# КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

**Материалы международной конференции**

***Москва, 30 октября – 3 ноября 2017 г.***

COMPUTER
ALGEBRA
INTERNATIONAL
CONFERENCE
MOSCOW
2017

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова

Федеральный исследовательский центр
Информатика и Управление
Российской академии наук

# КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

The Ministry of Education and Science
of the Russian Federation
Plekhanov Russian University of Economics

Institution of Russian Academy of Sciences
Dorodnicyn Computing Centre of
Federal Research Center
“Computer Science and Control” of RAS

# COMPUTER ALGEBRA

## International Conference Materials

Moscow, October 30 – November 3, 2017

Moscow
PRUE
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова»
(ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова»)

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук»
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына

# КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

Материалы Международной конференции

Москва, 30 октября — 3 ноября 2017 г.

Москва
ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова»
2017

UDC 519.6(063)
BBC 22.19я431
K637

*Responsible editors*:
Doctor of Physical and Mathematical Sciences S. A. A b r a m o v
Doctor of Physical and Mathematical Sciences T. M. S a d y k o v

*Reviewers*: PhD Yu. O. T r u s o v a, PhD K. P. L o v e t s k i y

It is printed in author's edition

K637 **Computer algebra** : International Conference Materials. Moscow, October 30 – November 3, 2017 / ed. S. A. Abramov, T. M. Sadykov. – Moscow : Plekhanov Russian University of Economics, 2017. – 173 c.
ISBN 978-5-7307-1266-9

The International conference is organized jointly by Dorodnicyn Computing Center of Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS and Plekhanov Russian University of Economics with a support of Russian Foundation for Basic Research, grant no. 17-01-20398\17. The talks presented at the conference discuss actual problems of computer algebra – the discipline whose algorithms are focused on the exact solution of mathematical problems using a computer.

For scientists, graduate and undergraduate students in mathematics, physics and computer science.

UDC 519.6(063)
BBC 22.19я431

ISBN 978-5-7307-1266-9

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я431
К637

*Ответственные редакторы*:
д-р физ.-мат. наук С. А. А б р а м о в
д-р физ.-мат. наук Т. М. С а д ы к о в

*Рецензенты*: канд. техн. наук Ю. О. Т р у с о в а
канд. физ.-мат. наук К. П. Л о в е ц к и й

Печатается в авторской редакции

К637 **Компьютерная алгебра** : материалы Международной конференции. Москва, 30 октября – 3 ноября 2017 г. / отв. ред. С. А. Абрамов, Т. М. Садыков. – Москва : ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2017. – 173 с.
ISBN 978-5-7307-1266-9

Международная конференция проводится совместно Вычислительным центром им. А. А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН и Российским экономическим университетом имени Г. В. Плеханова при поддержке РФФИ, проект № 17-01-20398\17. В представленных на конференции докладах обсуждаются актуальные проблемы компьютерной алгебры – научной дисциплины, алгоритмы которой ориентированы на точное решение математических задач с помощью компьютера.

Для научных работников, аспирантов и студентов физико-математических и технических специальностей.

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я431

ISBN 978-5-7307-1266-9

**Программный комитет**

*Евтушенко Ю. Г.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Россия — сопредседатель программного комитета; *Минашкин В. Г.* Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Россия — сопредседатель программного комитета; *Садыков Т. М.* Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Россия — зам. председателя программного комитета; *Абрамов С. А.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, Россия — зам. председателя программного комитета; *Флеров Ю. А.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Россия; *Баркату М.* (Лиможский университет), профессор, Франция; *Бернштейн А. В.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Виницкий С. И.* (ЛТФ ОИЯИ, РУДН), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Ву М.* (Восточно-Китайский педагогический университет), профессор, Китай; *Гердт В. П.* (ЛИТ ОИЯИ), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Малашонок Г. И.* (Тамбовский ГУ), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Михалев А. А.* (МГУ), Россия; *Михалев А. В.* (МГУ), Россия; *Петковшек М.* (Люблянский университет), профессор, Словения; *Прокопеня А. Н.* (Варшавский университет естественных наук), д.ф.-м.н., профессор, Польша; *Гонцов Р. Р.* (ИППИ РАН), Россия; *Самуйлов К. Е.* (РУДН), д.т.н., профессор, Россия; *Севастьянов Л. А.* (РУДН, ЛТФ ОИЯИ), д.ф.-м.н., профессор, Россия; *Серебряков В. А.* (ФИЦ ИУ РАН), д.ф.-м.н., профессор, Россия.

**Организационный комитет**

*Михайлов Г. М.* зам. директора ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия — сопредседатель оргкомитета; *Титов В. А.*Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Россия — сопредседатель оргкомитета; *Зонн И. А.* (ФИЦ ИУ РАН), Россия — зам. председателя оргкомитета; *Кулябов Д. С.* (РУДН), Россия; *Державина А. И.* (ФИЦ ИУ РАН), Россия; *Хмельнов Д. Е.*, (ФИЦ ИУ РАН), Россия; *Рябенко А. А.* (ФИЦ ИУ РАН), Россия — секретарь оргкомитета.

**Program Committee**

*Evtushenko, Yu. G.* FRC CSC RAS, Russia — Program Committee General Co-Chair; *Minashkin, V. G.* Plekhanov Russian University of Economics, Russia — Program Committee General Co-Chair; *Sadykov, T. M.* Plekhanov Russian University of Economics, Russia — Program Committee Vice Chair; *Abramov, S. A.* FRC CSC RAS, Russia — Program Committee Vice Chair; *Flerov, Yu. A.* FRC CSC RAS, Russia; *Barkatou, M.* Universite de Limoges, France; *Bernstein, A. V.* FRC CSC RAS, Russia; *Vinitsky, S. I.* Joint Institute for Nuclear Research, and Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Wu, M.* East China Normal University, Shanghai, P.R. China; *Gerdt, V. P.* Joint Institute for Nuclear Research, Russia; *Malaschonok, G. I.* Tambov State University, Russia; *Mikhalev, A. A.* Moscow State University, Russia; *Mikhalev, A. V.* Moscow State University, Russia; *Petkovšek, M.* University of Ljubljana, Slovenia; *Prokopenya, A. N.* Warsaw University of Life Sciences, Poland; *Gontsov, R. R.* Institute for Information Transmission Problems of Russian Academy of Sciences, Russia; *Samuilov, K. E.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Sevastyanov, L. A.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Serebryakov, V. A.* FRC CSC RAS.

**Organizing Committee**

*Mikhailov, G. M.* vice-director of CC FRC CSC PAS, Russia — Organising Committee Co-Chair; *Titov, V. A.* Plekhanov Russian University of Economics, Russia — Organising Committee Co-Chair; *Zonn, I. A.* FRC CSC RAS, Russia — Organising Committee Vice Chair; *Kulyabov, D. S.* Peoples' Friendship University of Russia, Russia; *Derzhavina, A. I.* FRC CSC RAS, Russia; *Khmelnov, D. E.* FRC CSC RAS, Russia; *Ryabenko, A. A.* FRC CSC RAS, Russia — Organising Committee Secretary.

## Предисловие

Вторая международная конференция «Компьютерная алгебра» организована совместно Вычислительным центром им. А. А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН и Российским экономическим университетом им. Г.В.Плеханова. Первая конференция (`http://www.ccas.ru/ca/conference2016`) проводилась в 2016 г., в ее проведении вместе с Вычислительным центром им. А. А. Дородницына участвовал Российский университет дружбы народов. Алгоритмы компьютерной алгебры ориентированы на точное решение математических задач с помощью компьютера. Участники настоящей конференции представляют новые результаты, полученные в этой научной области. Обсуждаются как новые теоретические результаты, так и результаты, связанные с решением прикладных задач средствами компьютерной алгебры, с реализационными вопросами и т.д. Формулируются и обсуждаются задачи компьютерной алгебры, не решенные до настоящего времени. Классификация средств компьютерной алгебры также привлекает внимание участников конференции.

Организаторы и участники конференции благодарят Российский фонд фундаментальных исследований за оказанную финансовую поддержку (проект 17-01-20398).

*Программный и организационный комитеты конференции*

## Foreword

The second international conference "Computer Algebra" has been organized jointly by Dorodnicyn Computing Centre of Russian Academy of Sciences and by Plekhanov Russian Univeristy of Economics. The first edition of the event (`http://www.ccas.ru/ca/conference2016`) was held in 2016 at the Dorodnicyn Computing Centre in cooperation with Russian University of Friendship of Peoples.

The algorithms of computer algebra serve the purpose of finding exact solutions to mathematically formulated problems by means of technical computing. The participants of the conference have presented recent scientific advances in the field. The scope of the event includes theoretical aspects of computer algebra as well as its applications and implementation issues. A number of hitherto unresolved problems in the field of computer algebra have been formulated and discussed in the framework of the conference. Besides, the classification of the existing computer algebra tools was the focus of the event.

The organizers and the participants of the conference thank the Russian Foundation for Basic Research for the provided financial support, grant no. 17-01-20398.

*Program and Organizing Committees of the conference*

# Содержание

## Пленарные доклады



## Сессионные доклады

# Contents

## The plenary lectures



## The sessional presentations

## Пленарные доклады

## The plenary lectures

UDC 517.927.7

# Smallness of the formal exponents of an irregular linear differential system, with an application to solvability by quadratures

**M. Barkatou***, **R. R. Gontsov**†‡

* *Université de Limoges, Faculté des Sciences et Techniques*
*123 avenue Albert Thomas, LIMOGES Cedex, F-87060, France*
† *Institute for Information Transmission Problems of RAS*
*Bolshoy Karetny per. 19, Moscow, 127051, Russia*
‡ *National Research University "Moscow Power Engineering Institute"*
*Krasnokazarmennaya str. 14, Moscow, 111250, Russia*

Email: moulay.barkatou@unilim.fr,gontsovrr@gmail.com

We prove that the formal exponents of a linear differential system with non-resonant irregular singular points whose coefficient matrix is small, are also small enough. This implies that such a system is solvable by quadratures if, and only if its coefficient matrix is conjugated to a triangular one (via a constant conjugating matrix), which generalizes the corresponding theorem by Ilyashenko–Khovanskii for Fuchsian systems.

**Key words and phrases:** irregular singular point, formal exponents, solvability by quadratures.

## 1. Introduction

We consider a linear differential system

$$z\frac{dy}{dz} = B(z)\,y, \qquad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{1}$$

of $p$ equations near a non-resonant irregular singular point $z = 0$ of Poincaré rank $r > 0$. This means that the coefficient matrix $B$ has the Laurent expansion

$$B(z) = \frac{1}{z^r}\Big(B_0 + B_1 z + \dots\Big) \tag{2}$$

and the eigenvalues $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ of the matrix $B_0$ are pairwise distinct. Such a system has a formal fundamental matrix $\widehat{Y}$ of the form

$$\widehat{Y}(z) = \widehat{F}(z) z^{\Lambda} e^{Q(1/z)},$$

where $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ is a diagonal matrix, $\widehat{F}$ is a matrix formal Taylor series, and $Q$ is a polynomial (they will be described in more details further).

The elements $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ of the matrix $\Lambda$ are called the *formal exponents* of the system (1) at the (non-resonant) irregular singular point $z = 0$. Their dependence on the coefficient matrix is not so evident as the similar dependence of proper exponents in the Fuchsian case (*i.e.*, in the case of Poincaré rank $r = 0$): the latter coincide with the eigenvalues of the residue matrix $B_0$. In particular, a Fuchsian system having a small residue matrix has small exponents. Here we are interested in the following question: *when can one expect the smallness of the formal exponents at an irregular singular point?* The answer would have some application to the solvability of linear differential systems by quadratures.

To give an answer to the addressed question, let us recall the procedure of a formal transformation of the system (1), (2) to a diagonal form (from §11 in [1]).

## 2. Transformation to the non-resonant formal normal form

Under a transformation $y = T(z)\tilde{y}$, the system is changed as follows:

$$z\frac{d\tilde{y}}{dz} = A(z)\,\tilde{y}, \qquad A(z) = T^{-1}B(z)T - zT^{-1}\frac{dT}{dz},$$

and a new coefficient matrix $A$ has the Laurent expansion

$$A(z) = \frac{1}{z^r}\Big(A_0 + A_1 z + \ldots\Big).$$

One may always assume that $T(z) = I + T_1 z + \ldots$ and $B_0 = A_0 = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$. Then gathering the coefficients at each power $z^k$ from the relation

$$T(z)\,z^r A(z) - z^r B(z)\,T(z) + z^{r+1}\frac{dT}{dz} = 0,$$

we obtain

$$T_k B_0 - B_0 T_k + A_k - B_k + \sum_{l=1}^{k-1}(T_l A_{k-l} - B_{k-l}T_l) + (k-r)T_{k-r} = 0$$

(the last summand equals zero for $k \leqslant r$). There are two sets of unknowns in this system of matrix equations: $A_k = (A_k^{ij})$ and $T_k = (T_k^{ij})$. Requiring all the $A_k$'s to be diagonal and assuming that $A_1, \ldots, A_{k-1}$ and $T_1, \ldots, T_{k-1}$ are already found, one firstly obtains

$$A_k^{ii} = B_k^{ii} - H_k^{ii},$$

where $H_k = \sum_{l=1}^{k-1}(T_l A_{k-l} - B_{k-l}T_l) + (k-r)T_{k-r}$, and then

$$T_k^{ij} = \frac{1}{\alpha_j - \alpha_i}\big(B_k^{ij} - H_k^{ij}\big),\ i \neq j, \qquad T_k^{ii} = 0.$$

Thus one can see that $\Lambda = A_r$ and

$$\widehat{F}(z) = e^{A_{r+1}z + A_{r+2}\frac{z^2}{2} + \cdots}\,T(z), \quad Q(1/z) = -\frac{A_0}{rz^r} - \frac{A_1}{(r-1)z^{r-1}} - \ldots - \frac{A_{r-1}}{z}.$$

Therefore,

$$\lambda_i = A_r^{ii} = B_r^{ii} - H_r^{ii}.$$

This implies the estimate

$$|\lambda_i| \leqslant \|A_r\| \leqslant \|B_r\| + \|H_r\|$$

(we will use, for example, the matrix 1-norm $\|\cdot\|_1$ here).

## 3. On the smallness of the formal exponents

Now we prove the smallness of the formal exponents $\lambda_i$'s in the case of small coefficients $B_1, \dots, B_r$. For this, we should prove the smallness of $H_1, \dots, H_r$. Denoting $\rho = \min_{i \neq j} |\alpha_j - \alpha_i| > 0$ we will have

$$|T_k^{ij}| \leqslant \frac{1}{\rho}\bigl(|B_k^{ij}| + |H_k^{ij}|\bigr).$$

This implies the norm estimate

$$\|T_k\| \leqslant \frac{1}{\rho}\bigl(\|B_k\| + \|H_k\|\bigr),$$

hence

$$\|H_k\| \leqslant \sum_{l=1}^{k-1} \|T_l\|\bigl(\|A_{k-l}\| + \|B_{k-l}\|\bigr) \leqslant \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{\rho}\bigl(\|B_l\| + \|H_l\|\bigr)\bigl(2\|B_{k-l}\| + \|H_{k-l}\|\bigr).$$

Assume that all $\|B_k\| < \varepsilon$, $k = 1, \dots, r$. Then

$$\begin{aligned} \|H_k\| &\leqslant \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{\rho}\bigl(2\varepsilon^2 + \varepsilon\bigl(2\|H_l\| + \|H_{k-l}\|\bigr) + \|H_l\|\,\|H_{k-l}\|\bigr) = \\ &= \frac{1}{\rho}\Bigl(2(k-1)\varepsilon^2 + 3\varepsilon \sum_{l=1}^{k-1} \|H_l\| + \sum_{l=1}^{k-1} \|H_l\|\,\|H_{k-l}\|\Bigr). \end{aligned}$$

Thus having

$$H_1 = 0, \qquad \|H_2\| \leqslant 2\frac{\varepsilon^2}{\rho},$$

one obtains by induction

$$\|H_r\| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\rho}\, P_{r-2}(\varepsilon/\rho) \quad \text{and} \quad |\lambda_i| \leqslant \varepsilon P_{r-1}(\varepsilon/\rho),$$

where $P_{r-2}$ and $P_{r-1}$ are polynomials of degree $r-2$ and $r-1$ respectively. Indeed, if

$$\|H_k\| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\rho}\, P_{k-2}(\varepsilon/\rho) \quad \text{for} \quad k = 2, 3, \dots, r-1$$

(where $P_{k-2}$ is a polynomial of degree $k-2$) then

$$\begin{aligned} \|H_r\| &\leqslant \frac{1}{\rho}\Bigl(2(r-1)\varepsilon^2 + 3\varepsilon \sum_{l=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^2}{\rho}\, P_{l-2}(\varepsilon/\rho) + \sum_{l=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^4}{\rho^2}\, P_{l-2}(\varepsilon/\rho) P_{r-l-2}(\varepsilon/\rho)\Bigr) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\rho}\Bigl(2(r-1) + \sum_{l=1}^{r-1} 3\frac{\varepsilon}{\rho}\, P_{l-2}(\varepsilon/\rho) + \sum_{l=1}^{r-1} \Bigl(\frac{\varepsilon}{\rho}\Bigr)^2 P_{l-2}(\varepsilon/\rho) P_{r-l-2}(\varepsilon/\rho)\Bigr) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\rho}\, P_{r-2}(\varepsilon/\rho). \end{aligned}$$

This leads to the following assertion.

**Proposition 1.** *Consider a (Zariski open) subset $W \subset \mathrm{Mat}(p, \mathbb{C})$ of $p \times p$-matrices having pairwise distinct eigenvalues. For any open disk $D \Subset W$ and any $\varepsilon > 0$, there exists $\delta = \delta(D, \varepsilon) > 0$ such that every system* (1), (2) *with*

$$B_0 \in D, \quad \|B_1\| < \delta, \quad \ldots, \quad \|B_r\| < \delta,$$

*has formal exponents satisfying the condition $|\lambda_i| < \varepsilon$.*

**Remark 1.** Note that if the Poincaré rank $r = 1$, then $|\lambda_i| \leqslant \|B_1\|$ thus one has no necessity to restrict the leading term $B_0$ on some disk $D$ and may take any $B_0 \in W$. There is also no necessity for restricting $B_0$ in the case $B_1 = \ldots = B_r = 0$: then all the formal exponents equal zero.

## 4. Application to solvability by quadratures

Now we consider a system

$$\frac{dy}{dz} = B(z)\, y, \qquad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{3}$$

defined on the whole Riemann sphere $\overline{\mathbb{C}}$. Assume that it has non-resonant irregular singular points $a_1, \ldots, a_n$ of Poincaré rank $r_1, \ldots, r_n$ respectively (for determinance we assume here that the system has no Fuchsian singular points). Then the coefficient matrix $B$ has the form

$$B(z) = \sum_{i=1}^{n} \Big( \frac{B_0^i}{(z - a_i)^{r_i + 1}} + \ldots + \frac{B_{r_i}^i}{z - a_i} \Big), \qquad \sum_{i=1}^{n} B_{r_i}^i = 0 \tag{4}$$

(if $\infty$ is a non-singular point).

One says that a solution $y$ of the system (3) is *Liouvillian* if there is a tower of elementary extensions

$$\mathbb{C}(z) = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_m$$

of the field $\mathbb{C}(z)$ of rational functions such that all components of $y$ belong to $F_m$. Here each $F_{i+1} = F_i\langle x_i \rangle$, where $x_i$ is either an integral or an exponential of integral of some element in $F_i$, or algebraic over $F_i$. The system is said to be solvable in the Liouvillian sense (or, *by quadratures*), if all its solutions are Liouvillian.

The question of the solvability of a linear differential equation or system by quadratures is studied usually by purely algebraic methods, since an answer depends on properties of the differential Galois group of the system. However in some cases, with the use of analytic methods one can leave aside the Galois group and obtain an answer in terms of the coefficients of the system, which essentially simplifies the study. As is explained below, one of such cases is a system with a small coefficient matrix.

For the system (3) whose formal exponents are sufficiently small, the solvability by quadratures is equivalent to the existence of a constant matrix $C \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ such that $CB(z)C^{-1}$ is triangular (see [2]). Thus Proposition 1 leads to the following observation. Let $\mathcal{S}_{r_1,\ldots,r_n}^{a_1,\ldots,a_n}$ be a set of systems (3), (4):

$$\mathcal{S}_{r_1,\ldots,r_n}^{a_1,\ldots,a_n} = \Big\{ (B_0^1, \ldots, B_{r_1}^1), \ldots, (B_0^n, \ldots, B_{r_n}^n) \mid B_0^1, \ldots, B_0^n \in W \Big\}$$

(recall that $W \subset \mathrm{Mat}(p, \mathbb{C})$ is a set of $p \times p$-matrices having pairwise distinct eigenvalues).

**Theorem 1.** *For any open disk $D \Subset W$ there exists $\varepsilon = \varepsilon(D, p, n) > 0$ such that in a subset*

$$\Big\{ (B_0^i, \ldots, B_{r_i}^i)_{i=1}^n \in \mathcal{S}_{r_1,\ldots,r_n}^{a_1,\ldots,a_n} \mid B_0^i \in D, \|B_1^i\| < \varepsilon, \ldots, \|B_{r_i}^i\| < \varepsilon \Big\}$$

*of systems with sufficiently small non-leading coefficients, solvable by quadratures systems are determined by the following algebraic condition: their matrices* $B_0^i, B_1^i, \ldots, B_{r_i}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *are simultaneously reduced to a triangular form.*

This means, roughly speaking, that a system with a sufficiently small coefficient matrix is solvable by quadratures if and only if it is triangular. Thus we have a generalization of the result by Ilyashenko–Khovanskii which claims that a Fuchsian system with sufficiently small residue matrices is solvable by quadratures if and only if it is triangular (see Ch. 6 in [3]).

Taking into consideration Remark 1 we also obtain two evident corollaries.

**Corollary 1** (systems with singular points of Poincaré rank 1). *There exists* $\varepsilon = \varepsilon(p, n) > 0$ *such that in a subset*

$$\left\{(B_0^i, B_1^i)_{i=1}^n \in \mathcal{S}^{a_1, \ldots, a_n}_{1, \ldots, 1} \mid \|B_1^i\| < \varepsilon\right\}$$

*of systems with sufficiently small non-leading coefficients, solvable by quadratures systems are determined by the following algebraic condition: their matrices* $B_0^i, B_1^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *are simultaneously reduced to a triangular form.*

**Corollary 2.** *Non-resonant system* (3) *with the coefficient matrix* $B$ *of the form*

$$B(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_0^i}{(z - a_i)^{r_i+1}}, \qquad r_i > 0,$$

*is solvable by quadratures if and only if all the matrices* $B_0^1, \ldots, B_0^n$ *are simultaneously reduced to a triangular form.*

## 5. Conclusions

Let us note that the result formulated at the end of the previous section, looking like a theoretical one, is not far from to be applied for a practical realization. For example, the required smallness of the formal exponents of the system under consideration is concrete: their absolute value should be not greater than $1/n(p-1)$ (see [2]). The practical calculation of the formal exponents can definitely be implemented, as follows from the formulae for the elements $A_r^{ii}$ from Section 2 (see [4] for more general questions in this context). At last, we guess that the simultaneous triangularizability of a set of matrices is equivalent to the nilpotence of the Lie algebra generated by them, which is also can be checked.

## Acknowledgments

The work is partially supported by RFBR–CNRS grant No 16-51-150005 and by RFBR grant No 17-01-00515.

## References

1. *Wasow W.* Asymptotic expansions for ordinary differential equations. — Wiley, New York–London–Sydney, 1965.
2. *Gontsov R. R., Vyugin I. V.* Solvability of linear differential systems with small exponents in the Liouvillian sense. — Arnold Math. J. — Vol. 1, no. 4 (2015). — P. 445–471.
3. *Khovanskii A. G.* Topological Galois theory: solvability and unsolvability of equations in finite terms. — Springer Monographs Math., 2014.

4. *Barkatou M. A.* An algorithm to compute the exponential part of a formal fundamental matrix solution of a linear differential system. —AAECC — Vol. 8 (1997). — P. 1–23.

УДК 517.927.7

# Малость формальных показателей иррегулярной системы линейных дифференциальных уравнений, с приложением к проблеме разрешимости в квадратурах

**М. Баркату*, Р. Р. Гонцов†‡**

* *Лиможский университет, научно-технический факультет, просп. Альбера Тома, д.123, Лимож, Франция, F-87060*

† *Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Большой Каретный пер., д.19, Москва, Россия, 127051*

‡ *Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт", ул. Красноказарменная, д.14, Москва, Россия, 111250*

Email: moulay.barkatou@unilim.fr,gontsovrr@gmail.com

Доказывается, что формальные показатели системы линейных дифференциальных уравнений с нерезонансными иррегулярными особыми точками, матрица коэффициентов которой мала, также достаточно малы. Из этого следует, что такая система разрешима в квадратурах, если и только если ее матрица коэффициентов приводится к треугольному виду сопряжением на постоянную матрицу. Это обобщает соответствующую теорему Ильяшенко–Хованского для фуксовых систем.

**Ключевые слова:** иррегулярная особая точка, формальные показатели, разрешимость в квадратурах.

УДК 517.925

# Вычисление сложных асимптотических разложений решений ОДУ

**А. Д. Брюно**

* *Сектор сингулярных задач,*
*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН,*
*Миусская пл., д.4, Москва, Россия, 125047*

Email: abruno@keldysh.ru

Рассматриваются сложные асимптотические разложения решений полиномиального обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Они являются такими рядами по целым степеням независимой переменной, коэффициенты которых суть ряды Лорана по убывающим степеням логарифма независимой переменной. Предлагается алгоритм для составления ОДУ для этих коэффициентов. Первый коэффициент является решением укороченного уравнения. Для некоторых уравнений он оказывается полиномом. Возникает вопрос: будут ли следующие коэффициенты полиномами? Здесь этот вопрос рассмотрен для третьего ($P_3$) и шестого ($P_6$) уравнений Пенлеве. Оказалось, что для них во всех случаях второй коэффициент также является полиномом, но третий коэффициент является полиномом либо всегда, либо при определённых условиях на параметры уравнения, либо никогда.

**Ключевые слова:** обыкновенное дифференциальное уравнение, сложное асимптотическое разложение, полиномиальность коэффициентов.

## 1. Введение

В 2004 г. я предложил способ вычисления асимптотических разложений решений полиномиального ОДУ [1]. Он позволял вычислять степенные и степенно-логарифмиче-ские разложения, в которых коэффициенты при степенях независимой переменной $x$ являются либо постоянными, либо многочленами от логарифма. Позже оказалось, что у таких уравнений асимптотические разложения решений могут иметь в качестве коэффициентов при степенях $x$ ряды Лорана либо по убывающим степеням логарифма $x$, либо по мнимым степеням $x$ — соответственно сложные [2] и экзотические [3] разложения. Для их вычисления методы из [1] неудобны. Теперь я разработал метод составления ОДУ для каждого коэффициента такого ряда. Эти уравнения содержат младшие и высшие вариации от определённых частей исходного уравнения. Первый коэффициент сложного разложения является решением укороченного уравнения, и, вообще говоря, является рядом Лорана по логарифмам. Но для некоторых уравнений он оказывается полиномом. Возникает вопрос: *будут ли следующие коэффициенты полиномами?*

Этот вопрос я рассмотрел для двух уравнений Пенлеве $P_3$ и $P_6$. Ибо из шести уравнений Пенлеве $P_1 - P_6$ три имеют сложные разложения решений — это $P_3, P_5$ и $P_6$. Первые коэффициенты этих разложений известны, все являются полиномами [4] и для $P_5$ они такие же, как для $P_3$ и $P_6$ [5, 6]. Оказалось, что во всех случаях уравнений $P_3$ и $P_6$ второй коэффициент также полином, но третий коэффициент является полиномом либо всегда, либо при некоторых условиях на параметры уравнения, либо никогда.

## 2. Составление уравнений для коэффициентов

### 2.1. Алгебраический случай

Пусть задан многочлен

$$f(x, y) \tag{1}$$

и ряд

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \, x^k \,, \tag{2}$$

где коэффициенты $\varphi_k$ являются функциями от каких-то величин. Подставим ряд (2) в многочлен (1) и выделим все слагаемые с фиксированной степенью $x$. Для этого разобьём многочлен (1) в сумму

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{m} f_i(y)\, x^i \,,$$

ряд (2) запишем в виде

$$y = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \, x^k \stackrel{def}{=} \varphi_0 + \Delta \,.$$

Тогда

$$\Delta^j = \sum_{k=j}^{\infty} c_{jk} \, x^k \,,$$

где коэффициенты $c_{jk}$ являются определёнными суммами произведений $j$ коэффициентов $\varphi_l$ и соответствующих мультиномиальных коэффициентов [7]. Наконец, каждое слагаемое $f_i(\varphi_0 + \Delta)$ разложим в ряд Тейлора

$$f_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \, \frac{d^j f_i}{dy^j} \Big|_{y=\varphi_0} \Delta^j \,.$$

В итоге результат подстановки ряда (2) в многочлен (1) можно записать в виде суммы

$$\sum_{i=0}^{m} x^i \left[ f_i(\varphi_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \, \frac{d^j f_i(\varphi_0)}{dy^j} \, \sum_{k=j}^{\infty} c_{jk} \, x^k \right]$$

слагаемых вида

$$x^i \, \frac{1}{j!} \, \frac{d^j f_i(\varphi_0)}{dy^j} \, c_{jk} \, x^k \,. \tag{3}$$

Здесь целые индексы $i, j, k \geqslant 0$ таковы

$$k \geqslant j; \text{ если } j = 0, \text{ то } k = 0 \,. \tag{4}$$

Множество таких точек $(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3$ обозначим $\mathbf{M}$. Наконец, все слагаемые (3) с фиксированной степенью $x^n$ выделяются равенством

$$i + k = n \,.$$

Множество $\mathbf{M}$ полезно представить как часть целочисленной решётки $\mathbb{Z}^3$ в $\mathbb{R}^3$ с точками $(i, j, k)$, которые удовлетворяют неравенствам (4).

Если мы ищем разложение (2) как решение уравнения

$$f(x, y) = 0$$

и хотим применить метод неопределённых коэффициентов, то для коэффициента $\varphi_0$ получаем уравнение $f_0(\varphi_0) = 0$, а для коэффициента $\varphi_n$ с $n > 0$ — уравнение

$$\frac{df_0(\varphi_0)}{dy} \, \varphi_n x^n + \sum_{(i,j,k) \in \mathbf{N}(n)} x^i \, \frac{1}{j!} \, \frac{d^j f_i(\varphi_0)}{dy^j} \, c_{jk} \, x^k + x^n f_n(\varphi_0) = 0 \,, \tag{5}$$

где
$$\mathbf{N}(n) = \mathbf{M} \cap \{j > 0,\ i + k = n \text{ и } j > 1, \text{ если } i = 0\}$$
Может случиться, что некоторые $d^j f_i / dy^j = 0$, включая $f_n$, и некоторые $c_{jk} = 0$. Тогда в (5) соответствующие слагаемые отсутствуют. В этом уравнении мы можем сократить на $x^n$ и получить его в виде
$$\frac{df_0(\varphi_0)}{dy}\,\varphi_n + \sum_{(i,j,k)\in\mathbf{N}(n)} \frac{1}{j!}\,\frac{d^j f_i(\varphi_0)}{dy^j}\,c_{jk} + f_n(\varphi_0) = 0\ . \tag{6}$$

**Теорема 1** *Если $df_0(\varphi_0)/dy \neq 0$, то последовательно по росту $n$ из уравнений* (6) *находятся коэффициенты $\varphi_n$.*

### 2.2. Случай ОДУ

Если $f(x, y)$ — дифференциальный многочлен, т.е. содержит производные $d^l y/dx^l$, то роль производных $\dfrac{d^j f_i}{dy^j}$ играют вариации $\dfrac{\delta^j f_i}{\delta y^j}$, они же производные Фреше/Гато. При этом для многочлена $f(y)$ без производных $j$-тая вариация $\dfrac{\delta^j f}{\delta y^j} = \dfrac{d^j f}{dy^j}$, а вариация производной есть $\dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{d^k y}{dx^k}\right) = \dfrac{d^k}{dx^k}$, для произведений
$$\frac{\delta(f\cdot g)}{\delta y} = f\,\frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta y}\cdot g\ , \quad \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\cdot\frac{d^l}{dx^l}\right) = \frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}}\ .$$
Наконец, для вариаций справедлив аналог формулы Тейлора
$$f(y+\Delta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\,\frac{\delta^j f(y)}{\delta y^j}\,\Delta^j\ .$$

Пусть теперь задан дифференциальный многочлен $f(x, y)$ и для уравнения $f = 0$ ищется решение в виде разложения
$$y = \sum \varphi_k x^k\ .$$
Здесь применима техника, описанная ранее для алгебраического уравнения, но со следующими уточнениями.

1) Дифференциальный многочлен $f(x, y)$ является суммой дифференциальных мономов $a(x, y)$, которые являются произведениями обычного монома $\mathrm{const}\cdot x^r y^s$ и нескольких производных $d^l y/dx^l$. Каждому моному $a(x, y)$ ставится в соответствие его векторный показатель степени $Q(a) = (q_1, q_2)$ по следующим правилам
$$Q(\mathrm{const}) = 0,\ Q(x^r y^s) = (r, s),\ Q(d^l y/dx^l) = (-l, 1)\,,$$
для произведения дифференциальных мономов их векторные показатели степени складываются как векторы
$$Q(ab) = Q(a) + Q(b)\ .$$
Теперь в часть $f_i(x, y)$ собираем все дифференциальные мономы $a(x, y)$, у которых в $Q(a)$ первая координата $q_1 = i$. Кроме того, предполагаем, что в $f(x, y)$ нет

мономов с $q_1 < 0$, и $f_0(y) \not\equiv 0$. Тогда справедливы формулы алгебраического случая с заменой производных вариациями.

2) Вариации — это операторы, которые не переставляются с дифференциальными многочленами. Поэтому формула (5) принимает вид

$$\frac{\delta f_0}{\delta y}\, x^n \varphi_n + \sum_{(i,j,k)\in \mathbf{N}(n)} x^i \frac{1}{j!}\, \frac{\delta^j f_i}{\delta y^j}\, x^k c_{jk} + x^n f_n = 0\ , \tag{7}$$

но в ней нельзя сократить на $x^n$ и получить аналог формулы (6). В формуле (7) все $\delta^j f_i / \delta y^j$ берутся при $y = \varphi_0$.

**Теорема 2** *В разложении* (2) *коэффициент* $\varphi_n$ *удовлетворяет уравнению* (7).

3) В зависимости от класса функций коэффициентов $\varphi_k$ имеются соответствующие формулы перестановки функций этого класса с вариациями. Например, если $\varphi_k$ суть ряды по $\ln x$, то положим $\xi = \ln x$, тогда $x^s = e^{s\xi}$ и справедлива

**Лемма 1 ( [4])**

$$\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{s\xi}\varphi(\xi)) = e^{s\xi}\sum_{k=0}^{n} C_n^k s^{n-k}\varphi^{(k)}(\xi),$$

*где* $C_n^k$ *— биномиальный коэффициент и* $\varphi^{(k)}(\xi)$ *—* $k$*-я производная* $\varphi(\xi)$ *по* $\xi$.

Эта лемма даёт правило перестановки оператора и степени $x^s$. Применяя его в уравнении (7), можно сократить уравнение на $x^n$ и получить уравнение без $x$, только с $\xi$.

В целом алгоритм вычисления коэффициентов сложного разложения решения ОДУ состоит из следующих шагов.

**Шаг 0.** Из исходного уравнения $f(x, y) = 0$ выделяем укороченное уравнение $\hat{f}_1^{(1)}(x, y) = 0$, соответствующее некоторому ребру $\Gamma_1^{(1)}$ многоугольника $\Gamma$ дифференциальной суммы $f(x, y)$ и имеющее сложное решение, зависящее от $\ln x$.

**Шаг 1.** Делаем степенное преобразование переменных $x, y \to x, z$, переводящее ребро $\Gamma_1^{(1)}$ в вертикальное.

**Шаг 2.** Записываем преобразованное полное уравнение $g(x, z) \overset{def}{=} f(x, y) = 0$ в виде суммы $g = \sum x^i g_i(x, z)$, где носители сумм $g_i(x, z)$ лежат на вертикальной оси.

**Шаг 3.** В частях $g_i(x, z)$ заменяем независимую переменную $x$ на $\xi = \ln x$, получаем $h_i(\xi, z) \overset{def}{=} g_i(x, z)$ и у уравнения $h_0(\xi, z) = 0$ находим все решения $z(\xi)$, являющиеся степенными рядами.

**Шаг 4.** Согласно теореме 2 выписываем уравнения для нескольких первых коэффициентов $\varphi_k(\xi)$ искомого сложного разложения $z = \sum \varphi_k x^k$.

**Шаг 5.** Используя лемму 1, из этих уравнений исключаем степени $x$ и получаем линейные ОДУ для коэффициентов $\varphi_k(\xi)$. Решения $\varphi_k(\xi)$ этих уравнений являются степенными рядами от $\xi$ и могут быть вычислены методами статьи [1].

## 3. Результаты для уравнений $P_3$ и $P_6$

Уравнение Пенлеве $P_3$, записанное в виде дифференциальной суммы, есть

$$f(x, y) \overset{def}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + ay^3 + by + cxy^4 + dx = 0,$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — комплексные параметры. Нужное его укорочение после соответствующих преобразований перейдёт в уравнение

$$-z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz + d = 0.$$

У него имеется два семейства сложных разложений решений — основное и дополнительное, у которых первый коэффициент $\varphi_0$ является полиномом от $\xi = \ln x$:

$$\varphi_0(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{b}{2}(\xi + \tilde{c})^2 - \dfrac{d}{2b} & \text{у основного семейства, } b \neq 0, \\ \pm\sqrt{-d}\,(\xi + \tilde{c}) & \text{у дополнительного семейства, } b = 0; \end{cases}$$

Уравнение Пенлеве $P_6$, записанное в виде дифференциальной суммы, есть

$$\begin{gathered} f(x,y) \overset{def}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[\, x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + \\ + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)\,] + \\ + 2y'[\, x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + \\ + x^2(x-1)^2y(y-1)\,] - \\ - [\, 2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2 + \\ + 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2\,] = 0. \end{gathered}$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — комплексные параметры. Нужное его укорочение после соответствующих преобразований перейдёт в уравнение

$$-2\ddot{y}y(y-1) + \dot{y}^2(2y-1) - 2b(y-1)^2 - 2cy^2 = 0$$

У него имеется два семейства сложных разложений решений — основное и дополнительное, у которых первый коэффициент $\varphi_0$ является полиномом от $\xi = \ln x$:

$$\varphi_0(\xi) = \begin{cases} \dfrac{b+c}{2}(\xi + \tilde{c})^2 + \dfrac{b}{b+c} & \text{у основного семейства, } b + c \neq 0, \\ \pm\sqrt{-2b}(\xi + \tilde{c}) & \text{у дополнительного семейства, } b + c = 0, \end{cases}$$

Здесь $\tilde{c}$ — произвольная постоянная. Оказалось, что у всех четырёх этих семейств вторые коэффициенты — также полиномы.

**Гипотеза 1** *У основного семейства уравнения $P_3$ все коэффициенты являются полиномами, если параметр уравнения $d = 0$.*

**Теорема 3** *У дополнительного семейства уравнения $P_3$ третий и четвёртый коэффициенты являются многочленами, только если параметр уравнения $a = 0$. Пятый коэффициент никогда не является многочленом, если $|a| + |c| \neq 0$.*

**Теорема 4** *У основного семейства уравнения $P_6$, если параметр уравнения $b = 0$, то третий коэффициент может быть многочленом только при трёх определённых значениях остальных параметров уравнения.*

**Теорема 5** *У дополнительного семейства уравнения $P_6$ третий коэффициент может быть многочленом, только если параметры уравнения удовлетворяют определённому алгебраическому уравнению.*

Подробнее см. в [8].

### Литература

1. А. Д. Брюно, Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.
2. А. Д. Брюно, Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2006, Т. 406, № 6, с. 730–733.
3. А. Д. Брюно, Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2007, Т. 416, № 5, с. 583–587.
4. А. Д. Брюно, О сложных разложениях решений ОДУ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2011, № 15.
5. А. Д. Брюно, А. В. Парусникова, Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН, 2011, Т. 438, № 4, с. 439–443.
6. А. Д. Брюно, И. В. Горючкина, Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды Московского матем. общества, 2010, Т. 71, с. 6–118.
7. Hazewinkel, Michiel, ed. (2001), "Multinomial coefficient" (http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=p/m065320), *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4
8. А. Д. Брюно, Вычисление сложных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, № 55. 27 с. doi:10.20948/prepr-2017-55

UDC 517.925

# Calculation of complicated asymptotic expansions of solutions to the ODE

**A. D. Bruno**

* *Department of Singular Problems*
*Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS*
*Miusskaya sq. 4, Moscow, 125047, Russia*

Email: abruno@keldysh.ru

We consider the complicated asymptotic expansions of solutions to a polynomial ordinary differential equation (ODE). They are such series on integral powers of the independent variable, which coefficients are the Laurent series on decreasing powers of the logarithm of the independent variable. We propose an algorithm for writing ODEs for these coefficients. The first coefficient is a solution of a truncated equation. For some initial equations, it is a polynomial. Question: will the following coefficients be polynomials? Here the question is considered for the third ($P_3$) and sixth ($P_6$) Painlevé equations. It appears that for them the second coefficients are polynomials in all cases, but the third coefficient is a polynomial ether always, either under some restriction on parameters, or never.

**Key words and phrases:** ordinary differential equation, complicated asymptotic expansion, polynomiality of coefficients.

UDC 519.6+004.93

# Computer algebra in photometric stereo with two light sources

**R. Kozera*†, A. N. Prokopenya***

* *Faculty of Applied Informatics and Mathematics*
*Warsaw University of Life Sciences – SGGW*
*Nowoursynowska str. 159, 02-776 Warsaw, Poland*

† *School of Computer Science and Software Engineering*
*The University of Western Australia*
*35 Stirling Highway, WA 6009, Crawley, Perth, Australia*

Email: `ryszard.kozera@gmail.com`, `alexander_prokopenya@sggw.pl`

We discuss here the basic computational problems arising in recovering a shape of the unknown Lambertian surface from two its photometric images taken consecutively under lighting the surface by a pair distant light sources from two different directions. Using the computer algebra system Mathematica, the necessary and sufficient conditions for unique determination of the second-order algebraic surface from its two images are analyzed in a general setting. Theoretical results are illustrated by examples exploiting models of the photometric images of a genuine second-order Lambertian surface. Symbolic computation performed with Mathematica confirms the possibility of a unique reconstruction of such surfaces from their two photometric images and demonstrate that the considered model has more than one solution only in rare cases.

**Key words and phrases:** computer algebra, photometric stereo, surface reconstruction, existence and uniqueness of solution, bifurcations.

