Pure Appl. Algebra. 1999. V. 139. P. 109–131.

30. *Cluzeau T., van Hoeij M.* Computing hypergeometric solutions of linear recurrence equations // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 2006. V. 17. P. 83–115.

31. *Abramov S.A., Petkovšek M., Ryabenko A.A.* Resolving sequences of operators for linear ordinary differential and difference systems // Comput. Math. and Math. Phys. 2016. V. 56. Iss. 7. P. 894–910.

32. Maple online help: http://www.maplesoft.com/support/help/

33. *Abramov S.A., Bronstein M.* On solutions of linear functional systems. // Proceedings of ISSAC'01. 2001. P. 1–6.

34. *Abramov S.A., Bronstein M.* Linear algebra for skew-polynomial matrices.// INRIA. Rapport de recherche. No. 4420, March 2002.

35. *Abramov S.A.* EG-eliminations as a tool for computing rational solutions of linear q-difference systems of arbitrary order with polynomial coefficients // Материалы 2-й Международной конференции "Компьютерная алгебра". 2017.

36. *Рябенко А.А.* Поиск гипергеометрических решений q-разностных систем с помощью разрешающих последовательностей // Материалы 2-й Международной конференции "Компьютерная алгебра". 2017.

37. *Abramov S.A., Bronstein M., Khmelnov D.* Regularization of linear recurrence systems Transactions of the A.M. Liapunov Institute. 2003. V. 4. P. 158–171.

38. *Abramov S.A., Barkatou M.A.* On Solution Spaces of Products of Linear Differential or Difference Operators // ACM Communications in Computer Algebra. 2014. V. 48. Iss. 4. P. 155–165.

39. *Man Y.K., Wright F.J.* Fast polynomial dispersion computation and its application to indefinite summation // Proceedings of ISSAC'94. 1994. P. 175–180.

40. *Abramov S.A., Bronstein M.* Hypergeometric dispersion and the orbit problem // Proceedings of ISSAC'00. 2000. P. 8–13.

41. *Petkovšek M., Wilf H.S., Zeilberger D.* $A = B$ // Peters. 1996.