## 1. Introduction

Let us consider a surface $S$ in the three-dimensional space that is assumed to be formed as a graph $S = graph(u)$ of the unknown function $u : \Omega \to R$ of class $C^k$ $(k = 1, 2)$ over a domain $\Omega \subset R^2$. The surface is illuminated by a parallel beam of light from a remote light source that is placed in the direction of the unit vector $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\|\vec{p}\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = 1$, $p_3 < 0$. A photometric image of the surface $S$ may be represented as the function $E_p(x, y)$ defined over a domain $\Omega_p = \{(x, y) \in \Omega : 0 \leq E_p(x, y) \leq 1\}$ giving information about the intensity of light reflected from the point $s = (x, y, u(x, y)) \in S$. If $S$ is a Lambertian surface yielding a reasonable approximation for some materials, the function $E_p(x, y)$ depends only on the cosine of the angle between the normal vector $\vec{n}(s) = (n_1, n_2, n_3)$ to $S$ at the point $s$ (with $n_3 < 0$) and the direction to the light source (see [1,2]). Hence, the intensity $E_p$ is given by

$$E_p(x, y) = \frac{\langle \vec{n} | \vec{p} \rangle}{\|\vec{n}\|} \equiv \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3}{\|\vec{n}\|} \ , \tag{1}$$

where $\langle \vec{n} | \vec{p} \rangle$ denotes the standard dot-product of vectors $\vec{n}$, $\vec{p}$ in $R^3$. As the normal vector to $S$ at point $s$ is given by $\vec{n}(s) = (u_x, u_y, -1)$, where $u_x(x, y) = \partial u/\partial x$, $u_y(x, y) = \partial u/\partial y$, one can write equation (1) in the form

$$E_p(x, y) = \frac{p_1 u_x + p_2 u_y - p_3}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} \ . \tag{2}$$

Consequently, the reconstruction of the surface $S$ is reduced to finding the solution to equation (2) for the given photometric image $E_p(x, y)$ and the unit vector $\vec{p}$.

Note that given the surface $S = graph(u)$ and vector $\vec{p}$ equation (2) enables to find the photometric image $E_p(x, y)$ easily, and this problem has a unique solution. However, a question on existence and uniqueness of solution $u(x, y)$ to (2), corresponding to the given photometric image $E_p(x, y)$, is rather complicated. Careful analysis showed that uniqueness is rather exceptional and that existence is subject to many constrains (see [3–10]).

Using three images $E_p(x, y)$, $E_q(x, y)$, $E_r(x, y)$ obtained by illuminating the surface $S$ from three different directions specified by linearly independent unit vectors $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, respectively, enables to pose the system

$$\frac{p_1 u_x + p_2 u_y - p_3}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} = E_p(x, y) \ ,$$

$$\frac{q_1 u_x + q_2 u_y - q_3}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} = E_q(x, y) \ ,$$

$$\frac{r_1 u_x + r_2 u_y - r_3}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} = E_r(x, y) \ . \tag{3}$$

Performing quite standard symbolic calculations, one can reduce the system (3) to the form

$$u_x = F_1(x, y) \ ,$$

$$u_y = F_2(x, y) \ , \tag{4}$$

where $F_1$ and $F_2$ are explicitly expressible in terms of $E_p, E_q, E_r$ and $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$. In sequel integrating the gradient (4) gives a generically unique expression for $u(x, y)$ up to an arbitrary constant (see [1, 3, 11, 12]).

The surface can also be reconstructed from only two photometric images (see [3,13–16]. However, this requires quite intricate analysis of necessary and sufficient conditions for the unique determination of the function $u(x, y)$, and such analysis involves quite tedious symbolic calculations. In the present paper we discuss the basic computational problems arising in recovering a shape of the unknown Lambertian surface from two its photometric images considering the second-order algebraic surface as an example. All relevant symbolic calculations are performed with the computer algebra system Mathematica [17].

## 2. Two-image photometric stereo

Consider two photometric images $E_p(x, y)$ and $E_q(x, y)$ of the Lambertian surface $S$ obtained by illuminating it from two different directions specified by non-collinear unit vectors $\vec{p}$ and $\vec{q}$, respectively. The images are defined over the domains $\Omega_p \subset R^2$, $\Omega_q \subset R^2$ and $\Omega = \Omega_p \cap \Omega_q \neq \emptyset$. Upon applying equation (2) for each photometric image, we obtain a system

$$\frac{p_1 u_x + p_2 u_y - p_3}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} = E_p(x, y) \ ,$$

$$\frac{q_1 u_x + q_2 u_y - q_3}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} = E_q(x, y) \ , \tag{5}$$

over $\Omega$.

As demonstrated in [3, 13, 14], the solution of system (5) is reduced to solving a quadratic equation for $u_x$ or $u_y$ and the corresponding gradient of unknown function $u(x, y)$ may be represented in the form

$$u_x = \frac{E_p(q_1 \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle - p_1) + E_q(p_1 \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle - q_1) + a\varepsilon\sqrt{\Lambda}}{E_p(p_3 - q_3 \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle) + E_q(q_3 - p_3 \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle) + b\varepsilon\sqrt{\Lambda}} \ ,$$

$$u_y = \frac{E_p(q_2\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle - p_2) + E_q(p_2\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle - q_2) + c\varepsilon\sqrt{\Lambda}}{E_p(p_3 - q_3\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle) + E_q(q_3 - p_3\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle) + b\varepsilon\sqrt{\Lambda}}\ , \tag{6}$$

where $\varepsilon(x,y)$ takes the values $\pm 1$ so that $f(x,y) = \varepsilon(x,y)\sqrt{\Lambda(x,y)}$ is continuous (for $u \in C^1$) or smooth (for $u \in C^2$), and the following notation is used:

$$\Lambda = 1 - E_p^2 - E_q^2 - \langle\vec{p}|\vec{q}\rangle(\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle - 2E_pE_q)\ , \tag{7}$$

$$a = p_3q_2 - p_2q_3,\ b = p_1q_2 - p_2q_1,\ c = p_1q_3 - p_3q_1\ .$$

Using solution (6), one can readily show that the normalized by 1 vector $\vec{n}(s)$ may be represented in the form

$$\vec{n}(s) = \frac{(u_x, u_y, -1)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}} = \frac{E_p\,(\vec{p} - \langle\vec{p}|\vec{q}\rangle\vec{q}) + E_q\,(\vec{q} - \langle\vec{p}|\vec{q}\rangle\vec{p}) + \varepsilon\,(\vec{p}\times\vec{q})\sqrt{\Lambda}}{1 - (\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle)^2}\ . \tag{8}$$

Therefore, expression (7) for $\Lambda$ may be rewritten as

$$\Lambda = (\langle\vec{n}|\vec{p}\times\vec{q}\rangle)^2\ . \tag{9}$$

It follows immediately from (6), (9) that the gradient $(u_x, u_y)$ is determined uniquely only if $\Lambda = 0$ which geometrically means that the normal $\vec{n}$ to the surface $S$ at the point $s$ lies in the plane spanned by two non-collinear vectors $\vec{p}$ and $\vec{q}$. In general the normal (8) has also the component $\vec{n}_o$ that is orthogonal to this plane and there are two possible directions for this vector corresponding to the given photometric images $E_p$ and $E_q$. It is a reason of appearance of the factor $\varepsilon = \pm 1$ in (6).

If the chosen value of $\varepsilon(x,y)$ coincides with the sign of the dot-product $\langle\vec{n}|\vec{p}\times\vec{q}\rangle$ then equation (6) gives correct expression for the gradient $(u_x, u_y)$. Otherwise a gradient given by (6) corresponds to the mirror reflection of the normal $\vec{n}$ at point $s$ with respect to the plane spanned by the vectors $\vec{p}$ and $\vec{q}$ (see [3, 13, 16]).

It turns out (see [3, 13]) that the image domain $\Omega$ is typically split into two disjoint simply connected sub-domains $\Omega^{(j)} \subset \Omega$ (here $j = 1, 2$) so that $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \cup \Gamma$, where $\Gamma$ is a smooth connected curve (called a potential *bifurcation curve*), and $\Lambda \equiv 0$ along $\Gamma$. It follows from (9) that $\Lambda > 0$ over each sub-domain $\Omega^{(j)}$. Consequently, over each component $\Omega^{(j)}$ either $\varepsilon(x,y) \equiv 1$ or $\varepsilon(x,y) \equiv -1$ must hold, and solution (6) determines two vector fields $(u_x^{\pm}, u_y^{\pm})$ corresponding to the images $E_p$ and $E_q$. Assuming $E_p$ and $E_q$ are genuine images of $S$, at least one of these two pairs of vector fields (over each $\Omega^{(j)}$) is integrable and determines the given surface $S$.

However, if the function $u(x,y)$ satisfies the following partial differential equation (see [13, 15, 16])

$$\begin{gathered} a\,(bu_y(x,y) - c)\,u_{xx}(x,y) + c\,(a - bu_x(x,y))\,u_{yy}(x,y) + \\ \left(a^2 - c^2 - abu_x(x,y) + bcu_y(x,y)\right) u_{xy}(x,y) = 0\ , \end{gathered} \tag{10}$$

both of the vector fields $(u_x^{\pm}, u_y^{\pm})$ are integrable (i.e., there are two $C^2$ surfaces over each sub-domain $\Omega^{(j)}$). Furthermore both pairs $(u_x^{+}, u_y^{+})$ and $(u_x^{-}, u_y^{-})$, determined by (6) over $\Omega^{(j)}$ $(j = 1, 2)$, can bifurcate (i.e., can be glued together) along the curve $\Gamma$ to yield either zero or two or four global solutions $u \in C^2$ over the whole image $\Omega$ (see [3, 13]).

A general solution to non-linear equation (10) for arbitrary vectors $\vec{p}$ and $\vec{q}$ is not known and so it is not possible to separate a class of functions $u(x,y)$ for which equations (6) determine more than one integrable vector field. However, choosing some special configuration of light-source directions enables to reduce this equation into a tractable linear PDE and to exclude the ambiguous case of two integrable vector fields (see [3, 13–16]). The main purpose of this paper is to extend the necessary and sufficient condition (10) for testing ambiguity in equation (6) to arbitrary pairs of non-collinear vectors $\vec{p}$ and $\vec{q}$ in case of the second-order Lambertian surface $S$.

## 3. Reconstruction of the second-order surface

Let us consider an arbitrary second-order algebraic surface $S = graph(u)$ given by

$$u(x,y) = u_{20}x^2 + u_{11}xy + u_{02}y^2 + u_{10}x + u_{01}y \ , \tag{11}$$

where $u_{ij}$ are constants. Depending on the value of the discriminant $D = u_{11}^2 - 4u_{20}u_{02}$, equation (11) determines elliptic paraboloid ($D > 0$), parabolic cylinder ($D = 0$) or hyperbolic paraboloid ($D < 0$).

Two photometric images (5) of such surface are given by

$$E_p(x,y) = \frac{(2u_{20}x + u_{11}y + u_{10})p_1 + (u_{11}x + 2u_{02}y + u_{01})p_2 - p_3}{\sqrt{1 + (2u_{20}x + u_{11}y + u_{10})^2 + (u_{11}x + 2u_{02}y + u_{01})^2}} \ ,$$

$$E_q(x,y) = \frac{(2u_{20}x + u_{11}y + u_{10})q_1 + (u_{11}x + 2u_{02}y + u_{01})q_2 - q_3}{\sqrt{1 + (2u_{20}x + u_{11}y + u_{10})^2 + (u_{11}x + 2u_{02}y + u_{01})^2}} \ , \tag{12}$$

and are defined over the domain $\Omega = \Omega_p \cap \Omega_q$, where

$$\Omega_p = \{(x,y) \in R^2 : (2u_{20}p_1 + u_{11}p_2)x + (u_{11}p_1 + 2u_{02}p_2)y + u_{10}p_1 + u_{01}p_2 - p_3 \geq 0\} \ ,$$

$$\Omega_q = \{(x,y) \in R^2 : (2u_{20}q_1 + u_{11}q_2)x + (u_{11}q_1 + 2u_{02}q_2)y + u_{10}q_1 + u_{01}q_2 - q_3 \geq 0\} \ .$$

This domain may be split into two disjoint sub-domains $\Omega^{(j)}$ by the straight line

$$(2u_{20}a + u_{11}c)x + (u_{11}a + 2u_{02}c)y + u_{10}a + u_{01}c + b = 0 \ , \tag{13}$$

which is obtained from the condition $\Lambda = 0$.

For the photometric images (12) equations (6) determine two integrable vector fields over each $\Omega^{(j)}$ only if the condition (10) is fulfilled. Upon substituting the function (11) into (10) this condition takes the form

$$b(u_{11}^2 - 4u_{20}u_{02})(cx - ay) + (a^2 - c^2 - abu_{10} + bcu_{01})u_{11} +$$
$$2ac(u_{02} - u_{20}) + 2b(au_{20}u_{01} - cu_{02}u_{10}) = 0 \ . \tag{14}$$

Obviously, condition (14) is satisfied identically in $\Omega$ for any coefficients $u_{ij}$ if $a = c = 0$ what means that both vectors $\vec{p}$ and $\vec{q}$ are perpendicular to the axis $Oz$ ($p_3 = q_3 = 0$). For such cases the problem of reconstructing the second-order Lambertian surface from two photometric images obtained by illuminating the surface by two light sources from two different directions being perpendicular to the $Oz$ axis has more than one solutions.

If $a \neq 0$ and $b \neq 0$ or $c \neq 0$ and $b \neq 0$ then condition (14) may be satisfied at an arbitrary point $(x,y) \in \Omega$ only when $S$ is a parabolic cylinder or $D = u_{11}^2 - 4u_{20}u_{02} = 0$. Besides, coefficients $u_{20}, u_{02}, u_{10}, u_{01}$ must satisfy the following condition:

$$(a^2 - c^2 - abu_{10} + bcu_{01})u_{11} + 2ac(u_{02} - u_{20}) + 2b(au_{20}u_{01} - cu_{02}u_{10}) = 0 \ .$$

It means that condition (14) is satisfied only if the parabolic cylinder is situated in a special way with respect to the vector $(\vec{p} \times \vec{q})$ and only in a such rare case the problem of reconstructing the second-order Lambertian surface from two photometric images has more than one solution, detailed analysis of such cases will be done in our next paper.

### 3.1. Examples

At first let us consider the surface $S = graph(u)$ of the form

$$u(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2 + 4x \ , \tag{15}$$

and two non-collinear unit vectors $\vec{p}$ and $\vec{q}$ are given by

$$\vec{p} = \left( -\frac{1}{13}, -\frac{2\sqrt{42}}{130}, -\frac{6\sqrt{462}}{130} \right) \ , \quad \vec{q} = \left( \frac{1}{13}, -\frac{2\sqrt{42}}{130}, -\frac{6\sqrt{462}}{130} \right) \ . \tag{16}$$

Upon substituting (15), (16) into (5) we obtain two photometric images

$$E_p(x, y) = \frac{-20 + 3\sqrt{462} + (-20 + 3\sqrt{42})x - 5(-3 + 2\sqrt{42})y}{65\sqrt{17 + 25x^2 + x(32 - 84y) - 24y + 109y^3}} \ ,$$

$$E_q(x, y) = \frac{20 + 3\sqrt{462} + (20 + 3\sqrt{42})x - 5(3 + 2\sqrt{42})y}{65\sqrt{17 + 25x^2 + x(32 - 84y) - 24y + 109y^3}} \ , \tag{17}$$

defined over the domain

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in R^2 : x \le \frac{9\sqrt{11} - 40}{31}, y \le \frac{20 + 3\sqrt{462} + (20 + 3\sqrt{42})x}{15 + 10\sqrt{42}} \bigcup \right.$$

$$\left. x > \frac{9\sqrt{11} - 40}{31}, y \le \frac{-20 + 3\sqrt{462} + (-20 + 3\sqrt{42})x}{15 + 10\sqrt{42}} \right\} \ .$$

This domain is split into two disjoint sub-domains by the line

$$y = \frac{99x - \sqrt{11}}{330} \ ,$$

that is found from the condition $\Lambda = 0$.

Then equations (6) determine two vector fields

$$u_x^+ = 4x - 3y + 4 \ , \quad u_y^+ = 5 - 3x \ ,$$

$$u_x^- = \frac{50(4 + 4x - 3y)}{49 + 9\sqrt{11}x - 30\sqrt{11}y} \ , \quad u_y^- = \frac{-3\sqrt{11} + 147x - 490y}{49 + 9\sqrt{11}x - 30\sqrt{11}y} \ ,$$

corresponding to the images (17) but only the first one satisfies the integrability condition $u_{xy}^+ = u_{yx}^+$. This result is expectable because the function (15) does not satisfy the condition (13).

Let us now consider another Lambertian surface $S$ using the same vectors $\vec{p}$ and $\vec{q}$ given by (16). Then two its photometric images are

$$E_p(x, y) = \frac{-15\sqrt{2} + 6\sqrt{231} - 20\sqrt{2}x}{130\sqrt{5 + 12x + 8x^2}} \ , E_q(x, y) = \frac{15\sqrt{2} + 6\sqrt{231} + 20\sqrt{2}x}{130\sqrt{5 + 12x + 8x^2}} \ , \tag{18}$$

and are defined over the domain

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in R^2 : -\frac{15\sqrt{2} + 6\sqrt{23}}{20\sqrt{2}} \le x \le -\frac{15\sqrt{2} - 6\sqrt{23}}{20\sqrt{2}} \right\} \ .$$

Note that $\Lambda > 0$ for any $(x, y) \in \Omega$.

Equations (6) determine two vector fields

$$u_x^+ = 4x + 3 \ , \quad u_y^+ = 0 \ ,$$

$$u_x^- = \frac{50}{49}(3 + 4x) \ , \quad u_y^- = -\frac{3\sqrt{11}}{49} \ ,$$

corresponding to the images (18), and both of them are integrable in $\Omega$. It means that there are two surfaces

$$u_1(x, y) = 2x^2 + 3x \ , \quad u_2(x, y) = \frac{50}{49}(3x + 2x^2) - \frac{3\sqrt{11}}{49}y \ ,$$

generating the same photometric images and the problem of reconstruction of the surface $S$ from the images (18) has two solutions. Note that both these surfaces are parabolic cylinders.

## 4. Conclusions

This paper extends analysis [3,13,15,16] of the necessary and sufficient condition (10) for testing ambiguity in equation (6) to arbitrary pairs of non-collinear vectors $\vec{p}$ and $\vec{q}$ determining directions to the light sources in case of the second-order Lambertian surface $S$. Doing necessary symbolic calculations, we have shown that in most cases two photometric images enable to reconstruct uniquely such a surface.

## References


1. *Horn B. K. P.* Robot Vision. — Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 2001.
2. *Horn B. K. P., Brooks M. J.* Shape from Shading. — Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 1989.
3. *Kozera R.* Existence and uniqueness in photometric stereo // Applied Mathematics and Computation, 1991. — Vol. 41(1). — P. 1–104.
4. *Deift P., Sylvester J.* Some remarks on shape-from-shading in computer vision. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1991. — V. 1(84). — P. 235–248.
5. *Oliensis J.* Uniqueness in shape from shading // International Journal of Computer Vision, 1991. — Vol. 6(2). — P. 75–104.
6. *Brooks M. J., Chojnacki W., Kozera R.* Shading without shape // Quarterly of Applied Mathematics, 1992. — Vol. 50(1). — P. 27–38.
7. *Kozera R.* Uniqueness in shape from shading revisited // International Journal of Mathematical Imaging and Vision, 1997. — Vol. 7. — P. 123–138.
8. *Kozera R.* On complete integrals and uniqueness in shape from shading // Applied Mathematics and Computation, 1995. — Vol. 73(1). — P. 1–37.
9. *Bruss A. R.* The Eikonal equation: some results applicable to computer vision. Journal of Mathematical Physics, 1982. — Vol. 5(23). — P. 890–896.
10. *Kimmel R., Bruckstein A. M.* Tracking level sets by level sets: a method of solving the shape from shading problem. Computer Vision, Graphics and Image Understanding, 1995. — Vol. 62. — P. 47–58.
11. *Woodham R. J.*. Photometric stereo: a reflectance map technique for determining surface orientation from multiple images. Optical Engineering, 1980. — Vol. 19(1). — P. 139–144.
12. *Noakes L., Kozera R.* Non-linearities and noise reduction in 3-source photometric stereo. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2003. — Vol. 18(2). — P. 119–127.

13. *Kozera R.* On shape recovery from two shading patterns. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1992. — Vol. 6(4). — P. 673–698.
14. *Onn R., Bruckstein A. M.* Integrability disambiguates surface recovery in two-image photometric stereo. International Journal of Computer Vision, 1990. — Vol. 5(1). — P. 105–113.
15. *Kozera R., Prokopenya A.* Orthogonal illuminations in two light-source photometric stereo // Computer Information System and Industrial Management / CISIM'2016, Saeed K., Homenda W., Eds., LNCS, vol. 9842. — Berlin, Springer-Verlag, 2016. — P. 402–415.
16. *Kozera R., Prokopenya A.* Application of computer algebra for the reconstruction of surfaces from their photometric stereo images // Programming and Computer Software, 2017. — Vol. 43(2). — P. 98–104.
17. *Wolfram S.* The Mathematica Book. 5th ed. — Wolfram Media/Cambridge University Press, 2003.

УДК 519.6+004.93

# Компьютерная алгебра в фотометрическом стерео с двумя источниками света

**Р. Козера[*†], А. Н. Прокопеня[*]**

[*] *Факультет прикладной информатики и математики,*
*Варшавский университет естественных наук – SGGW,*
*ул. Новоурсыновская, 159, 02-776 Варшава, Польша*
[†] *School of Computer Science and Software Engineering*
*The University of Western Australia*
*35 Stirling Highway, WA 6009, Crawley, Perth, Australia*

Email: ryszard.kozera@gmail.com, alexander_prokopenya@sggw.pl

Обсуждаются основные вычислительные проблемы, возникающие при реконструкции неизвестной ламбертовской поверхности по двум ее фотометрическим изображениям, полученным при освещении поверхности последовательно двумя независимыми удаленными источниками света из двух различных направлений. С помощью системы компьютерной алгебры Mathematica проанализированы необходимые и достаточные условия однозначного определения алгебраической поверхности второго порядка в общем случае. Для иллюстрации полученных теоретических результатов приводятся два примера, в которых моделируются фотометрические образы реалистичных ламбертовских поверхностей второго порядка. Символьные вычисления, выполненные с помощью системы Mathematica, подтверждают возможность однозначной реконструкции таких поверхностей по двум фотометрическим изображениям и показывают, что только в редких случаях рассматриваемая модель имеет более одного решения.

**Ключевые слова:** компьютерная алгебра, фотометрическое стерео, реконструкция поверхности, существование и единственность решения, бифуркации.

UDC 519.7

# Boolean functions and symbolic computation

**M. Petkovšek**[*†], **L. Vukšić**[*]

[*] *Faculty of Mathematics and Physics*
*University of Ljubljana*
*Jadranska 19, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*
[†] *Institute of Mathematics, Physics and Mechanics*
*Jadranska 19, SI-1000 Ljubljana, Slovenia*

Email: marko.petkovsek@fmf.uni-lj.si,lara.vuksic@student.fmf.uni-lj.si

We consider symbolic computation in $P_2$, the algebra of Boolean functions with Mal'cev operations. Questions such as whether a set of functions generates $P_2$, or if a given function can be generated by a given basis, can be answered using Post's results on the structure of the lattice of subalgebras of $P_2$. We present a short proof of Post's Functional Completeness Theorem, and some *Mathematica* implementations of the corresponding procedures.

**Key words and phrases:** Boolean functions, Zhegalkin polynomials, Mal'cev operations, closure operations, Post's Functional Completeness Theorem, Post's lattice.

## 1. Introduction

Let $\mathbb{B}$ be the set of truth values in two-valued logic. In this paper, we will identify it with the finite field $\mathrm{GF}(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, ordered so that $0 < 1$. A mapping $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ where $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ is called a *Boolean function* or a *truth function of two-valued logic*. We will denote the set of all Boolean functions of $n$ variables by

$$P_2^n \quad = \quad (\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}),$$

and the set of all Boolean functions by

$$P_2 \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} P_2^n.$$

From $|\mathbb{B}| = 2$ it follows that $|\mathbb{B}^n| = 2^n$ and $|P_2^n| = 2^{2^n}$. Our notation for some well-known Boolean functions of one resp. two variables (denoted by $x$, $y$ instead of $x_1$, $x_2$) is shown in Tables 1 resp. 2.

Table 1

Prefix notation for negation.

| $x$ | $\neg x$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Furthermore, for every $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{B}$ and $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, we denote the constant function of value $a$ by $c_a^n$, and the projection on $i$-th component by $e_i^n$:

$$\begin{aligned} c_a^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a, \\ e_i^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_i. \end{aligned}$$

When $n$ is not important we also write $a$ for $c_a^n$, and $x_i$ for $e_i^n$.

For arbitrary $f \in P_2^n$ and $g \in P_2^m$, academician Anatoly I. Mal'cev [3] defined the following five operations (four unary and one binary), now called *Mal'cev operations*:

1. $(\zeta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, ..., x_n, x_1)$ for $n \geq 2$, $\zeta f = f$ for $n = 1$,
2. $(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$ for $n \geq 2$, $\tau f = f$ for $n = 1$,
3. $(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ for $n \geq 2$, $\Delta f = f$ for $n = 1$,
4. $(\nabla f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$ for $n \geq 1$,
5. $(f \star g)(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$ for $n, m \geq 1$.

Note that $\zeta$ is a cyclic permutation of variables and $\tau$ is a transposition of variables, which together allow arbitrary permutations of variables; $\Delta$ together with $\zeta$ and $\tau$ allows identification of arbitrary variables; $\nabla$ together with $\zeta$ and $\tau$ allows introduction of arbitrary dummy variables; and $\star$ together with the other operations allows arbitrary compositions of Boolean functions.

**Definition 1** *For any $A \subseteq P_2$ we denote by $[A]$ its closure under the five Mal'cev operations, and we call $A$ a* generating set *or a* basis *of $[A]$. If $[A] = A$ then $A$ is called a* closed subset *or a* subclass *of $P_2$, and if $[A] = P_2$ then $A$ is* functionally complete. *If $[A] = A \neq P_2$ but $[A \cup \{f\}] = P_2$ for every $f \in P_2 \setminus A$ then $A$ is called a* maximal subclass *of $P_2$, or a* Post's class.

**Example 1** *Using the well-known disjunctive and conjunctive normal forms of Boolean functions, we can see that the set $\{\neg, \wedge, \vee\}$ is functionally complete. Once we have a known functionally complete set $A$, presumed functional completeness of any other set $B \subseteq P_2$ can be confirmed by showing that $A \subseteq [B]$. In this way we can show that each of the sets $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\neg, \not\rightarrow\}$, $\{\wedge, +, 1\}$, $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$ is functionally complete.*

On the other hand, it is not obvious how to prove that a certain set $A \subseteq P_2$, such as $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ or $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow\}$, is *not* functionally complete. Here we are interested in algorithms for answering questions and solving problems such as the following:

P1. How to represent Boolean functions on a computer?
P2. Given a finite set $A \subseteq P_2$, is $A$ functionally complete?
P3. Given $f \in P_2$ and a finite set $A \subseteq P_2$, is $f \in [A]$?
P4. Given a finite set $A \subseteq P_2$, compute its closure $[A]$.

In Section 2 we discuss question P1, in particular representation of Boolean functions in terms of *Zhegalkin polynomials*. In Section 3 we present a short, self-contained proof of *Post's Functional Completeness Theorem* which identifies the maximal subclasses of $P_2$, and offers a theoretical basis for an efficient algorithm for answering question P2. In Section 4 we discuss problems P3 and P4, and give some *Mathematica* implementations.

Table 2

Infix notation for some functions from $P_2^2$.

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ | $x \vee y$ | $x \rightarrow y$ | $x \not\rightarrow y$ | $x \leftrightarrow y$ | $x + y$ | $x \uparrow y$ | $x \downarrow y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

## 2. Representation of Boolean functions

Concerning question P1, there is the obvious way of representing $f \in P_2^n$ by its table, as we did in Tables 1 and 2. But such a table has $2^n$ rows, and it is often possible to get a more succinct representation by using a *normal form.* This means that we fix a finite functionally complete set $B \subseteq P_2$, and represent $f$ as an arithmetic expression built from the variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ using the elements of $B$ as operations. For example, in disjunctive and conjunctive normal forms we have $B = \{\neg, \wedge, \vee\}$.

As it turns out, it is advantageous for our purpose to take $B = \{\wedge, +, 1\}$ (which, according to Example 1, is functionally complete) and write $\wedge$ as multiplication. Then the corresponding arithmetic expressions can be construed as representing polynomials from the ring $\mathbb{K}_2^n := \mathrm{GF}(2)[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Let $v_n : \mathbb{K}_2^n \to P_2^n$ be the mapping which to every $p \in \mathbb{K}_2^n$ assigns $f \in P_2^n$ such that $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = p(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ for all $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{B}$. Clearly, $v_n$ is a ring epimorphism from $(\mathbb{K}_2^n, +, \cdot)$ to $(P_2^n, +, \cdot)$. Denote by $\mathbb{J}_2^n$ the ideal generated in $\mathbb{K}_2^n$ by $\{x_1^2 - x_1, x_2^2 - x_2, \ldots, x_n^2 - x_n\}$. Since $x^2 = x$ for $x \in \mathbb{B}$, we have $\mathbb{J}_2^n \subseteq \mathrm{Ker}\ v_n$, so, by the Ring Homomorphism Theorem, there is a unique isomorphism $\varphi_n : \mathbb{K}_2^n/\mathbb{J}_2^n \to P_2^n$ such that, with $\pi_n : \mathbb{K}_2^n \to \mathbb{K}_2^n/\mathbb{J}_2^n$ being the natural projection, $v_n = \varphi_n \circ \pi_n$. Note that each equivalence class in $\mathbb{K}_2^n/\mathbb{J}_2^n$ contains a unique polynomial $p \in \mathbb{K}_2^n$ which is of degree at most 1 in each of the variables; these special polynomials, which are in one-to-one correspondence with the elements of $P_2^n$, are called *Zhegalkin polynomials* in honor of I. I. Zhegalkin who defined them in [8]. Zhegalkin-polynomial forms of some of the Boolean functions listed in Tables 1 and 2 are shown in Table 3.

Table 3

Zhegalkin-polynomial forms of some of the functions from $P_2$.

| $\neg x$ | $x \wedge y$ | $x \vee y$ | $x \to y$ | $x \leftrightarrow y$ | $x \uparrow y$ | $x \downarrow y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1 + x$ | $xy$ | $x + y + xy$ | $1 + x + xy$ | $1 + x + y$ | $1 + xy$ | $1 + x + y + xy$ |

## 3. Post's Functional Completeness Theorem

**Definition 2** *A function $f \in P_2^n$ is*

1. 0-preserving *if $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$;*
2. 1-preserving *if $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$;*
3. monotonically non-decreasing *or* monotone *if $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ for all $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{B}$ such that $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, …, $a_n \leq b_n$;*
4. self-dual *if $\neg f(\neg b_1, \neg b_2, \ldots, \neg b_n) = f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ for all $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{B}$;*
5. affine *if the total degree of its Zhegalkin-polynomial form is at most 1.*

*The sets of all 0-preserving; 1-preserving; monotone; self-dual; affine Boolean functions will be denoted by $T_0$; $T_1$; $M$; $S$; $L$, respectively.*

It is easy to see that each of the sets $T_0$, $T_1$, $M$, $S$, and $L$ is a subclass of $P_2$. It is also easy to see that the set of all subclasses of $P_2$ ordered by inclusion forms a lattice (with $A$ meet $B = A \cap B$ and $A$ join $B = [A \cup B]$ for any two subclasses $A$, $B$ of $P_2$).

**Theorem 1** *A set $A \subseteq P_2$ is functionally complete if and only if it is* not *contained in any of the subclasses $T_0$, $T_1$, $M$, $S$, or $L$.*

This is Post's Functional Completeness Theorem (PFCT). It is well known and often quoted in the literature, but self-contained, short proofs are not so easy to come by. PFCT follows easily from the results of [5, 6] where Emil L. Post exhaustively described the structure of the above-mentioned lattice of all subclasses of $P_2$ (henceforth called *Post's lattice*) as consisting of 8 countable families of subclasses and additional 34 individual subclasses, and also provided finite bases for all the subclasses. Post's proof of his results is long and written in very complicated notation. It has been streamlined and recast in modern notation (see, e.g., [1] and [2]), but still it remains long and complicated. Here we present a short direct proof of PFCT, based on [4] and [7].

*Proof* of Theorem 1: That non-containment of $A$ in any of these subclasses is necessary for functional completeness of $A$ is clear, since otherwise $[A]$ would be contained in one of them. However, none of them equals $P_2$ (since, e.g., none of them contains $\uparrow$).

Conversely, let $A$ contain functions $f_0$, $f_1$, $f_M$, $f_S$, $f_L$ (not necessarily distinct) such that $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_M \notin M$, $f_S \notin S$, $f_L \notin L$. We wish to show that $[A] = P_2$.

Let $f_0' \in P_2^1$ be obtained from $f_0$ by identifying all its variables. Then $f_0' \in [A]$ and $f_0'(0) = 1$. We distinguish two cases according to the value of $f_0'(1)$.

Case 1: $f_0'(1) = 1$

In this case, $f_0' \equiv 1$. Let $f_1' \in P_2^1$ be obtained from $f_1$ by identifying all its variables. Then $f_1' \in [A]$ and $f_1'(f_0') = f_1'(1) \equiv 0 \in [A]$ as well. Assume that $f_M \in P_2^n$. Since $f_M \notin M$, there are $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{B}$ such that $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$, …, $a_n \le b_n$, $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, and $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$. Let $f_M' \in P_2^1$ be the function obtained from $f_M$ by replacing $x_i$ with 0 if $a_i = b_i = 0$, with 1 if $a_i = b_i = 1$, and with $x_1$ if $a_i = 0$ and $b_i = 1$. Then $f_M' \in [A]$ and $f_M'(0) = f_M(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ while $f_M'(1) = f_M(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 0$. It follows that $f_M' \equiv \neg$, so $\{0, 1, \neg\} \subseteq [A]$.

Now we use $f_L$. Since $f_L \notin L$, we can write it in the Zhegalkin-polynomial form

$$f_L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

where $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{B}$, $r \ge 2$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$, and $g$ is a Zhegalkin polynomial with all terms of total degree $r$ or more, but with no $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$ term. Let $f_L' \in P_2^2$ be the function obtained from $f_L$ by substituting $x_1 \equiv x$ for $x_{i_1}$, $x_2 \equiv y$ for $x_{i_2}$, $x_{i_3}$, …, $x_{i_r}$, and 0 for all the remaining variables. Then $f_L' \in [A]$, and we have

$$f_L'(x, y) = a + bx + cy + xy$$

for some $a, b, c \in \mathbb{B}$. So there are eight possibilities for $f_L'$, as shown in Table 4. From Example 1 it follows that the set $\{\neg, f_L'\} \subseteq A$ is functionally complete in all eight cases, hence $A$ is functionally complete as well.

Case 2: $f_0'(1) = 0$

In this case, $f_0' \equiv \neg$. Assume that $f_S \in P_2^n$. Since $f_S \notin S$, there are $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{B}$ such that $f_S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_S(\neg a_1, \neg a_2, \ldots, \neg a_n)$. Let $f_S' \in P_2^1$ be the function obtained from $f_S$ by replacing $x_i$ with $x_1$ if $a_i = 1$, and with $\neg x_1$ if $a_i = 0$. Then $f_S' \in [A]$ and $f_S'(1) = f_S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_S(\neg a_1, \neg a_2, \ldots, \neg a_n) = f_S'(0)$, so either $f_S' \equiv 1$ or $f_S' \equiv 0$. Since we also have $\neg$, we see that $\{0, 1, \neg\} \subseteq [A]$, and we can continue in the same way as in Case 1. $\square$

**Corollary 1** *Let $\mathcal{P} = \{T_0, T_1, M, S, L\}$, and let $\mathcal{M}$ denote the set of all maximal subclasses of $P_2$. Then $\mathcal{M} = \mathcal{P}$.*

*Proof*: Note first that none of the elements of $\mathcal{P}$ is contained in any other element of $\mathcal{P}$, as witnessed by Table 5 (where the self-dual, non-affine function $h \in P_2^3$ is defined by $h(x, y, z) = xy + xz + yz$).

Next we show that the elements of $\mathcal{P}$ are *maximal* subclasses of $P_2$. Assume not, and let some $A \in \mathcal{P}$ be non-maximal. Then there is an $f \in P_2 \setminus A$ such that $[A \cup \{f\}] \neq P_2$. By Theorem 1, it follows that $A \cup \{f\}$ is contained in some $C \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$, contradicting the mutual incomparability of the elements of $\mathcal{P}$, hence $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$.

Finally, we show that $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$. Assume not; then there is a maximal subclass $A$ of $P_2$ which is not in $\mathcal{P}$. Then $A$, being maximal, is not contained in any of the elements of $\mathcal{P}$. Hence, by Theorem 1 again, we have $[A] = P_2$, contradicting the definition of a maximal subclass. This finishes the proof. $\square$

## 4. Some *Mathematica* implementations

In this section we present some representations and algorithms for solving problems P1 – P4 and their *Mathematica* implementations. Concerning P1, we use the Zhegalkin-polynomial normal form to represent Boolean functions, converting an arbitrary polynomial with integer coefficients to the corresponding Zhegalkin polynomial by reducing its coefficients modulo 2, and replacing powers of variables by the first powers:

Table 4

The eight possible values of $f'_L$.

| $a$ | $b$ | $c$ | $a + bx + cy + xy$ | $f'_L$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $xy$ | $\wedge$ |
| 0 | 0 | 1 | $y + xy$ | $\not\leftarrow$ |
| 0 | 1 | 0 | $x + xy$ | $\not\rightarrow$ |
| 0 | 1 | 1 | $x + y + xy$ | $\vee$ |
| 1 | 0 | 0 | $1 + xy$ | $\uparrow$ |
| 1 | 0 | 1 | $1 + y + xy$ | $\leftarrow$ |
| 1 | 1 | 0 | $1 + x + xy$ | $\rightarrow$ |
| 1 | 1 | 1 | $1 + x + y + xy$ | $\downarrow$ |

Table 5

Some elements of $P_2$ witnessing mutual incomparability of $T_0, T_1, M, S$, and $L$.

| | $\notin T_0$ | $\notin T_1$ | $\notin M$ | $\notin S$ | $\notin L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\in T_0$ | | 0 | $+$ | 0 | $\wedge$ |
| $\in T_1$ | 1 | | $\rightarrow$ | 1 | $\wedge$ |
| $\in M$ | 1 | 0 | | 0 | $\wedge$ |
| $\in S$ | $\neg$ | $\neg$ | $\neg$ | | $h$ |
| $\in L$ | 1 | 0 | $\neg$ | 0 | |

```
(* Zhegalkin-polynomial form of a polynomial over Z *)

zp[p_] := PolynomialMod[Expand[p] //. Power[x_, n_] -> x, 2];

(* some Boolean functions in Zhegalkin-polynomial form *)

not[p_] := 1 + p // zp;
and[p__] := Times[p] // zp;
or[p__] := not[and @@ not /@ {p}] // zp;
xor[p__] := Plus[p] // zp;
equivalent[p__] := not[xor @@ not /@ {p}] // zp;
implies[p_, q_] := or[not[p], q] // zp;
sheffer[p_, q_] := not[and[p, q]] // zp;
peirce[p_, q_] := not[or[p, q]] // zp;
```

To solve P2, we use Theorem 1 according to which a set $A \subseteq P_2$ is functionally complete iff it is not contained in any of the five Post's classes $T_0$, $T_1$, $M$, $S$, or $L$.

```
(* test a Boolean function for membership in the five Post's classes *)

T0[expr_] :=
  zp[expr /. Thread[Cases[expr, _Symbol, Infinity] -> 0]] === 0;
T1[expr_] :=
  zp[expr /. Thread[Cases[expr, _Symbol, Infinity] -> 1]] === 1;
M[expr_] :=
  Module[{zpe = zp[expr], vars = Cases[expr, _Symbol, Infinity], n, y, v1},
   n = Length[vars]; v1 = y /@ Range[n];
   zp[implies[and @@ Thread[implies[vars, v1]],
      implies[zpe, zpe /. Thread[vars -> v1]]]] === 1];
S[expr_] :=
  Module[{zpe = zp[expr], vars = Cases[expr, _Symbol, Infinity]},
   zp[(expr /. Thread[vars -> vars + 1]) + 1] === zpe];
L[expr_] := FreeQ[zp[expr], Times];

(* test a set of Boolean functions for functional completeness *)

FCompleteQ[f_List] :=
  Module[{properties = Thread[Through[{T0, T1, L, S, M}[#]] & /@ f]},
   Not[Or @@ ((And @@ #) & /@ properties)]];
```

Problem P3 can be solved by first solving P4 (given $A$, compute $[A]$), then checking if $f \in [A]$. We present here a simple procedure `closure[f, n, x]` where `f` is a list of Boolean functions and their arities, `n` is a natural number, and `x` is the symbol used to name variables, which incrementally builds all functions of at most `n` variables that can be obtained from the functions in `f` and the variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ by compositions.

```
closure[f_List, n_Integer, x_Symbol] :=
  Module[{old, new, increment},

   (* f is a list of the form {{f1,m1},{f2,m2}, .., {fr,mr}}
      where fi denotes a Boolean function of mi variables *)
   (* n is the number of variables *)
   (* "closure" returns all Boolean functions of x[1], x[2], .., x[n]
      that can be constructed by composing f1, f2, .., fm *)

   For[(* start *)  old = {}; new = Table[x[i], {i, 1, n}],
    (* test *)  old != new, (* incr *) ,
    (* body *)
```

```
    increment =
     Union[zp /@
       Flatten[Outer @@ Join[{#[[1]]}, Table[new, {#[[2]]}]] & /@ f]];
    old = new;
    new = Union[new, increment];
    Print[Length[old]]
    ];
   Return[new]];
```

This procedure is very time- and space-consuming, so it can be used on small examples only. We believe that a much more efficient closure computation can be devised by closely following Post's construction of finite bases for all the subclasses of $P_2$.


## Acknowledgments

The first author acknowledges the financial support from the Slovenian Research Agency (research core funding No. P1-0294 ).


## References


1. *Jablonskiĭ S. V., Gavrilov G. P., Kudrjavcev V. B.* Functions of the algebra of logic and Post's classes (Russian). — Izdat. "Nauka", Moscow, 1966.
2. *Lau D.* Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory. — Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2006.
3. *Mal'cev A. I.* Iterative algebras and Post manifolds (Russian). — Algebra i Logika Sem. 5, 1966, no. 2. — P. 5–24.
4. *Pelletier F. J., Martin N. M.* Post's functional completeness theorem. — Notre Dame J. Formal Logic, 1990, vol. 31. — P. 462–475.
5. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions. — Amer. J. Math., 1921, vol. 43. — P. 163–185.
6. *Post E. L.* The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. — Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1941.
7. *Vukšić L.* Polni nabori resničnostnih funkcij in Postova mreža. — Obz. mat. fiz., 2017, vol. 64, no. 2. — P. 41–53.
8. *Zhegalkin I. I.* On a technique of calculating propositions in symbolic logic (Russian). — Mat. Sbornik, 1927, vol. 43. — P. 9–28.


УДК 519.7

# Булевы функции и символьные вычисления


**М. Петковшек[*†], Л. Вукшич[*]**

[*] *Факультет математики и физики,*
*Люблянский Университет,*
*Ядранска 19, SI-1000 Любляна, Словения*
[†] *Институт математики, физики и механики,*
*Ядранска 19, SI-1000 Любляна, Словения*

Email: marko.petkovsek@fmf.uni-lj.si,lara.vuksic@student.fmf.uni-lj.si



Рассматриваются символьные вычисления в алгебре $P_2$ булевых функций с операциями Мальцева. Такие вопросы, как "порождается ли $P_2$ некоторым конкретным множеством функций" или "выразима ли данная конкретная функция в данном базисе" получают ответ благодаря использованию результатов Поста о структуре решетки подалгебр алгебры

$P_2$. Мы приводим короткое доказательство теоремы Поста о функциональной полноте, а также реализацию в системе Mathematica соответствующих процедур.

**Ключевые слова:** булевы функции, полиномы Жегалкина, операции Мальцева, операции замыкания, теорема Поста о функциональной полноте, решетка Поста.

UDC 517.928

# Coalescing complex singular points

**L. Teyssier**

*Laboratoire IRMA, Strasbourg University, 67084 Strasbourg Cedex, France*

Email: teyssier@math.unistra.fr

We study the saddle-node bifurcation in codimension-$k$ families of holomorphic planar vector fields, admitting a persistent invariant central manifold. This situation corresponds generically to the coalescence of $k+1$ simple stationary points into a single multiple (*i.e.* irregular) point. In a previous work with C. Rousseau, we studied the corresponding family of non-linear Stokes phenomena, measured by a functional modulus encoding completely the conjugacy class of the bifurcation up to local analytic changes of coordinates, parameters and time. We were also interested in the inverse problem, which is far more difficult than for the non-parametric case. This study led us to provide analytic normal forms with simple expressions. Here we investigate to which extent these objects can be computed (numerically or symbolically) and how these computations pertain to the problem of family-wise Liouvillian integrability and to the inverse problem.

**Key words and phrases:** Saddle-node bifurcation, classification moduli, normal forms, differential Galois theory.

## 1. Introduction

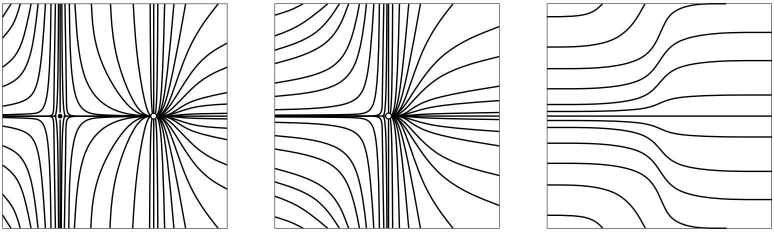
Heuristically, moduli spaces of holomorphic dynamical systems not only encode but also describe qualitatively the dynamics itself, and to some extent allow a better understanding of dynamical phenomena and Galoisian properties. The present work is based on the article [1] by C. Rousseau and myself, which is a part of a long-lasting program aimed at studying the orbital conjugacy classes of vector fields in the neighborhood of stationary points (up to local changes of analytic coordinates, parameter and time reparameterization).

A natural tool for studying conjugacy classes is the use of normal forms. For hyperbolic stationary points (generic situation), the system is locally conjugate to its linear part so that the quotient space of (local) hyperbolic systems is given by the space of linear dynamical systems. However, for most non-hyperbolic stationary points the normalizing changes of coordinates (sending *formally* the system to a normal form) is given by a divergent power series. Divergence is very instructive: it tells us that the dynamics of the original system and that of the normal form are qualitatively different. In that respect, a subclass of systems that has been thoroughly studied in the beginning of the 80's is that of 1-resonant singular points, more specifically saddle-node singularities of 2-dimensional vector fields and irregular singular points of linear differential systems. Both systems share a major feature: they can be understood as the *coalescence* of systems made up of "simple" stationary points.

The most basic example of such a coalescence is given by the codimension-1 **saddle-node unfolding**

$$Z_{\varepsilon}(x,y) := \left(x^2+\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \quad , \ \varepsilon \in \mathbb{C}.$$

Real slices of the phase-portraits are shown in Figure 1.1. The merging (bifurcation) occurs at $\varepsilon = 0$: for $\varepsilon \neq 0$ the system has two stationary points located at $\left(\pm\sqrt{-\varepsilon}, 0\right)$ which collide as $\varepsilon$ reaches 0.



(a) $\varepsilon < 0$ (b) $\varepsilon = 0$ (c) $\varepsilon > 0$

Figure 1.1. Typical members of the simplest saddle-node bifurcation.

The idea of analyzing "complicated" dynamics as the limit of "simple" dynamics was suggested by several mathematicians, including V. Arnold, A. Bolibruch and J. Martinet. It was put in practice for unfoldings of saddle-node points by A. Glutsyuk [2] on regions in parameter space over which the confluent points are all hyperbolic. The system can be linearized in the neighborhood of each singularity, and the mismatch in the normalizing changes of coordinates tends to the components of the saddle-node's Martinet-Ramis functional modulus [3] when the singularities merge. It took some more years to build the tools that were missing for a full classification of unfoldings of multiple singularities, in particular on a full neighborhood in parameter space of the bifurcation value. The gap was bridged mostly by C. Rousseau and her collaborators using the visionary ideas of A. Douady and P. Sentenac [4].

In [5] was described a set of functional moduli for unfoldings of codimension-$k$ saddle-node vector fields $Z = (Z_\varepsilon)_\varepsilon$ depending on a finite-dimensional parameter $\varepsilon \in (\mathbb{C}^k, 0)$ and equating the Martinet-Ramis modulus for $\varepsilon = 0$. Here we focus mainly on the inverse problem and on the question of computing normal forms. The problem under investigation is twofold: what quantities attached to the conjugacy class can be effectively computed, either symbolically or numerically, and what Galoisian information may be gained from such computations.

In the rest of the introduction we recall the material needed for the rest of the presentation.

### 1.1. Modulus of orbital classification

A saddle-node point of codimension-$k$ is viewed as the limiting object of the coalescence of $k+1$ simple (regular) stationary points. Each merging stationary point organizes the dynamics in its own neighborhood in a rigid way. The local models of these rigid dynamics seldom agree on overlapping areas and in general cannot be glued together. If this incompatibility persists as the confluence happens, then we have divergence of the normalizing series at the limit (the normalizing series is nonetheless $k$-summable). The divergence is measured by the **Stokes phenomenon**: there exists a formal normalizing transformation, and a covering of a punctured neighborhood of the singularity by $2k$ sectors over which there exist unique sectorial normalizing transformations that are Gevrey-asymptotic to the formal normalization. Comparing the normalizing transformations on intersections of consecutive sectors provides a modulus of analytic classification. This modulus takes the form of Stokes matrices for irregular singularities of linear differential systems, and functional moduli for singularities of nonlinear dynamical systems.

In the spirit of this general context we can associate to any saddle-node unfolding $Z$ a (family of) functional data

$$\mathfrak{m} \quad = \quad (\psi_\varepsilon^{\mathrm{s}}, \psi_\varepsilon^{\mathrm{n}})_{\varepsilon \in (\mathbb{C}^k, 0)},$$

which is a complete invariant for orbital analytical classification. For fixed $\varepsilon$ each component of $\mathfrak{m}$ is an element of $\mathbb{C}\{h\}$ *i.e.* a germ of a holomorphic function near 0.

The very nature of this geometric construction in [5] prevents the modulus to be continuous on the whole parameter space. This space needs to be split into a finite number of **cells** whose adherences cover a neighborhood of the bifurcation value, on which the modulus is analytic with continuous extension to the adherence.

### 1.2. Inverse problem and normal forms

At the time of the first works on the question, identifying the moduli space was still out of reach. Performing this identification is called the *inverse problem.* Let us formulate it in the case at hands.

**Inverse problem.** *Among all elements of the vector space $\mathcal{M}$ to which $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_\varepsilon)_\varepsilon$ belongs, to identify those coming as moduli of a saddle-node unfolding.*

The paper [1] answers completely this challenge in the case of bifurcations with a persistent analytic center manifold, which we call **convergent unfoldings** (this property can be read in the modulus as the condition $\psi^{\mathrm{n}} = \mathrm{Id}$). The nice feature is that solving the inverse problem ultimately provides unique normal forms (privileged representative in each analytic class).

**Normalization Theorem [1].** *Let $k \in \mathbb{N}$ be given. For $\varepsilon = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ define the polynomial*

$$P_\varepsilon(x) := x^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j x^j.$$

*Take an unfolding $Z$ of a saddle-node of codimension-$k$.*

1. *There exists $\mu \in \mathbb{C}\{\varepsilon\}$ such that $Z$ is formally orbitally conjugate to the* ***formal normal form***

$$\widehat{\mathrm{X}}_\varepsilon(x, y) := P_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x} + y\left(1 + \mu_\varepsilon x^k\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

*The stationary points coincides with $P_\varepsilon^{-1}(0) \times \{0\}$.*

2. *Let us introduce the functional space in the complex multivariable $(\varepsilon, x, v) \in \mathbb{C}^{k+2}$:*

$$\mathrm{Section}_k\{v\} := \left\{ f_\varepsilon(x, v) = \sum_{j=1}^{k} f_{\varepsilon,j}(v)\, x^j \ : \ f_{\varepsilon,j}(v) \in \mathbb{C}\{\varepsilon, v\} \right\}.$$

*Fix $\mu \in \mathbb{C}\{\varepsilon\}$ and choose $\tau \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $\mu_0 + (k+1)\tau \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$. For every convergent unfolding $Z$ with formal invariant $\mu$, there exist $R \in \mathrm{Section}_k\{P^\tau y\}$ such that $Z$ is analytically orbitally conjugate to the* ***analytical normal form***

$$\mathcal{X} := \widehat{\mathrm{X}} + Ry\frac{\partial}{\partial y}.$$

Although any element of the specialization of $\mathcal{M}$ at $\varepsilon = 0$ can be realized as the modulus of a saddle-node vector field [3, 6], this property does not hold anymore for unfoldings: the typical element of $\mathcal{M} \cap \{\psi^{\mathrm{n}} = \mathrm{Id}\}$ can never be realized as a modulus of saddle-node bifurcation. Let us explain how this is so. It is rather easy to get convinced that there is no obstruction to realize any given deformation $(\mathfrak{m}_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathcal{E}}$ of a saddle-node's modulus $\mathfrak{m}_0$ over any given cell $\mathcal{E}$ in parameter space. The sole obstacle lies in gluing these cellular realizations together over cellular intersections in order to obtain a genuine analytic parametric family $Z$ whose modulus agrees with $\mathfrak{m}$. Favorable situations can be characterized by a strong criterion imposed on $\mathfrak{m}$, called **compatibility condition**. The condition is that the abstract holonomy pseudogroups generated by $\mathfrak{m}$ on different cells be conjugate.

**Realization Theorem [1].** *Take $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}$ and assume $\psi^{\mathrm{n}} = \mathrm{Id}$. The inverse problem for $\mathfrak{m}$ can be solved if, and only if, $\mathfrak{m}$ satisfies the compatibility condition.*

*Remark* 1. The general case of a bifurcation without analytic center manifold (arbitrary $\psi^{\mathrm{n}}$) remains open.

### 1.3. Some bizarre phenomenon and some computations

Let us give an example of the kind of unexpected situations that can arise.

**Global Moduli Theorem [1].** *Let $\mu \in \mathbb{C}\{\varepsilon\}$ and $\mathfrak{m} = (\psi^{\mathrm{s}}, \mathrm{Id}) \in \mathcal{M}$ be given. Assume that $\mathfrak{m}$ is holomorphic, in the sense that the expression of $\psi^{\mathrm{s}}$ over any cell is given by the restriction of a function $M$ holomorphic on a whole neighborhood of $0$ in parameter space. The following conditions are equivalent:*

1. *$\mathfrak{m}$ satisfies the compatibility condition,*
2. *either $\mathfrak{m} = 0$, or $k = 1$ and there exists $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}\{\varepsilon\} \setminus \{0\}$ such that*
   — *$d\mu \in \mathbb{Z}$ (in particular $\mu$ is a rational constant),*
   — *$M(\varepsilon, h) = -\frac{1}{d} \log\left(1 - \alpha_\varepsilon h^d\right)$.*

*If one of the conditions is satisfied and $\mathfrak{m} \neq 0$, then a normal form realizing $\mathfrak{m}$ is:*

$$\mathcal{X} = \widehat{\mathrm{X}} + \varepsilon^\kappa x P(x)^{\tau d} y^{d+1} \frac{\partial}{\partial y}$$

*for some $\kappa \in \mathbb{N}$. We then speak of **Bernoulli unfoldings** because the underlying non-autonomous differential equation induced by the flow is Bernoulli.*

*Remark* 2. This theorem implies that, when $k > 1$, it will surely be very difficult to compute "explicit" examples of moduli $\mathfrak{m}$, even in the case of Liouville-integrable vector fields, which is in complete contrast with the limiting case $\varepsilon = 0$ [7].

Although this theorem is proved by a rather subtle dynamical analysis, we can get the gist of why $d\mu \in \mathbb{Z}$ by performing an explicit computation.

**Computational Lemma [8].** *Here $k = 1$. Let us introduce the double covering $\varepsilon = -s^2$ in the parameter space so that $P_\varepsilon(x) = (x - s)(x + s)$. Assume $Z_\varepsilon = \widehat{\mathrm{X}}_\varepsilon + y^m (\lambda_\varepsilon x^n + \mathrm{o}(x^n) + \mathrm{o}(y)) \frac{\partial}{\partial y}$ with $\lambda_\varepsilon \neq 0$.*

1.

$$\mathfrak{m}_\varepsilon(h) = \lambda_\varepsilon h^m A(s) + \mathrm{o}(h^m)$$

*where*

$$A(s) := \frac{(-m)^{m\mu}}{\Gamma(m\mu)} \times (\text{some abstruse even function of } s) \times T(s)$$

$$T(s) := \frac{\left(-\frac{2s}{m}\right)^{m\mu}}{1+s\mu} \times \frac{\Gamma\left(-\frac{m}{2s}+\frac{m\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{m}{2s}-\frac{m\mu}{2}\right)}.$$

2. *The function $s \mapsto A(s)$ is holomorphic and bounded on the sector*

$$\mathcal{S} := \left\{0 < |s| < \frac{1}{2|\mu_0|},\ \frac{\pi}{4} < \arg s < \frac{7\pi}{4}\right\}$$

   *and extends continuously at* 0.
3. *The function $A$ is an even function of $s$ (*i.e.* holomorphic in $\varepsilon$) if and only if $m\mu \in \mathbb{Z}$. In that case $\mu$ is a rational constant.*

The result is shown by using the Pochhammer contour integral formula for the Beta function. Indeed an affine change of coordinates sends $(x-s)^{\alpha}(x+s)^{\beta}$ to a multiple of $(1-z)^{\alpha} z^{\beta}$. The final expression comes from diverse classical properties of the Gamma function. The eventual lack of evenness of the period comes from the term $T(s)$. If $m\mu$ is not an integer then $T(s)$ is multivalued and has an accumulation of zeros and poles as $s \to 0$ outside the sector $\mathcal{S}$. Only the coincidence of these two infinite sets when $m\mu \in \mathbb{Z}$ allows the dominant part of $\mathfrak{m}$ to be holomorphic through lucky root / pole cancellations.

*Remark* 3. When $k > 1$ it is not clear that it is possible to even compute "explicitly" the dominant part of $\mathfrak{m}$. It seems that hypergeometric functions may be involved, but the computations are hardly tractable. I wonder if this coincidence with the conclusion of the Global Moduli Theorem (if $k > 1$ then no "nice" non-trivial modulus may exists) is purely fortuitous.

## 2. Computing the modulus and the normal forms

In all the following all unfoldings are assumed to be in prepared form [1], that is

$$Z_\varepsilon(x,y) = \widehat{\mathrm{X}}_\varepsilon(x,y) + y^2 A(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

where $A$ is some holomorphic germ.

**Definition 1.** We say that a power series $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_n z^n$ is **numerically computable** if for each $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ there exists a Turing machine imputing a precision $\delta > 0$ and outputting a floating point approximation of $a_n$ up to $\delta$.

**Theorem 1.** *Take a convergent unfolding $Z$ and a value of $\varepsilon \in (\mathbb{C}^k, 0)$ for which $Z_\varepsilon$ is numerically computable. Then the corresponding modulus $\mathfrak{m}_\varepsilon$ and normal form $\mathcal{X}_\varepsilon$ are numerically computable.*

This theorem is an adaptation of the work done in [6] for $\varepsilon = 0$. The cornerstone of the argument is that the correspondence $Z \mapsto \mathfrak{m}$ is "upper $k \times k$-block triangular", in the sense that the $p$-jet of $\mathfrak{m}$ only depends on the $p$-jet of $Z$. As noted before, the main difference with the case $\varepsilon = 0$ is that it is probably not possible to compute "explicitly" the diagonal blocks.

In the same vein we obtain another result similar to the case $\varepsilon = 0$ regarding symbolic computations.

**Theorem 2.** *The modulus $\mathfrak{m}$ associated to a convergent unfolding $Z$ can be expressed in finite terms by Liouvillian towers of path-integrals involving only rational constants, the components of $Z$, the orbital invariant $\mu$ and the 1-forms $\frac{\mathrm{d}x}{P(x)}$.*

The proof relies on the fact that the Taylor coefficient of $\mathfrak{m}$ can be determined by comparing local normalizations around hyperbolic points, which are obtained by iteratively solving inhomogeneous linear differential equations involving only the formal normal form $\widehat{\mathrm{X}}$ and the components of $Z$. It is not clear to which extent one can get rid of the use of iterated integrals. Yet the recent work of O. Bouillot and J. Écalle [9] on multizetas and the effective computation of moduli of resonant diffeomorphisms seems to clear the path towards more "explicit" formulas.

## 3. Computing the compatibility condition

In the convergent case it is possible to prove the following result.

**Theorem 3.** *The compatibility condition is an analytic condition in* $\mathfrak{m}$.

By this we mean that whether $\mathfrak{m}$ fulfills the compatibility condition is encoded by a set of analytic constraints on its Taylor coefficients (see [10] for a precise and practical framework of analyticity in spaces of power series). Although the number of Taylor coefficients is infinite, each constraint only involves finitely many of these variables. Writing down these constraints seems a very tedious task, but because it is nonetheless possible to do so we obtain a way of ruling out in finite time those $\mathfrak{m}$ that do not meet the compatibility condition.

**Corollary 1.** *Determining whether* $\mathfrak{m}$ *fulfills the compatibility condition is semi-decidable.*

## 4. A Galoisian application

Heuristically, classification moduli carry Galoisian information (pertaining to the integrability in Liouvillian closed-form). For instance, in the limiting case of a saddle-node singularity it is well-known that Martinet-Ramis moduli play the same role for non-linear equations as Stokes matrices do for linear systems near an irregular singularity. A Galoisian formulation of this fact in terms of the Galois-Malgrange groupoid [11, 12] can be found in the work of G. Casale [13]. When the differential equation depends on a parameter $\varepsilon$, the recent thesis of D. Davy describes a form of "semi-continuity" for specializations of its parametrized Galois-Malgrange groupoid $\mathfrak{M}$. He proves that the size of the groupoid $\mathfrak{M}_\varepsilon$ is constant if $\varepsilon$ is generic, more precisely if the parameter does not belong to a (maybe empty) countable union $\Omega$ of hypersurfaces, while for $\varepsilon \in \Omega$ the groupoid $\mathfrak{M}_\varepsilon$ can only get smaller.

Consider the extreme case $P_\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial x} + y\left(1 + \mu_\varepsilon x^k + \varepsilon R_\varepsilon(x,y)\right)\frac{\partial}{\partial y}$ for $R$ arbitrary: the vector field $X_0$ is surely "not less integrable" (it is the formal normal form) than for $\varepsilon \neq 0$. This is actually the only possible kind of degeneracy near the saddle-node bifurcation, for we have established that $\Omega \cap \left(\mathbb{C}^k, 0\right) \subset \{0\}$.

**Integrability Theorem [1].** *Let* $(Z_\varepsilon)_\varepsilon$ *be a convergent unfolding. The following statements are equivalent.*

1. *The vector field* $Z_\varepsilon$ *admits a Liouvillian first integral for all* $\varepsilon \in \left(\mathbb{C}^k, 0\right)$.
2. *The vector field* $Z_\varepsilon$ *admits a Liouvillian first integral for infinitely many* $\varepsilon \in \left(\mathbb{C}^k, 0\right)$.
3. *Its normal form is a Bernoulli unfolding.*
4. *The modulus* $\mathfrak{m}_\varepsilon$ *is of the form* $h \mapsto -\frac{1}{d}\log\left(1 - \alpha_\varepsilon h^d\right)$ *for all* $\varepsilon \in \left(\mathbb{C}^k, 0\right)$.

Because we can compute (at least numerically) the modulus of a (computable) unfolding for a given (computable) value of the parameter $\varepsilon$, we can detect in finite time that a given unfolding is not Liouville-integrable.

**Corollary 2.** *Determining whether a (computable) convergent unfolding admits a family of Liouvillian first integrals is semi-decidable.*

The recent work of G. Chèze and T. Combot on the determination of the transverse rank of a 2-dimensional polynomial vector field brings hope that for polynomial unfoldings it may be possible to design an actual algorithm solving the *en famille* integrability.

## 5. Conclusions

We study non-linear saddle-node bifurcations of arbitrary codimension with a persistent invariant central manifold. We address the issue of the inverse problem for the classification modulus, which leads us to tackle the question of computing related objects. We have proved that at least numerical computations can be performed on convergent unfoldings to effectively determine:

— their modulus of classification,
— their analytic normal forms,
— if they do not admit a family of Liouvillian first integrals.

The path to symbolic computation is more difficult to tread, except if one allows iterated integrals as basic building blocks or take into account very recent results regarding mould / alien calculus or estimation of the transverse rank of the Galois-Malgrange groupoid.

## Acknowledgments

The work is partially supported by French National Research Agency project Iso-Galois (ANR-13-JS01-0002-01).

## References

1. Rousseau C., Teyssier L. Analytic normal forms and inverse problems for unfoldings of 2-dimensional saddle-nodes with analytic center manifold // (to appear in) Ann Sci ENS. — 2018.
2. Glutsyuk A. A. Confluence of singular points and the nonlinear Stokes phenomenon // Tr. Mosk. Mat. Obs. — 2001. — Vol. 62. — P. 54–104.
3. Martinet J., Ramis J.-P. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. — 1982. — no. 55. — P. 63–164. — Access mode: `http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1982__55__63_0`.
4. Douady A., Sentenac P. Champs de vecteurs polynomiaux sur $\mathbb{C}$. — Preprint 2005.
5. Rousseau C., Teyssier L. Analytical moduli for unfoldings of saddle-node vector fields // Mosc. Math. J. — 2008. — Vol. 8, no. 3. — P. 547–614, 616.
6. Schäfke R., Teyssier L. Analytic normal forms for convergent saddle-node vector fields // Ann. Inst. Fourier. — 2013 (30p) 2013.
7. Teyssier L. Examples of non-conjugated holomorphic vector fields and foliations // J. Differential Equations. — 2004. — Vol. 205, no. 2. — P. 390–407. — Access mode: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2004.03.033`.
8. Teyssier L. Coalescing complex planar stationary points // Interdisciplinary Mathematical Research and Applications: In Honor of Professor Christiane Rousseau / Ed. by Toni Bourama. — Springer. — Proceedings in Mathematics & Statistics.
9. Bouillot O. Explicit calculation of analytic invariants, in series of multizeta values.
10. Teyssier L. Analyticity in spaces of convergent power series and applications // Mosc. Math. J. — 2013 (65p) 2013.

11. Malgrange B. On nonlinear differential Galois theory // Chinese Ann. Math. Ser. B. — 2002. — Vol. 23, no. 2. — P. 219–226. — Dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions. Access mode: http://dx.doi.org/10.1142/S0252959902000213.
12. Malgrange B. Le groupoïde de Galois d'un feuilletage // Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2. — Geneva : Enseignement Math., 2001. — Vol. 38 of Monogr. Enseign. Math. — P. 465–501.
13. Casale G. Feuilletages singuliers de codimension un, groupoïde de Galois et intégrales premières // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 2006. — Vol. 56, no. 3. — P. 735–779. — Access mode: http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2006__56_3_735_0.

УДК 517.928

# Слияние комплексных особых точек

**Л. Тессье**

*Лаборатория IRMA, Страсбургский университет, Страсбург седекс 67084, Франция*

Email: teyssier@math.unistra.fr

Рассматриваются бифуркации “седлоузел” в семействах коразмерности $k$ голоморфных векторных полей на плоскости, допускающих устойчивое инвариантное центральное многообразие. В случае общего положения, эта ситуация соответствует слиянию $k+1$ простых стационарных точек в одну кратную (т. е. иррегулярную) точку. В предыдущей работе мы совместно с К. Руссо изучали соответствующее семейство нелинейных явлений Стокса, определяемых функциональным модулем, полностью описывающим класс сопряженности бифуркации с точностью до локальной аналитической замены координат, параметров и времени. Было также уделено внимание обратной задаче, намного более сложной, чем в непараметрическом случае. Это привело нас к поиску простых выражений для аналитических нормальных форм. В настоящей статье делается попытка выяснить, насколько эти объекты поддаются вычислению (численному или символьному) и насколько такие вычисления адекватны как проблеме интегрируемости семейств по Лиувиллю, так и обратной задаче.

**Ключевые слова:** бифуркация “седлоузел”, классифицирующие модули, нормальные формы, дифференциальная теория Галуа.

УДК 512.552.12

# Применение методов машинного обучения для улучшения алгоритма $F_4$ вычисления базиса Грёбнера

**М. И. Тихонова*, А. И. Зобнин†**

* *Кафедра высшей алгебры,*
*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,*
*Ленинские горы, д. 1, Москва, Россия, 119991*
† *Факультет компьютерных наук,*
*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,*
*Москва, Кочновский проезд, д. 3, Москва, Россия, 125319*

Email: m_tikhonova94@mail.ru,alexey.zobnin@gmail.com

Вычисление базиса Грёбнера полиномиального идеала является вычислительно сложной актуальной проблемой современной компьютерной алгебры. Для ее решения был предложен ряд алгоритмов, большинство из которых опираются в своей работе на различные эвристики. В работе рассматривается вопрос о применимости машинного обучения для оптимизации работы одного из таких алгоритмов — алгоритма $F_4$ — путем уменьшения числа итераций, необходимых для вычисления базиса Грёбнера, благодаря оптимальному выбору стратегии. Также производится ряд экспериментов, демонстрирующих эффективность применения одного из данных методов, известного как машина опорных векторов, для ускорения работы $F_4$.

**Ключевые слова:** компьютерные науки, компьютерная алгебра, машинное обучение, машина опорных векторов, базис Грёбнера.

## 1. Введение

Системы компьютерной алгебры применяются для решения ряда математических проблем. Однако во многих программах используется ряд эвристик и набор параметров, выбор которых зачастую основан лишь на эмпирическом опыте. Их приходится задавать вручную перед непосредственным запуском программы. В данном контексте *проблема выбора алгоритма* — это проблема выбора настроек параметров, оптимальных для решения конкретной задачи. Выбор параметров может значительно повлиять на скорость работы программы. Идея применить методы *машинного обучения*, а именно обучение с учителем, для подбора оптимального набора параметров возникла достаточно недавно, однако является весьма перспективной. Так данный подход был рассмотрен в [1] и [2].

В данной работе исследуется вопрос о том, насколько хорошо работают методы машинного обучения для решения ряда проблем компьютерной алгебры, связанных с проблемой выбора алгоритма. А именно производится анализ эффективности использования одного из методов машинного обучения, известного как машина опорных векторов (SVM) для ускорения работы алгоритма построения базиса Грёбнера — $F_4$. С помощью машины опорных векторов для каждого идеала определяется оптимальная стратегия выбора $S$-полиномов для редукции.

## 2. Основная часть

### 2.1. Используемые обозначения

$k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от $n$ переменных над полем $k$;
$\mathrm{lt}(f)$ — старший моном многочлена $f$;
$\mathrm{lt}(f)$ — старший коэффициент многочлена $f$;
$\mathrm{lt}(f) = \mathrm{lt}(f) \cdot \mathrm{lt}(f)$ — старший терм многочлена $f$;
$\mathrm{lcm}(m_1,\ m_2)$ — наименьшее общее кратное мономов $m_1$ и $m_2$;
$S(f, g) = \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lt}(f),\ \mathrm{lt}(g))}{\mathrm{lt}(f)} f - \frac{\mathrm{lcm}(\mathrm{lt}(f),\ \mathrm{lt}(g))}{\mathrm{lt}(g)} g$ — $S$-полином.

### 2.2. Базисы Грёбнера

Базис Грёбнера — широко используемый инструмент современной алгебры. В том числе, он используется при решении систем полиномиальных уравнений; с его помощью решается проблема вхождения многочлена в полиномиальный идеал.

Рассмотрим кольцо многочленов от $n$ переменных $k[x_1, \ldots, x_n]$. Зафиксируем некоторый мономиальный порядок на переменных. Это позволяет для каждого ненулевого многочлена определить старший моном, старший коэффициент и старший терм.

Определение. *Базисом Грёбнера* полиномиального идеала $I$ называется конечная система порождающих, такая, что для любого ненулевого $f \in I$ найдется $g \in G$, такой что $lm(g)|lm(f)$.

Определение. *Редуцированным базисом Грёбнера* полиномиального идеала $I$ называется его базис Грёбнера $G$, такой, что:

1) коэффициент при старшем мономе каждого $g \in G$ равен единице;
2) никакой из мономов никакого $g \in G$ не делится ни на один старший моном других элементов базиса;

Пусть $I$ — полиномиальный идеал, и задано некоторое мономиальное упорядочение. Тогда существует единственный редуцированный базис Грёбнера идеала $I$.

Определение. Фиксируем мономиальный порядок. Пусть $f$ и $g$ — два многочлена, причем $g \neq 0$. Пусть также $(g)$ делит $m$ — один из мономов многочлена $f$, то есть $m = u\,\mathrm{lt}(g)$ для некоторого монома $u$. Тогда переход

$$f \underset{g}{\longrightarrow} h = f - ug$$

назовем *элементарной редукцией $f$ по $g$.*

Определение. Многочлен $f$ *редуцируется* к многочлену $r$ по множеству $B = \{g_1, \ldots, g_n\}$ (обозначается $f \underset{B}{\longrightarrow} r$), если найдется конечная последовательность элементарных редукций с началом $f$, концом $r$ и делителями $g_i$ из $B$. Многочлен $r$ называется *остатком редукции.* На этом критерии основан один из алгоритмов нахождения базиса Грёбнера — *алгоритм Бухбергера*, который прост в реализации и интерпретации, однако весьма неэффективен с точки зрения вычислений из-за большого числа редукций $S$-полиномов.

Теорема (Критерий S-пар Бухбергера). *Базис $G$ полиномиального идеала $I$ в $k[x_1, \ldots, x_n]$ является его базисом Грёбнера тогда и только тогда, когда любой $S$-полином от любых двух полиномов базиса редуцируется к 0 по этому базису.*

### 2.3. Машина опорных векторов (SVM)

Определение. *Машина опорных векторов (Support Vector Machine)* — одна из наиболее популярных методологий машинного обучения, применяемая для задач классификации и регрессионного анализа. Этот метод принадлежит к семейству линейных классификаторов. Основная его идея — перевод исходных векторов в пространство более высокой размерности и поиск разделяющей гиперплоскости с максимальным зазором в этом пространстве. Две параллельные гиперплоскости строятся по обеим сторонам гиперплоскости, разделяющей классы. Разделяющей гиперплоскостью будет гиперплоскость, максимизирующая расстояние до двух параллельных гиперплоскостей. Алгоритм работает в предположении, что чем больше разница или расстояние между этими параллельными гиперплоскостями, тем меньше будет средняя ошибка классификатора.

Для оценки работы SVM необходимо выбрать некоторый способ померить качество классификации, то есть выбрать *метрику качества.* К наиболее известным метрикам качества относятся *accuracy (доля правильных ответов), precision (точность), recall (полнота), Roc-Auc (площадь под Roc-кривой).*

### 2.4. Алгоритм $F_4$

Алгоритм $F_4$ является одним из наиболее популярных алгоритмов для вычисления базиса Грёбнера. Он был предложен Ж.-Ш. Фожером в 1999 году, и является одним из самых быстрых на сегодняшний день.

Его идея заключается в следующем. Пусть есть некоторое конечное множество многочленов $F$. По этому множеству строится большая разреженная матрица, строки которой соответствуют многочленам из $F$, а столбцы — мономам. В матрице записаны коэффициенты многочленов при соответствующих мономах. Столбцы матрицы отсортированы согласно выбранному мономиальному упорядочению (старший моном соответствует первому столбцу). Приведение такой матрицы к ступенчатому виду позволяет узнать базис линейной оболочки многочленов из $F$ в пространстве многочленов. Пусть в классическом алгоритме Бухбергера требуется провести шаг редукции многочлена $f$ относительно $g$, и при этом $g$ должен быть домножен на моном $M$. В алгоритме $F_4$ в матрицу будут специально помещены $f$ и $Mg$. В [3] показано, что можно заранее подготовить множество всех потенциальных домноженных редукторов, которые могут потребоваться, и поместить их заранее в матрицу (такая процедура называется *символьным препроцессингом*).

Кроме того, вместо S-полиномов можно поместить в матрицу их левые и правые части (при редукции одной строки по другой автоматически получится S-полином). Наконец, третьим отличием от алгоритма Бухбергера является то, что в алгоритме $F_4$ разрешается поместить в одну матрицу части сразу нескольких S-полиномов, выбранных согласно какой-либо стратегии. Так, если на каждом шаге выбирается один S-полином, то он повторяет классический алгоритм Бухбергера. Другая крайность — когда на очередном шаге редуцируется множество всех имеющихся S-полиномов. Такой подход также не очень эффективен из-за больших размеров матриц. Автор алгоритма предложил *нормальную стратегию* выбора S-полиномов для редукции, согласно которой выбираются S-полиномы с наименьшей степенью левых и правых частей. Она дает хорошие эмпирические результаты для упорядочения DegRevLex и ее выбор является естественным для однородных идеалов.

Другой известной стратегией, которая применяется для выбора S-полиномов является *сахарная стратегия*, подробно рассмотренная в [4]. Для ее описания необходимо ввести понятие *сахара* $S_f$ для произвольного полинома $f$, лежащего в идеале $I$.

Определение.

1) Для образующих идеала $I$ полиномов $f_i$ сахар $S_{f_i} = \deg(f_i)$ равен степени (а не степени старшего члена).
2) Если $f$ - полином, для которого уже вычислен сахар, а $t$ - терм, то $S_{tf} = \deg(t) + S_f$.
3) Если $f = g + h$, и для $g$ и $h$ уже вычислен сахар, то $S_f = \max(S_g, S_h)$.

В сахарной стратегии выбираются $S$-полиномы с наименьшим сахаром.

### 2.5. Применение SVM для выбора стратегии. Предварительный анализ данных.

Эксперименты показывают, что в одних случаях более эффективной является нормальная стратегия, а в других случаях — сахарная. Существует ряд эвристик, которые позволяют предсказать выбор стратегии, однако однозначного правила до сих пор не существует. В данной работе с помощью SVM классификатора предсказывается оптимальная стратегия, нормальная или сахарная, для вычисления базиса Грёбнера идеала.

В системе компьютерной алгебры Sage была написана программа для генерации порождающих идеала. С ее помощью было сгенерировано три различных набора идеалов:

1) 225 идеалов в кольце многочленов от трех переменных $x, y, z$ с неотрицательными целыми коэффициентами над $\mathbb{Q}$. Для каждого идеала в сгенерированном

наборе данных число порождающих варьировалось от 2 до 4, максимальное число мономов в каждом полиноме равнялось 3 и максимальная степень каждого полинома по каждой переменной не превосходила 3.
2) 200 идеалов в кольце многочленов от трех переменных $x, y, z$ с неотрицательными коэффициентами над $\mathbb{Q}$. Число порождающих 2 или 3, максимальная степень по каждой переменной и максимальное число мономов в полиноме не превосходило 3.
3) 225 идеалов над $\mathbb{Z}_2$. Число порождающих от 2 до 4, максимальная степень по каждой переменной и максимальное число мономов в полиноме не превосходило 3.

Такие ограничения понадобились, чтобы ограничить сложность и время работы алгоритма.

Каждый набор идеалов был обработан следующим образом. Для каждого идеала было извлечено 8 признаков:

1) число порождающих;
2) максимальная из степеней порождающих по какой-либо из переменных;
3) максимальная из степеней порождающих;
4) максимальное число мономов среди порождающих;
5) минимальная из степеней порождающих;
6) минимальное число мономов среди порождающих;
7) индикатор того, что идеал однородный;
8) индикатор того, что идеал унивариантный.

Таким образом, каждому из идеалов был сопоставлен вектор из восьми числовых признаков.

Затем для каждого идеала был найден базис Грёбнера с использованием как нормальной, так и сахарной стратегии, при этом было замерено число шагов алгоритма в каждом случае. В качестве оптимальной стратегии была выбрана стратегия с меньшим числом шагов, а в случае, когда число шагов совпало для обоих стратегий, предпочтение отдавалось нормальной стратегии.

Перед применением машинного обучения был произведен отбор признаков. Оказалось, что последний признак (индикатор унивариантности идеала) для наборов данных является неинформативным, поэтому он был исключен из рассмотрения. Также был проведен корреляционный анализ и посчитаны попарные корреляции между признаками. Поскольку высоко коррелированных признаков не оказалось, был оставлен набор из данных семи признаков.

С помощью алгоритма машинного обучения, известного как *случайный лес (random forest)* была произведена оценка важности признаков (для первого набора данных) и получены следующие результаты:

| Feature name | Importance |
|---|---|
| min_total_degree | 0.299 |
| max_total_degree | 0.235 |
| min_monomial_num | 0.173 |
| n_gens | 0.139 |
| max_monomial_num | 0.131 |
| is_homogeneous | 0.02 |
| max_degree | 0.004 |

Из таблицы видно, что наиболее информативными являются признаки, которые отвечают за степени образующих идеала.

Таблица 1

Число редукций при пошаговом выборе стратегии

| Номер dataset | ML | Sugar Strategy | Normal Strategy |
|---|---|---|---|
| 1 | 754 | 936 | 799 |
| 2 | 632 | 696 | 669 |
| 3 | 732 | 837 | 777 |

Таблица 2

Число редукций при предварительном выборе стратегии

| Номер | ML | Sugar Strategy | Normal Strategy |
|---|---|---|---|
| 1 | 559 | 653 | 587 |
| 2 | 503 | 526 | 514 |
| 3 | 564 | 579 | 576 |

### 2.6. Результаты экспериментов

После предварительного анализа данных мы приступили к выбору оптимальной стратегии с помощью SVM (был использован классификатор svm из стандартной библиотеки python sklearn). Программа работает в двух различных режимах: пошаговый выбор стратегии на каждой итерации алгоритма и разовый выбор стратегии перед вычислением базиса Грёбнера всего идеала. Плюсом первого подхода является большая гибкость, на каждом шаге алгоритм подстраивается под текущую задачу. При втором подходе SVM классификатор применяется при обработке идеала лишь единожды, не приходится на каждом шаге извлекать признаки для предсказания стратегии. За счет этого происходит экономия числа операций, но теряется гибкость.

Была проведена серия экспериментов для трех сгенерированных наборов данных как с пошаговым выбором стратегии, так и с предварительным выбором стратегии. В каждом эксперименте данные были разделены на обучающую и тестовую выборки с test_size = 0.2. Для измерения качества работы классификатора измерялось суммарное число итераций, необходимое для вычисления всех базисов Грёбнера из тестовой выборки, а затем сравнивалось с числом итераций при работе обычного $F_4$ без машинного обучения с каждой из стратегий. Для пошагового выбора стратегии было замерено число изменений стратегии в процессе работы алгоритма (без учета выбора стратегии перед началом обработки идеала). Результаты экспериментов при пошаговом выборе стратегии для каждого из трех множеств сгенерированных идеалов представлены в таблице 1, а результаты при предварительном выборе стратегии в таблице 2.

В первом эксперименте для идеалов с неотрицательными целыми коэффициентами над $\mathbb{Q}$ применение машинного обучения позволило сократить число итераций, необходимых для вычисления базиса Грёбнера как при пошаговом выборе стратегии, так и при выборе стратегии в самом начале. При этом пошаговый выбор стратегии показал лучшие результаты. Во втором эксперименте для идеалов с целыми коэффициентами над $\mathbb{Q}$ машинное обучение позволило уменьшить количество итераций, хотя и не так сильно. При рассмотрении идеалов над $\mathbb{Z}_2$ картина аналогичная. При этом при пошаговом выборе стратегии сокращение больше, чем при предварительном выборе стратегии.

## 3. Заключение

В работе продемонстрировано, что применение машинного обучения позволяет оптимизировать работу алгоритма $F_4$. С помощью метода машинного обучения, известного как машина опорных векторов, удалось добиться сокращения числа итераций и тем самым ускорить работу алгоритма.

В дальнейшем возможно расширить число стратегий выбора полиномов для редукции, использовать для предсказания другие методы машинного обучения и рассмотреть применение машинного обучения для оптимизации альтернативных алгоритмов вычисления базиса Грёбнера.

## Литература

1. *Z. Huang.* Machine learning and computer algebra. http://www-ipv4.cl.cam.ac.uk/techreports/UCAM-CL-TR-884.pdf
2. *Z. Huang, M. Englandy, J. Davenport, and L. Paulson.* Using Machine Learning to Decide When to Precondition Cylindrical Algebraic Decomposition With Groebner Bases. — SYNACS-2016 — p. 45–52.
3. *J.-C. Faugère.* A new efficient algorithm for computing Groebner bases ($F_4$) — Journal of Pure and Applied Algebra. — 1999. — vol. 139. — no. 1. — p. 61–68
4. *A. Giovini, T. Mora, G. Niesi, L. Robbiano, C. Traverso.* "One sugar cube, please" or Selection strategies in the Buchberger algorithm. — ISSAC-1991. — p. 49–54.

UDC 512.552.12

# Machine learning application for the improvement of the $F_4$ algorithm for Groenber basis computation

**M. I. Tikhonova*, A. I. Zobnin†**

* *Department of Higher Algebra*
*Lomonosov Moscow State University*
*Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia*
† *Faculty of Computer Science*
*National Research University Higher School of Economics*
*Kochnovsky Proezd 3, Moscow, 125319, Russia*

Email: m_tikhonova94@mail.ru,alexey.zobnin@gmail.com

Groenber basis computation of a polynomial ideal is an important problem of computer algebra. At the same time it is computationally difficult. For its solution various algorithms were proposed. Most of them use different heurestics. In this paper we examine the applicability of machine learning for the optimization of one of the algorithms, namely $F_4$ algorithm. A range of different experiments were also performed which showed the efficiency of the usage of one of the machine learning methods, known as support vector machine, for the $F_4$ algorithm.

**Key words and phrases:** computer science, computer algebra, machine learning, support vector machine, Groebner basis.

UDC 517.962.22

# Computing solutions of linear Mahler equations

**F. Chyzak*, Th. Dreyfus†, Ph. Dumas*, M. Mezzarobba‡**

* *INRIA, Université Paris-Saclay (France)*
† *Université Claude Bernard Lyon 1 (France)*
‡ *CNRS, Sorbonne Universités, Université Pierre et Marie Curie Paris 6 (France)*

Email:
frederic.chyzak@inria.fr,dreyfus@math.univ-lyon1.fr,philippe.dumas@inria.fr,marc@mezzarobba.net

Mahler equations relate evaluations of the same function $f$ at iterated $b$th powers of the variable. They arise in particular in the study of automatic sequences and in the complexity analysis of divide-and-conquer algorithms. Recently, the problem of solving Mahler equations in closed form has occurred in connection with number-theoretic questions. A difficulty in the manipulation of Mahler equations is the exponential blow-up of degrees when applying a Mahler operator to a polynomial. In this work, we present algorithms for solving linear Mahler equations for series, polynomials, and rational functions, and get polynomial-time complexity under a mild assumption. Incidentally, we develop an algorithm for computing the gcrd of a family of linear Mahler operators.

**Key words and phrases:** Mahler equations, rational solutions, series solutions, complexity, transcendence.

УДК 517.962.22

# Построение решений линейных уравнений Малера

**Ф. Шизак*, Т. Дрейфюс†, Ф. Дюма*, М. Меззаробба‡**

* *ИНРИА, Университет Париж-Сакле (Франция)*
† *Университет Лион 1 им. Клода Бернара (Франция)*
‡ *СНРС, Университет Сорбонна, Университет Париж 6 им. П. и М. Кюри (Франция)*

Email:
frederic.chyzak@inria.fr,dreyfus@math.univ-lyon1.fr,philippe.dumas@inria.fr,marc@mezzarobba.net

Уравнения Малера связывают функции, получающиеся из исходной функции $f$ заменой независимой переменной некоторой ее целой степенью, показатель которой кратен заданному целому $b$. Эти уравнения возникают, например, при изучении автоматных последовательностей и при анализе сложности алгоритмов, основанных на принципе “разделяй и властвуй”. Недавно было обнаружено, что задача решения уравнений Малера в замкнутом виде связана с теоретико-числовыми вопросами. Одна из трудностей работы с уравнениями Малера — это экспоненциальный рост степеней, когда оператор Малера применяется к полиному. Мы предлагаем алгоритмы решения линейных уравнений Малера в виде рядов, полиномов и рациональных функций, и получаем для этих алгоритмов полиномиальную оценку сложности при необременительных предварительных предположениях. Мы также предлагаем алгоритм нахождения НОД семейства линейных операторов Малера.

**Ключевые слова:** уравнения Малера, решения в виде рациональных функций, решения в виде рядов, сложность, трансцендентность.

# Сессионные доклады

# The sessional presentations

UDC 519.7

# EG-eliminations as a tool for computing rational solutions of linear $q$-difference systems of arbitrary order with polynomial coefficients

**S. A. Abramov**

*Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences*
*Vavilov str. 40, CCAS, Moscow, 119333, Russia*

Email: sergeyabramov@mail.ru

We consider systems of linear $q$-difference equations with polynomial coefficients. The equations of systems can be of arbitrary order. Using EG-eliminations, we propose for such systems, a direct algorithm for finding rational solutions, i.e., solutions whose components are rational functions. The algorithm is direct, i.e., it does not require preliminary cyclic vector method applying, or another type of uncoupling of the system.

**Key words and phrases:** linear $q$-difference systems, induced recurrent systems, EG-eliminations, rational solutions.

## 1. Introduction

Algorithms for $q$-difference equations are of interest for many areas of mathematics, especially for combinatorics and partitions theory ( [1]).

Below, we consider linear $q$-difference systems with coefficients belonging to $\mathbb{K}[x]$, where $\mathbb{K} = K(q)$, and $K$ is a field of characteristic 0, and $q$ is transcendental over $K$. A system is of the form

$$A_r(x)y(q^r x) + \cdots + A_1(x)y(qx) + A_0(x)y(x) = b(x), \tag{1}$$

where

— $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_r(x)$ are $m \times m$-matrices, whose elements belong to $\mathbb{K}[x]$ (we write: $A_0(x),\ A_1(x),\ \ldots,\ A_r(x) \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}[x])$), it is supposed that the matrices $A_0(x)$, $A_r(x)$ are non-zero,

— $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_m(x))^T \in \mathbb{K}[x]^m$ is the right-hand side of the system,

— $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x))^T$ is an unknown column.

$r$ is the *order* of system (1).

The system

$$A_r(x)y(q^r x) + \cdots + A_1(x)y(qx) + A_0(x)y(x) = 0 \tag{2}$$

is the homogeneous system for (1). Systems (1), (2) can be rewritten using the $q$-shift operator $\sigma_q$: $\sigma_q y(x) = y(qx)$. The matrices $A_r(x)$ and $A_0(x)$ are called the *leading* and, resp., the *trailing* matrices of systems (1), (2).

One of known computer algebra approaches to the search for solutions of linear systems is the cyclic vector method, which transforms a system into a scalar equation (a scalar equation can be considered as a system having only one equation involving one unknown), which is equivalent in in a certain sense to the original system. Here the main problem is the overgrowth of the coefficients. This is the reason why this method works in general, for systems of small orders. This stimulates elaborating of direct algorithms which do not require preliminary cyclic vector method applying, or another type of uncoupling of a system.

In this paper we consider direct algorithms for constructing the solutions of a system having the form (1) with $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ belonging to the field $\mathbb{K}(x)$ of rational functions of $x$ over $\mathbb{K}$. We call such solutions *rational.* If $y(x) \in \mathbb{K}[x]^m$, then this solution is *polynomial* (a particular case of rational solutions). Rational solutions may be a building block for other types of solutions, and more general, such algorithms may be a part of various computer algebra algorithms.

We will also need solutions $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))^T \in \mathbb{K}((x))^m$ whose components are formal Laurent series (*Laurent* solutions).

We will suppose that equations of the original system as well as equations of the homogeneous system (2), are independent over $\mathbb{K}[x, \sigma_q, \sigma_q^{-1}]$ (i.e., those systems are of *full rank*).

Various questions related the search for rational solutions both for the scalar equations and for systems were discussed in, e.g., [2–8] For the $q$-difference case, some algorithms were proposed in, e.g., [9], [10] for constructing all rational solutions of scalar linear equations and for first-order linear normal systems, i.e., the systems of the form

$$y(qx) = A(x)y(x), \tag{3}$$

where $A(x)$ is a non-singular (invertible in $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}(x))$) matrix.

The possible singularity of the leading or the trailing matrices give rise to interruptions of the search for solutions of a system (by the way, if the system (3) is rewritten as $I_m y(qx) - A(x)y(x) = 0$, where $I_m$ is the identity $m \times m$-matrix then $-A(x)$ is the trailing matrix of the system.

The same can be said about the possible singularity of the leading or the trailing matrices of the so called *induced* recurrent (difference) system: a formal series $\sum a_n x^n, a_n \in \mathbb{K}^m$, satisfies the original $q$-difference system if and only if the sequence $(a_n)$ of $m$-dimensional vectors satisfies the induced recurrent system. In Section 2, we discuss the algorithm of EG-eliminations which allows to transform the original $q$-difference system and the induced recurrent system into systems having a non-singular leading or trailing matrix. After computing the determinant of the non-singular leading matrix one can find a lower bound for valuations of formal Laurent series solutions. An upper bound for degrees of polynomial solutions can be found using the non-zero determinant of the trailing matrix (see subsection 2.2).

As for rational solutions, the search for them consists of two steps:

1) constructing a so called universal denominator or, in another terminology, a denominator bound, and

2) constructing the corresponding numerators of the components of the solutions.

The numerators mentioned in step 2 are the components of polynomial solutions of the system obtained from the original system by means of a special substitution on the base of the universal denominator constructed on step 1. Using the leading and the trailing matrices of the original system (possibly that after applying EG-eliminations) allows to construct the part of the universal denominator that contains only the factors other than $x$. Concerning the factors of the form $x^k$, it is remarked in [10, Sect. 2.2] that a bound for $n$ can be obtained when one considers rational solutions as Laurent series solutions at $x = 0$.

The first algorithm and an example of constructing polynomial solutions of $q$-difference systems of arbitrary order were given in [13, Sect. 3.6, Ex. 9]. Concerning the universal denominators, note that strictly speaking the paper [10] is dedicated to first-order systems. However, in that paper, some general principals are formulated which allow to solve the problem of constructing rational solutions in the case of higher order systems, by modifying algorithms for the difference case (such algorithms were published earlier). In [10], [11] it is noted that for constructing the part of the universal denominator that contains only the factors other than $x$, it is reasonable to use the slightly modified version ($x + i \to xq^i$) of an algorithm for the difference case (such an algorithm for higher order difference systems was proposed in [12]). The treatment of rational solutions as Laurent ones to work with the factors $x^k$ was considered also in [10].

In the present paper we follow this natural plan and obtain an algorithm for constructing rational solutions of systems of the form (1) (we suppose that the system is of full rank). More, in Section 3 we mention another approach, transferring to the $q$-difference case the approach which was discussed in [6], [7], [8] for constructing universal denominators in the difference case. For constructing polynomial solutions the algorithms from [13], [18], [16] can be used. Those algorithms are also based on EG-eliminations.

In [17], J.Middeke shown that the Popov normal form can also be used for finding bounds for the exponent $k$ and the degrees of polynomial solutions. At the same time, comparisons of the different tools were not carried out.

## 2. Preliminaries

### 2.1. Embracing systems

Consideration of the so-called embracing systems, described in Section 2.2, allows us to avoid the assumption of invertibility of the matrices $A_r(x)$, $A_0(x)$.

For any system $S$ of the form (1) one can construct an l-embracing system $\bar{S}$

$$\bar{A}_r(x)y(q^r x) + \cdots + \bar{A}_1(x)y(qx) + \bar{A}_0(x)y(x) = \bar{b}(x), \tag{4}$$

with the leading matrix $\bar{A}_r(x)$ being non-singular, and with the set of solutions containing all the solutions of the system $S$. Similarly, one can construct a t-embracing system $\bar{\bar{S}}$

$$\bar{\bar{A}}_r(x)y(q^r x) + \cdots + \bar{\bar{A}}_1(x)y(qx) + \bar{\bar{A}}_0(x)y(x) = \bar{\bar{b}}(x), \tag{5}$$

whose trailing matrix is non-singular, and with the set of solutions containing all the solutions of the system $S$. All the entries of the matrices and of the right-hand sides of (1), (2) are in $\mathbb{K}[x]$. It is possible that the matrices $\bar{A}_0(x), \bar{\bar{A}}_r(x)$ are zero, either both or one of them.

The construction of the embracing systems can be performed with the algorithms EG ( [13]) or its improved version ( [18]).

**Remark 1** If $\bar{S}$ and $\bar{\bar{S}}$ are l- and t-embracing systems constructed for (1) by the algorithm EG then l- and t-embracing systems constructed by the algorithm EG for (2), coincide with the homogeneous systems corresponding to $\bar{S}$ and $\bar{\bar{S}}$.

The algorithm EG is applicable also to difference (recurrent) systems. Sequential solutions (i.e., solutions having the form of sequences) of such systems are interesting for us.

### 2.2. Induced recurrent systems

A formal Laurent series $\sum a_n x^n, a_n \in \mathbb{K}^m$ satisfies original $q$-difference system (1), if and only if the sequence $(a_n)$ of $m$-dimensional vectors satisfies the *induced* recurrent system

$$P_l(n)a_{n+l} + \cdots + P_t(n)a_{n+t} = c_n, \tag{6}$$

where $(c_n)$ is the sequence of coefficients of the Laurent series which is the expansion of the right-hand side $b(x)$ of the original $q$-difference system. The induced system can be constructed in 3 steps:

1) rewrite the original system in the operator-matrix form $My = b$, where $M \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}[x, \sigma_q])$,

2) in the matrix $M$, replace $\sigma_q \to q^n$, $x \to \sigma^{-1}$, where $\sigma$ is the shift-operator: $\sigma f_n = f_{n+1}$ for any double sided sequence $(f_n)$,

3) rewrite the obtained system in the form (6).

Below, we will need the notion of the valuation of a series: for a non-zero Laurent series $f(x) = \sum f_i x^i$. The *valuation* of this series is

$$\mathrm{val} f(x) = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid f_i \neq 0\},$$

and conventionally $\mathrm{val} f(x) = \infty$ for the zero series $f(x)$. The valuation of the vector whose components are series, is the minimal valuation of the components.

The *degree* of the vector with polynomial components is the maximal degree of the components. The degree of the zero polynomial is $-\infty$.

If the induced system (6) is such that $\det P_t(n)$ is a non-zero polynomial in $q^n$, then one can find a lower bound for valuations of formal Laurent series solutions. An upper bound for degrees can be found using the non-zero determinant of the trailing matrix. The following theorem is a combined version of Theorem 1, 2 from [10].

**Theorem 1** *Let recurrent system* (6) *be such that if a formal Laurent series* $\sum a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{K}^m$ *(in particular, it can be a polynomial over* $\mathbb{K}^m$*) satisfies the original q-difference system* (1)*, then the sequence* $(a_n)$ *of m-dimensional vectors satisfies* (6)*. Let* $p_l(n) = \det P_l(n)$, $p_t(n) = \det P_t(n)$ *(thus,* $p_l(n), p_t(n)$ *are polynomials in* $q^n$*). In this case*

*(i) If the right-hand side* $b(x)$ *is a Laurent series, and*

— $p_l(n)$ *is a non-zero polynomial in* $q^n$,

— $N_l$ *is the set (possibly empty) of all integer roots of the equation* $p_l(n) = 0$,

— *the number* $\beta$ *does not exceed the valuation of the right-hand side of the original q-difference system (*$\beta = \infty$*, when the right-hand side* $b(x)$ *is the zero column vector),*

*then the valuation of any Laurent solution of system* (1) *cannot be less than*

$$\min(N_l \cup \{\beta\}) + l.$$

*(ii) If the right-hand side* $b(x)$ *is polynomial, and*

— $p_t(n)$ *is a non-zero polynomial in* $q^n$,

— $N_t$ *is the set (possibly empty) of all integer roots of the equation* $p_t(n) = 0$,

— *the number* $\gamma$ *does not exceed the degree of the right-hand side of the original q-difference system (*$\gamma = -\infty$*, when the right-hand side* $b(x)$ *is the zero column vector),*

*then the degree of any polynomial solution of system* (1) *cannot be bigger than*

$$\max(N_t \cup \{\gamma\}) + t.$$

If the leading or, resp., the trailing matrix of the induced system is singular then one can apply the corresponding version of the algorithm EG and with Theorem 1 find the needed bounds, this gives a key to construct Laurent and polynomial solutions.

## 3. Rational solutions

First, we find $U(x) \in \mathbb{K}(x)$ $(U(0) \neq 0)$ and $k \in \mathbb{Z}$ such that any rational solution $y(x)$ can be written as

$$y(x) = \frac{x^k}{U(x)} z(x), \tag{7}$$

where $z(x) \in \mathbb{K}[x]^m$. Then we produce the substitution (7) for $y(x)$, and after cleaning denominators we apply an algorithm for finding polynomial solutions. The dissimilarity between $x$ and other irreducible polynomials is such that if $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ is irreducible and $p(0) \neq 0$, then $p(q^h x)$ is also irreducible and relatively prime with $p(x)$ for any $h \in \mathbb{Z}$, and different values of $h$ give different irreducible polynomials. However this does not take place for the polynomial $x$, which is not relatively prime with $qx$. This gives the polynomial $x$ a special status, which is not the case for the difference equations, when any irreducible $p(x)$ (in particular, $p(x) = x$) is relatively prime with $p(x+1)$).

We have stated that any rational solution can be considered as a Laurent solution. Thus Theorem 1(ii) gives an opportunity to define $k$ for the factor $x^k$. As for the polynomial $U(x)$, we find it in accordance with our scheme, using the "difference" algorithm with the replacement of the shift $\sigma$ by the $q$-shift $\sigma_q$. We give some definitions and then describe the algorithm.

If $F(x)$ is a rational function then we denote by $\mathrm{den}F(x)$ the *denominator* of $F(x)$, i.e. a monic polynomial such that $F(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{den}F(x)}$ for a polynomial $f(x)$ which is co-prime with $\mathrm{den}F(x)$. If $F(x)$ is a vector with rational function components $F_1(x), \ldots, F_m(x)$ then $\mathrm{den}F(x)$ is the least common multiple (lcm) of $\mathrm{den}F_1(x), \ldots, \mathrm{den}F_m(x)$.

We write $f(x) \perp g(x)$ for relatively prime $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, and $f(x) \not\perp g(x)$, when the polynomials have a common divisor of positive degree.

Each polynomial $f(x) \in \mathbb{K}(x) \setminus \{0\}$ can be represented as $f(x) = x^v s(x)$, where $v \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ and the polynomial $s(x)$ is not divisible by $x$, i.e., $s(0) \neq 0$. In this case we will call $s(x)$ the *stem* of $f(x)$, we will use the notation $\nu(f(x))$ for $v$. If $\nu(f(x)) = \nu(g(x)) = 0$, then we can introduce the *$q$-dispersion set* of the polynomials $f(x)$ and $g(x)$:

$$\mathrm{qds}(f(x), g(x)) = \{h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \mid f(x) \not\perp g(q^h x)\}$$

and their *$q$-dispersion*:

$$\mathrm{qdis}(f(x), g(x)) = \max(\mathrm{qds}(f(x), g(x)) \cup \{-\infty\}).$$

Similarly to the difference case, the $q$-dispersion is either a non-negative integer, or is equal to $-\infty$, the latter takes place if and only if $f(x) \perp g(q^h x)$ for all $h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

As we have already said, if a polynomial $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ is irreducible and $\nu(p(x)) = 0$, then the polynomial $p(q^h x)$, $h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, is also irreducible, and such polynomials are relatively prime for different values of $h$. This implies that if $\nu(f(x)) = \nu(g(x)) = 0$, then $\mathrm{qds}(f(x), g(x))$ is a finite set. This set can be found, e.g., by computing all the roots having the form $\lambda = q^h$, $h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, of the equation $R(\lambda) = 0$, where $R(\lambda) = \mathrm{Res}_x(f(x), g(\lambda x))$, or by an analog of the algorithm of Y.Man and F.Wright ( [14]), which is originally for the difference case. We see that if an irreducible $p(x)$ has the form $p(x) = x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \ldots$ then $p(q^h x) = q^{lh}(x^l + q^{-h}a_{l-1}x^{l-1} + \ldots)$; it is important that $\deg g(x) = \deg g(q^h x)$ for all $h \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. (In [15], an algorithm was proposed which is applicable also in the case where $q$ is algebraic number which is not a root of 1.)

Thus, when $k$ is found, we have to construct such a polynomial $U(x)$ that possess the following properties

(a) $\nu(U(x)) = 0$,
(b) if the original system has a rational solution having the denominator $u(x)$, then $U(x)$ is divisible by the stem of $u(x)$.

When $k$ and $U(x)$ are known we can use substitution (7).

One can find $U(x)$ similarly to the universal denominator in the difference case ( [12]). In the algorithm, we use the notation $\gcd(f(x), g(x))$ for the greatest common divisor of polynomials $f(x), g(x)$.

*Set*
$A(x) = (\det \bar{A}_r(q^{-r}x))/x^{a_r}$, $B(x) = (\det \bar{\bar{A}}_0(x))/x^{a_0}$,
*where*
$a_r = \nu(\det \bar{A}_r(x))$, $a_0 = \nu(\det \bar{\bar{A}}_0(x))$.
*Compute* $H = \mathrm{qds}(A(x), B(x))$. *If* $H = \varnothing$ *then stop with* $U(x) = 1$ *(in the sequel we suppose that* $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_s\}$ *with* $h_1 > h_2 > \cdots > h_s$, $s \geqslant 1$*).*

*Set* $U(x) = 1$.
**for** $i$=*1* **to** $s$ **do**
$N(x) = \gcd(A(x), B(q^{h_i}x))$
$A(x) = A(x)/N(x)$
$B(x) = B(x)/N(q^{-h_i}x)$
$U(x) = U(x)\prod_{j=0}^{h_i} N(q^{-j}x)$.
**od**.
*Return* $U(x)$ *and stop.*

**Theorem 2** *Let each solution of the original q-difference system of the form* (1) *be also a solution of systems* (4), (5), *and* $\det \bar{A}_r(x)$, $\det \bar{\bar{A}}_0(x)$ *be non-zero. Then the polynomial* $U(x)$ *computed by the latter algorithm possesses properties (a), (b) formulated above.*

The main idea of the proof is similar to the idea used in [6], [8], [12] for the difference case. First of all, if $f(x), p(x)$ are polynomials and $p(x)$ is irreducible then the valuation $\mathrm{val}_{p(x)} f(x)$ is defined to be the greatest $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ such that $f(x)$ is divisible by $p(x)^n$ ($\mathrm{val}_{p(x)} 0 = \infty$, and $\mathrm{val}_{p(x)} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{val}_{p(x)} f(x) - \mathrm{val}_{p(x)} g(x)$. The valuation of a vector whose components are polynomials or rational functions is the minimal of the component valuations.

The following statement can be proven: For any rational solution $y(x)$ of (1) and any irreducible $p(x)$ we have

$$\mathrm{val}_{p(x)} y(x) \geqslant \max\left\{ -\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathrm{val}_{p(q^n x)} A(x),\ -\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \mathrm{val}_{p(q^{-n} x)} B(x) \right\}, \qquad (8)$$

and $\mathrm{val}_{p(x)} U(x)$ does not exceed the valuation of the right-hand side of (8).

Remark that similarly to the difference case (see [8]), inequality (8) can be taken as a base for another algorithm for constructing the polynomial $U(x)$. That algorithm uses the full factorization of $A(x), B(x)$ which is used also for the dispersion computation by the $q$-version of the Man and Wright algorithm. However the algorithm given above is more convenient for implementation.

## Acknowledgments

Partial supported by RFBR, project 16-01-00174-a.

## References

1. *G.E. Andrews.* $q$-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra. // CBMS Regional Conference Series. — 1986. — No. 66, AMS, R.I.
2. *S. Abramov, D. Khmelnov.* On valuations of meromorphic solutions of arbitrary-order linear difference systems with polynomial coefficients. // Proc. ISSAC'12. —2012. — P. 12–19.
3. *S. Abramov, M. Barkatou.* Rational solutions of first order linear difference systems. // Proc. ISSAC'98. — 1998, — P. 124–131.
4. *M. Barkatou.* Rational solutions of matrix difference equations: problem of equivalence and factorization. // Proc. ISSAC'99. — 1999. — P. 277–282.
5. *M. van Hoeij.* Rational solutions of linear difference equations // Proc. ISSAC'98. — 1998. — P. 120–123.
6. *A. Gheffar, S. Abramov.* Valuations of rational solutions of linear difference equations at irreducible polynomials // Adv. in Appl. Maths. — 2010. — P. 352–364.

7. *S. Abramov, A. Gheffar, D. Khmelnov* Rational Solutions of Linear Difference Equations: Universal Denominators and Denominator Bounds // Programming and Computer Software — 2012. — no. 2. — P. 78–86.
8. *S.A. Abramov, A. Gheffar, D. Khmelnov.* Factorization of polynomials and gcd computations for finding universal denominators // Proc. CASC'2010 — 2010. — P. 4–18.
9. *S. Abramov.* Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coefficients. // Programming Comput. Software — 1995 — no. 6 — P. 273–278.
10. *S. Abramov.* A direct algorithm to compute rational solutions of first order linear $q$-difference systems. // Discrete Mathematics. — 2002. — Vol. 246, no. 1. — P. 3–12.
11. *S. Abramov, M. Bronstein.* Linear algebra for skew-polynomial matrices.// INRIA. Rapport de recherche. No 4420, March 2002.
12. *S. Abramov, D. Khmelnov.* Denominators of rational solutions of linear difference systems of arbitrary order. // Programming Comput. Software. — 2012. — No. 2. — P. 84–91.
13. *S. Abramov.* EG–eliminations. // J. of Difference Equations and Applications — 1999. — Vol. 5. — P. 393–433.
14. *Y.K. Man, F.J. Wright.* Fast polynomial dispersion computation and its application to indefinite summation. // Proc. ISSAC'94. — 1994. — P. 175–180.
15. *S. Abramov, M. Bronstein.* Hypergeometric dispersion and the orbit problem. // Proc. ISSAC'00. — 2000. — P 8–13.
16. *D. Khmelnov.* Search for polynomial solutions of linear functional systems by means of induced recurrences. // Programming Comput. Software. — 2004. — no. 2 — P. 61–67.
17. *J. Middeke.* Denominator bounds and polynomial solutions for systems of $q$-recurrences over $\mathbb{K}(t)$ for constant $\mathbb{K}$. // Proc. ISSAC'17. — 2017. — P. 325–332.
18. *S. Abramov, M. Bronstein.* On solutions of linear functional systems. // Proc. ISSAC'2001. — 2001. — P. 1–6.


УДК 519.7

# EG-исключения как инструмент построения рациональных решений систем линейных $q$-разностных уравнений произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами

**С. А. Абрамов**

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333*

Email: sergeyabramov@mail.ru

Рассматриваются системы линейных $q$-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Уравнения системы могут иметь произвольные порядки. Для таких систем предлагается прямой алгоритм, использующий EG-исключения, поиска рациональных решений, т.е. решений, все компоненты которых являются рациональными функциями.

**Ключевые слова:** линейные $q$-разностные системы, индуцированные рекуррентные системы, EG-исключения, рациональные решения.

УДК 512.62+004.421.6

# Обобщённый дискриминант вещественного многочлена

**А. Б. Батхин**[*†]

[*] *Отдел № 4, сектор 2,*
*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН,*
*Миусская пл., 4, Москва, Россия, 125047*
[†] *Кафедра теоретической механики,*
*Московский физико-технический институт (государственный университет),*
*Институтский пер., д. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия, 141701*

Email: batkhin@me.com

Рассматривается обобщение классического дискриминанта вещественного многочлена, которое определяется с помощью линейного оператора Хана, понижающего степень многочлена на единицу. Исследуется структура обобщённого дискриминантного множества вещественного многочлена, т. е. множество всех значений пространства коэффициентов, при которых многочлен и результат применения к нему оператора Хана имеют равные корни. Структура обобщённого дискриминантного множества многочлена степени $n$ описывается в терминах разбиения числа $n$. Предлагается конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации обобщённого дискриминантного множества в пространстве коэффициентов многочлена. Основные алгоритмы, описанные в работе, реализованы в виде библиотеки в системе компьютерной алгебры Maple.

**Ключевые слова:** теория исключения, обобщённый дискриминант, оператор Хана, компьютерная алгебра.

## 1. Введение

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда для некоторого многочлена $f(x)$ необходимо сформулировать условия на его коэффициенты, при выполнении которых этот многочлен имеет корни, связанные определённым соотношением: $g(t_i) = t_j$, где $t_i, t_j$ — корни многочлена $f(x)$. Например, условие целочисленной соизмеримости (кратности) корней характеристического многочлена матрицы линейной части уравнений движения вблизи положения равновесия выделяет в пространстве коэффициентов многочлена (или параметров уравнений движения) многообразия, на которых имеется резонанс между собственными частотами колебаний. Для многих систем ортогональных многочленов важным является условие на взаимное расположение их корней. Частным случаем такой ситуации является случай кратности корней.

Выполняя исследования устойчивости положения равновесия многопараметрических систем Гамильтона, автор обратил внимание, что множества в пространстве коэффициентов вещественного многочлена, на которых корни последнего либо кратные (т. н. дискриминантное множество) либо соизмеримые (резонансное множество), обладают определённой иерархической структурой. С одной стороны, эта иерархия оказалась тесно связанной со структурой разбиения натурального числа $n = \deg f(x)$, с другой стороны, компоненты различных размерностей таких множеств могли быть описаны с помощью наглядной геометрической конструкции, а именно, каждая компонента следующей размерности получалась как некоторая линейчатая поверхность, где роль направляющей играла одна из компонент меньшей размерности. В данной работе автор попытался несколько расширить полученные конструкции и ее результатом стало некоторое обобщение классического объекта — дискриминанта $D(f)$ многочлена $f(x)$. Это обобщение естественным образом включило в себя как классический дискриминант, так и его аналоги, возникающие при использовании $q$-дифференциального и разностного операторов, имеющих, и разработанное исчисление [1, 2], и важные приложения [3, 4]. Оказалось возможным перенести конструкции, разработанные ранее для исследования дискриминантного [5–7] и резонансного [8–10] множеств на более общий случай.

Цель данной работы — предложить конструктивный алгоритм вычисления параметрического представления всех компонент $g$-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f)$ приведённого вещественного многочлена $f(x)$.

## 2. Обобщённый дискриминант и его вычисление

Пусть $f_n(x)$ — приведённый многочлен $n$-й степени с вещественными коэффициентами:

$$f_n(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n. \tag{1}$$

Вещественное $n$-мерное пространство $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ его коэффициентов $a_1, a_2, \ldots a_n$ назовём **пространством коэффициентов** многочлена (1).

Пусть $\mathcal{P}$ — пространство многочленов над $\mathbb{R}$ и пусть на $\mathbb{R}$ определён диффеоморфизм

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x),$$

который индуцирует некоторый линейный оператор $\mathcal{A}$ на $\mathcal{P}$, удовлетворяющий двум условиям.

1. Условие понижения порядка: $\deg(\mathcal{A} f_n)(x) = n - 1$. В частности, $\mathcal{A} x = 1$.
2. Аналог правила Лейбница: $(\mathcal{A}\, x f_n)(x) = f_n(x) + g(x)(\mathcal{A} f_n)(x)$.

Здесь мы ограничимся случаем, когда

$$g(x) \equiv qx + \omega, \quad q \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}. \tag{2}$$

Через $g^i$ обозначим $i$-ю итерацию диффеоморфизма $g$, $i \geqslant 0$. Тогда в силу (2) $g^i(x) = q^i x + [i]_q \omega$.

Оператор $\mathcal{A}$, индуцированный этим диффеоморфизмом, назовём оператором Хана и обозначим, следуя [4], символом $\mathcal{A}_{q,\omega}$. Он был введен Вольфгангом Ханом (Wolfgang Hahn) [11] в работе 1949 года. Там же показано, что оператор $\mathcal{A}_{q,\omega}$, определённый на $\mathcal{P}$, имеет вид

$$(\mathcal{A}_{q,\omega} f)(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{f(qx+\omega) - f(x)}{(q-1)x + \omega}, & x \neq \dfrac{\omega}{1-q}, \\ \dfrac{1}{1-q^{-1}} f'\left(\dfrac{\omega}{1-q}\right), & x = \dfrac{\omega}{1-q}, \end{cases} \tag{3}$$

для всех значений параметров $q \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$, $\omega \in \mathbb{R}$ и $(q, \omega) \neq (1, 0)$. В силу свойств 1 и 2 оператора $\mathcal{A}_{q,\omega}$ будем называть его $g$-производной.

Очевидно, что оператор Хана $\mathcal{A}_{q,\omega}$ может рассматриваться как обобщение следующих операторов:

— $q$-дифференциального оператора Джексона $(\mathcal{A}_q f)(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$, при $\omega = 0$ и $q \neq 1$;
— разностного оператора $(\Delta_\omega f)(x) = \frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega}$ при $q = 1$;
— классического дифференциального оператора $d/dx$ при $(q, \omega) \to (1, 0)$.

$q$-Аналоги многих математических объектов появились уже в работах Леонарда Эйлера, а затем получили свое развитие в трудах многих математиков (см. исторический обзор в [2]). Разработанное $q$-исчисление находит многочисленные приложения в различных разделах современной математики и теоретической физики [1–3, 12].

Ниже приведём некоторые определения и обозначения, ставшие стандартными для $q$-исчисления.

**Определение 1** *Определим* $q$***-скобку*** $[a]_q$ *числа* $a$, ***сдвинутый*** $q$***-факториал (***$q$***-символ Похгаммера)*** $(a;q)_n$, $q$***-факториал*** $[n]_q!$, $q$***-биномиальные (гауссовы) коэффициенты*** $\binom{n}{k}_q$ *следующим образом*

$$[a]_q = \frac{q^a - 1}{q - 1}, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad (a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - aq^k\right), (a;q)_0 = 1,$$

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n}[k]_q = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}, q \neq 1, \quad \binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!\,[k]_q!} = \prod_{i=1}^{k}\frac{q^{n-i+1}-1}{q^i - 1}.$$

*При* $q \to 1$ *все определённые выше объекты становятся классическими.*

Для стандартного бинома $(x-a)^n$ его $g$-аналогом является $g$-бином

$$\{x;t\}_{n;g} \equiv \prod_{i=0}^{n-1}(x - g^i(t)), \quad \{x;t\}_{0;q} = 1. \tag{4}$$

**Лемма 1** $g$*-производные* $g$*-бинома* (4) *по переменной* $x$ *и параметру* $t$ *суть*

$$(\mathcal{A}_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(x) = [n]_q\{x;t\}_{n-1;g}, \quad (\mathcal{A}_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(t) = -[n]_q\{x;g(t)\}_{n-1;g}.$$

**Лемма 2** $k$*-я* $g$*-производная* $g$*-бинома* (4) *по переменной* $x$*, равна*

$$(\mathcal{A}^k_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(x) = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}\{x;t\}_{(n-k);g}.$$

$k$*-я* $g$*-производная* $g$*-бинома* (4) *по параметру* $t$*, равна*

$$(\mathcal{A}^k_{q,\omega}\{x;t\}_{n;g})(t) = (-1)^k q^{\binom{k}{2}}\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}\{x;g^k(t)\}_{(n-k);g}.$$

**Лемма 3** *Для любого* $m$*,* $0 < m \leqslant n$ *имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^i q^{\binom{i}{2}}\binom{m}{i}_q\{t_2;t_1\}_{(k-1);g}\{x;g^k(t_1)\}_{(n-k);g} = \{x;t_2\}_{m;g}\{x;g^m(t_1)\}_{(n-m);g}.$$

Для многих приложений связанных с теорией ортогональных многочленов и их различных обобщений [12, 13] важно уметь определять, при каких условиях на коэффициенты $a_i$, $i = 1,\ldots,n$, многочлена $f_n(x)$ последний имеет корни, связанные друг с другом соотношением $g(t_i) = t_j$.

**Определение 2** *Пару корней* $t_i$*,* $t_j$*,* $i,j = 1,\ldots,n$*,* $i \neq j$*, многочлена* $f_n(x)$ *назовём* $g$***-связанной****, если* $g(t_i) = t_j$ *для* $g(x)$ *вида* (2).

Рассмотрим следующую задачу:
*Исследовать в пространстве коэффициентов* $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ *многочлена* $f_n(x)$ *множество, на котором этот многочлен имеет по крайней мере пару* $g$*-связанных корней* $t_i, t_j$*. Такое множество назовём* $g$***-дискриминантным*** *множеством многочлена* $f_n(x)$ *и обозначим* $\mathcal{D}_g(f_n)$*.*

По аналогии с классическим дискриминантом определим обобщённый дискриминант $D(f,\mathcal{A})$, индуцированный линейным оператором $\mathcal{A}$.

**Определение 3** *Определим* ***обобщённый дискриминант*** $D(f;\mathcal{A})$ *многочлена* $f(x)$*, порождённый линейным оператором* $\mathcal{A}$*, как результант пары многочленов* $f(x)$ *и* $(\mathcal{A}f)(x)$*:* $D(f;\mathcal{A}) = (-1)^{n(n-1)/2}\mathrm{Res}\,(f, \mathcal{A}f)$.

*Для оператора Хана* (3) $\mathcal{A}_{q,\omega}$ *соответствующий обобщённый дискриминант многочлена* $f(x)$ *обозначим для краткости* $D_g(f)$.

**Определение 4** ***Последовательностью*** $\mathrm{Seq}_g^{(k)}(t_1)$ $g$***-связанных корней*** *длины* $k$ *назовём конечную последовательность* $\{t_i\}$, $i = 1,\dots,k$, *каждый член которой начиная со второго, является* $g$*-связанным корнем предыдущего члена последовательности:* $g(t_i) = t_{i+1}$. *Начальный корень* $t_1$ *назовём* ***порождающим корнем*** *соответствующей последовательности.*

$g$-Дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ для каждого фиксированного набора параметров $(q,\omega)$ состоит из конечного числа многообразий $\mathcal{V}_k$, на каждом из которых многочлен $f_n(x)$ имеет $k$ последовательностей $g$-связанных корней $\mathrm{Seq}_g^{(l_i)}(t_i)$ длины $l_i$ с различными порождающими корнями $t_i$, $i = 1,\dots,k$. Суммарная длина этих последовательностей $g$-связанных корней равна степени $n$ многочлена $f_n(x)$.

Структуру корней многочлена удобно определить с помощью субрезультантов пары многочленов $f_n(x)$ и $(\mathcal{A}_{q,\omega}f_n)(x)$, которые могут быть определены по аналогии с классическими субрезультантами (подробнее см. [6, 14, 15]).

Для того, чтобы получить выражение обобщённого (суб)дискриминанта многочлена $f_n(x)$ через его коэффициенты можно применить любой из методов классической теории исключений. Если заменить классическую производную $f_n'(x)$ его $g$-производной $(\mathcal{A}_{q,\omega}f_n)(x)$, то любой из матричных методов (см. [6, 7, 14, 16]) вычисления результанта пары многочленов позволит получить выражение обобщённого дискриминанта.

**Теорема 1** *Многочлен* $f_n(x)$ *имеет ровно* $n-d$ *различных последовательностей* $g$*-связанных корней, т. е.* $\deg\tilde{f}_g(x) = d$,*тогда и только тогда, когда в последовательности* $i$*-х обобщённых субдискриминантов* $D_g^{(i)}(f_n)$, $i = 0,\dots,n-2$, *первым отличным от нуля был субдискриминант* $D_g^{(d)}(f_n)$ *с номером* $d$.

## 3. Параметризация обобщённо дискриминантного множества

Множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ состоит из алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l$ размерностей $l$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Общее число этих многообразий, а также число различных многообразий $\mathcal{V}_l$, имеющих фиксированную размерность $l$, зависит от числа различных разбиений степени $n$ многочлена $f_n(x)$.

**Определение 5** *Разбиением* $\lambda$ *натурального числа* $n$ *называется всякая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k$, *для которой* $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. *Каждое из разбиений запишем в виде* $\lambda = [1^{n_1}2^{n_2}3^{n_3}\dots]$, *где* $n_i$ *— число повторений слагаемого* $i$ *в разбиении, т. е.* $\sum_{i=1}^k i n_i = n$.

Рассмотрим разбиение $\lambda = [1^{n_1}2^{n_2}\dots i^{n_i}\dots]$ натурального числа $n$. Величина $i$ в разбиении $\lambda$ задаёт длину последовательности $g$-связанных корней для соответствующего порождающего корня $t_i$, а $n_i$ — число различных порождающих корней, задающих последовательность корней длины $i$. Тогда $l = \sum_i n_i$ есть число различных порождающих корней многочлена $f_n(x)$ для фиксированного набора параметров $(q,\omega)$ и $\sum_i i n_i = n$. Любое разбиение $\lambda$ числа $n$ определяет некоторую структуру $g$-связанных корней многочлена, и этой структуре соответствует в пространстве коэффициентов $\Pi$ некоторое алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_l^i$, $i = 1,\dots,p_l(n)$, размерности $l$ по числу различных порождающих корней $t_i$. Число таких многообразий размерности $l$ равно $p_l(n)$, а общее число многообразий всех возможных размерностей равно $p(n)-1$, поскольку разбиению $[1^n]$ соответствует ситуация, когда все порождающие корни многочлена $f_n(x)$ задают последовательности корней длины 1, т. е. среди всех корней многочлена $f_n(x)$ нет ни одной пары $g$-связанных корней.

Рассмотрим разбиение $\left[n^1\right]$, которое соответствует случаю, когда имеется единственная последовательность корней длины $n$, задаваемая порождающим корнем $t_1$. Тогда многочлен $f_n(x;t_1) \equiv \{x;t_1\}_{n;g}$ и его коэффициенты $a_i$ выражаются через элементарные симметрические многочлены [17] $\sigma_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, вычисленные на корнях $g^j(t_1)$, $j=0,\ldots,n-1$,

$$a_i = (-1)^i \sigma_i\left(t_1, g(t_1), \ldots, g^{n-1}(t_1)\right), \; i=1,\ldots,n.$$

В силу однородности симметрических многочленов $\sigma_i$, коэффициенты $a_i$ являются степенными функциями степени $i$ параметра $t_1$.

Рассмотрим многочлен вида $f_n(x;t_1) \equiv \{x;t_1\}_{n;q}$, структура корней которого соответствует разбиению $\left[n^1\right]$. Применяя леммы 2 и 3, получим, что для любого $k$, $0<k\leqslant n$, имеет место тождество

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}_q \frac{[n-i]_q!}{[n]_q!} \left(\mathcal{A}^i_{q,\omega} f_n\right)(t_1)\{t_2;t_1\}_{i;g} = f_k(x;t_2)\cdot f_{n-k}\left(x; g^k(t_1)\right), \tag{5}$$

где $(\mathcal{A}^0_{q,\omega} f)(x) \equiv f(x)$. Следовательно, формула (5) позволяет перейти от многочлена со структурой корней, соответствующей разбиению $\left[n^1\right]$, к многочлену, структура корней которого задаётся разбиениями $\left[k^1(n-k)^1\right]$ или $\left[(n/2)^2\right]$, если $k=n/2$.

**Теорема 2** *Пусть в пространстве* $\Pi$ *имеется многообразие* $\mathcal{V}_l$, $\dim \mathcal{V}_l = l$, *на котором многочлен* $f_n(x)$ *имеет* $l$ *различных последовательностей* $g$*-связанных корней, причём последовательность корней* $\mathrm{Seq}_g^{(m)}(t_1)$ *имеет длину* $m>1$. *Другие корни* $(l-1)$*-е последовательности не являются* $g$*-связанными со всеми корнями последовательности* $\mathrm{Seq}_g^{(m)}(t_1)$.

*Пусть* $\mathbf{r}_l(t_1,\ldots,t_l)$ *— параметризация многообразия* $\mathcal{V}_l$, *тогда для* $0<k<m$ *следующая формула*

$$\mathbf{r}_l(t_1,\ldots,t_l,t_{l+1}) = \mathbf{r}_l(t_1,\ldots,t_l) + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}_q \frac{[m-i]_q!}{[m]_q!} \left(\mathcal{A}^i_{q,\omega}\mathbf{r}_l\right)(t_1)\{t_{l+1};t_1\}_{i;g}$$

*задаёт параметризацию части многообразия* $\mathcal{V}_{l+1}$, *на котором имеется две последовательности корней* $\mathrm{Seq}_g^{(m-k)}(g^k(t_1))$ *и* $\mathrm{Seq}_g^{(k)}(g(t_{l+1}))$, *а остальные последовательности корней такие же, как на исходном многообразии* $\mathcal{V}_l$.

## 4. Алгоритм вычисления параметризации и его программная реализация

Введём две основные операции, которые позволят последовательно перейти от параметрического представления одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ к параметризации всех других компонентов $g$-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$.

1. Назовем операцию перехода от многообразия $\mathcal{V}_l$ к многообразию $\mathcal{V}_{l+1}$ в теореме 2 **«ПОДЪЁМ»** порядка $k$. Эта операция позволяет получить параметризацию многообразия, размерность которого на единицу больше размерности исходного. Если на нем многочлен $f_n(x)$ имеет только вещественные корни, то получим полную параметризацию этого многообразия, если имеются комплексные корни, то применим следующую операцию.

2. Операция **«ПРОДОЛЖЕНИЕ»** позволяет получить параметризацию всего многообразия $\mathcal{V}_{l+1}$, полученного в результате операции «ПОДЪЁМ», в случае, когда на последнем имеются комплексно-сопряжённые корни.

Для организации вычисления $g$-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$ был реализован набор процедур для системы компьютерной алгебры `Maple`. Этот набор процедур собран в виде программной библиотеки `gDiscrSet`, в которую вошли процедуры для вычисления обобщённого дискриминанта одним из матричных способов, вычисления многообразия $\mathcal{V}_1$, процедуры реализующие операции «ПОДЪЁМ» и «ПРОДОЛЖЕНИЕ». Работа библиотеки была апробирована для вычисления обобщённо дискриминантных множеств кубики и квартики.

## 5. Заключение

$g$-Дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ является обобщением дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ для случая, когда некоторая пара корней $t_i$, $t_j$ оказывается $g$-связанной, т. е. $t_j = g(t_i)$, где $g(x) = qx + \omega$, $q \notin \{-1, 0\}$. Показано, что $g$-дискриминантное множество $\mathcal{D}_g(f_n)$ состоит из конечного набора алгебраических многообразий $\mathcal{V}_l$ размерностей от 1 до $n-1$, число которых определяется числом $p(n)$ разбиений степени $n$ многочлена $f_n(x)$. Каждое из многообразий $\mathcal{V}_l$ выделяется соответствующей системой уравнений, состоящей из обобщённых субдискриминантов $D_g^{(k)}(f_n)$, и допускает полиномиальную параметризацию.

Предложены и реализованы в системе компьютерной алгебры Maple алгоритмы вычисления параметрического представления всех компонент $g$-дискриминантного множества $\mathcal{D}_g(f_n)$.

## Благодарности

Работа поддержана программой IV.1.1 ОМН РАН.

## Литература

1. Kac V., Cheung P. Quantum Calculus. — New York, Heidelber, Berlin : Springer-Verlag, 2002. — 112 p.
2. Ernst T. A Comprehensive Treatment of $q$-Calculus. — Basel Heidelberg New York Dordrecht London : Springer, 2012. — 491 p.
3. Гаспер Д., Рахман М. Базисные гипергеометрические ряды: Пер. с англ. — М. : «Мир», 1993. — 349 с.
4. Koekoek R., Lesky P. A., Swarttouw R. F. Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their $q$-Analogues. — Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2010. — 578 p.
5. Батхин А. Б. Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник. — 2015. — Т. 16, № 2. — С. 23–34. — Режим доступа: `http://mi.mathnet.ru/rus/cheb/v16/i2/p23`.
6. Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена. Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 76. — М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2015. — 36 с. — Режим доступа: `http://keldysh.ru/papers/2015/prep2015_76.pdf`.
7. Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. — 2016. — Т. 42, № 2. — С. 8–21.
8. Батхин А. Б. О структуре резонансного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). — 2016. — Т. 17, № 3. — С. 5–17. — Режим доступа: `http://mi.mathnet.ru/cheb494`.
9. Батхин А. Б. Структура резонансного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2016. — № 29. — 23 с. — Режим доступа: `http://www.keldysh.ru/papers/2015/prep2016_29.pdf`.

10. Батхин А. Б. Резонансное множество многочлена и проблема формальной устойчивости // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. — 2016. — № 4 (35). — С. 5–23.
11. Hahn W. Über Orthogonalpolynome, die $q$-Differenzengleichungen genügen // Mathematische Nachrichten. — 1949. — Bd. 2. — S. 4–34.
12. Ismail M. H. E. $q$-discriminants and Vertex Operators // Advances in Applied Mathematics. — 2001. — Vol. 27. — P. 482–492.
13. Ismail M. H. E. Difference equations and quantized discriminants for $q$-orthogonal polynomials // Advances in Applied Mathematics. — 2003. — Vol. 30. — P. 562–589.
14. Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. — СПб. : Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. — 72 с.
15. Basu S., Pollack R., Roy M.-F. Algorithms in Real Algebraic Geometry. Algorithms and Computations in Mathematics 10. — Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2006. — ix+662 p.
16. Gathen, J. von zur, Lücking T. Subresultants revisited // Theoretical Computer Science. — 2003. — Vol. 297. — P. 199–239.
17. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. — М., 1985. — 222 с.

UDC 512.62+004.421.6

# Generalized discriminant of a real polynomial

**A. B. Batkhin**[*†]

[*] *Department of Singular Problems*
*Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS*
*Miusskaya sq. 4, Moscow, 125047, Russia*
[†] *Department of Theoretical Mechanics*
*Moscow Institute of Physics and Technology (State University)*
*Institutski per. 9, Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russia*

Email: batkhin@me.com

We consider a generalization of a classical discriminant of a real polynomial. This generalization is defined by the linear Hahn operator which decreases the degree of polynomial by one. The structure of the generalized discriminant set, i.e. the set of all values of space of polynomial's coefficients at which the polynomial and its Hahn operator image have equal roots, is investigated. This structure is described with the help of partitions of natural number $n$ – the degree of the polynomial. A constructive algorithm for a polynomial parameterization of the generalized discriminant set in the space of the coefficients of the polynomial is proposed. The basic algorithms described in this paper are implemented as a library for Maple.

**Key words and phrases:** elimination theory, generalized discriminant, Hahn operator, computer algebra.

УДК 519.61

# Вычисление амёб полиномов двух переменных

**Д. В. Богданов**

*Кафедра бизнес-информатики и информационных технологий*
*Московский экономический институт*
*ул. Артюхиной, д. 6, к. 1, г. Москва, Россия, 109390*

Email: bogdv@rambler.ru

Понятие «амёба» впервые введено в монографии Гельфанда, Капранова и Зелевинского (1994), после чего изучению амёб было посвящено множество работ различных авторов. Современные системы компьютерной алгебры позволяют эффективно решать широкий круг задач, в том числе и «амёбной» тематики. Платой за универсальность таких систем является отсутствие многих встроенных функций, в том числе, для вычисления амёб. Поэтому достаточно часто приходится разрабатывать и программировать нетривиальные алгоритмы даже в случае типовых задач.

В данной работе предлагается использовать оригинальную обёртку кода MatLab, предоставляющую удобный веб-интерфейс для вычисления и визуализации аффинных и компактифицированных амёб полиномов двух переменных. Рассмотрена возможность визуализации многоугольников Ньютона как средствами систем компьютерной алгебры, так и с помощью псевдографики LaTeX. Данный подход реализует концепцию RAD (быстрая разработка приложений) и позволяет сосредоточить внимание на математической задаче без рутинного программирования используемых функций.

Также дано определение и примеры вычисления взвешенных компактифицированных амёб ($\mathcal{WCA}$) полиномов двух переменных и описан предельный случай, при котором $\mathcal{WCA}$ может вырождаться в симплициальный комплекс.

**Ключевые слова:** вычисление амёб полиномов двух переменных, аффинные амёбы, компактифицированные амёбы, взвешенное моментное отображение.

## 1. Введение

Современные системы компьютерной алгебры предоставляют своим пользователям богатый набор инструментов для исследований в многочисленных областях математической науки. Периодически включая в стандартный набор новые процедуры и совершенствуя существующие, разработчикам подобных систем не всегда удаётся оперативно предоставлять удобный интерфейс для работы с новыми математическими объектами. Более того, для некоторых известных и достаточно фундаментальных объектов в популярных системах отсутствует возможность их простого использования и требуется самостоятельная разработка нетривиальных программных кодов, что зачастую проблематично даже при наличии формального описания их алгоритмов.

В этих случаях для сокращения времени подготовки к компьютерному эксперименту с выбранным математическим объектом можно использовать несколько подходов. Первый подход предполагает работу со специализированным программным обеспечением. Например, близкая к рассмотренной в следующем разделе задача вычисления амёб полиномов может решаться в бесплатной программе Singular/Sage, но установка, настройка и работа с подобной системой достаточно сложна. Предложенные библиотеки[1] реализованы на языке Python, что также может значительно затруднить их адаптацию к конкретной задаче.

Альтернативный подход предполагает использование популярных систем компьютерной алгебры, в данном случае — Mathematica и MatLab и обёрток (wrappers) для них. Интерфейс обёртки позволяет вводить и редактировать данные в удобном виде (без программирования) и получать готовый код на встроенном языке системы компьютерной алгебры.

[1] См., например, http://www.math.tamu.edu/~dewolff/LopsidedAmoebaApproximation.html.

Задача о поиске нулей полиномов одного или нескольких переменных над различными множествами аргументов и изучения их свойств является одной из наиболее фундаментальных в математике. При этом важную роль играет выпуклый многогранник, однозначным образом сопоставляемый заданному полиному.

**Определение 1** *Многогранник Ньютона $\mathcal{N}_f$ полинома Лорана $f(x)$ определяется как выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ с показателями из $f(x)$.*

В русскоязычной литературе первая попытка систематизации свойств многогранника Ньютона предпринята в работе [2]. Изучению многогранника Ньютона $A$-дискриминантов посвящена глава 6 в монографии [7]. Общий современный взгляд на многогранники Ньютона подробно изложен в работе [3].

На протяжении всей статьи будем рассматривать полином двух переменных

$$p(x, y; a, b) = 1 + ax + bxy + xy^2 + x^2$$

с параметрами $a, b \in \mathbb{C}^*$. Данный выбор обусловлен тем фактом, что многоугольник Ньютона $\mathcal{N}_p$ имеет простейшую форму — треугольник (рисунок 1), но содержит точки целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$ как на границе, так и во внутренней области.

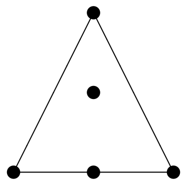


Рис. 1. Многоугольник Ньютона $\mathcal{N}_p$

Генерация изображения многоугольника Ньютона не поддерживается встроенными процедурами систем Mathematica и MatLab. Для получения необходимого программного кода, в том числе псевдографики LaTeX, можно использовать веб-интерфейс http://dvbogdanov.ru/Newton. Минимальная выпуклая оболочка в MatLab и Mathematica вычисляется встроенными функциями convhull и ConvexHull соответственно, а в случае LaTeX сервер использует классический алгоритм Джарвиса.

Термин «амёба» впервые предложен в монографии [7], где даны две конкурирующие версии — аффинная и компактифицированная амёбы.

**Определение 2** *(Аффинная) амёба $\mathcal{A}_f$ полинома Лорана $f(x)$ (или алгебраической гиперповерхности $\{f(x) = 0\}$) есть образ гиперповерхности $f^{-1}(0)$ относительно отображения*

$$\mathrm{Log} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\ln|x_1|, \ldots, \ln|x_n|).$$

Изучение амёб комплексных многообразий естественным образом приводит к понятиям относительно новой области математики — тропической геометрии [8]. Рассмотрим отображение $\mathrm{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное в координатах в виде $(x, y) \mapsto (\log_t|x|, \log_t|y|)$. Образ кривой $P(t)$ при отображении $\mathrm{Log}_t$ содержится при больших $t$ в $\varepsilon$-окрестности некоторой тропической кривой. Таким образом, тропическую кривую можно рассматривать как вырождение комплексной кривой $P(t)$ и её амёбы при $t \to \infty$.

**Определение 3** *Компактифицированная амёба* $\overline{\mathcal{A}}_f$ *полинома Лорана* $f(x) := \sum\limits_{s\in S} a_s x^s$ *(или алгебраической гиперповерхности* $\{f(x)=0\}$*) есть образ гиперповерхности* $f^{-1}(0)$ *относительно моментного отображения в многогранник Ньютона* $\mathcal{N}_f$*:*

$$\mu : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \frac{\sum\limits_{s\in S} s\cdot |x^s|}{\sum\limits_{s\in S} |x^s|} = \frac{\sum\limits_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} (s_1,\ldots,s_n)\cdot \left|x_1^{s_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{s_n}\right|}{\sum\limits_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} \left|x_1^{s_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{s_n}\right|}.$$

Определения 2 и 3 представляют интерес только в размерности два и выше, поскольку амёба полинома одного переменного является конечным множеством, которое можно исследовать с помощью различных классических методов локализации корней полиномов.

Стандартные процедуры для вычисления и визуализации амёб в популярных системах компьютерной алгебры также отсутствуют. Далее представлены результаты, полученные с помощью обёртки кода MatLab[2] на основе алгоритмов, предложенных в работе [4].

## 2. Вычисление аффинных амёб полиномов двух переменных

Следующий результат показывает, что многогранник Ньютона $\mathcal{N}_f$ отражает структуру амёбы $\mathcal{A}_f$ [6, теорема 2.8 и утверждение 2.6].

**Теорема 4** (см. [6]) *Пусть* $f(x)$ *— полином Лорана и пусть* $\{M\}$ *обозначает семейство связных компонент дополнения к амёбе* ${}^c\mathcal{A}_f$*. Тогда существует инъективная функция* $\nu : \{M\} \to \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{N}_f$*, такая, что конус, двойственный к* $\mathcal{N}_f$ *в точке* $\nu(M)$*, совпадает с конусом рецессии в множестве* $M$*. В частности, число связных компонент* ${}^c\mathcal{A}_f$ *не может быть меньше, чем количество вершин* $\mathcal{N}_f$ *и не может превышать количество целых точек в* $\mathcal{N}_f$*.*

Два экстремальных значения числа связных компонент дополнения к амёбе представляют особый интерес [9].

**Определение 5** *(см. также [6, определение 2.9]) Алгебраическая гиперповерхность* $\mathcal{H} \subset (\mathbb{C}^*)^n$*,* $n \geq 2$*, называется оптимальной, если число связных компонент её дополнения амёбы* ${}^c\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ *равно числу целых точек в многограннике Ньютона определяющего полинома* $\mathcal{H}$*. Будем говорить, что полином (а также его амёба) является оптимальным, если множество его нулей является оптимальной алгебраической гиперповерхностью.*

Алгебраическая гиперповерхность является оптимальной, если топология её амёбы наиболее сложна среди всех возможных в силу теоремы 4 (то есть число связных компонент дополнения амёбы является максимальным). Другой крайний случай топологически простейшей амёбы определяется следующим образом.

**Определение 6** *(см. [9]) Алгебраическая гиперповерхность* $\mathcal{H} \subset (\mathbb{C}^*)^n$*,* $n \geq 2$*, называется сплошной, если число связных компонент её дополнения к амёбе* ${}^c\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ *равно числу вершин многогранника Ньютона определяющего полинома* $\mathcal{H}$*.*

Таким образом, сплошная амёба является противоположностью оптимальной. В двумерном случае амёба является сплошной, если и только если все связные компоненты её дополнения являются неограниченными и её щупальца не параллельны. Оптимальная амёба имеет, наоборот, максимально возможное число ограниченных связных компонент в своём дополнении и максимальное число параллельных щупалец.

---

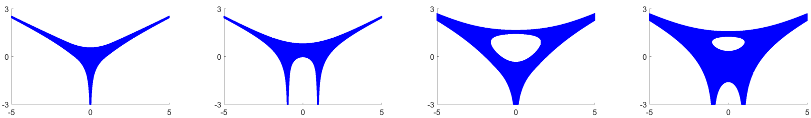
[2]Онлайн-интерфейс доступен по адресу `http://dvbogdanov.ru/amoeba`

Функциональная зависимость топологического типа амёбы $\mathcal{A}_f$ от коэффициентов определяющего полинома $f(x)$ сложна и в настоящее время мало изучена. Достаточное условие оптимальности амёбы полинома сформулировано в работе [5], согласно которому соответствующий полином должен удовлетворять «истинной» системе дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа [1], в то время как носитель полинома достаточно сложен.

**Определение 7** *Будем называть «тушкой» амёбы $\mathcal{A}$ любое подмножество $\mathcal{A}$, такое, что количество связных компонент дополнения к пересечению $\mathcal{A} \cap B$ для достаточно большого шара $B$ настолько велико, как это может быть (то есть равным числу связных компонент в дополнении к $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^n$).*

Заметим, что тушка амёбы определена не однозначно. Однако топология её дополнения в достаточно большом шаре определена корректно и настолько сложна, насколько это возможно. Говоря об изображении амёбы, мы будем подразумевать её подходящую тушку.

**Пример 8** *Варьируя в (1) параметры $a$ и $b$, вычислим амёбы четырёх полиномов $p_1(x,y) := p(x,y;1,1)$, $p_2(x,y) := p(x,y;3,1)$, $p_3(x,y) := p(x,y;1,5)$ и $p_4(x,y) := p(x,y;3,5)$, чьи многоугольники Ньютона совпадают с $\mathcal{N}_p$. Дополнение к сплошной амёбе на рисунке 2 (а) состоит из трёх неограниченных связных компонент с двумерными конусами рецессии. Дополнение к оптимальной амёбе на рисунке 2 (г) содержит пять связных компонент: три неограниченные компоненты с двумерными конусами рецессии, одна неограниченная компонента между параллельными щупальцами с одномерным конусом рецессии и ограниченная компонента. Две другие амёбы, изображённые на рисунке 2 (б) и 2 (в) имеют четыре связные компоненты в своих дополнениях и топологически занимают промежуточное положение между сплошной и оптимальной амёбами, определяемыми полиномами с многоугольником Ньютона $\mathcal{N}_p$.*




(а) (б) (в) (г)

Рис. 2. Амёбы полиномов $p_1(x,y), \ldots, p_4(x,y)$

Существующие аналитические методы [6], вообще говоря, не позволяют предсказать топологический тип амёбы полинома с коэффициентами общего положения. С вычислительной точки зрения задачи изображения амёб на рисунке 2 (а) и 2 (г) довольно схожи. Тем не менее, обнаружение ограниченной связной компоненты данного порядка [6] в дополнении к амёбе с помощью аналитических методов, вообще говоря, является задачей большой сложности [10].

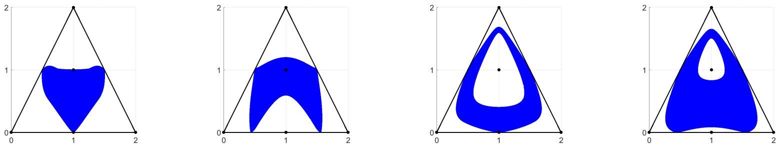
## 3. Вычисление компактифицированных амёб полиномов двух переменных

Численный расчёт компактифицированных (см. определение 3) и рассматриваемых далее взвешенных компактифицированных (см. определение 11) амёб полиномов двух переменных аналогичен вычислению их аффинных аналогов. Основной вычислительной задачей является моментное отображение (3) или (10) вместо логарифмического отображения в аффинном случае.

**Пример 9** *Применение (3) к полиномам из примера 8 даёт отображение*

$$(x, y) \mapsto \frac{\left(|x| + |xy| + \left|xy^2\right| + 2\left|x^2\right|, |xy| + 2\left|xy^2\right|\right)}{1 + |x| + |xy| + |xy^2| + |x^2|}.$$

*Соответствующие компактифицированные амёбы внутри многоугольника Ньютона их определяющих полиномов показаны на рисунке 3.*



(а) (б) (в) (г)

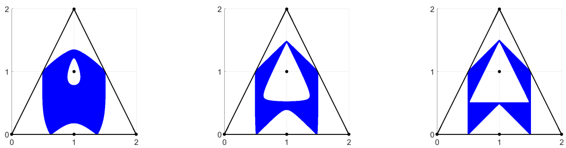
Рис. 3. Компактифицированные амёбы полиномов $p_1(x, y), \ldots, p_4(x, y)$ внутри многоугольника Ньютона $\mathcal{N}_p$

**Определение 10** *Следуя идеям из [11], зададим взвешенное моментное отображение, связанное с алгебраической гиперповерхностью* $\{f(x) := \sum\limits_{s \in S} a_s x^s = 0\}$ *следующим образом:*

$$\tilde{\mu}_f(x) := \frac{\sum\limits_{s \in S} s \cdot |a_s||x^s|}{\sum\limits_{s \in S} |a_s||x^s|}.$$

*Из общей теории моментных отображений следует, что* $\tilde{\mu}_f(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathcal{N}_f$*.*

**Определение 11** *Под взвешенной компактифицированной амёбой алгебраической гиперповерхности* $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) = 0\}$ *будем понимать множество* $\tilde{\mu}_f(\mathcal{H})$ *и использовать обозначение* $\mathcal{WCA}(f)$*.*



(а) (б) (в)

Рис. 4. Взвешенные компактифицированные амёбы полинома $p_4(x, y)$ степени Адамара $k = 1, 2, 4$

Взвешенная компактифицированная амёба $\mathcal{WCA}(p_4(x, y))$ представлена на рисунке 4 (а).

Напомним, что *степень Адамара* порядка $r \in \mathbb{R}$ полинома $f(x) = \sum\limits_{s \in S} a_s x^s$ определяется как $f^{[r]}(x) := \sum\limits_{s \in S} a_s^r x^s$. Заметим, что теоретико-множественный предел

$\mathcal{S}(f) := \lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{WCA}(f^{[r]}) \subset \mathcal{N}_f$ в некоторых случаях представляет собой амёбо-подобный симплициальный комплекс. Аппроксимация симплициального комплекса $\mathcal{S}(p_4\,(x, y))$ изображёна на рисунке 4 (в) внутри многоугольника Ньютона этого полинома. В данном примере геометрия $\mathcal{S}(f)$ связана с амёбой $\overline{\mathcal{A}}_f$, в то время как комбинаторика $\mathcal{S}(f)$ отражает алгебраические свойства этого полинома.

## 4. Заключение

Существующие аналитические методы не позволяют определить топологический тип амёбы полинома с общими коэффициентами, поэтому для вычисления и визуализации амёб могут использоваться численные методы. Несмотря на то, что популярные системы компьютерной алгебры пока не содержат встроенных процедур для решения подобных задач, использование соответствующих обёрток позволяет решать их без непосредственного программирования. Предложенный веб-интерфейс `http://dvbogdanov.ru/amoeba` предоставляет возможность ввода исходных данных в удобном виде и последующей автоматической генерации кода MatLab для вычисления аффинных и компактифицированных амёб, в том числе $\mathcal{WCA}$. Без ручного редактирования кода можно управлять всеми входными параметрами соответствующего алгоритма [4].

Известно, что тропические кривые [8] являются вырождением аффинных амёб при предельном отображении $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{Log}_t(f)$. Как показывают компьютерные эксперименты, в случае взвешенных компактифицированных амёб в некоторых случаях теоретико-множественный предел $\lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{WCA}(f^{[r]})$ представляет собой амёбо-подобный симплициальный комплекс.

Таким образом, использование систем компьютерной алгебры применительно к данной тематике позволяет достаточно быстро получать интересные результаты и является перспективным для дальнейшего развития теории амёб.

## Литература


1. *Дикенштейн А., Садыков Т. М.* Базисы в пространстве решений системы уравнений Меллина // Матем. сб. — 2007. — Т. 198, №9. — С. 59-80.
2. *Чеботарёв Н. Г.* Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики // Исаак Ньютон. АН СССР. — 1943. — С. 99–126.
3. *Хованский А. Г.* Многогранники и алгебра // Труды ИСА РАН. — 2008. — Т. 38. — С. 23-35.
4. *Bogdanov D. V., Kytmanov A. A., Sadykov T. M.* Algorithmic computation of polynomial amoebas // Computer Algebra in Scientific Computing, Lecture Notes in Computer Science. Springer International Publishing. — 2016. — no. 9890. — P. 87-100.
5. *Bogdanov D. V., Sadykov T. M.* Hypergeometric polynomials are optimal // preprint arXiv:1506.00503.
6. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A. K.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. Math. — 2000. — no. 151. — P. 45-70.
7. *Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V.* Discriminants, resultants and multidimensional determinants. — Birkhäuser, 1994. — ISBN: 9780817647711.
8. *Itenberg I., Mikhalkin G., Shustin E.* Tropical algebraic geometry. — Birkhäuser Basel, 2009. — ISBN: 9783034600477.
9. *Passare M., Sadykov T. M., Tsikh A. K.* Nonconfluent hypergeometric functions in several variables and their singularities // Compos. Math. — 2005. — Vol. 141, no. 3. — P. 787-810.
10. *Purbhoo, K.* A Nullstellensatz for amoebas // Duke Math. J. — 2008. — Vol. 141, no. 3. — P. 407-445.
11. *Zharkov, I.* Torus fibrations of Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties // Duke Math. J. — 2000. — Vol. 101, no. 2. — P. 237-257.

UDC 519.61

# Computation of amoebas of polynomials in two variables

**D. V. Bogdanov**

*Department of business informatics and information technology*
*Moscow economic institute*
*6/1 Artyukhinoy str., Moscow, 109390, Russia*

Email: bogdv@rambler.ru

The term «amoeba» was firstly introduced in monograph by Gelfand, Kapranov and Zelevinsky (1994), thereafter set of scientific works of various authors was devoted to researching of amoebas. Modern systems of computer algebra allow to solve effectively the wide range of tasks, including «amoebic» theme. The reckoning for universality of such systems is the absence of many built-in functions, including those for computation of amoebas. That's why, we have to develop and program non-trivial algorithms often enough, even in case of typical tasks.

This work is focused on MatLab code wrapper, providing convenient web interface for computing and visualization of affine and compactified amoebas of polynomials in two variables. The possibility of Newton polygon visualization both by means of systems of computer algebra and by means of LaTeX graphics is considered. The offered approach realizes the concept of RAD (rapid development of applications) and allows to focus on mathematical issue without routine programming of functions used.

The definition and samples of computation of weighted compactification amoebas of polynomial of two variables ($\mathcal{WCA}$) are given. The limiting case is shown, in which the $\mathcal{WCA}$ degenerates into the simplicial complex.

**Key words and phrases:** computation amoebas of polynomial in two variables, affine amoeba, compactified amoeba, weighted moment map.

# Использование системы компьютерной алгебры SymPy для реализация метода стохастизации одношаговых процессов

**М. Н. Геворкян*, А. В. Демидова*, Т. Р. Велиева*, А. В. Королькова*, Д. С. Кулябов*†, Л. А. Севастьянов*‡**

* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

† *Лаборатория информационных технологий, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

‡ *Лаборатория теоретической физики, Объединённый институт ядерных исследований, ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Email: gevorkyan_mn@rudn.university, demidova_av@rudn.university, velieva_tr@rudn.university, korolkova_av@rudn.university, kulyabov_ds@rudn.university, sevastianov_la@rudn.university

При моделировании таких явлений как популяционная динамика, исследование управляемых потоков и т.д. возникает проблема адаптации существующих моделей под исследуемое явление. Для этого предлагается получать новые модели из первых принципов на основе метода стохастизации одношаговых процессов. Исследование имеет вид итеративного процесса, заключающегося в получении модели и последующей её корректировке. Количество таких итераций может быть крайне большим. Целью данной работы является разработка программной реализации средствами компьютерной алгебры метода стохастизации одношаговых процессов. В работе предложено использовать систему компьютерной алгебры *SymPy* в качестве основы для программной реализации. На основе разработанного алгоритма показано получение стохастических дифференциальных уравнений из вида схем взаимодействия. Результаты работы программы продемонстрированы на модели Ферхюльста.

**Ключевые слова:** CAS, SymPy, iPython, стохастизация, одношаговые процессы.

## 1. Введение

Явления, изучаемые нашим коллективом, можно описывать в рамках статистического подхода. Обычно подбирается модель, достаточно полно отражающая изучаемое явление, и в неё вносятся некоторые уточнения. Возникает вопрос, как вносить изменения, поскольку данный процесс не однозначен. Используемые модели являются реализацией некоторых первых принципов. Мы считаем, что если строить модели из первых принципов, то вносимые изменения будут иметь конкретную прагматику и семантику, и однозначно проявляться в используемых приближённых моделях. Для описания изучаемых нами явлений (сети передачи данных, системы с управлением, популяционная динамика) мы используем модель одношаговых процессов [1, 2].

Нами разработана методика стохастизации моделей, которая позволяет получать из первых принципов стохастическую модель, соответствующую детерминистической [3–7]. Процес исследования является итеративным: из детерминистической модели мы получаем первичную модель, из первичной модели стохастическую, стохастическая модель соотносится с детерминистической, на основании этого соотнесения мы получает уточнённую первичную модель. Далее процесс повторяется.

Формализм стохастизации может быть реализован разными способами. На данный момент нами применяются представление векторов состояния (комбинаторный подход) и представление чисел заполнения (операторный подход) [8–11].

В случае применения комбинаторного подхода все действия выполняются в пространстве векторов состояния системы. На протяжении всех модельных манипуляций мы имеем дело с конкретной исследуемой системой. В результате получается

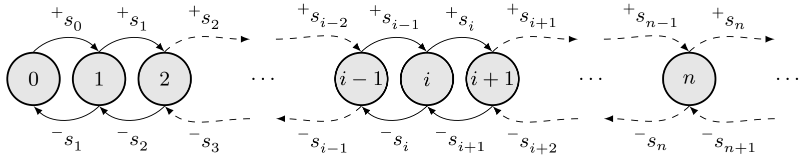



Рис. 1. Одношаговый процесс

описание в виде дифференциального уравнения. Этот подход удобен при конструировании модели, поскольку позволяет легко сравнить результат с другими моделями.

В операторном подходе мы отвлекаемся от конкретной реализации исследуемой системы, работая с абстрактными операторами. В пространство векторов состояний мы переходим только в конце вычислений. Кроме того, конкретную операторную алгебру мы выбираем, исходя их симметрии задачи. Этот подход удобен при теоретических построениях.

Зачастую возникает задача нахождения стохастической модели, эквивалентной ранее созданной детерминистической. Для этого мы используем комбинаторный подход. В этом представлении стохастическая модель имеет вид дифференциального уравнения, что облегчает сравнение с исходной моделью.

## 2. Методика стохастизации детерминированных моделей

Нами разработана эмпирическая методика стохастизации одношаговых процессов. Однако лишь часть шагов эксплицирована, выражена явно. Методика формализована таким образом, что для её применения достаточно сформулировать исходную задачу соответствующим образом.

Первым шагом мы приводим нашу модель к виду одношагового процесса (см. рис. 1). Далее необходимо формализовать этот процесс в виде схем взаимодействия [5, 12]. Аналогами схем взаимодействия являются уравнения химической кинетики, реакции частиц и т.д.

Из схем взаимодействия непосредственно записывается основное кинетическое уравнение. Однако это уравнение [1,2] имеет обычно достаточно сложную структуру, что затрудняет его решение и исследование. Следующим шагом мы получаем приближённые модели в виде уравнений Фоккера–Планка и Ланжевена.

Предложенный подход подразумевает итеративность исследования: полученные приближённые модели уточняются и изменяются, что приводит к коррекции исходных схем взаимодействия.

## 3. Обоснование выбора системы компьютерной алгебры

При реализации рассмотренных алгоритмов перед нами встала задача выбора системы компьютерной алгебры. Наши потребности вполне укладываются в требования к универсальной системе компьютерной алгебры, но спектр таких систем весьма широк. Поэтому приведём наши критерии выбора:

— Система должна быть свободно распространяемой. Можно считать это нашим *profession de foi*.
— Взаимодействие с системой должно быть итеративным. В ней должна быть реализована парадигма REPL (Read–Eval–Print Loop).
— Желательно, чтобы система поддерживалась и развивалось. Неприятно создавать продукт на языке, который в скором времени окажется мёртвым.

— Символьные вычисления — лишь один из элементов методики. Полученные уравнения необходимо исследовать чаще всего численными методами. Необходимо иметь возможность разных форматов вывода результатов. А ещё лучше, иметь возможность бесшовно интегрировать искомую систему с другими программными продуктами.
— Также было бы удобно иметь реализацию численных методов в рамках системы компьютерной алгебры.

Выбор универсальных свободных систем компьютерной алгебры не так уж и велик. Рассмотрим основных претендентов.

Система Maxima [13, 14] — классическая система, однако застывшая в своём развитии в конце 90-х. Новые версии выпускаются часто. При этом они лишь увеличивают стабильность, исправляют ошибки. Добавление новых возможностей идёт крайне медленно. Кроме того, возможность взаимодействия с другими программами ограничена.

Система Axiom [15, 16] выделяется математическим подходом к компьютерной алгебре. Она поддерживает систему типов Хиндли–Милнера [17, 18], обладает великолепным внутренним языком расширения. Но из-за неразрешённых проблем с копирайтом систему лихорадит. Образовалось несколько форков. Каждый вариант имеет свою идеологию, свои планы развития. Чем и когда всё это закончится — не понятно. Да и интероперабельность фактически отсутствует.

Наиболее интересной для нас является система SymPy [19, 20]. Эта система появилась как библиотека символьных вычислений для языка Python. Но язык Python стал универсальным языковым клеем (достаточно неожиданно). Применение его в разнообразных проектах привело к взрывному росту сопутствующих средств и библиотек. Поэтому и SymPy развивался вместе с ним. Теперь это достаточно мощная система компьютерной алгебры. Причём большая часть необходимых нам критериев проистекают не из собственно системы SymPy, а из окружающих её библиотек. Получается, что SymPy удовлетворяет всем нашим критериям:

— В качестве интерактивной оболочки удобно использовать блокнот Jupyter, являющийся компонентом системы iPython [21], реализующей идеологию REPL.
— Язык Python фактически используется как соединительный язык, своего рода язык-клей, который позволяет интегрировать между собой разные программные продукты. Кроме того, в рамках библиотеки SciPy [22] поддерживается большое число выходных форматов.
— Выходные данные SymPy возможно естественным образом передать для численных расчётов в библиотеку NumPy [23].

Таким образом, мы остановились в своём выборе на системе SymPy для реализации метода стохастизации одношаговых процессов.

## 4. Программная реализации алгоритма стохастизации

Алгоритм получения стохастического дифференциального уравнения из схемы взаимодействия реализован как последовательность операций над векторными данными. Исходными данными являются схемы взаимодействия, представленные в следующем виде:

— символьный вектор $X$ представляет собой вектор состояния системы $\varphi$;
— символьный вектор $K$ представляет собой интенсивности взаимодействия $^{+}k_{\underline{\alpha}}$, $^{-}k_{\underline{\alpha}}$;
— числовые матрицы $I$ и $F$ представляют собой начальное и конечное состояния.

Основные вычисления реализованы в виде четырёх функций.

Первая функция просто реализует нахождение элемента $\frac{\varphi^{\underline{i}}\,!}{(\varphi^{\underline{i}} - I^{\underline{i}\,\underline{\alpha}})!}$:

```
def P(x, n):
    """x = symbol, n = integer """
    return sp.prod([x-i for i in range(n)])
```

Следующая функция использует предыдущую для вычисления $^{+}s_{\alpha}$ и $^{-}s_{\alpha}$, в качестве аргументов здесь передаются символьные векторы $X = (x^1, x^2, \ldots, x^n)^T$ и $K = (^{-}k_1, \ldots, ^{-}k_s)$, а в качестве результата возвращается список $^{+}s_1, \ldots, ^{+}s_s$ (приведён код только для прямых реакций):

```
def S(X, K, I):
    res = []
    for i in range(len(K)):
        Ps = [P(x, int(n)) for (x, n) in zip(X, I[i, :])]
        res.append(K[i]* sp.prod(Ps))
    # output: list [s_1, s_2, s_3, ..., s_s]
    return res
```

Следующие функции — основные функции алгоритма: для получения вектора сноса `drift_vector(X, K, I, F)` и матрицы диффузии `diffusion_matrix(X, K, I, F)` в символьном формате `SymPy`:

```
def drift_vector(X, K, I, F):
    res = sp.zeros(r=len(X), c=1)
    R = F.T - I.T
    for i in range(len(K)):
        res += R[:, i] * S(X, K, I)[i]
    return res


def diffusion_matrix(X, K, I, F):
    res = sp.zeros(r=len(X), c=len(X))
    R = F.T - I.T
    R = sp.Matrix(R)
    for i in range(len(K)):
        res += R[:, i] * R[:, i].T * S(X, K, I)[i]
    return res
```

При использовании интерактивной оболочки `Jupyter` необходимо настроить корректное отображение нотации TEX. Для этого вначале `Jupyter`-блокнота следует импортировать модуль `Latex`:

```
from IPython.display import Latex
```

и вызвать функцию

```
sympy.init_printing(use_unicode=True)
```

При этом библиотека `SymPy` должна быть заранее импортированная командой `import sympy`.

Результаты работы программы можно экспортировать в формат LATEX. Можно воспользоваться встроенными методами, которые позволяют преобразовать $A^i$ и $B^{ij}$ в код LATEX. Для этого достаточно вызвать комбинацию функций `print(sympy.latex(A))`, где в переменной `A` содержится результат работы функции `drift_vector`, а функция `latex()` экспортирует его в LATEX-код.

## 5. Пример реализации. Модель Ферхюльста

Для демонстрации метода рассмотрим модель Ферхюльста [24–26]. В популяционной семантике эта модель описывает ограниченный рост популяции.

Детерминистическая модель имеет следующий вид:

$$\dot{\varphi} = \lambda\varphi - \beta\varphi - \gamma\varphi^2, \tag{1}$$

где $\lambda$ — коэффициент интенсивности размножения, $\beta$ — коэффициент интенсивности вымирания, $\gamma$ — коэффициент интенсивности уменьшения популяции.

На основании (1) запишем схему взаимодействия:

$$
\begin{aligned}
&\varphi \underset{\gamma}{\overset{\lambda}{\rightleftharpoons}} 2\varphi,\\
&0 \xleftarrow{\beta} \varphi.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Первое соотношение (2) означает, что индивидуум, который съедает единицу пищи, немедленно репродуцируется, в обратную сторону – соперничество между индивидами. Второе соотношение описывает смерть индивидуума.

Данная модель одномерна ($n = 1$). Количество взаимодействий $s$ равно 2.

Из (2) запишем матрицы $I^{\underline{i}\,\underline{\alpha}}$ и $F^{\underline{i}\,\underline{\alpha}}$:

$$
I^{\underline{i}\,\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F^{\underline{i}\,\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

В программу передаются следующие значения:

```
I = sp.Matrix([[1], [1]])
F = sp.Matrix([[2], [0]])
X = sp.Matrix(['phi'])
K = sp.Matrix(['k_{0}'.format(i+1) for i in range(2)])
```

Поскольку задача одномерна, то вектор сноса и матрица диффузии являются скалярами:

$$
\begin{aligned}
A(\varphi) &= \lambda\varphi - \beta\varphi - \gamma\varphi^2,\\
B(\varphi) &= \lambda\varphi + \beta\varphi - \gamma\varphi^2.
\end{aligned}
$$

Стохастическое дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1), будет иметь вид:

$$
\mathrm{d}\varphi(t) = (\lambda\varphi - \beta\varphi - \gamma\varphi^2)\,\mathrm{d}t + \sqrt{(\lambda\varphi + \beta\varphi - \gamma\varphi^2)}\,\mathrm{d}W(t)\,.
$$

Таким образом мы достигли своей цели — модель стохастизована. Следует заметить, что даже такая простая одномерная модель при ручных расчётах является достаточно трудоёмкой.

## 6. Заключение

Исследовательская работа часто носит итеративный характер. Результаты вычислений оцениваются по определённым критериям. Эти действия приходится выполнять многократно. Системы компьютерной алгебры позволяют автоматизировать этот процесс.

В данной работе рассмотрена простейшая реализация алгоритма стохастизации одношаговых процессов по заданным схемам взаимодействия. Для этого был проведён анализ систем компьютерной алгебры на основе предложенных авторами критериев. В соответствии с этими критериями в качестве системы компьютерной алгебры для реализации метода выбрана система *SymPy*. Приведены существенные элементы кода реализации метода стохастизации одношаговых процессов. Работа программного комплекса продемонстрирована на примере двух моделей: модели Ферхюльста и модели Лотки–Вольтерры.


## Благодарности

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация подготовлена при поддержке программы РУДН «5-100».

## Литература


1. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — Мир, 1986.
2. Ван-Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. — М. : Высшая школа, 1990.
3. Korolkova A. V., Eferina E. G., Laneev E. B., Gudkova I. A., Sevastianov L. A., Kulyabov D. S. Stochastization Of One-Step Processes In The Occupations Number Representation // Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation. — 2016. — jun. — P. 698–704.
4. Eferina E. G., Hnatich M., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A., Velieva T. R. Diagram Representation for the Stochastization of Single-Step Processes // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science / Ed. by V. M. Vishnevskiy, K. E. Samouylov, D. V. Kozyrev. — Cham : Springer, 2016. — Vol. 678. — P. 483–497.
5. Hnatič M., Eferina E. G., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. Operator Approach to the Master Equation for the One-Step Process // EPJ Web of Conferences. — 2015. — Vol. 108. — P. 58–59. — 1603.02205.
6. Gevorkyan M. N., Demidova A. V., Zaryadov I. S., Sobolewski R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A. Approaches to Stochastic Modeling of Wind Turbines // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2017 / Ed. by K. Varadi, A. Vidovics-Dancs, J. P. Radics, Z. Z. Paprika, P. T. Zwierczyk, P. Horak. — Budapest : European Council for Modelling and Simulation, 2017. — may. — P. 622–627.
7. Gevorkyan M. N., Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. Stochastic Runge–Kutta Software Package for Stochastic Differential Equations // Dependability Engineering and Complex Systems. — Springer International Publishing, 2016. — Vol. 470. — P. 169–179. — 1606.06604.
8. Grassberger P., Scheunert M. Fock-Space Methods for Identical Classical Objects // Fortschritte der Physik. — 1980. — Vol. 28, no. 10. — P. 547–578.
9. Täuber U. C. Field-Theory Approaches to Nonequilibrium Dynamics // Ageing and the Glass Transition. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005. — Vol. 716. — P. 295–348. — 0511743.
10. Janssen H.-K., Täuber U. C. The field theory approach to percolation processes // Annals of Physics. — 2005. — jan. — Vol. 315, no. 1. — P. 147–192. — 0409670.
11. Mobilia M., Georgiev I. T., Täuber U. C. Fluctuations and correlations in lattice models for predator-prey interaction // Physical Review E. — 2006. — apr. — Vol. 73, no. 4. — P. 040903. — 0508043.
12. Demidova A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. The Method of Constructing Models of Peer to Peer Protocols // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — P. 557–562. — 1504.00576.
13. Bainov D. D., Hristova S. G. Differential Equations with Maxima. Pure and Applied Mathematics. — Chapman and Hall/CRC, 2011. — apr. — P. x+291.
14. Timberlake T. K., Mixon J. W. Classical Mechanics with Maxima. Undergraduate Lecture Notes in Physics. — New York, NY : Springer New York, 2016. — P. xi+258.
15. Jenks R. D., Sutor R. S. AXIOM: The Scientific Computation System. — 1992. — P. xxiv + 742.
16. Eferina E. G., Korolkova A. V., Gevorkyan M. N., Kulyabov D. S., Sevastyanov L. A. One-Step Stochastic Processes Simulation Software Package // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2014. — no. 3. — P. 46–59. — 1503.07342.
17. Hindley R. The Principal Type-Scheme of an Object in Combinatory Logic // Transactions of the American Mathematical Society. — 1969. — Vol. 146, no. December. — P. 29–29.
18. Milner R. A Theory of Type Polymorphism in Programming // Journal of Computer and System Sciences. — 1978. — dec. — Vol. 17, no. 3. — P. 348–375.
19. Lamy R. Instant SymPy Starter. — Packt Publishing, 2013. — P. 52.

20. Eferina E. G., Kulyabov D. S. Implementation of Diagram Technique for Statistical Systems in Sympy // 6th International conference "Problems of Mathematical Phisics and Mathematical Modelling". — Moscow : NRNU MEPhI, 2017. — may. — P. 125–127.
21. Perez F., Granger B. E. IPython: A System for Interactive Scientific Computing // Computing in Science & Engineering. — 2007. — Vol. 9, no. 3. — P. 21–29.
22. Oliphant T. E. Python for Scientific Computing // Computing in Science & Engineering. — 2007. — Vol. 9, no. 3. — P. 10–20.
23. Oliphant T. E. Guide to NumPy. — 2 edition edition. — CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015. — P. 364.
24. Verhulst P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. — 1838. — Vol. 10. — P. 113–117.
25. Feller W. Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in wahrscheinlichkeitstheoretischer Behandlung // Acta Biotheoretica. — 1939. — Bd. 5, H. 1. — S. 11–40.
26. Feller W. On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications // Proceedings of the [First] Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. — 1949. — P. 403–432.

## Using the computer algebra system SymPy to implement the method of stochastization of one-step processes

**M. N. Gevorkyan*, A. V. Demidova*, T. R. Velieva*, A. V. Korolkova*, D. S. Kulyabov*†, L. A. Sevastianov*‡**

* *Department of Applied Probability and Informatics,*
*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),*
*6 Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

† *Laboratory of Information Technologies*
*Joint Institute for Nuclear Research*
*6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russia*

‡ *Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics*
*Joint Institute for Nuclear Research*
*6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russia*

Email: gevorkyan_mn@rudn.university, demidova_av@rudn.university, velieva_tr@rudn.university, korolkova_av@rudn.university, kulyabov_ds@rudn.university, sevastianov_la@rudn.university

When modeling phenomena such as population dynamics, the study of controlled flows, etc. there is a problem of adapting existing models to the phenomenon under investigation. To this end, we propose to obtain new models from the first principles on the basis of the method of stochastization of one-step processes. Our study has the form of an iterative process, which consists in obtaining a model and subsequently adjusting it. The number of such iterations can be extremely large. The aim of this work is to develop a software implementation of the method of stochastization of one-step processes by means of computer algebra. In this paper, we propose to use the computer algebra system *SymPy* as the basis for software implementation. Based on the developed algorithm, we obtain stochastic differential equations. The results of the program are demonstrated on the Verhulst model.

**Key words and phrases:** CAS, SymPy, iPython, stochastization, one-step processes.

UDC 512.628, 519.63

# Strong consistent finite difference approximations to systems of PDEs

**V. P. Gerdt**[*†]

[*] *Laboratory of Information Technologies*
*Joint Institute for Nuclear Research*
*Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia*
[†] *Department of Applied Probability and Informatics*
*Peoples' Friendship University of Russia*
*Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

Email: gerdtvp@gmail.com

In the talk we present some of our recent results obtained in collaboration with Yu.Blinkov, D.Robertz, P.Amodio and R. La Scala on computer algebra based application to study the consistency of finite difference approximations to systems of partial differential equations of the form

$$f_1 = \cdots = f_p = 0\,,$$

where $F := \{f_1, \ldots, f_p\} \subset \mathcal{R}\{u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}\}$ is a set of partial differential polynomials with differential indeterminates (dependent variables) $u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}$ and mutually commuting derivations $\delta_1, \ldots, \delta_n$. $\mathcal{R}$ is assumed to be the differential field of rational functions in the independent variables $x_1, \ldots, x_n$ with rational coefficients and may also include finitely many constants (parameters).

**Key words and phrases:** differential polynomial, system of polynomially - nonlinear PDEs, finite difference approximation, weak and strong consistency, differential Thomas decomposition, difference Gröbner basis, two-dimensional Navier-Stokes equations, numerical experiments.

## 1. Introduction

Along with the methods of finite volumes and finite elements, the finite difference method [1] which exploits a local Taylor expansion to replace a differential equation by the difference one is widely used for numerical solving partial differential equations (PDEs) in various fields of scientific computing [2, 3]. It is defined on the chosen solution grid and based on a finite difference approximation (FDA) to the given PDE(s). Together with the discrete approximation of initial or/and boundary condition the FDA constitutes a finite difference scheme (FDS), [4, 5].

The fundamental requirement to a FDS is its convergence to a solution of the corresponding differential problem as the grid spacings go to zero. Unfortunately, in practice, except a very limited class of problems, the convergence cannot be rigorously established. Because of that, for a scalar PDE it has been adopted that the convergence is provided if a given FDA to the PDE is consistent and stable. The consistency implies a reduction of the FDA to the original PDE when the grid spacings go to zero, and it is obvious that the consistency is necessary for convergence. The stability means that the error in the solution caused by small numerical perturbations is bounded.

## 2. Weak and Strong Consistency

We consider a regular grid with the set of grid spacings $\mathbf{h} := \{h_1, \ldots, h_n\}$ ($h_i > 0$) and use the vector notations for the independent and dependent variables: $\mathbf{x} := \{x_1, \ldots, x_n\}$ and $\mathbf{u} := \{u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}\}$.

Discretization of a differential polynomial $f$ means its replacement with a difference polynomial $\tilde{f}$:

$$f \Longrightarrow \tilde{f} : \begin{cases} \mathbf{x} \Longrightarrow \{k_1 h_1, \dots, k_n h_n\}\,, \\ \mathbf{u} \Longrightarrow \mathbf{u}_{k_1,\dots,k_n} = \mathbf{u}(k_1 h_1, \dots, k_n h_n)\,, \end{cases} \qquad \{k_1, \dots, k_n\} \in \mathbb{Z}^n\,.$$

Given a finite set $F := \{f_1, \dots, f_k\}$ of differential polynomials, $[\![F]\!] := \sqrt{[F]}$ will denote the set of their algebraic *differential consequences*, that is, the set of all differential polynomials vanishing on common solutions to the PDE system $\{\, f = 0 \mid f \in F\,\}$. $[\![F]\!]$ is a *radical differential ideal.*

Similarly, if $\tilde{F} := \{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k\}$ is a set of difference polynomials then $[\![\tilde{F}]\!]$ will denote the set of their algebraic *difference consequences*, that is, the set of difference polynomials which vanish on common solutions to the difference system

$$\{\, \tilde{f} = 0 \mid \tilde{f} \in \tilde{F}\,\}\,.$$

$[\![\tilde{F}]\!]$ is a *perfect difference ideal* [6].

We shall say [7] that a *difference equation* $\tilde{f} = 0$ *implies the differential equation* $f = 0$ and write $\tilde{f} \rhd f$ if there is a limit $|\mathbf{h}| \to 0$ such that the Taylor expansion about a grid point yields

$$\tilde{f} \xrightarrow[|\mathbf{h}|\to 0]{} f + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|)\,.$$

In this terminology, *weak consistency* or *w-consistency* of $\tilde{f}$ with $f$ means $\tilde{f} \rhd f$.

Given a PDE system $F$ and its FDA $\tilde{F}$, $\tilde{F}$ is *strongly consistent* or *s-consistent* [8] with $F$ if there is a limit $|\mathbf{h}| \to 0$ such that

$$(\forall \tilde{f} \in [\![\tilde{F}]\!]\,)\ (\,\exists f \in [\![F]\!]\,)\ \ [\ \tilde{f} \rhd f\ ]\,.$$

## 3. Main Theoretical Results

**Theorem 1.** [7]

A FDA $\{\, \tilde{f} = 0 \mid \tilde{f} \in \tilde{F}\,\}$ to a *linear* PDE system $\{\, f = 0 \mid f \in F\,\}$ is s-consistent iff there exists a limit $|\mathbf{h}| \to 0$ such that a *Gröbner basis* (or *involutive basis*) $\tilde{G}$ of $[\tilde{F}]$ satisfies

$$(\,\forall \tilde{g} \in \tilde{G}\,)\ (\,\exists g \in [\![F]\!]\,)\ \ [\ \tilde{g} \rhd g\ ]\,.$$

**Remark 1.** For linear systems a Gröbner basis always exists and the above theorem provides an algorithmic check of s-consistency. In doing so, given a differential polynomial $g$, its membership in $[\![F]\!]$ is algorithmically verifiable via the differential Thomas Decomposition [9].

**Theorem 2.** [8]

A FDA $\{\, \tilde{f} = 0 \mid \tilde{f} \in \tilde{F}\,\}$ to a nonlinear PDE system $\{\, f = 0 \mid f \in F\,\}$ is s-consistent if and only if there is a limit $|\mathbf{h}| \to 0$ such that a *standard basis* $\tilde{G}$ satisfies

$$(\,\forall \tilde{g} \in \tilde{G}\,)\ (\,\exists g \in [\![F]\!]\,)\ \ [\ \tilde{g} \rhd g\ ]$$

**Remark 2.** Generally, for nonlinear systems the last condition is algorithmically undecidable since the standard basis $\tilde{G}$ can be infinite. However, one can check the necessary conditions of s-consistency by composing difference $S-$polynomials from the elements in FDA, computing their continuous limit $|\mathbf{h}| \to 0$ and verifying its membership in $[\![F]\!]$ (see [8]).

## 4. Application to the Navier-Stokes Equations

We consider the two-dimensional motion of incompressible viscous liquid of constant viscosity whose dynamics is described by the Navier-Stokes equations that can be written as the following PDE system

$$\left\{\begin{array}{l} f^1 := u_x + v_y = 0\,,\\ f^2 := u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle u\,,\\ f^3 := v_t + uv_x + vv_y = -p_y + \frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle v\,. \end{array}\right.$$

Here $f^1$ is the continuity equation, $f^1, f^2$ are the proper Navier-Stokes equations, $(u,v)$ is the velocity field, $p$ is pressure and Re is the Reynolds number.

Completion of the Navier-Stokes equation system to involution adds one more equation called the pressure Poisson equation

$$\left\{\begin{array}{l} f^1:\ u_x + v_y = 0\,,\\ f^2:\ u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle u\,,\\ f^3:\ v_t + uv_x + vv_y = -p_y + \frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle v\,,\\ f^4:\ u_x^2 + 2v_xu_y + v_y^2 = -\triangle p\,. \end{array}\right.$$

By using the discretization method suggested in [10] and based on combination of the finite volume method, numerical integration and difference elimination via the construction of Gröbner bases, we obtained in [11] the following two s-consistent approximations on the regular grid with $t_{n+1} - t_n = \tau > 0$ and $x_{j+1} - x_j = y_{k+1} - y_k = h > 0$

$$\mathrm{FDA1}\left\{\begin{array}{l}
\tilde e_1 := \frac{u^n_{j+1\,k} - u^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{v^n_{j\,k+1} - v^n_{j\,k-1}}{2h} = 0\,,\\
\tilde e_2 := \frac{u^{n+1}_{j\,k} - u^n_{j\,k}}{\tau} + \frac{u^2{}^n_{j+1\,k} - u^2{}^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{uv^n_{j\,k+1} - uv^n_{j\,k-1}}{2h} + \\
\quad + \frac{p^n_{j+1\,k} - p^n_{j-1\,k}}{2h} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u^n_{j+2\,k} - 2u^n_{j\,k} + u^n_{j-2\,k}}{4h^2} + \frac{u^n_{j\,k+2} - 2u^n_{j\,k} + u^n_{j\,k-2}}{4h^2}\right) = 0\,,\\
\tilde e_3 := \frac{v^{n+1}_{j\,k} - v^n_{j\,k}}{\tau} + \frac{uv^n_{j+1\,k} - uv^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{v^2{}^n_{j\,k+1} - v^2{}^n_{j\,k-1}}{2h} + \\
\quad + \frac{p^n_{j\,k+1} - p^n_{j\,k-1}}{2h} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{v^n_{j+2\,k} - 2v^n_{j\,k} + v^n_{j-2\,k}}{4h^2} + \frac{v^n_{j\,k+2} - 2v^n_{j\,k} + v^n_{j\,k-2}}{4h^2}\right) = 0\,,\\
\tilde e_4 := \frac{u^2{}^n_{j+2\,k} - 2u^2{}^n_{j\,k} + u^2{}^n_{j-2\,k}}{4h^2} + 2\frac{uv^n_{j+1\,k+1} - uv^n_{j+1\,k-1} - uv^n_{j-1\,k+1} + uv^n_{j-1\,k-1}}{4h^2} + \\
\quad + \frac{v^2{}^n_{j\,k+2} - 2v^2{}^n_{j\,k} + v^2{}^n_{j\,k-2}}{4h^2} + \left(\frac{p^n_{j+2\,k} - 2p^n_{j\,k} + p^n_{j-2\,k}}{4h^2} + \frac{p^n_{j\,k+2} - 2p^n_{j\,k} + p^n_{j\,k-2}}{4h^2}\right) = 0\,.
\end{array}\right.$$

$$\mathrm{FDA2}\left\{\begin{array}{l}
\tilde f_1 := \frac{u^n_{j+1\,k} - u^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{v^n_{j\,k+1} - v^n_{j\,k-1}}{2h} = 0\,,\\
\tilde f_2 := \frac{u^{n+1}_{j\,k} - u^n_{j\,k}}{\tau} + \frac{u^2{}^n_{j+1\,k} - u^2{}^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{uv^n_{j\,k+1} - uv^n_{j\,k-1}}{2h} + \\
\quad + \frac{p^n_{j+1\,k} - p^n_{j-1\,k}}{2h} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u^n_{j+1\,k} - 2u^n_{j\,k} + u^n_{j-1\,k}}{h^2} + \frac{u^n_{j\,k+1} - 2u^n_{j\,k} + u^n_{j\,k-1}}{h^2}\right) = 0\,,\\
\tilde f_3 := \frac{v^{n+1}_{j\,k} - v^n_{j\,k}}{\tau} + \frac{uv^n_{j+1\,k} - uv^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{v^2{}^n_{j\,k+1} - v^2{}^n_{j\,k-1}}{2h} + \\
\quad + \frac{p^n_{j\,k+1} - p^n_{j\,k-1}}{2h} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{v^n_{j+1\,k} - 2v^n_{j\,k} + v^n_{j-1\,k}}{h^2} + \frac{v^n_{j\,k+1} - 2v^n_{j\,k} + v^n_{j\,k-1}}{h^2}\right) = 0\,,\\
\tilde f_4 := \frac{u^2{}^n_{j+2\,k} - 2u^2{}^n_{j\,k} + u^2{}^n_{j-2\,k}}{4h^2} + 2\frac{uv^n_{j+1\,k+1} - uv^n_{j+1\,k-1} - uv^n_{j-1\,k+1} + uv^n_{j-1\,k-1}}{4h^2} + \\
\quad + \frac{v^2{}^n_{j\,k+2} - 2v^2{}^n_{j\,k} + v^2{}^n_{j\,k-2}}{4h^2} + \left(\frac{p^n_{j+2\,k} - 2p^n_{j\,k} + p^n_{j-2\,k}}{4h^2} + \frac{p^n_{j\,k+2} - 2p^n_{j\,k} + p^n_{j\,k-2}}{4h^2}\right) = 0\,.
\end{array}\right.$$

The third approximation with $3 \times 3$ stencil obtained by the conventional discretization is s-inconsistent

$$
\text{FDA3}\left\{
\begin{aligned}
&\tilde g_1 := \tfrac{u^n_{j+1,k}-u^n_{j-1,k}}{2h} + \tfrac{v^n_{j,k+1}-v^n_{j,k-1}}{2h} = 0,\\
&\tilde g_2 := \tfrac{u^{n+1}_{jk}-u^n_{jk}}{\tau} + u^n_{jk}\tfrac{u^n_{j+1,k}-u^n_{j-1,k}}{2h} + v^n_{jk}\tfrac{u^n_{j,k+1}-u^n_{j,k-1}}{2h} + \tfrac{p^n_{j+1,k}-p^n_{j-1,k}}{2h}\\
&\qquad - \tfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\tfrac{u^n_{j+1,k}-2u^n_{jk}+u^n_{j-1,k}}{h^2} + \tfrac{u^n_{j,k+1}-2u^n_{jk}+u^n_{j,k-1}}{h^2}\right) = 0,\\
&\tilde g_3 := \tfrac{v^{n+1}_{jk}-v^n_{jk}}{\tau} + u^n_{jk}\tfrac{v^n_{j+1,k}-v^n_{j-1,k}}{2h} + v^n_{jk}\tfrac{v^n_{j,k+1}-v^n_{j,k-1}}{2h} + \tfrac{p^n_{j,k+1}-p^n_{j,k-1}}{2h}\\
&\qquad - \tfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\tfrac{v^n_{j+1,k}-2v^n_{jk}+v^n_{j-1,k}}{h^2} + \tfrac{v^n_{j,k+1}-2v^n_{jk}+v^n_{j,k-1}}{h^2}\right) = 0,\\
&\tilde g_4 := \left(\tfrac{u^n_{j+1,k}-u^n_{j-1,k}}{2h}\right)^2 + 2\,\tfrac{v^n_{j+1,k}-v^n_{j-1,k}}{2h}\,\tfrac{u^n_{j,k+1}-u^n_{j,k-1}}{2h} + \left(\tfrac{v^n_{j,k+1}-v^n_{j,k-1}}{2h}\right)^2\\
&\qquad + \tfrac{p^n_{j+1,k}-2p^n_{jk}+p^n_{j-1,k}}{h^2} + \tfrac{p^n_{j,k+1}-2p^n_{jk}+p^n_{j,k-1}}{h^2} = 0
\end{aligned}
\right.
$$

Our numerical comparison done in [12] and based on the exact solution to the Navier-Stokes equations [13]

$$
\left\{
\begin{aligned}
&u = -\exp(-2t)\cos(x)\sin(y)\,,\\
&v = \exp(-2t)\sin(x)\cos(y)\,,\\
&p = -\tfrac{1}{4}\exp(-4t)(\cos(2x)+\cos(2y))
\end{aligned}
\right.
$$

revealed superiority of the s-consistent FDAs over s-inconsistent ones. However, in [12] we restricted the numerical analysis by a rather small time interval. Analysing behaviour of solutions at larger times we discovered a notable growth of numerical error for all three approximations.

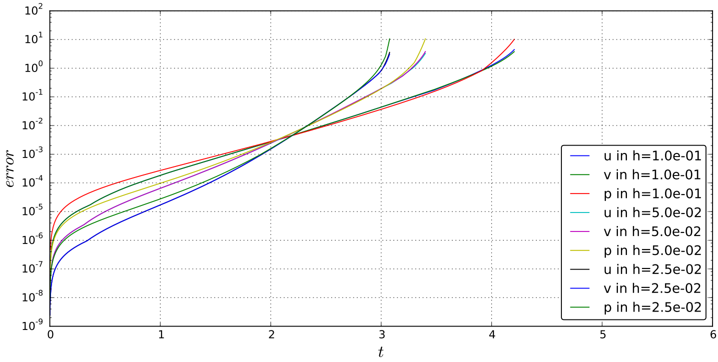
Searching a FDA with better behavior at large $t$, we applied in [14] a Buchberger's like algorithm [8, 15] to compute a Gröbner basis $G$ of the difference ideal generated by $\tilde f_1, \tilde f_2, \tilde f_3$ from FDA2 for the lexicographic ranking with

$$\sigma_t \succ \sigma_x \succ \sigma_y \quad \text{and} \quad p \succ u \succ v\,,$$

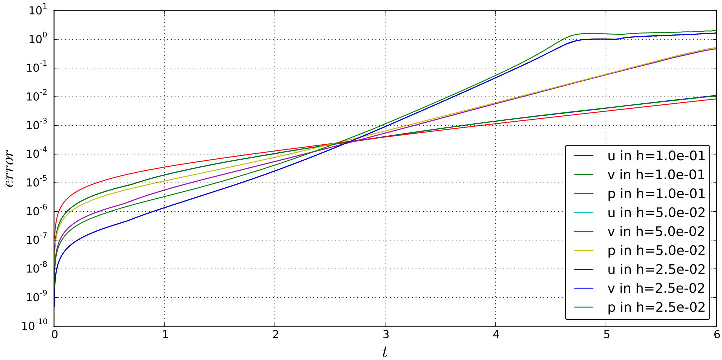
where $\sigma_t$ is the forward-shift operator in time along the solution grid. Similarly, $\sigma_x$ and $\sigma_y$ are the forward-shift operators in $x$ and $y$, respectively. The Gröbner basis $G$ has 5 elements. We selected that extra element in $G$ which contains the dependent variables on the same temporal layer:

$$
\begin{aligned}
\tilde q_4 &:= \tfrac{p^n_{j+2,k}-2p^n_{j,k}+p^n_{j-2,k}}{4h^2} + \tfrac{p^n_{j,k+2}-2p^n_{j,k}+p^n_{j,k-2}}{4h^2}\\
&+ \tfrac{(u^n_{j+2,k})^2-2(u^n_{j,k})^2+(u^n_{j-2,k})^2}{4h^2} + \tfrac{(v^n_{j,k+2})^2-2(v^n_{j,k})^2+(v^n_{j,k-2})^2}{4h^2}\\
&+ 2\,\tfrac{u^n_{j+1,k+1}v^n_{j+1,k+1}-u^n_{j+1,k-1}v^n_{j+1,k-1}-u^n_{j-1,k+1}v^n_{j-1,k+1}+u^n_{j-1,k-1}v^n_{j-1,k-1}}{4h^2}\\
&+ \tfrac{2}{\mathrm{Re}}\,\tfrac{-u^n_{j+2,k}+4u^n_{j+1,k}-4u^n_{j-1,k}+u^n_{j-2,k}-u^n_{j+1,k+1}-u^n_{j+1,k-1}+u^n_{j-1,k+1}+u^n_{j-1,k-1}}{4h^3}\\
&+ \tfrac{2}{\mathrm{Re}}\,\tfrac{-v^n_{j,k+2}+4v^n_{j,k+1}-4v^n_{j,k-1}+v^n_{j,k-2}-v^n_{j+1,k+1}-v^n_{j-1,k+1}+v^n_{j+1,k-1}+v^n_{j-1,k-1}}{4h^3} = 0\,.
\end{aligned}
$$

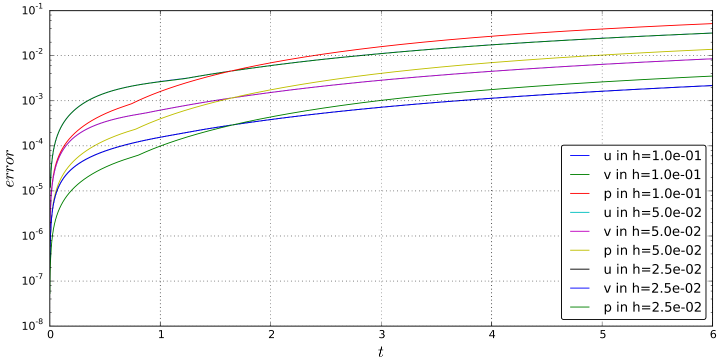
Thus, we constructed a new FDA (scheme) as $\{\tilde f_1, \tilde f_2, \tilde f_3, \tilde q_4\}$. We shall refer to it as to FDA4. It is s-consistent [14]. The below figures show the time dynamics of errors in $u, v, p$, in dependence of the value of $h$, and demonstrate much better behavior of FDA4 in comparison with the other three FDAs.



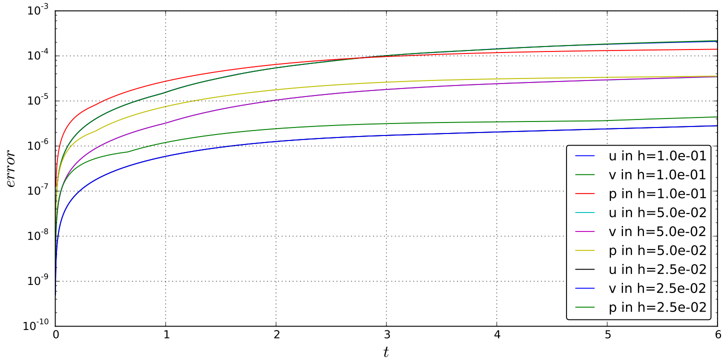

FDA1




FDA2




FDA3




FDA4

**Acknowledgments**

The work is partially supported by the RFBR grant No 16-01-00080.

**References**

1. *Samarskii A. A.* Theory of Difference Schemes. — Marcel Dekker, New York, 2001.
2. *Godunov S. K., Ryaben'kii V. S.* Difference schemes. An introduction to the underlying theory. —Elsevier, New York, 1987.
3. *Morton K. W., Mayers D. F.* Numerical Solution of Partial Differential Equations. An Introduction. —Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
4. *Strikwerda J. C.* Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, 2nd Edition. —SIAM, Philadelphia, 2004.
5. *Thomas J. W.* Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, 2nd Edition. —Springer, New York, 1998.
6. *Levin A.* Difference Algebra. Algebra and Applications. —Vol.8. —Springer, 2008.
7. *Gerdt V. P., Robertz D.* Consistency of Finite Difference Approximations for Linear PDE Systems and its Algorithmic Verification. Proceedings of ISSAC 2010 — P.53–59. — Association for Computing Machinery, New York, 2010.
8. *Gerdt V. P.* Consistency Analysis of Finite Difference Approximations to PDE Systems. Mathematical Modelling in Computational Physics. —Lecture Notes in Computer Science —Vol.7125 —P.28–42 — Springer, Berlin, 2012. arXiv:math.AP/1107.4269
9. *Bächler T., Gerdt V., Lange-Hegermann M., Robertz D.* Algorithmic Thomas decomposition of algebraic and differential systems. Journal of Symbolic Computation. —Vol.47(10) —P.1233–1266, 2012. arXiv:math.AC/1108.0817
10. *Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V.* Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) —Vol.2 —Paper 051 —26 Pages, 2006. arXiv:math.RA/0605334
11. *Gerdt V. P., Blinkov Yu. A.* Involution and Difference Schemes for the Navier-Stokes Equations. Lecture Notes in Computer Science —Vol.5743 —P.94–105 —Springer, Berlin , 2009.
12. *Amodio P., Blinkov Yu. A., Gerdt V. P., La Scala R.* On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier-Stokes Equations. —Lecture Notes in Computer Science —Vol.8136 —P.46–60 — Springer, Cham, 2013. arXiv:math.NA/1307.0914

13. *Kim J., Moin P.* Application of a Fractional-Step Method To Imcompressible Navier-Stokes Equations. —Journal of Computational Physics. —Vol.59 —P.308–323, 1985.
14. *Amodio P., Blinkov Yu. A., Gerdt V. P., La Scala R.* Algebraic construction and numerical behavior of a new s-consistent difference scheme for the 2D Navier-Stokes equations. Applied Mathematics and Computation. —Vol.314 —P.408–421, 2017.
15. Gerdt V. P., La Scala R. Noetherian quotients of the algebra of partial difference polynomials and Gröbner bases of symmetric ideals. —Journal of Algebra —Vol.423 —P.1233–1261, 2015. arXiv:math.AC/1304.7967

УДК 512.628, 519.63

# Сильно согласованные конечно - разностные аппроксимации систем ДУЧП

**В. П. Гердт**[*†]

[*] *Лаборатория информационных технологий,*
*Объединённый институт ядерных исследований,*
*ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*
[†] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,*
*Российский университет дружбы народов,*
*ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*

Email: `gerdtvp@gmail.com`

В докладе будут представлены некоторые из недавних результатов, полученных в сотрудничестве с Ю.Блинковым, Д.Робертцом, П.Амодио и Р.Ла Скала по применению компьютерной алгебры к изучению согласованности конечно - разностных аппроксимаций систем дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$f_1 = \cdots = f_p = 0\,,$$

где $F := \{f_1, \ldots, f_p\} \subset \mathcal{R}\{u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}\}$ - конечное множество дифференциальных многочленов от зависимых переменных $u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}$ и их частных производных по независимым переменным $x_1, \ldots, x_n$ над (дифференциальным) полем $\mathcal{R}$ рациональных функций от $x_1, \ldots, x_n$ с рациональными коэффициентами. Коэффициенты многочленов могут также рационально зависеть от конечного числа констант (параметров).

**Ключевые слова:** дифференциальный многочлен, система полиномиально - нелинейных ДУЧП, конечно - разностная аппроксимация, слабая и сильная согласованность, дифференциальная декомпозиция Томаса, разностный базис Гребнера, двумерные уравнения Навье - Стокса, численные эксперименты.

UDC 519.632.4

# Algorithm for calculating interpolation Hermite polynomials for high-accuracy finite element method

**A. Gusev***, **S. Vinitsky***†, **O. Chuluunbaatar***‡, **G. Chuluunbaatar***, **V. Gerdt***, **V. Derbov**§, **A. Góźdź**¶, **P. Krassovitskiy**‖

* *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*
† *Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia*
‡ *Institute of Mathematics, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia*
§ *N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia*
¶ *Institute of Physics, University of M. Curie-Sklodowska, Lublin, Poland*
‖ *Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan*

Email: gooseff@jinr.ru,vinitsky2008@gmail.com,chuka@jinr.ru,galmandakh@mail.ru,gerdt@jinr.ru,derbovvl@gmail.com,andrzej.gozdz@umcs.lublin.pl,pavel.kras@inp.kz

We propose a new algorithm for calculating high-order Hermite interpolation polynomials of the simplex of the Euclidean space implementable in any computer algebra system in analytical form and give their classification and a typical example of triangle element. The basis functions of finite elements referred to as Hermite interpolation polynomials are high-order polynomials, determined from a specially constructed set of values of the polynomials themselves, their partial derivatives, and their derivatives along the directions of the normals to the boundaries of finite elements. Such a choice of the polynomials allows us to construct a piecewise polynomial basis continuous across the boundaries of elements together with the derivatives up to a given order, which is used to solve elliptic boundary value problems using the high-accuracy finite element method.

**Key words and phrases:** Hermite interpolation polynomials, simplex element, high accuracy finite element schemes.

## 1. Introduction

For more than half a century, the finite element method (FEM) has won universal recognition as an efficient method for solving the most diverse problems of mathematical physics and engineering. In the multidimensional case the finite element grids of various shapes are used. The problem of constructing high-order interpolation polynomials for FEM has a simple solution only for simplex finite elements, such as the known Lagrange interpolation polynomials (LIPs) [1]. Meanwhile, the LIPs of the order of $p'$ are often sought by compiling and solving systems of $(p'+1)(p'+2)/2$ and $(p'+1)(p'+2)(p'+3)/6$ linear algebraic equations for a 2D domain and a 3D domain, respectively [2].

However, there are problems, in which the values of directional derivatives are also necessary. They are of particularly importance, when high smoothness between the elements is required, or when the gradient of solution is to be determined with enhanced accuracy. The construction of such basis functions, referred to as Hermite interpolation polynomials (HIPs), is not possible on an arbitrary mesh of nodes. It is one of the most important and difficult problems in the FEM and its applications in different fields, solved to date explicitly only for certain particular cases [2, 3].

In this paper we announce a new algorithm for calculation of HIPs providing continuity of piecewise polynomial functions composed of them and their directional derivatives up to the order $\kappa'$ along the normals to the boundaries of simplex finite elements in the physical frame of the Euclidean space, which reduces to compiling and solving the systems of the $(p'-2\kappa')(p'-2\kappa'+1)/2$ linear equations for a triangle domain.

## 2. Algorithm for Calculating the Hermite Interpolating Polynomials

In the conventional implementation of FEM for the problem set in the physical coordinates $z = (z_1, ..., z_d) \in \mathcal{R}^d$ all calculations are performed in the local (reference) coordinates $z' = (z'_1, ..., z'_d) \in \mathcal{R}^d$, in which the $d+1$ coordinates of the *simplex vertices* are the following [3]: $\hat{z}'_j=(\hat{z}'_{j1}, ..., \hat{z}'_{jk}, ..., \hat{z}'_{jd})$, $\hat{z}'_{jk}=\delta_{jk}$, $j = 0, ..., d$, $k = 1, ..., d$

$$z_i = \hat{z}_{0i} + \sum_{j=1}^{d} \hat{J}_{ij} z'_j, \quad z'_i = \sum_{j=1}^{d} (\hat{J}^{-1})_{ij}(z_j - \hat{z}_{0j}), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'_i}=\sum_{j=1}^{d} \hat{J}_{ji}\frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \frac{\partial}{\partial z_i}=\sum_{j=1}^{d}(\hat{J}^{-1})_{ji}\frac{\partial}{\partial z'_j},$$

where $\hat{J}_{ij} = \hat{z}_{ji} - \hat{z}_{0i}$, $i = 1, ..., d$, given by the corresponding $d+1$ physical coordinates $\hat{z}_j=(\hat{z}_{j1}, ..., \hat{z}_{jd})$. In the local coordinates of the $d$-dimensional simplex $\Delta$, the LIP $\varphi_r(z')$ of the order $p$ is equal to one at the node point $\xi'_r = (n_1/p, ..., n_d/p)$, $n_i \geq 0$, $n_1 + ... + n_d \leq p$ and zero at the rest node points $\xi'_{r'}$, i.e., $\varphi_r(\xi'_{r'}) = \delta_{rr'}$ are determined by the formula:

$$\varphi_r(z')=\left(\prod_{i=1}^{d}\prod_{n'_i=0}^{n_i-1}\frac{z'_i-n'_i/p}{n_i/p-n'_i/p}\right)\left(\prod_{n'_0=0}^{n_0-1}\frac{1-z'_1-...-z'_d-n'_0/p}{n_0/p-n'_0/p}\right), \; n_0=p-n_1-...-n_d.$$

*Step 1.* To construct the HIPs in the local coordinates $z'$, let us introduce the set of auxiliary polynomials $\varphi_r^{\kappa_1...\kappa_d}(z')$ referred to as AP1

$$\varphi_r^{\kappa_1...\kappa_d}(\xi'_r)=\delta_{rr'}\delta_{\kappa_1 0}...\delta_{\kappa_d 0}, \quad \left.\frac{\partial^{\mu_1...\mu_d}\varphi_r^{\kappa_1...\kappa_d}(z')}{\partial {z'_1}^{\mu_1}...\partial {z'_d}^{\mu_d}}\right|_{z'=\xi'_{r'}}=\delta_{rr'}\delta_{\kappa_1\mu_1}...\delta_{\kappa_d\mu_d}, \tag{2}$$

$$0 \leq \kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_d \leq \kappa_{\max}-1, \quad 0 \leq \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_d \leq \kappa_{\max}-1.$$

Here at the node points $\xi'_r$, in contrast to LIPs, the values of not only the functions themselves, but also of their derivatives to the order $\kappa_{\max}-1$ are specified. AP1 are given by the expressions

$$\varphi_r^{\kappa_1\kappa_2...\kappa_d}(z') = w_r(z')\sum_{\mu\in\Delta_\kappa} a_r^{\kappa_1...\kappa_d,\mu_1...\mu_d}(z'_1-\xi'_{r1})^{\mu_1}\times ...\times(z'_d-\xi'_{rd})^{\mu_d}, \tag{3}$$

$$w_r(z')=\left(\prod_{i=1}^{d}\prod_{n'_i=0}^{n_i-1}\frac{(z'_i-n'_i/p)^{\kappa^{\max}}}{(n_i/p-n'_i/p)^{\kappa^{\max}}}\right)\left(\prod_{n'_0=0}^{n_0-1}\frac{(1-z'_1-...-z'_d-n'_0/p)^{\kappa^{\max}}}{(n_0/p-n'_0/p)^{\kappa^{\max}}}\right), \quad w_r(\xi'_r) = 1,$$

where the coefficients $a_r^{\kappa_1...\kappa_d,\mu_1...\mu_d}$ are calculated from recurrence relations obtained by the substitution of Eq. (3) into the conditions (2).

*Step 2.* For unique determination of the polynomial basis let us introduce the $K$ auxiliary polynomials $Q_s(z)$ of two types: AP2 and AP3, linearly independent of AP1 from Eq. (3) and satisfying the following conditions at the node points $\xi'_{r'}$ of AP1:

$$Q_s(\xi'_{r'})=0, \quad \left.\frac{\partial^{\kappa'_1\kappa'_2...\kappa'_d}Q_s(z')}{\partial {z'_1}^{\mu_1}\partial {z'_2}^{\mu_2}...\partial {z'_d}^{\mu_d}}\right|_{z'=\xi'_{r'}}=0, \quad s = 1, ..., K. \tag{4}$$

To provide the continuity of derivatives the part of $T_1(\kappa')$ polynomials referred to as AP2 must satisfy the condition

$$\left.\frac{\partial^k Q_s(z')}{\partial n_{i(s)}^k}\right|_{z'=\eta'_{s'}}=\delta_{ss'}, \quad s, s'=1, ..., T_1(\kappa'), \quad k = k(s'), \tag{5}$$

Table 1

Characteristics of the HIP bases

| $[p\kappa_{\max}\kappa']$ | [120] | [131] | [141] | [231] | [152] | [162] | [241] | [173] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p'$ | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 11 | 13 |
| $N_{1p'}$ | 10 | 21 | 36 | 45 | 55 | 78 | 78 | 105 |
| $K$ | 1 | 3 | 6 | 9 | 10 | 15 | 9 | 21 |
| $N(\mathrm{AP1})=N_{\kappa_{\max}p'}$ | 9 | 18 | 30 | 36 | 45 | 63 | 60 | 84 |
| $N(\mathrm{AP2})=T_1(\kappa')$ | 0 | 3 | 3 | 6 | 9 | 9 | 6 | 18 |
| $N(\mathrm{AP3})=K-T_1(\kappa')$ | 1 | 0 | 3 | 3 | 1 | 6 | 12 | 3 |
| $p'=\kappa_{\max}(p+1)-1$ | | | | | | | | |
| $N_{\kappa_{\max}p'}=(p+1)(p+2)\kappa_{\max}(\kappa_{\max}+1)/4$ | | | | | | | | |
| $N_{1p'}=\ (p'+1)(p'+2)/2$ | | | | | | | | |
| $K=p(p+1)\kappa_{\max}(\kappa_{\max}-1)/4$ | | | | | | | | |
| Restriction of derivative order $\kappa'$ : $3p\kappa'(\kappa'+1)/2\le K$. | | | | | | | | |

where $\eta'_{s'}=(\eta'_{s'1},...,\eta'_{s'd})$ are the chosen points lying on the faces of various dimensionalities (from 1 to $d-1$) of the $d$-dimensional simplex $\Delta$ and not coincident with the nodal points of HIP $\xi'_r$, where Eq. (2) is valid, $\partial/\partial n_{i(s)}$ is the directional derivative along the vector $n_i$, normal to the corresponding $i$-th face of the $d$-dimensional simplex $\Delta_q$ at the point $\eta_{s'}$ in the physical frame, which is recalculated to the point $\eta'_{s'}$ of the face of the simplex $\Delta$ in the local frame using the relations (1). Calculating the number $T_1(\kappa)$ of independent parameters required to provide the continuity of derivatives to the order $\kappa$, we determine its maximal value $\kappa'$ that can be obtained for the schemes with given $p$ and $\kappa_{\max}$ and, correspondingly, the additional conditions (5). $T_2{=}K{-}T_1(\kappa')$ parameters remain independent and, correspondingly, $T_2$ additional conditions are added, necessary for the unique determination of the polynomials referred to as AP3,

$$Q_s(\zeta'_{s'}){=}\delta_{ss'},\quad s,s'{=}T_1(\kappa'){+}1,...,K, \tag{6}$$

where $\zeta'_{s'}=(\zeta'_{s'1},...,\zeta'_{s'd})\in\Delta$ are the chosen points belonging to the simplex without the boundary, but not coincident with the node points of AP1 $\xi'_r$.

The auxiliary polynomials AP2 and AP3 are given by the expression

$$Q_s(z')=\left(\prod_{t=0}^{d}{z'_t}^{k_t}\right)\sum_{j_1,\dots,j_d} b_{j_1,\dots,j_d;s}{z'_1}^{j_1}...{z'_d}^{j_d},\quad z'_0=1-z'_1-...-z'_d. \tag{7}$$

For AP2 $k_t=1$, if the point $\eta_s$, in which the additional conditions (5) are specified, lies on the corresponding face of the simplex $\Delta$, then $k_t=\kappa'$, otherwise, $t=0,...,d$. For AP3 $k_t=\kappa'$, $t=0,...,d$. The coefficients $b_{j_1,\dots,j_d;s}$ are determined from the uniquely solvable system of linear equations, obtained as a result of the substitution of Eq. (7) into the conditions (4)–(6).

*Step 3.* As a result, we get the required set of basis HIPs $\varphi^\kappa_r(z')=\{\check\varphi^\kappa_r(z'),Q_s(z')\}$, $\kappa=\kappa_1,...,\kappa_d$, composed of the polynomials $Q_s(z')$ of the type AP2 and AP3, and the

Table 2

The HIP $p=1$, $\kappa_{\max}=3$, $\kappa'=1$, $p'=5$ (the Argyris element [3])

| AP1 : $\xi_1{=}(0,1)$, $\xi_2{=}(1,0)$, $\xi_3{=}(0,0)$ | | |
|---|---|---|
| $\varphi_1^{0,0}{=}z_2^3(6z_2^2{-}15z_2{+}10)$ | $\varphi_2^{0,0}{=}z_1^3(6z_1^2{-}15z_1{+}10)$ | $\varphi_3^{0,0}{=}z_0^3(6z_0^2{-}15z_0{+}10)$ |
| $\varphi_1^{0,1}{=}{-}z_2^3(z_2{-}1)(3z_2{-}4)$ | $\varphi_2^{0,1}{=}{-}z_1^3z_2(3z_1{-}4)$ | $\varphi_3^{0,1}{=}{-}z_0^3z_2(3z_0{-}4)$ |
| $\varphi_1^{1,0}{=}{-}z_1z_2^3(3z_2{-}4)$ | $\varphi_2^{1,0}{=}{-}z_1^3(z_1{-}1)(3z_1{-}4)$ | $\varphi_3^{1,0}{=}{-}z_0^3z_1(3z_0{-}4)$ |
| $\varphi_1^{0,2}{=}z_2^3(z_2{-}1)^2/2$ | $\varphi_2^{0,2}{=}z_1^3z_2^2/2$ | $\varphi_3^{0,2}{=}z_0^3z_2^2/2$ |
| $\varphi_1^{1,1}{=}z_1z_2^3(z_2{-}1)$ | $\varphi_2^{1,1}{=}(z_1{-}1)z_1^3z_2$ | $\varphi_3^{1,1}{=}z_0^3z_1z_2$ |
| $\varphi_1^{2,0}{=}z_1^2z_2^3/2$ | $\varphi_2^{2,0}{=}z_1^3(z_1{-}1)^2/2$ | $\varphi_3^{2,0}{=}z_0^3z_1^2/2$ |
| AP2 : $\eta_1{=}(0,1/2)$, $\eta_2{=}(1/2,0)$, $\eta_3{=}(1/2,1/2)$ | | |
| $Q_1{=}16z_0^2z_1z_2^2/f_{11}$ | $Q_2{=}16z_0^2z_1^2z_2/f_{22}$ | $Q_3{=}{-}8z_0z_1^2z_2^2/f_{01}$ |

polynomials $\check\varphi_r^\kappa(z')$

$$\check\varphi_r^\kappa(z'){=}\varphi_r^\kappa(z'){-}\sum_{s=1}^{K}c_{\kappa;r;s}Q_s(z'),\ c_{\kappa;r;s}{=}\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^k\varphi_r^\kappa(z')}{\partial n_{i(s)}^k}\right|_{z'=\eta'_s}, & Q_s(z'){\in}\mathrm{AP2},\\ \varphi_r^\kappa(\zeta_s), & Q_s(z'){\in}\mathrm{AP3}.\end{cases}\tag{8}$$

*Step 4.* The AP1 $\check\varphi_r^\kappa(z')$ from (8), where $\kappa$ denotes the directional derivatives along the local coordinate axes, are recalculated using Eqs. (1) into $\check\varphi_r^\kappa(z')$, specified in the local coordinates, but now $\kappa$ denotes already the directional derivatives along the physical coordinate axes.

For example, at $d=2$ the derivatives $\partial/\partial n_i$ along the direction $n_i$, perpendicular to the appropriate face $i=0,1,2$ in the physical frame are expressed in terms of the partial derivatives $\partial/\partial z'_j$, $j=1,2$ in the local frame of the triangle $\Delta$, using the relations (1), as

$$\frac{\partial}{\partial n_i}{=}f_{i1}\frac{\partial}{\partial z'_1}{+}f_{i2}\frac{\partial}{\partial z'_2},\quad i{=}1,2,\qquad \frac{\partial}{\partial n_0}{=}(f_{01}{+}f_{02})\frac{\partial}{\partial z'_1}{+}(f_{01}{-}f_{02})\frac{\partial}{\partial z'_2},$$

where $f_{ij}=f_{ij}(\hat z_0,\hat z_1,\hat z_2)$ are functions of the coordinates of vertices $\hat z_0,\hat z_1,\hat z_2$ of the triangle $\Delta_q$ in the physical frame. The characteristics of the polynomial basis of HIPs on the *triangle element* $\Delta$ at $d=2$ are presented in Table 1. Table 2 presents the results of executing the Algorithm for calculating the HIPs in the case of ($p$=1, $\kappa_{\max}=3$, $\kappa'=1$, $p'=5$), AP1 $\varphi_r^k(z')$, AP2 and AP3 $Q_s(z')$, and the corresponding coefficients $c_{\kappa;r;s}$ are calculated using Eqs. (8) (in considered example the number of $c_{\kappa;r;s}$ equals to 48). The notations are as follows: $\xi_r$, $\eta_s$, $\zeta_s$ are the coordinates of the nodes, in which the right-hand side of Eq. (2), (5) or (6) equals one, $z_0=1-z_1-z_2$, the arguments of functions and the primes in the notations of independent variables are omitted.

The explicit expressions for the HIPs from Table 1 were calculated analytically in Maple, but are not presented here because of the paper size limitations (one can receive it with request to authors or using program TRIAHP implemented in Maple which will be published in the library JINRLIB). The calculations were carried out using the Intel Pentium CPU 987, x64, 4 GB RAM, the Maple 16, during 6 seconds.

## 3. Examples

In Fig 1 we show on examples how to construct the set of equations for calculation of IHP.

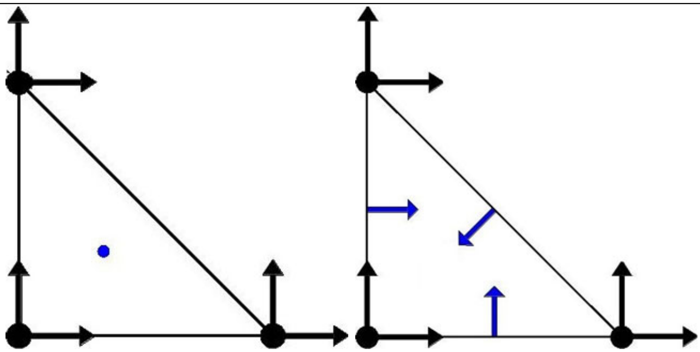


Figure 1. The sets of conditions for constructing IHP on triangle elements. Left panel: the IHP [120] are constructed using values of polynomials and their partial derivatives in points marked by dots with arrows, and using values of polynomials in point marked by dots without arrows. Right panel: the IHP [131] are constructed using values of polynomials and their first and second order partial derivatives in points marked by dots with arrows, and using values of normal derivatives marked by arrows.

1. In a case $p = 1$, $\kappa_{\max} = 2$ we have third order $p' = 3$ polynomials of two variables $(z'_1, z'_2)$. In an vicinity of the edge $z'_2 = 0$ this polynomial can be present in the form

$$P^{(\deg=3)}(z'_1, z'_2) = P^{(\deg=3)}(z'_1) + z'_2 P^{(\deg=2)}(z'_1) + ...,$$

where $P^{(q)}(*)$ means a polynomial of degree $q$ of its arguments. From the equality $\partial P^{(\deg=3)}(z'_1, z'_2)/\partial z'_2 = P^{(\deg=2)}(z'_1)$ follows that the polynomial $P^{(\deg=2)}(z'_1)$ determines a first derivative of $P^{(\deg=3)}(z'_1, z'_2)$ on a edge $z'_2 = 0$.

The total number of third order linear independent polynomials is $N_{1p'} = N_{13} = 10$ and number of AP1 is $N_{\kappa_{\max} p'} = N_{23} = 9$ it means that we have only $K = 1$ AP2 and AP3, or $K = 1$ parameters.

For an identical determination of a third order polynomial $P^{(\deg=3)}(z'_1)$ it is needed four parameters. So, we have them: they are values of polynomials and their tangential derivatives $\partial P^{(\deg=3)}(z'_1, z'_2)/\partial z'_1$ at $(z'_1, z'_2) = (0, 0)$ and $(z'_1, z'_2) = (1, 0)$ (see Fig. 1). For identical determination of first derivative of $\partial P^{(\deg=3)}(z'_1, z'_2)/\partial z'_2$ which equals to polynomial $P^{(\deg=2)}(z'_1)$ it is needed three parameters, but we have only two: they are values of normal derivatives $\partial P^{(\deg=3)}(z'_1, z'_2)/\partial z'_2$ (generally, the derivative by any non-tangential direction) at $(z'_1, z'_2) = (0, 0)$ and $(z'_1, z'_2) = (1, 0)$. So, for identical determination of derivatives needed for matching IHP in all three edges of a triangle, needed 3 parameters, but we have only one. Thus, using these polynomials we can construct the FEM schemes providing continuity of piecewise polynomial functions but not first-order directional derivatives. So, this set of polynomials, marked in table 1 as [120] consisting of 9 AP1, and one AP3 which is determined by (6) at $\zeta_1 = (1/3, 1/3)$.

The basis third-order IHP [120] have the form

$$\begin{aligned}
&\check\varphi_1^{0,0}(z')=z_2'(7z_1'^2-2z_2'^2+7z_1'z_2'-7z_1'+3z_2'),\ \check\varphi_1^{1,0}(z')=-z_2'(2z_1'^2-z_2'^2+2z_1'z_2'-2z_1'+z_2'),\\
&\check\varphi_1^{0,1}(z')=-z_1'z_2'(1-z_1'-2z_2'),\quad \check\varphi_2^{0,0}(z')=-z_1'(2z_1'^2-7z_2'^2-7z_1'z_2'-3z_1'+7z_2'),\\
&\check\varphi_2^{1,0}(z')=-z_1'z_2'(1-2z_1'-z_2'),\quad \check\varphi_2^{0,1}(z')=z_1'(z_1'^2-2z_2'^2-z_1'+2z_2'-2z_1'z_2'),\\
&\check\varphi_0^{1,0}(z')=z_2'(1-2z_1'-z_2')(1-z_1'-z_2'),\quad \check\varphi_0^{0,1}(z')=z_1'(1-z_1'-2z_2')(1-z_1'-z_2'),\\
&\check\varphi_0^{0,0}(z')=-(1-z_1'-z_2')(2z_1'^2+2z_2'^2+11z_1'z_2'-z_1'-z_2'-1),\quad Q_1(z')=27z_1'z_2'(1-z_1'-z_2').
\end{aligned}$$

An alternative set is Zienkievicz polynomials [3], that determined by an additional condition $\varphi_j((1/3,1/3))=0$, the basis of Zienkievicz polynomials contain 9 polynomials, presented above without polynomial $Q_1(z')$.

2. In a case $p=1$, $\kappa_{\max}=3$ we have fifth order $p'=5$ polynomials of two variables $(z_1',z_2')$. In an vicinity of the edge $z_2'=0$ this polynomial can be present in the form

$$P^{(\deg=3)}(z_1',z_2')=P^{(\deg=5)}(z_1')+z_2'P^{(\deg=4)}(z_1')+....$$

The total number of fifth order linear independent polynomials is $N_{1p'}=N_{15}=21$ and number of AP1 is $N_{\kappa_{\max}p'}=N_{35}=18$ it means that we have $K=3$ AP2 and AP3, or $K=3$ parameters.

For an identical determination of a fifth order polynomial $P^{(\deg=5)}(z_1')$ it is needed six parameters. So, we have them: they are values of polynomials and their first and second tangential derivatives at $(z_1',z_2')=(0,0)$ and $(z_1',z_2')=(1,0)$ (see Fig. 1). For identical determination of first derivative of $\partial P^{(\deg=5)}(z_1',z_2')/\partial z_2'$ which equals to polynomial $P^{(\deg=4)}(z_1')$ it is needed five parameters, but we have only four: they are values of normal and mixed derivatives, $\partial P^{(\deg=3)}(z_1',z_2')/\partial z_2'$ and $\partial^2 P^{(\deg=3)}(z_1',z_2')/\partial z_1'/\partial z_2'$, at $(z_1',z_2')=(0,0)$ and $(z_1',z_2')=(1,0)$. So, for identical determination of derivatives needed for matching IHP in all three edges of a triangle, needed 3 parameters, and we have them. Thus, using these polynomials we can construct the FEM schemes providing desirable continuity of piecewise polynomial functions and first-order directional derivatives, but not second one. So, this set of Argyris polynomials, marked in table 1 as [131] consisting of 18 AP1, and three AP2 which is determined by (5) at the centers of the edges (see table 2).

An alternative set is Bell polynomials [3] contains of 18 polynomials that can be presented in the form

$$P^{(\deg=3)}(z_1',z_2')=P^{(\deg=5)}(z_1')+z_2'P^{(\deg=3)}(z_1')+...,$$

i.e. the normal derivative on the edge is third-order (not forth-order polynomials). These polynomials can be obtained by the additional conditions $\partial^5 P(z_1',z_2')/\partial n\partial\tau^4=0$.

Another alternative set that provides continuity of piecewise polynomial functions but not first-order directional derivatives is consisting of 18 AP1, and three AP3 which is determined by (6), for example, at $\zeta_1=(1/2,1/4)$, $\zeta_2=(1/4,1/4)$ and $\zeta_3=(1/4,1/2)$.

## 4. Conclusion

We presented a symbolic-numeric algorithm, implementable in any computer algebra system, in particular, the Maple system, for analytical calculation of the basis of Hermite interpolation polynomials of several variables of the simplex, which can be used to construct a FEM computational scheme of high-order accuracy. The symbolic part is calculation of HIPs in the local (reference) coordinates but the transition to the physical coordinates leads to cumbersome expressions and can be performed only numerically. The efficiency of the FEM computational schemes using high-order accuracy LIPs and HIPs for benchmark calculations of exactly solvable problems for the triangle membrane and hypercube is shown in the forthcoming paper.

## Acknowledgments

The work was partially supported by the RFBR (grants Nos. 16-01-00080 and 17-51-44003 Mong_a), the MES RK (Grant No. 0333/GF4), the Bogoliubov-Infeld program and grant of Plenipotentiary of the Republic of Kazakhstan in JINR. The reported study was partially funded within the Agreement N 02.03.21.0008 dated 24.04.2016 between the MES RF and RUDN University.

## References

1. N.C. Bachvalov, N.P. Zhidkov and G.M. Kobelkov, *Chislennye metody* (Nauka, Moscow, 1987), *in Russian.*
2. A.R. Mitchell, R. Wait, *The Finite Element Method in Partial Differential Equations* (John Wiley & Sons, Chichester, 1977)
3. P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems* (North-Holland, Amsterdam, 1978)

УДК 519.632.4

# Алгоритм вычисления интерполяционных полиномов Эрмита для метода конечных элементов высокого порядка точности

**А. Гусев[*], С. Виницкий[*†], О. Чулуунбаатар[*‡], Г. Чулуунбаатар[*], В. Гердт[*], В. Дербов[§], А. Гуждж[¶], П. Красовицкий[‖]**

[*] *Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Россия*
[†] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[‡] *Институт математики монгольского национального университета, Улан-Батор, Монголия*
[§] *Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия*
[¶] *Институт физики университета им. М. Кюри-Склодовска, Люблин, Польша*
[‖] *Институт ядерной физики, Алматы, Казахстан*

Email: gooseff@jinr.ru,vinitsky2008@gmail.com,chuka@jinr.ru,galmandakh@mail.ru,gerdt@jinr.ru,derbovvl@gmail.com,andrzej.gozdz@umcs.lublin.pl,pavel.kras@inp.kz

Мы предлагаем новый алгоритм вычисления в аналитическом виде интерполяционных полиномов Эрмита высокого порядка на симплексе в евклидовом пространстве, реализуемых в любой системе компьютерной алгебры, и даем их классификацию и типичные примеры треугольного элемента. Базисными функциями конечных элементов, называемыми интерполяционными полиномами Эрмита, являются полиномы высокого порядка, определенные из специально построенного набора значений самих полиномов, их частных производных и их производных по направлениям нормалей к границам конечных элементов. Такой выбор полиномов позволяет построить кусочно-полиномиальный базис, непрерывный на границах элементов вместе с производными до заданного порядка, который используется для решения эллиптических краевых задач с использованием метода конечных элементов высокого порядка точности.

**Ключевые слова:** интерполяционные полиномы Эрмита, симплициальный конечный элемент, метод конечных элементов высокого порядка точности.

УДК 629.07.01

# Применение методов компьютерной алгебры для исследования динамики осесимметричного спутника

**С. А. Гутник**[*†], **В. А. Сарычев**[‡]

[*] *Кафедра математики эконометрики и информационных технологий, Московский государственный институт международных отношений, Проспект Вернадского, 76, Москва, Россия, 119454*

[†] *Кафедра информатики и вычислительной матаематики, Московский физико-технический институт, Институтский переулок, д.9, г. Долгопрудный, Россия, 141700*

[‡] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл. дом 4, Москва, Россия, 125047*

Email: s.gutnik@inno.mgimo.ru,vas31@rambler.ru

С использованием методов компьютерной алгебры, были проведены исследования свойств алгебраической системы, определяющей стационарные движения осесимметричного спутника, движущегося по круговой орбите под действием гравитационного и демпфирующего моментов. Основное внимание уделено исследованию условий существования стационарных движений спутника. С использованием методов построения базисов Гребнера проведена редукция системы шести нелинейных алгебраических уравнений к одному алгебраическому уравнению, определяющему все стационарные движения спутника. Проведена классификация областей с равным числом стационарных решений с применением метода построения дискриминантных гиперповерхностей. Проведено сравнение эффективности различных алгоритмов построения базисов Гребнера для решения рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова:** компьютерная алгебра, базис Гребнера, дискриминант многочлена, спутник, демпфирующий момент, стационарные движения.

## 1. Введение

В данной работе представлены результаты применения методов компьютерной алгебры в решении задач динамики спутников. В представленной работе проведено исследование стационарных движений осесимметричного гравитационно–ориентированного спутника при действии моментов активного демпфирования. Такое активное демпфирование можно обеспечить путем использования датчиков угловой скорости. Действие демпфирующих моментов позволяет получить новые стационарные движения спутника и обеспечить асимптотическую устойчивость известных положений равновесия гравитационно–ориентированного спутника.

Стационарные решения определяются действительными корнями системы алгебраических уравнений. Исследование классов стационарных решений было выполнено с использованием алгоритмов построения базисов Гребнера. Классификация областей с равным числом стационарных решений была проведена на основе построения дискриминантных гиперповерхностей. Выполнен детальный анализ эволюции областей существования различного числа стационарных решений.

## 2. Уравнения движения

Рассмотрим движение спутника–твердого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного момента и моментов активного демпфирования, зависящих от проекций угловой скорости спутника. Для записи уравнений движения спутника введем орбитальную систему координат $OXYZ$ и связанную со спутником систему координат $Oxyz$, оси которой $Ox$, $Oy$, $Oz$ совпадают с главными центральными осями инерции спутника. Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат определим с использованием углов Эйлера $\psi$ , $\vartheta$, и $\varphi$ . Направляющие косинусы осей системы координат $Oxyz$ в орбитальной системе координат $OXYZ$ выражаются через углы Эйлера с помощью соотношений представленными, например, в [1].

Пусть на спутник действуют моменты активного демпфирования, проекции суммарного вектора которых на оси $Ox$, $Oy$, $Oz$ соответственно равны $M_x = \bar{k}_1 p$, $M_y = \bar{k}_2 q$ и $M_z = \bar{k}_3 r$. Здесь $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ и $\bar{k}_3$ – коэффициенты демпфирования; $p$, $q$, $r$ – проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси $Ox$, $Oy$, $Oz$; $\omega_0$ – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите. Тогда уравнения движения спутника относительно его центра масс запишутся в виде:

$$
\begin{aligned}
A\dot{p} + (C - B)qr - 3(C - B)a_{32}a_{33} + p\bar{k}_1/\omega_0 = 0,\\
B\dot{q} + (A - C)rp - 3(A - C)a_{33}a_{31} + q\bar{k}_2/\omega_0 = 0,\\
C\dot{r} + (B - A)pq - 3(B - A)a_{31}a_{32} + r\bar{k}_3/\omega_0 = 0,\\
p = \dot{\psi}a_{31} + \dot{\vartheta}\cos\varphi + a_{21},\\
q = \dot{\psi}a_{32} - \dot{\vartheta}\sin\varphi + a_{22}, \quad r = \dot{\psi}a_{33} + \dot{\varphi} + a_{23}.
\end{aligned}
$$

В уравнениях (1) $A$, $B$, $C$ – главные центральные моменты инерции спутника; точкой обозначено дифференцирование по переменной $\tau = \omega_0 t$, где $t$ – время.

Далее будет рассматриваться случай осесимметричного спутника $A = B$. В этом случае при условии $\bar{k}_3 = 0$ из третьего уравнения системы (1) имеем $\dot{r} = 0$, откуда можно получить интеграл движения $r = r_0 = \text{const}$.

## 3. Стационарные движения осесимметричного спутника

Положив в (1) $\psi = \psi_0 = \text{const}$, $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \text{const}$, получим при $A = B$, $\bar{k}_3 = 0$, $r = r_0$ уравнения

$$
\begin{aligned}
-(A - C)r_0 a_{22} + 3(A - C)a_{32}a_{33} + a_{23}\bar{k}_1/\omega_0 &= 0,\\
(A - C)r_0 a_{21} + 3(A - C)a_{33}a_{31} + a_{22}\bar{k}_2/\omega_0 &= 0,\\
r_0 = \dot{\varphi} + a_{23},
\end{aligned}
$$

позволяющие определить стационарные движения осесимметричного спутника в орбитальной системе координат. С учетом выражений для направляющих косинусов из [1] систему (2) можно рассматривать как систему трех уравнений с тремя неизвестными $\psi$, $\vartheta$ и $\varphi$.

Другой более удобный для исследования способ замыкания уравнений (2) заключается в добавлении трех условий ортогональности направляющих косинусов

$$
\begin{aligned}
a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 - 1 = 0,\\
a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 - 1 = 0,\\
a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
\end{aligned}
$$

Уравнения (2) и (3) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно 6 неизвестных направляющих косинусов, определяющих стационарные движения спутника. Для этой системы ставится следующая задача: для заданных $A$, $C$, $k_1$, $k_2$, $r_0$ и $\dot{\varphi}$ требуется определить все шесть направляющих косинусов. Остальные три направляющих косинуса $a_{11}$, $a_{12}$ и $a_{13}$, могут быть получены из условий ортогональности. Отметим, что решения системы (2) и (3) существуют при $|r_0 - \dot{\varphi}| \leq 1$. При $\dot{\varphi} = 0$ система (2) и (3) определяет положения равновесия спутника.

В данной работе основное внимание уделено исследованию стационарных решений, определяемых алгебраическими уравнениями (2) и (3), с использованием методов компьютерной алгебры

## 4. Исследование стационарных движений осесимметричного спутника с применением алгоритмов построения базисов Гребнера

Вводя безразмерные параметры $k_1 = \bar{k}_1/(A-C)\omega_0$, $k_2 = \bar{k}_2/(A-C)\omega_0$, система (2) примет вид:

$$-r_0 a_{22} + 3a_{32}a_{33} + k_1 a_{21} = 0,$$
$$r_0 a_{21} + 3a_{33}a_{31} + k_2 a_{22} = 0,$$
$$r_0 - \dot{\varphi} - a_{23} = 0.$$

Для нахождения решения алгебраической системы (3), (4) применялись алгоритмы построения базисов Гребнера [3]. Метод построения базиса Гребнера представляет собой алгоритмическую процедуру для полного приведения задачи в случае системы полиномов от многих переменных к рассмотрению полинома от одной переменной.

Исследование проводилось с использованием реализованного в системе компьютерной алгебры Maple [4] пакета построения базисов Гребнера Groebner[Basis].

Было проведено сравнение эффективности алгоритмов построения базисов Гребнера, реализованных в Maple для системы полиномов второго порядка (3), (4). Вначале был построен базис Гребнера для шести полиномов $f_i$ $(i = 1, 2, ...6)$, которые представляют собой левые части уравнений системы (3), (4) с шестью переменными направляющими косинусами $a_{ij}$ $(i = 2, 3, j = 1, 2, 3)$, используя опцию лексикографического упорядочения по переменным *plex*,

```
G:=map(factor,Groebner[Basis]([f1, ... f6], plex(a21, ... a33))).
```

Используя команду Maple - `infolevel[GroebnerBasis] := 2`, можно получить данные по типу используемого алгоритма и времени его выполнения. Все вычисления проводились на персональном компьютере с 8 Гигабайт оперативной памяти и процессором Intel Core i7 2,4 ГГц.

Для первого случая в системе Maple использовался алгоритм построения базиса Гребнера FGLM, разработанный Фожером, Джиани, Лазардом и Морой (Faugere, Gianni, Lazard, Mora) [5].

Время выполнения модуля программы при явном указании метода вычисления базиса Гребнера `method=fglm` составило 0.235 сек. Такой же результат получается, если указать опцию `method=direct`, которая реализует самый быстрый, реализованный на данный момент, универсальный прямой метод. В данном случае самый быстрый метод совпадает с методом FGLM.

Далее применялся двухступенчатый алгоритм вычисления базиса Грёбнера с опцией лексикографического упорядочивания переменных - сначала для степенного порядка *tdeg*, а затем был проведен пересчёт полученного базиса в лексикографический порядок *plex* на основе алгоритма FGLM. Время вычисления базиса Гребнера для порядка *tdeg* с применением алгоритма F4, разработанного Д.С. Фожером (Faugere), составляет - 0.141 сек. Пересчет этого базиса для порядка *plex* на основе алгоритма FGLM выполнялся за 0.094 сек. Общее время работы программы на основе двухступенчатого алгоритма составляет 0.235 сек, что совпадает с временем работы алгоритма FGLM в первом случае.

Максимальное время вычисления базиса Гребнера из всех вышеперечисленных способов было получено для исключающего блочного порядка *lexdeg* при явном указании метода работы алгоритма – `method=walk`:

```
Groebner[Basis](F,lexdeg([a21,...,a32], [a33]), method = walk).
```

Здесь $F$ – список из шести полиномов $f_i$. В результате работы данной команды вначале выполняется программа с применением алгоритма F4 за 0.125 сек.; далее работает программа на основе алгоритма Walk. В результате, общее время вычисления базиса Гребнера составляет 0.735 сек., что почти в три раза больше первых двух способов.

Использование алгоритма с исключающим блочным порядком позволяет получить выражения, определяющие связи между параметрами задачи. Эти выражения, в свою очередь, определяют частные бифуркационные решения. В нашем случае было найдено, только одно бифуркационное решение $(r_0 - \dot{\varphi})^2 = 1$, которое определяет следующее тривиальное решение $a_{23}^2 = 1, \quad a_{21} = a_{22} = 0$ нашей задачи.

Алгоритм Walk, который разработан Коллартом, Калкбренером и Моллом (Collart, Kalkbrener, Mall), поддерживает все коммутативные поля и порядки мономов и производит преобразование базиса Гребнера из одного порядка мономов в другой [6].

Выпишем из построенного базиса Гребнера полином, который зависит только от одной переменной $x = a_{33}^2$:

$$P(x) = p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
p_0 &= 81,\\
p_1 &= 54(2r_0\dot{\varphi} - 2\dot{\varphi}^2 - 3),\\
p_2 &= 9[6r_0^2(\dot{\varphi} - r_0)^2 + 2k_1k_2(\dot{\varphi} - r_0)^2 + 10r_0^2 -\\
&- 12\dot{\varphi}r_0 + k_1^2 + k_2^2 + 9]\\
p_3 &= 3[(\dot{\varphi} - r_0)^2 - 1][3(k_1^2 + k_2^2) + 4k_1k_2r_0(\dot{\varphi} - r_0) +\\
&+ 2r_0^2(2r_0\dot{\varphi} - 2\dot{\varphi}^2 - 3)],\\
p_4 &= [(\dot{\varphi} - r_0)^2 - 1]^2(k_1k_2 + r_0^2)^2.
\end{aligned}$$

При исследовании стационарных решений спутника ставится задача определения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (4). Каждому корню $x = a_{33}^2$ уравнения (4), с учетом условий ортогональности, соответствуют 4 стационарных решения задачи.

При $\dot{\varphi} = 0$ уравнение (4) позволяет определить все нетривиальные положения равновесия осесимметричного спутника.

Для выделения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней воспользуемся теоремой Меймана [7], из которой следует, что разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней определяется дискриминантной гиперповерхностью. Другим способом число вещественных корней полинома можно получить с помощью вычисления $i$–х субдискриминантов многочлена, используя теорему Якоби [8, 9].

В нашем случае дискриминантная гиперповерхность задается дискриминантом многочлена (4). Эта гиперповерхность содержит компоненту коразмерности 1, которая является границей областей с одинаковым числом вещественных корней. Множество особых точек дискриминантной гиперповерхности в пространстве параметров $k_1$, $k_2$, $r_0$ и $\dot{\varphi}$ задается следующей системой алгебраических уравнений:

$$P(x) = 0, \quad P'(x) = 0.$$

Здесь $x = a_{33}^2$ и символ штрих обозначает дифференцирование по переменной $x$.

Из системы (4) переменная $x$ была исключена путем вычисления определителя матрицы результанта уравнений (4) с помощью символьных матричных функций системы Mathematica 8.0 [10]. В результате вычислений результанта было получено алгебраическое уравнение дискриминантной гиперповерхности в следующем виде:

$$(k_1 + k_2)^4[(\dot{\varphi} - r_0)^2 - 1]^2 P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi}) = 0.$$

Здесь $P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi})$ – полином восьмой степени по переменной $r_0$, который имеет вид

$$P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi}) \quad = \quad p_0 r_0^8 + p_1 r_0^7 + p_2 r_0^6 + p_3 r_0^5 + p_4 r_0^4 +$$

$$+ \quad p_5 r_0^3 + p_6 r_0^2 + p_7 r_0 + p_8 = 0,$$

коэффициенты которого представляют собой полиномы 9 степени от параметров системы $k_1$, $k_2$, $r_0$ и $\dot{\varphi}$. Выражения коэффициентов уравнения (3) представляют собой довольно громоздкий вид и занимают более 50 строк.

Уравнение дискриминантной гиперповерхности $P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi}) = 0$ позволяет определить число стационарных движений спутника в зависимости от значений системных параметров. Это можно сделать численно, определив число равновесий в одной точке из каждой области $P_2(k_1, k_2, r_0, \dot{\varphi}) = 0$ в пространстве параметров $k_1$, $k_2$, $r_0$ и $\dot{\varphi}$. По результатам численного анализа гиперповерхности (5) было показано, что существуют области, где имеют место 8 и 4 действительных корня (16 и 8 стационарных решений) для уравнения (4) и области, где действительных корней не существует.

## 5. Заключение

В заключение следует отметить, что применение методов компьютерной алгебры позволяет провести детальное исследование влияния активных демпфирующих моментов на стационарные движения осесимметричного спутника. На основании полученных в данной работе с использованием символьных методов результатов можно сделать вывод, что число стационарных движений осесимметричного спутника в зависимости от значений параметров задачи изменяется от 0 до 16. Полученные результаты могут быть использованы на этапе предварительного проектирования системы гравитационной ориентации спутника.

## Литература


1. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Серия Исследование космического пространства, ВИНИТИ, Т. 11. 1978.
2. Gutnik, S.A., Sarychev, V.A.: A A Symbolic Study of the Satellite Dynamics Subject to Damping Torques. In: Gerdt, V.P., Koepf, W., Seiler W. M., and Vorozhtsov, E.V. (eds.) CASC 2017. LNCS, vol. 10490, Springer, Cham (2017) (в печати).
3. Buchberger, B.: Theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms. SIGSAM Bulletin, 19–29 (1976).
4. Maple online help.– `ULR: http://maplesoft.com/support/help/`
5. Faugere, J., Gianni, P., Lazard, P. and Mora, T.: Efficient computation of zero-dimensional Grobner bases by change of ordering. J. Symbolic Comput., Vol. 16, 329–344 (1993).
6. Collart, S., Kalkbrener, M., and Mall, D.: Converting Bases with the Grobner Walk. J. Symbolic Comput., Vol. 3, No. 4, 465-469 (1997).
7. Мейман Н. Н.: Некоторые вопросы расположения корней полиномов. Успехи мат. наук. Т. 4. № 6. С. 154–188 (1949)
8. Гантмахер Ф.Р.: Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
9. Батхин А.Б.: Параметризация дискриминантного множества многочлена. Программирование. **42** (2), С. 8–21 (2016).
10. http://www.wolfram.com/mathematica

UDC 629.07.01

# Application of computer algebra methods for investigation of the dynamics of axisymmetric satellite

**S. A. Gutnik[*†], V. A. Sarychev[‡]**

[*] *Department of Mathematics, Econometriscs and IT*
*Moscow State Institute of International Relations (University)*
*76, Prospekt Vernadskogo, Moscow, 119454, Russia*
[†] *Department of Informatics and Computational Mathematics*
*Moscow Institute of Physics and Technology*
*9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia*
[‡] *Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences)*
*4, Miusskaya Square, Moscow, 125047, Russia*

Email: s.gutnik@inno.mgimo.ru,vas31@rambler.ru

With the help of computer algebra methods the properties of a non-linear algebraic system that determines the stationary motions of a axisymmetric satellite moving along a circular orbit subject to gravitational and active damping moments were investigated. The main attention is paid to the study of the conditions for the existence of stationary satellite motions. The computer algebra method based on the algorithm for the construction of a Gröbner basis applied to reduce the satellite stationary motion system of six algebraic equations with six variables to a single algebraic equation with one variable that determines all stationary motions of the satellite. A classification of domains with an equal number of stationary solutions is carried out using algebraic methods for constructing discriminant hypersurfaces.
The effectiveness of various algorithms for constructing Groebner bases for the solution of the problem under consideration was compared.

**Key words and phrases:** computer algebra, Groebner basis, discriminant of polynomial, satellite, damping moment, stationary motions.

УДК 512.643

# Применение факторного анализа при решении несобственных задач линейного программирования

**В. В. Дикусар***, **Н. Н. Оленёв***, **А. Яцко**†

* *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ул. Вавилова, д.40, Москва 119333, Россия*
† *Технический университет Кошалина, Снядецких 2, 75-453 Кошалин, Польша*

Email: dikussar@yandex.ru,nolenev@mail.ru,ayac@plusnet.pl

Несобственные задачи линейной алгебры и линейного программирования возникают при численном решении задач оптимального управления со смешанными ограничениями. Метод регуляризации Тихонова А.Н. за счет введения дополнительных параметров сводит некорректные задачи линейной алгебры к системам, имеющим единственное решение. Основные трудности при выборе параметров регуляризации связаны с получением обратных матриц. Применение факторного анализа позволяет свести эти задачи к поиску собственных значений и собственных векторов определенных матриц.Показано, что оценка решения задачи линейного программирования за счет продолжения по параметру сводится к решению некорректной линейной системы. При этом задача поиска собственных значений и собственных векторов рассматривается как задача оптимизации в пространстве параметров. В качестве функционала выступает сферическая норма матрицы наблюдений, а собственные значения — суть параметры. Эта задача решается использованием параллельного варианта метода Соболя–Статника (перебор по равномерной сетке). Здесь первым приближением служит трехдиагональная эрмитова матрица, а параметры заданы на интервале отклонений вблизи первого приближения. Для ускорения сходимости итеративного процесса применяется метод продолжения решений по параметру. Для минимизации ошибки применяется сдвиг спектра собственных значений матрицы. Параллельные вычисления по введенному параметру позволяют ускорить выполнение численного метода Якоби при продолжении по параметру.

**Ключевые слова:** несобственные задачи, линейная алгебра, линейное программирование, факторный анализ, параллельные вычисления.

## 1. Введение

При численном решении задач оптимального управления со смешанными ограничениями [1] возникают несобственные задачи линейной алгебры и программирования [2]– [9], которые можно решить за счет применения факторного анализа [10] и использования параллельных вычислений [11] при продолжении по параметру.

Несобственными принято называть те оптимизационные задачи, которые в силу тех или иных причин не имеют решения. В современной математике не ставится под сомнение содержательность проблемы коррекции несобственных моделей. Необходимость разработки теории и методов анализа таких моделей во многом определялась и стимулировалась практикой решения прикладных задач. Исследование большинства технических, социально-экономических, экологических процессов происходит посредством построения их математических моделей. В зависимости от конкретной исследуемой проблемы, возникают различные классы моделей, которые могут представлять собой как несовместные системы уравнений и неравенств, так и более сложные несобственные задачи. Отсутствие решения для любой модели может быть обусловлено как неопределённостью или неточностью исходных данных, так и некорректностью требований, предъявляемых к модели (или изучаемому объекту). Кроме того, в настоящее время остро стоит вопрос об избыточности имеющейся об объекте информации. Построение аппроксимирующей зависимости по такой избыточной информации (что эквивалентно минимальной коррекции исходных данных) зачастую более адекватно, чем обнаружение зависимости, основанное на минимальной информации об объекте.

Начало бурному развитию теории и практики методов решения некорректных задач положил академик А.Н. Тихонов (1943 г.). Во многом благодаря его трудам [12] разработана общая стратегия построения устойчивых методов решения некорректных (неустойчивых) задач. Частным случаем модели с несовместной системой ограничений являются несобственные задачи линейного программирования как задачи, имеющие множества допустимых решений, определяемые несовместными системами линейных алгебраических уравнений или неравенств. Решение задачи коррекции позволяет выявить «узкие места», а также исключить неточности измерений, внешнее воздействие и т. п.

Исследования матричной коррекции несовместных линейных систем и соответствующих задач линейного программирования проводились параллельно и отечественными математиками, и зарубежными. Решения с точки зрения сингулярных разложений опубликовали в 1980 г. американские математики-вычислители Gene H. Golub и Charles F. Van Loan.

Среди отечественных математиков матричной коррекцией впервые занялся в середине 80-х годов XX в А.А. Ватолин. Работы в этом направлении, но с упором на несобственные задачи математического программирования, проводились под руководством академика РАН И.И. Еремина научной школой Института математики и механики УрОРАН.

В конце 90-х годов XX в. исследования уральской школы были продолжены в ВЦ РАН и МПГУ В.А. Гореликом и его учениками: В.И. Ерохиным, И.А. Золтоевой, Р.Р. Ибатуллиным, О.А. Клименко, В.А. Кондратьевой, О.В. Муравьёвой, Р.В. Печёнкиным и другими. В основном в качестве критерия оптимальности решения задачи коррекции использовался минимум евклидовой нормы матрицы коррекции. Исследованы вопросы существования решения, вид решения скорректированной системы, структурной коррекции (когда матрица коррекции имеет фиксированные строки и/или столбцы, отдельные элементы, является разреженной, матрицей Теплица, комбинаторного типа, имеет блочную структуру и пр.).

Р.Р. Ибатуллиным был рассмотрен минимаксный критерий оптимальности для коррекции систем линейных уравнений; описана коррекция линейных управляемых систем при ограничениях на управляющие переменные, значения входа и выхода системы. Предложены методы минимаксной коррекции, сводящие их к решению задач линейного программирования. И.А. Золтоевой исследованы вопросы многокритериальной коррекции, в том числе с использованием минимаксного критерия, и коррекции несовместных линейных систем с разреженными матрицами коэффициентов. Также В.А. Гореликом и О.В. Муравьёвой задачи коррекции по минимуму евклидовой нормы применены к проблемам оптимизации и распознавания.

Хорошо известно, что совместность или несовместность линейных моделей, заданных системами уравнений, неравенств или смешанными системами уравнений и неравенств представляют собой фундаментальные свойства, связанные с так называемыми теоремами об альтернативах — классической основой теорем существования решений задач оптимизации и возможным инструментом их эффективного численного решения, развитым в работах Бирюкова А.Г., А.И. Голикова, Дикусара В.В., Ю.Г.Евтушенко, Жадана В.Г., Капорина И.Е., Посыпкина М.А., Чекарева Д.А., Умнова Е.А., Умнова Е.Е. и др. Метод штрафных функций и функций Лагранжа является универсальным средством решения экстремальных задач различной природы.

Актуальность исследования несобственных математических объектов была хорошо обозначена И. И. Ереминым, в частности, он указал, что в теории математических моделей и классов задач прослеживается эволюция в сторону ослабления требований, накладываемых на исследуемый математический объект. Возникает последовательность постановок задач: единственность решения и устойчивость; единственность, неустойчивость (некорректность); неединственность и неустойчивость; несобственность; несобственность и плохая формализуемость; гибкое моделирование и т.д.

Несовместная (несобственная) модель не позволяет получить содержательную информацию об исследуемом процессе или явлении непосредственно. Для этой цели требуется исправление модели и ее коррекция. Виды и способы коррекции могут быть различными. Наиболее общая форма коррекции заключается в изменении коэффициентов левых и правых частей соответствующих уравнений и неравенств. Соответствующую коррекцию называют матричной. Систематическое исследование несобственных задач линейного и выпуклого программирования было начато в 70-х гг. прошлого столетия И. И. Ереминым и его учениками. В работах Н.Н. Астафьева, А.А. Ватолина, В.Д. Мазурова, Л. Д. Попова, В.Д. Скарина, С.П. Трофимова, В.Н. Фролова и др. рассматривались несобственные задачи линейного и выпуклого программирования, проводилась классификация, строилась и исследовалась теория двойственности. При этом вводились и исследовались дискретные аппроксимации решений, т.н. комитетные конструкции. Отметим, что в большинстве исследований рассматривалась коррекция по вектору правой части ограничений и коэффициентом вектора целевой функции.

Матричная коррекция впервые была рассмотрена в работах А.А. Ватолина. Исследования А.А. Ватолина были продолжены в ВЦ им. А.А. Дородницына РАН и МПГУ В.А. Гореликом и его учениками: В. А. Кондратьевым, О.В. Муравьевым, Р.Р. Ибатулиным, Р.В. Печенкиным, В.И. Ерохиным и др. Указанными авторами были уточнены результаты А.А. Ватолина.

В настоящей работе предложены методы решения несобственных задач линейной алгебры и линейного программирования за счет использования факторного анализа и метода продолжения по параметру.

Для решения проблемы собственных значений матрицы наблюдений в факторном анализе, который применяется при решении некорректных задач линейной алгебры, рассматривается задача минимизации сферической нормы матрицы. Здесь в качестве переменных при поиске экстремума выступает вектор параметров собственных значений, заданных на выбранном интервале. Получающаяся задача оптимизации решается полным перебором по равномерной сетке с помощью параллельных вычислений.

## 2. Некорректные задачи линейной алгебры

Система линейных алгебраических уравнений может быть плохо обусловленной, иметь множество решений, либо быть противоречивой. Рассмотрим две линейные системы

$$A_1X = B_1, \tag{1}$$

$$A_2Y = B_2. \tag{2}$$

Умножая (1), (2) на транспонированные матрицы $A_1^T$ и $A_2^T$, получим

$$A_1^TA_1X = A_1^TB_1, \tag{3}$$

$$A_2^TA_2Y = A_2^TB_2. \tag{4}$$

Системы (3), (4) всегда совместны, однако они могут иметь множество решений [12]. Если применить к системам (3), (4) метод регуляризации Тихонова А.Н., то в результате получим

$$(A_1^TA_1 + \delta_1E)X = A_1^TB_1, \delta_1 > 0, \tag{5}$$

$$(A_2^TA_2 + \delta_2E)Y = A_2^TB_2, \delta_2 > 0. \tag{6}$$

Каждая из систем (5), (6) имеет единственное решение. Основной вопрос при решении указанных систем связан с выбором параметров регуляризации $\delta_1$ и $\delta_2$, которые необходимо устремить к нулю. Однако, здесь возникают трудности с получением обратных матриц. Многие авторы предлагают различные способы выбора указных параметров.

Обозначим матрицы в левых частях (5) и (6) через $A_3$ и $A_4$, а правые части — через $B_3$ и $B_4$, соответственно.

Рассмотрим указанные матрицы, как матрицы наблюдений в факторном анализе. Выберем в качестве базиса совокупность собственных векторов и разложим наши решения по выбранному базису.

$$X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_m P_m, m \leq n,$$
$$Y = \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \ldots + \beta_l F_l, l \leq n, \tag{7}$$

где $P_i (i = 1, ..., m)$ и $F_j (j = 1, ..., l)$ — выделенные факторы.

Существуют методы решения некорректных линейных систем, в которых матрицы $A_3$ и $A_4$ могут отличаться. Здесь же мы рассматриваем только метод главных компонент. В этом методе факторного анализа для обеспечения единственности решения задачи факторизации [10] мы полагаем $A_3 = A_4 \in R^{n \times n}$. Для собственных векторов выполнено условие $(P_i, P_j) = 1$ при $i = j$ , в противном случае $(P_i, P_j) = 0$ (это скалярное произведение задает условие ортогональности и нормировки [10]).

Положим $B_4 = CB_3$, где $C = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$, а $\lambda_i$ — собственные значения матрицы $A_3$ (и $A_4$). Применим матричный оператор к решению $Y$. Имеем

$$A_4 Y = \beta_1 \lambda_1 P_1 + \beta_2 \lambda_2 P_2 + \ldots + +\beta_m \lambda_m P_m = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m) B_3.$$

В силу единственности решения имеем

$$\beta_1 \lambda_1 P_1 = \lambda_1 B_3, \ldots, \beta_m \lambda_m P_m = \lambda_m B_3.$$

В результате получаем

$$\beta_1 P_1 = B_3, \ldots, \beta_m P_m = B_3.$$

Полученную систему уравнений умножаем скалярно на вектор $(P_1, ..., P_m)$. Отсюда следует

$$\beta_1 = \frac{(P_1, B_3)}{(P_1, P_1)}, \ldots, \beta_m = \frac{(P_m, B_3)}{(Pm, Pm)}$$

Тогда вектор $X$ вычисляется через вектор $Y$ по формуле

$$X = \frac{Y}{C} = \frac{Y}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i},$$

при этом вектор $Y$ определяется (7), где в силу единственности $F_i = P_i$.

## 3. Несобственные задачи линейного программирования

В работе [7] предложен приближенный метод решения некорректных задач линейного программирования (ЛП).

Рассматривается задача

$$max(C, X), X \in R^n, C > 0, C \in R^n, A_1 X = B_1, \tag{8}$$

$$X \geq 0, A_1 > 0, B_1 \geq 0, A_1 \in R^{m \times n}, B_1 \in R^m. \tag{9}$$

Здесь $B_1$ и $C$ — положительные вектора, $A_1$ — положительная матрица (положительны ее компоненты).

Задача (8) – (9) записывается в форме, зависящей от скалярного параметра

$$max\ t, A_2 X = B_2, (C, X) = t, \tag{10}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} C \\ A_1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} t \\ B_1 \end{pmatrix}, X \geq 0, \tag{11}$$

где $t$ — неизвестный параметр.

Задача (10) – (11), вообще говоря, может не иметь решения. В этом случае рассматривается обобщенная задача ЛП

$$max\ t, A_2^T A_2 Y = A_2^T B_2, Y \geq 0. \tag{12}$$

Система (12) всегда совместна.

При применении метода регуляризации [12] вместо задачи (12) рассматривается следующая задача

$$max\ t, A_\delta Z_\delta = B, Z_\delta \geq 0,$$

$$A_\delta = A + \delta E, A_2^T A_2 = A, B = A_2^T B_2 . \delta > 0.$$

Известно, что $\lim_{\delta \to 0} Z_\delta = Z_0 \in \{Y\}$, где $\{Y\}$ — множество решений задачи (12).

Решение линейной системы является линейной функцией параметра $t$

$$Z_\delta = C_1 + tC_2,\ C_1, C_2 \in R^n.$$

При $t = 0$ находим вектор $C_1$, а при $t = 1$ вектор $C_2$.

Условие $Z_\delta \geq 0$ приводит к неравенству

$$t_1 \leq t \leq t_2.$$

Если решение неограниченно сверху, то $t_2 = \infty$. Таким образом, оценка решений задачи (12) сводится к решению некорректной линейной системы.

## 4. Параллельные варианты метода Якоби и метода Соболя–Статника

В настоящее время разработан и используется ряд итерационных методов поиска собственных значений, в общем случае более медленных, чем прямые методы [13], но обладающих определенными преимуществами для матриц большой размерности. Трёхдиагональная матрица является выгодным начальным приближением для итерационного метода Якоби. Метод Якоби в окрестности решения имеет квадратичную скорость сходимости. Метод сходится гораздо быстрее при специальной параметризации метода Якоби.

Вместо нахождения собственных значений матрицы $A + E$ рассмотрим матрицу, зависящую от параметра

$$B(\alpha) \ = \ (1 - \alpha)E + \alpha(A + E),$$

где $E$ — единичная матрица, а $\alpha$ — параметр задачи. При этом вычисленное значение вектора собственных значений больше или равно $1 + \delta$, где $\delta > 0$. После этого легко вычислить собственные значения заданной матрицы $A$. В общем случае вместо единичной матрицы для решения проблемы кратных собственных значений можно взять заданную диагональную матрицу с различными положительными элементами на диагонали. В результате мы получим задачу оптимизации с различными собственными значениями. При расчете для каждого $\alpha$, выбираемого по равномерной сетке (метод 1) или случайным образом (метод 2) из интервала $[0, 1]$, применяются параллельные вычисления [11].

Оценка решения задачи линейного программирования за счет продолжения по параметру сводится к решению некорректной линейной системы. При этом задача поиска собственных значений и собственных векторов рассматривается как задача оптимизации в пространстве параметров. В качестве функционала выступает сферическая норма матрицы наблюдений, а собственные значения — суть параметры. Эта задача решается использованием параллельного варианта метода Соболя–Статника, в котором перебор осуществляется по равномерной сетке. Здесь первым приближением служит трехдиагональная эрмитова матрица, а параметры заданы на интервале отклонений вблизи первого приближения. В процессе накопления информации производится ее обработка по методу, предложенному в работе [14].

## 5. Заключение

Применение факторного анализа позволяет решать несобственные задачи линейной алгебры, а также несобственные задачи линейного программирования. Здесь решение понимается в обобщенном смысле.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта № 15-07-08952).

## Литература

1. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Необходимые условия экстремума в некоторых линейных задачах со смешанными ограничениями. // В сб. “Вероятностные процессы и управление”. — М.: Наука,1978. — С. 42–74.
2. *Хачай М. Ю.* О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете системы линейных неравенств.// Труды 13-й Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». — Иркутск 2005. ИСЭМ СО РАН, 2005, т.1 — С. 147–153.
3. *Горелик В. А., Ерохин В. И.* Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. — М.: ВЦ РАН, 2004. — С. 35–63.
4. *Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г., Моллаверди Н.* Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности. — ЖВМиМФ, 2004, Т. 44, № 9. — С. 1564–1573.
5. *Умнов А. Е., Умнов Е. А., Чекарев Д. А.* Параметрический двухуровневый метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями. // Моделирование процессов управления: Сб.ст./Моск. физ.-тех. ин-т. – М., 2004. С. 68-73.
6. *Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.* Линейное программирование, М.: Факториал, 1998.
7. *Дикусар В. В., Чекарев Д. А.* Численно-аналитический метод решения задач оптимального управления. Препринт. ВЦ РАН, 2004.
8. *Тер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977.
9. *Жадан В. Г.* Численные методы линейного и нелинейного программирования М.:ВЦ РАН,2002.
10. *Харман Г.* Современный факторный анализ. — М.: Статистика, 1972.
11. *Оленев Н. Н., Печенкин Р. В., Чернецов А. М.* Параллельное программирование в MATLAB и Simulink с приложениями к моделированию экономики. — М.: ВЦ РАН, 2015. 123 с.
12. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
13. *Калиткин Н. Н.* Численные методы: учеб. пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
14. *Дикусар Н. Д.* Кусочно-полиномиальная аппроксимация шестого порядка с автоматическим обнаружением узлов. — Матем. моделирование, 2014, Т. 26, № 3. — С. 31–48.

UDC 512.643

# Applying factor analysis in solution of improper problems of linear programming

**V. V. Dikusar*, N. N. Olenev*, A. Yatsko†**

* *Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS,*
*Vavilova str. 40, Moscow 119333, Russia*
† *Technical University of Koszalin,*
*Sniadeckich 2, 75-453 Koszalin, Poland*

Email: dikussar@yandex.ru,nolenev@mail.ru,ayac@plusnet.pl

The improper problems of linear algebra and linear programming arise in the numerical solution of optimal control problems with mixed constraints. The regularization method of Tikhonov A.N. reduces ill-posed problems of linear algebra to systems having a unique solution due to the introduction of additional parameters. The main difficulties in the choice of the regularization parameters are associated with obtaining inverse matrices. The use of factor analysis allows us to reduce these problems to the search for eigenvalues and eigenvectors of specified matrices. It is shown that the estimation of the solution of the linear programming problem due to the continuation with respect to the parameter reduces to solving an ill-posed linear system. The problem of finding eigenvalues and eigenvectors is considered as an optimization problem in the parameter space. The spherical norm of the observation matrix acts as a functional, and the eigenvalues are parameters. This problem is solved using a parallel version of the Sobol–Statnik method (search over a uniform grid). Here, the tri-diagonal Hermitian matrix serves as the first approximation, and the parameters are given on the deviation interval near the first approximation. To accelerate the convergence of the iterative process, the method of continuation of the solutions with respect to the parameter is applied. To minimize the error, the shift of the eigenvalue spectrum of the matrix is applied. Parallel calculations on the entered parameter allow to accelerate the execution of the numerical Jacobi method when continuing with respect to the parameter.

**Key words and phrases:** Improper problems, linear algebra, linear programming, factor analysis, parallel computations.

УДК 519.76

# Интеллектуальные методы синтеза грамматически правильного текста на русском языке

**Т. А. Жуков, Т. М. Садыков**

*Кафедра информатики,*
*Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова,*
*Стремянный переулок, д.36, Москва, Россия, 117997*

Email: sadykov1976@mail.ru,tim29093@gmail.com

Задача синтеза грамматически правильного текста на естественном языке известна своей высокой сложностью. Целью работы является разработка и реализация сетевого сервиса, обеспечивающего полное алгоритмическое покрытие русского языка и позволяющего формировать грамматически правильный текст по любым точным данным на любую тему. В качестве результата выполненной работы были представлены основные алгоритмы и особенности их реализации, лежащие в основе работы сайта автоматизированной обработки лингвистических данных и синтеза грамматически правильного текста passare.ru.

**Ключевые слова:** компьютерная лингвистика, синтез текста, обработка естественного языка, сетевой сервис.

## 1. Введение

Русский язык является сильно изменчивым языком со сложной грамматикой [2, 12]. Процесс образования формы слова может требовать одновременного изменения всех его частей (приставки, корня, суффикса и окончания) по сложным правилам [2, 10]. Также форма слова может зависеть от числа, рода, вида, времени, падежа, залога, одушевленности. По оценке, полученной с помощью анализа словаря OpenCorpora [13], среднее количество различных форм прилагательного в русском языке составляет 11,72. Глагол, в среднем, имеет 44,07 различных форм, включая все его глагольные формы.

Несмотря на существенный прогресс, для многих языков со сложным видоизменением слов, процесс автоматического образования форм слова все еще представляет проблему. Большинство существующих подходов к данной проблеме включают размеченные вручную словари, существующие для всех основных языков [11]. Данный подход имеет ряд недостатков, таких как необходимость составления, поддержки и обработки словаря, содержащего миллионы слов, их форм и десятки миллионов отношений между ними [9]; а также невозможность полного описания языка словарем. По этим причинам существует необходимость в алгоритмическом покрытии языка для языков со сложным формообразованием.

Целью настоящей работы является разработка и программная реализация алгоритмов автоматизированного образования форм слов русского языка и их использования в разнообразных задачах компьютерной лингвистики: коррекции орфографии, согласовании словосочетаний, поиске грамматических и речевых ошибок, анализе текстовых данных большого объема и синтезе грамматически правильного текста на русском языке.

Представленные в работе алгоритмы и методы внедрены в программном обеспечении, используемом лингвистическим порталом www.passare.ru.

## 2. Алгоритмы видоизменения частей речи русского языка и их применение

Для представленных в данной работе алгоритмов видоизменения слов русского языка верны следующие определения:

- входными аргументами являются: начальная форма слова, набор лингвистических

параметров (род, число, падеж, и т.д.);
- результатом обработки является: производная форма слова.

## 2.1. Видоизменение существительных русского языка

Изменение слова по падежам называется склонением. Склонением называется также класс существительных, объединенных общностью словоизменения, и отвлеченный образец, по которому изменяются слова этого класса. В современном русском языке существует три таких класса (три склонения) — первое, второе и третье, различающиеся системами падежных флексий. Типы склонения строго различаются только в падежных формах ед. ч. Во мн. ч. различия между типами склонения не столь определенны, а в дат., тв. и предл. падежах различия флексий вообще отсутствуют [6, 7].

Склонение существительных [4] связано с морфологической категорией рода, но не определяется ею последовательно. В I скл. входят существительные муж. и сред. р. и не входят существительные жен. р.; во II скл. входят существительные жен., муж. и общ. р. и не входят существительные сред. р.; в III скл. входят в основном существительные жен. р., а также двенадцать слов сред. р. и одно слово муж. р. Первые два склонения по отношению к роду характеризуются следующим образом: I скл. — неженское (т. е. мужское и среднее), II скл. — несреднее (т. е. мужское и женское); III скл. — преимущественно женское.

В таблице 1 приведены основные типы склонения имен существительных в русском языке.

Таблица 1

Типы склонения имен существительных в русском языке

| Тип | Пояснения и примеры | Обратить внимание |
|---|---|---|
| 1 | Существительные женского, мужского и общего рода с окончанием -а / -я в именительном падеже единственного числа: жена, земля, слуга. | Существительные на -ия (армия, Греция) имеют в дательном и предложном падежах единственного числа окончание -и. |
| 2 | Существительные мужского рода с нулевым окончанием в именительном падеже единственного числа и существительные среднего рода с окончанием -о / -е в именительном падеже единственного числа: закон, конь, село. | Существительные на -ий и -ие (гений, настроение) имеют в предложном падеже единственного числа окончание -и. |
| 3 | Существительные женского рода с нулевым окончанием в именительном падеже единственного числа: ель, мышь, дочь, лошадь, радость. | У существительных, оканчивающихся в именительном и винительном падежах единственного числа на шипящую, всегда пишется на конце мягкий знак: мышь, дочь. |

Во множественном числе различия между типами склонения практически отсутствуют, так что можно отдельно говорить об особом склонении существительных множественного числа. Падежами выражаются различные роли существительного в предложении. В русском языке выделяется шесть падежей. Определить падеж существительного в предложении можно по вопросу.

В таблице 2 дано обобщение разницы в склонениях существительного на примерах в единственном числе.

Таблица 3 обобщает разницу в склонениях существительных на примерах во множественном числе.

Таблица 2

Обобщенная разница склонения имен существительных в единственном числе

| Падеж | 1 склонение | 2 склонение | 3 склонение |
|---|---|---|---|
| И. | жен-а земл-я слуг-а забияк-а арми-я | закон- конь- сел-о пол-е гений- настроение-е | ель- мышь- |
| Р. | жен-ы земл-и слуг-и забияк-и арми-и | закон-а кон-я сел-а пол-я гени-я настроени-я | ел-и миш-и |
| Д. | жен-е земл-е слуг-е забияк-е арми-и | закон-у кон-ю сел-у пол-ю гени-ю настроени-ю | ел-и миш-и |
| В. | жен-у земл-ю слуг-у забияк-у арми-ю | закон- кон-я сел-о пол-е гени-я настроение-е | ель- мышь- |
| Т. | жен-ой земл-ей слуг-ой забияк-ой арми-ей | закон- конь- сел-о пол-е гений- настроение-е | ель-ю мышь-ю |
| П. | о жен-е земл-е слуг-е забияк-е об арми-и | о закон-е кон-е сел-е пол-е гени-и настроени-и | о ел-и мыш-и |

Таблица 3

Обобщенная разница склонения имен существительных во множественном числе

| Падеж | Склонение во множественном числе +2,3,4 | много+5,6,7... |
|---|---|---|
| И. | жен-ы закон-ы сел-а ел-и времен-а | жен- закон-ов сел- ел-ей времен- |
| Р. | жен- закон-ов сел- ел-ей времен- | жен- закон-ов сел- ел-ей времен- |
| Д. | жен-ам закон-ы сел-ам ел-ям времен-ам | жен-ам закон-ы сел-ам ел-ям времен-ам |
| В. | жен- закон-а сел-а ел-и времен-а | жен- закон-а сел-а ел-и времен-а |
| Т. | жен-ами закон-ами сел-ами ел-ями времен-ами | жен-ами закон-ами сел-ами ел-ями времен-ами |
| П. | о жен-ах закон-ах сел-ах ел-ях времен-ах | о жен-ах закон-ах сел-ах ел-ях времен-ах |

Можем наблюдать следующую закономерность [1]: Существительные в Именительном падеже, стоящие во множественном числе, а так же после такой конструкции «2,3,4», имеют один ряд окончаний; Но существительные в Именительном падеже, состоящие в конструкции «много или 5,6,7..», имеют другой ряд окончаний. На другие падежи эта закономерность не распространяется. Следующие самые употребительные существительные допускают двоякое образование именительного падежа множественного числа.

Некоторые существительные мужского рода в именительном падеже множественного числа вместо окончания -ы(-и) могут иметь ударное окончание -а(-я). Прежде всего, к ним относятся следующие типы существительных:

1) многие односложные существительные типа лес-леса, шелк-шелка, бок-бока, глаз-глаза и т.д.

2) многие двухсложные существительные, имеющие в форме единственного числа ударение на первом слоге, например: берег – берега, голос – голоса, вечер – вечера, город – города, округ – округа, череп – черепа и т.д.

3) однако строгих закономерностей распределения существительных по вариантам окончаний найти нельзя, поскольку на данном участке языка наблюдаются колебания.

### 2.2. Видоизменение прилагательных русского языка

Алгоритм видоизменения прилагательных существенно проще алгоритмов видоизменения прочих многочисленных частей речи русского языка [2, 3]. Видоизменение прилагательных осуществляется по числам, родам и падежам, причем в винительном падеже форма прилагательного зависит от одушевленности существительного, к которому относится изменяемое прилагательное. Для неодушевленных существительных форма прилагательного в винительном падеже совпадает с формой именительного падежа, в то время как для одушевленных – с формой родительного падежа.

В большинстве случаев изменение прилагательного осуществляется путем изменения его окончания [8], что с точки зрения программной реализации выгодно отличает прилагательные от прочих многочисленных частей речи русского языка. Исключение составляет класс «притяжательных» прилагательных (*медвежий, девичий, рыбий* и т.п.). В этом случае формы прилагательного требуют добавления к основе инфинитива мягкого знака.

### 2.3. Видоизменение глаголов русского языка

В русском языке глаголы видоизменяются по лицу (1,2,3), числу (ед, мн.), роду (ж, м, с), времени (прошедшее, настоящее, будущее), наклонению (повествовательное, сослагательное, повелительное).

Рассмотрим вначале алгоритм видоизменения глагола русского языка в повествовательном наклонении и настоящем времени.

Некоторые характерные частные случаи

Знать – 1-е спряжение (см. табл. 4)

Таблица 4

Формы глагола «знать»

| Число | 1-е лицо | 2-е лицо | 3-е лицо |
|---|---|---|---|
| Единственное | знаю | знаешь | знает |
| Множественное | знаем | знаете | знают |

Смотреть – 2-е спряжение

Этот случай относится к простым, так как формы глагола образуются путем добавления окончаний к основе, которая при этом не изменяется. Все глаголы, видоизменяющиеся по такой схеме (то есть, с неизменной основой) мы будем называть простыми. Встречаются и сложные глаголы, например, «шить» – при видоизменении этого глагола к основе добавляется мягкий знак.

Сложный случай номер 1: основа формируется путем удаления «-ить» и добавления мягкого знака [5]:

Шить, вить, пить, лить, бить.

Сложный случай номер 2: меняется корневая согласная:

**корневая гласная меняется на Ж:**

Видеть (см. табл. 5), гладить, сидеть, обидеть, ходить, бредить, городить, тормозить...

**корневая гласная меняется на Ч:**

крутить, вертеть, чертить, тратить, тяготить, катить, лететь, пыхтеть.

**корневая гласная меняется на Щ:**

чистить, частить, хрустеть, свистеть, блестеть.

**корневая гласная меняется на Ш:**

висеть, бесить, носить, красить, колесить, косить, месить, обезопасить...

**к основе добавляется Л:**

Таблица 5

Формы глагола «видеть»

| Число | 1-е лицо | 2-е лицо | 3-е лицо |
|---|---|---|---|
| Единственное | вижу | видишь | видит |
| Множественное | видим | видите | видят |

терпеть, храпеть, хрипеть, шипеть, кипеть, скрипеть, сопеть.
-овать,-евать:основа формируется иначе, нежели в общем случае.
Рисовать, беседовать, заведовать, горевать.
Одолевать, продлевать, затмевать, застревать.
-чь: беречь, стеречь, печь, жечь, стричь, помочь...
-ти: идти, нести, везти, вести, плести, грести...
-сть: пасть, красть, класть, прясть, сесть, счесть.
Нерегулярно видоизменяются глаголы «жить», «быть», «петь».

### 2.4. Образование причастных и деепричастных оборотов в русском языке

**Действительные причастия прошедшего времени** (делавший, сделавший) образуются, как правило, путем добавления «-вший» к форме прошедшего времени, единственного числа и мужского лица, от которой отнимается последняя буква: делать – дела*л* – дела*вший*.

Исключения: идти (шедший), погибнуть (погибший).

**Деепричастия несовершенного вида** (делая) образуются от глаголов несовершенного вида, как правило, образуются от основы настоящего времени посредством суффикса -а(-я): сверка-ют – сверка-я, грем-ят – грем-я, стуч-ат – стуч-а. В отдельных случаях (от глаголов несовершенного вида с суффиксом -ва-: давать, сознавать и со связанной основой, например, отставать) эти деепричастия образуются от основы неопределенной формы: выдава-ть – выдава-я, отстава-ть – отстава-я.

Деепричастия несовершенного вида не образуются от глаголов:

1) с основой, состоящей из одних согласных: шьют, льют, жмут, ткут и т.п. (исключение: мчаться – мчась);

2) с основой на г, к: бегут, текут и т.п.;

3) с основой настоящего времени на шипящий и с основой неопределенной формы на з, с, ст, х: мажут – мазать, пишут – писать, хлещут – хлестать, пашут – пахать;

4) с суффиксом -ну-. Неупотребительны деепричастия от глаголов лезть, бежать, ехать, хотеть, драть, звать, петь, гнить.

Деепричастия от таких глаголов заменяются соответствующими по значению приставочными образованиями: называя, распевая и т.д. [2]

Уникальными для литературного языка являются деепричастия – будучи, крадучись: [Гений] «будучи оригинальным, в то же время и общее таланта» (Бел.); «Я лежал в это время на полатях и, крадучись от деда, читал увлекательную книгу» (Гладков).

Деепричастия на -учи (-ючи) имеют архаичный характер и являются средством стилизации под народную речь: «Никого не осуждаючи, он одни слова утешные говорил мне, умираючи» (Н.).

-А(СЬ) (II спряжение после ж, ч, ш, щ): Они кричат — крича. Они спешат — спеша Они учатся — учась. Они слышат — слыша. -В / -ВШИ(СЬ). Прочитал — прочитав / прочитавши. Написал — написав / написавши. Надулся — надувшись -Я(СЬ) (в остальных случаях).

Деепричастий несовершенного вида нет у следующих глаголов [8]:

— на -чь: печь, беречь, мочь и т.д.;
— с суффиксом -ну-: вянуть, пахнуть, крепнуть и т.д., кроме глагола тянуть — тяня;
— без гласной в основе настоящего времени: ждут, рвут, пьют;
— на ж, ш, пл: бежать, (они) вяжут, лижут, мажут, пашут, сыплют.

## 3. Алгоритмы видоизменения имен собственных

**ComplexName** – включает(NamePrimary, NameSecondary, NamePatr)
Основная функция видоизменения имен, также выполняет определение рода имени и тип составляющих имени.
Поддерживает форматы ввода: Имя, Имя Фамилия, Фамилия Имя, ФИО, ИОФ
Далее идет описание составных частей функции:

**NamePrimary** (видоизменение имен)
Имена можно разделить на 4 группы:

— неизменяемые имена, заканчивающиеся на -о;
— неизменяемые женские имена по окончаниям;
— неизменяемые мужские имена по окончаниям;
— имена, изменяющиеся как существительные.

**NameSecondary** (видоизменение фамилий)
Среди фамилий выделяются несколько классов:

— неизменяемые фамилии, не зависящие от рода
— неизменяемые женские фамилии;
— фамилии, оканчивающиеся на -ына;
— мужские фамилии, оканчивающиеся на -ев, -ов, -он, -ин, -ын, -ян;
— неизменяемые мужские фамилии по окончаниям -о, -у, -я, -ре, -лле;
— мужские фамилии, изменяющиеся как прилагательные по окончаниям -кий, -хий, -ний, -кой, -ной, -той, -вой, -ний, -хой;
— остальные фамилии, изменяющиеся по алгоритму существительных с исправлением окончаний.

**NamePatr** (видоизменение отчеств)
В функции используется базовый алгоритм видоизменения существительных с заменой некоторых окончаний
(пример: -ичи → -ичей, -евич → -евича, -вн → -вен...)

**RussianCity** (видоизменение названий городов России) В названиях городов можно выделить несколько классов с разным видоизменением:

— города с особенным видоизменением (Гаврилов посад, Петров Вал, Сергиев Посад);
— города, всегда употребляющиеся во множественном числе;
— города с видоизменением существительных или словосочетания прилагательное+существительное.

Также в разрезе структуры названия городов делятся на:

— простые, «существительное» пример: Владивосток;
— сложные, «прилагательное существительное» пример: Нижний Новгород;
— сложные, «неизменяемое-существительное» пример: Горно-Алтайск;
— сложные, «неизменяемое-приставка-существительное» пример: Ростов-на-Дону.

## 4. Примеры синтеза грамматически правильного текста на русском языке по числовым данным

Приведенные ниже примеры используют описанные ранее алгоритмы видоизменения частей речи русского языка, а также подсистему метаязыка. Все они доступны на сайте.

### 4.1. Обзор финансовых рынков

Автоматически сформированный отчет о динамике курсов валют с помощью сервиса passare.ru

Ввод: RUB;USD;EUR;1.1.2015;25.3.2016

Результат работы алгоритма: Курс рубля к доллару на 25 марта 2016 года составляет 0,015. Российский рубль продолжает рост по отношению к американскому доллару в то время как евро замедляет падение по отношению к российскому рублю. Курс российского рубля по отношению к американскому доллару достиг минимума за последние четыре дня. Стоимость российского рубля в евро за период с 1 декабря 2015 года по 25 марта 2016 года колеблется в пределах от 0,01108 до 0,01423. Курс рубля к евро на 25 марта 2016 года составляет 0,013.

### 4.2. Отекстовка арифметических выражений

Ввод: 7923 * 210 - 413 / 8

Результат работы алгоритма: Семь тысяч девятьсот двадцать три умноженное на двести десять минус четыреста тринадцать разделенное на восемь равно одному миллиону шестистам шестидесяти трем тысячам семистам семидесяти восьми целых тремстам семидесяти пяти тысячных.

### 4.3. Синтез прогноза погоды

Ввод: Новосибирск

В ближайшие двадцать четыре часа в Новосибирске ожидается ясная погода без осадков. Атмосферное давление находится в диапазоне от семисот семидесяти трех до семисот семидесяти пяти мм. рт. ст. Днем воздух прогреется до девятнадцати градусов ниже нуля, ночью температура воздуха составит двадцать один градус ниже нуля.

## 5. Статистика использования сайта passare.ru

В данном разделе представлена статистика посещения веб-сервиса passare.ru в разрезе времени (см. рис. 1) и географии (см. рис. 2).

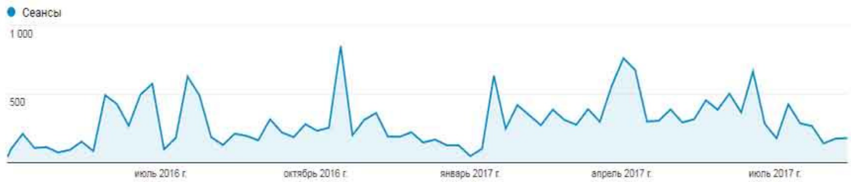



Рис. 1. Еженедельное количество сеансов за все время работы сайта

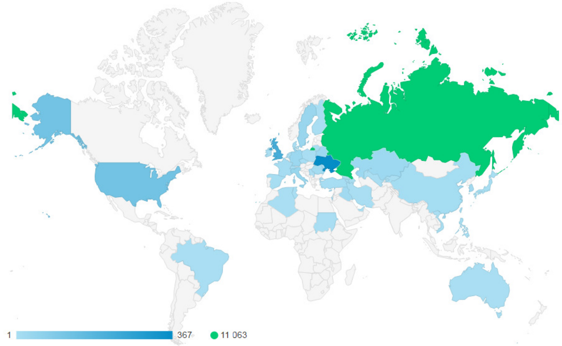



Рис. 2. Количество сеансов по странам

## 6. Заключение

Русский язык известен трудностью своей грамматики, сложным видоизменением слов и развитым словообразованием. Задачи поиска и анализа текстовых данных, машинного перевода, распознавания и синтеза речи и др. требуют алгоритмического видоизменения слов русского языка и синтеза грамматически правильного текста.

Данные алгоритмы были разработаны и реализованы в сетевом сервисе passare.ru, который обеспечивает полное алгоритмическое покрытие русского языка (функциями образования форм для всех частей речи) и позволяет формировать грамматически правильный текст по любым точным данным на любую тему.

Ядро системы состоит из 1 исполняемого файла – сервера и не использует сторонних библиотек. Исходный код программы написан на языке C# на платформе Microsoft .NET Framework 4.0. Сервис предоставляет 13 функций видоизменения, 4 функции согласования, 4 функции синтеза текста и 5 функций API.

Дальнейшее развитие системы состоит в следующем:

— улучшение подсистемы синтеза текста;
— доработка существующих функций формообразования и добавление недостающих;
— разработка системы фонетики и ее внедрение в существующие алгоритмы.

## Литература

1. Аванесов Р.И. (ред.) *Орфоэпический словарь русского языка. Произношение, ударение, грамматические формы.* 4-е изд., стер.- М.: Рус. яз., 1988. – 704 с.
2. Зализняк А. А. *Русское именное словоизменение.* М.: Наука, 1967.
3. Иомдин Л.Л. *Автоматическая обработка текста на естественном языке: модель согласования.* М.: Наука, 1990.
4. Кузнецов С.А. *Большой толковый словарь русского языка.* СПб.: «Норинт», 2000. – 1536 с.
5. Розенталь Д. Э., Теленкова М. А. *Словарь трудностей русского языка.* М.: Айрис-пресс, 2007
6. Азимов А.Е., Большакова Е.И. *Подход к автоматической коррекции ошибок сочетаемости слов в текстах на естественном языке* // Новые информационные технологии в автоматизированных системах, №14, 2011, стр. 78-91

7. Болдасов, М.В. *Генерация текстов на естественном языке - теории, методы, технологии* / НТИ. Сер. 2, Информационные процессы и системы. - 2006. - №7. - С. 12-22.
8. *Корпусные исследования по русской грамматике* / Под ред. К. Л. Киселевой, В. А. Плунгяна, Е. В. Рахилиной, С. Г. Татевосова. М.: ПРОБЕЛ-2000, 2009.
9. Goldsmith J. *Unsupervised learning of the morphology of a natural language,* // Computational Linguistics 27:2 (2001), 153-198.
10. Halle M. Matushansky O. *The morphophonology of Russian adjectival inflection,* // Linguistic Inquiry 37:3 (2006), 351-404.
11. Segalovich I. *A fast morphological algorithm with unknown word guessing induced by a dictionary for a web search engine,* // Proceedings of the International Conference on Machine Learning; Models, Technologies and Applications (2003), 273-280.
12. Sorokin A. *Using longest common subsequence and character models to predict word forms* // Proceedings of the 14th Annual SIGMORPHON Workshop on Computational Research in Phonetics, Phonology, and Morphology (2016), 54-61.
13. `OpenCorpora:` an open corpus of Russian language [Электронный ресурс] // – Электрон. дан. – Режим доступа: http://www.opencorpora.org/

UDC 519.76

# Intelligent methods for grammatically correct text synthesis in Russian

**T. M. Sadykov, T. A. Zhukov**

*Department of Informatics*
*Plekhanov Russian University of Economics*
*Stremyanny lane 36, Moscow, 117997, Russia*

Email: sadykov1976@mail.ru,tim29093@gmail.com

The problem of synthesis of a grammatically correct text in a natural language is known to be highly complex. The purpose of work is to develop and implement web-service that provides full algorithmic coverage of Russian language and has ability to generate grammatically correct text from any exact data for any topic. As a result, this work presents the main algorithms and features of their implementation used in the website passare.ru, which is aimed at automatic processing of linguistic data and text synthesis.

**Key words and phrases:** computer linguistics, text synthesis, natural language processing, network service.

УДК 512.554

# Однородные почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий

**А. В. Климаков, А. А. Михалёв**

*Механико-математический факультет*
*Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова*

Email: klimakov88@mail.ru,aamikhalev@mail.ru

Многообразие линейных алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной. Система элементов свободной алгебры называется примитивной, если ее можно дополнить до множества свободных образующих этой алгебры. Элемент свободной алгебры шрайерового многообразия алгебр называется почти примитивным, если он не является примитивным во всей свободной алгебре, но примитивен в любой собственной подалгебре, его содержащей. В данной работе исследуется вопрос почти примитивности однородных элементов свободной неассоциативной алгебры, свободной (анти)коммутативной алгебры и свободной алгебры Ли.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-31-00096 и 16-01-00113).

**Ключевые слова:** шрайерово многообразие линейных алгебр; примитивные элементы свободных алгебр; почти примитивные элементы.

## 1. Введение

Многообразие линейных алгебр над полем определяется как класс алгебр, замкнутых относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Многообразие алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной (в том же многообразии алгебр). Понятие шрайерова многообразия возникло в теории групп: в 1920-х годах Нильсен [1] и Шрайер [2] доказали, что любая подгруппа свободной группы свободна. А. Г. Курош [3] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. А. И. Ширшов [4] показал, что многообразие всех алгебр Ли является шрайеровым (этот результат был получен также Виттом в [5], где также было доказано, что многообразие всех $p$-алгебр Ли является шрайеровым).

А. И. Ширшов в [6] показал, что подалгебры свободных неассоциативных коммутативных и свободных неассоциативных антикоммутативных алгебр свободны. Таким образом многообразие всех коммутативных алгебр (всех антикоммутативных алгебр) является шрайеровым. А. А. Михалев [7] и А. С. Штерн [8] показали, что многообразие супералгебр Ли является шрайеровым. А. А. Михалев [9] получил этот результат для цветных $p$-супералгебр Ли. А. И. Корепанов [10] доказал, что подалгебры свободных суперкоммутативных неассоциативных алгебр свободны. У. У. Умирбаев и И. П. Шестаков [11] доказали, что подалгебры свободных алгебр Акивиса свободны. У.У.Умирбаев в [12, 13] получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие алгебр было шрайеровым, и построил новые примеры шрайеровых многообразий.

В данной работе мы остановимся на рассмотрении основных типов свободных алгебр шрайеровых многообразий: свободной неассоциативной алгебры, свободной (анти)коммутативной алгебры и свободной алгебры Ли.

## 2. Основная часть

### 2.1. Примитивные системы элементов

Система элементов свободной алгебры $A$ называется примитивной, если она является подмножеством некоторого множества свободных образующих алгебры $A$.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $A = F(X)$ — одна из перечисленных выше свободных алгебр (в случае коммутативной свободной алгебры, считаем что $\operatorname{char} F \neq 2$; а в случае свободной алгебры Ли, что $\operatorname{char} F = 0$).

Для элемента $a$ алгебры $A$ через $M_a$ обозначим левый $U(A)$-подмодуль в $U(A)$, порождённый элементами $\frac{\partial a}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial a}{\partial x_n}$. Алгебра $U(A)$ — свободная ассоциативная алгебра.

Свободная ассоциативная алгебра $F\langle Y\rangle$ над полем $F$ является кольцом свободных идеалов, т. е. левые (правые) идеалы алгебры $F\langle Y\rangle$ являются свободными левыми (соответственно правыми) модулями единственного ранга. Следовательно, любой подмодуль свободного левого (правого) $F\langle Y\rangle$-модуля свободен [14, 15]. Это свойство, в совокупности с обобщённым алгоритмом Евклида, даёт возможность производить эффективные вычисления в левых (правых) идеалах алгебры $F\langle Y\rangle$, применяя технику стандартных базисов идеалов свободных алгебр.

**Теорема 2.1 ( [16])** *Система $a_1, \ldots, a_r$ элементов алгебры $A$ является примитивной тогда и только тогда, когда матрица $(\partial(a_1), \ldots, \partial(a_r))$ обратима слева над $U(A)$. В частности, элемент $a$ алгебры $A$ примитивен в том и только в том случае, когда существуют такие элементы $m_1, \ldots, m_n \in U(A)$, что*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i} = 1.$$

Теорема 2.1 даёт алгоритм распознавания примитивности систем элементов свободных алгебр основных типов шрайеровых многообразий алгебр (см. [17–22], в этих работах также построены алгоритмы дополнения примитивных систем элементов до свободных порождающих множеств).

### 2.2. Почти примитивные элементы

Ненулевой элемент $u$ свободной алгебры $F(X)$ называется почти примитивным элементом, если $u$ не является примитивным элементом алгебры $F(X)$, но является примитивным элементом любой собственной подалгебры $H$ алгебры $F(X)$, содержащей элемент $u$ ($u \in H, H \subseteq F, 0 \neq H \neq F$). Почти примитивные элементы в свободных группах изучались в работах [23–25]. Алгоритм распознавания почти примитивных элементов свободных групп был построен Л. Комерфордом в [24].

Изучение почти примитивных элементов свободных неассоциативных алгебр было начато в работах [26, 27] и в монографии [19]. В частности, было показано, что элемент $xx$ является почти примитивным элементом свободной неассоциативной алгебры $F(x)$, элементы $xy$, $xy + x$ являются почти примитивными элементами свободной неассоциативной алгебры $F(x, y)$, элемент $[x, y]$ является почти примитивным элементом свободной алгебры Ли $L(x, y)$, элемент $[x, y] + [[x, z], z]$ является почти примитивным элементом свободной алгебры Ли $L(x, y, z)$.

В последующих работах [28–30] основное внимание было уделено однородным почти примитивным элементам: были построены новые примеры и доказан критерий почти примитивности однородного элемента в свободных неассоциативных, свободных (анти)коммутативных и алгебрах Ли малых рангов.

Основным методом изучения однородных почти примитивных элементов является рассмотрение канонических представлений элементов в линейных базисах (базисах регулярных одночленов) свободных алгебр как линейных пространств.

Отметим простейшие свойства примитивных и почти примитивных элементов свободных алгебр.

**Предложение 2.1 ( [28–30])** *Пусть $F(X)$ – свободная алгебра с конечным множеством $X$ свободных образующих, $\{h_1, \ldots, h_k\}$ – редуцированное множество свободных образующих собственной подалгебры $H$ алгебры $F(X)$. Если элемент является примитивным в подалгебре $H$, то существует свободная образующая $h_i$ подалгебры $H$, входящая линейно в его представление (см. [19]). Если существует свободная образующая $h_i$ подалгебры $H$, входящая только линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре $H$. Если существует свободная образующая $h_i$ подалгебры $H$, такого же веса, что и сам элемент, входящая линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре $H$. Если существует свободная образующая $h_i$ подалгебры $H$, старшая часть которой входит только линейно в представление старшей части элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре $H$.*

Ясно, что любой однородный элемент степени больше единицы не является примитивным по Предложению 2.1, тем самым остается вопрос выяснения его примитивности в собственных подалгебрах. При рассмотрении любой подалгебры, содержащей данный однородный элемент, выясняется, что или она совпадает со всей алгеброй $F(X)$, то есть не является собственной, или элемент оказывается примитивным в ней, или никакая свободная образующая подалгебры не входит линейно в представление данного элемента и поэтому он не примитивен в ней.

Помимо канонического представления элемента в базисе регулярных одночленов, на почти примитивность элемента может влиять поле, над которым рассматривается свободная алгебра. Продемонстрируем это на примере элементов $u_{k,l}(x, y) = (\mathrm{ad}\, x)^k(y) + (x)(\mathrm{Ad}\, y)^l$ с $k, l \geqslant 2$, где для $u, v \in F$ положим $(\mathrm{ad}\, u)(v) = uv$, $(v)(\mathrm{Ad}\, u) = vu$. В работе [26] было доказано, что элемент $u_{k,l}(x, y)$ является почти примитивным в алгебре $L(x, y)$ при $k, l \geqslant 2$, $k \neq l$. В работе [28] аналогичным способом было доказано, что $u_{k,l}(x, y)$ является почти примитивным в алгебре $F(x, y)$ при $k, l \geqslant 2$, $k \neq l$, и, используя критерий почти примитивности однородного элемента, при $k = l \geqslant 2$. В лиевом случае, как было разобрано в [30], при различных $k = l$ наблюдаются совсем разные картины:

**Предложение 2.2 (Предложения 4, 5 [30])** *При $k = l = 2$ и $k = l = 4$ элемент $u_{k,l}(x, y)$ не является почти примитивным в $L(x, y)$. При $k = l = 3$ элемент $u_{k,l}(x, y)$ является почти примитивным в $L(x, y)$ тогда и только тогда, когда в поле $K$, над которым рассматривается данная алгебра, не имеет решений уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$.*

Напротив, элементы $u_t(x, y, z) = xy + (x)(\mathrm{Ad}\, z)^t \in F(x, y, z)$ в свободной неассоциативной алгебре и $u_t(x, y, z) = [x, y] + (x)(\mathrm{Ad}\, z)^t \in L(x, y, z)$ свободной алгебре Ли являются почти примитивными при $t \geqslant 2$ (см. [26, 28]).

Наконец, обобщим теоремы из работ [28–30], позволяющие в некоторых случаях делать вывод о почти примитивности элемента из почти примитивности его старшей части, на случай произвольного ранга.

**Теорема 2.2** *Пусть $F(X)$ – свободная неассоциативная алгебра или свободная (анти)коммутативная алгебра, или свободная алгебра Ли. Тогда:*

(a) *Если элемент $u \in F(X)$ не является примитивным элементом в $F(X)$, но старшая часть $u^\circ$ является примитивным элементом в любой собственной подалгебре $u^\circ \in H^\circ \subsetneq F(X)$, порожденной однородными образующими, то элемент $u$ является почти примитивным элементом в $F(X)$.*

(b) *В обратную сторону утверждение* (a) *верно для однородных элементов.*

(c) *Существуют неоднородные элементы, для которых утверждение* (a) *в обратную сторону так же неверно.*

В качестве примера неоднородного почти примитивного элемента с не почти примитивной старшей частью для свободной неассоциативной (анти)коммутативной алгебры с множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ свободных образующих можно взять элемент $v = u_{1,n}(a) + x_1 = (\ldots(((ax_1)x_2)x_3)\ldots)x_n + x_1$ с произвольным ненулевым элементом $a$ по середине.

Наконец, обобщая критерии почти примитивности однородных элементов в свободных алгебрах малых рангов ( [28–30]) на случай произвольного ранга, сформулируем следующую теорему для свободной неассоциативной алгебры.

**Теорема 2.3** *Пусть $K$ — алгебраически замкнутое поле, однородный элемент $u \in F(X)$ степени $d(u) = m \geqslant 3$ имеет представление*

$$u = u\,(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \Phi_j \Psi_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \Lambda_i + \sum_{i=1}^{n} N_i x_i\right) = u_{\Phi\Psi} + \widetilde{u},$$

*где элемент $\widetilde{u}$ имеет вид*

$$\widetilde{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j} \varepsilon_j^{\Lambda_i} M_j\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j} \varepsilon_j^{N_i} M_j\right) x_i,$$

*где $\varepsilon_j^{\Lambda_i}, \varepsilon_j^{N_i} \in K$, $(\Phi_j(x_1, \ldots, x_n), \Psi_j(x_1, \ldots, x_n))$ — различные пары одночленов степени $d(\Phi_j) \geqslant 2$, $d(\Psi_j) \geqslant 2$, $d(\Phi_j) + d(\Psi_j) = m$, $\Lambda_x, \Lambda_y, N_x, N_y$ — однородные элементы степени $d(\Lambda_x) = d(\Lambda_y) = d(N_x) = d(N_y) = m - 1$ или нулевые, $M_j$ — упорядоченные одночлены степени $d(M_j) = m - 1$.*

*Рассмотрим конечно порожденный идеал*

$$I = \left(\{F_{i,j}\}_{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}^{i=1,\ldots,n}, \{G_{i,j}\}_{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}^{i=1,\ldots,n}\right)$$

*от $2n\mathfrak{L}$ образующих в кольце*

$$K\left[\{k_{s,i}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{i=1,\ldots,n}, \{a_{s,j}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}, \{b_{s,j}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}\right] \cong K\left[y_1, \ldots, y_{(2\mathfrak{L}+n)(n-1)}\right],$$

*от $(2\mathfrak{L} + n)(n - 1)$ переменных (где $\mathfrak{L} = n^{(m-1)C(m-2)}$ — число различных одночленов степени $m - 1$ в $F(X)$, $C(m - 2)$ — $(m - 2)$-ое число Каталана (число различных расстановок скобок в неассоциативном произведении $m - 1$ элементов), порожденный многочленами*

$$F_{i,j} = \sum_{s=1}^{n-1} k_{s,i} a_{s,j} - \varepsilon_j^{\Lambda_i}, \quad G_{i,j} = \sum_{s=1}^{n-1} k_{s,i} b_{s,j} - \varepsilon_j^{N_i},$$

*от $2(n - 1)$ переменных степени 2.*

*Тогда однородный элемент $u$ является почти примитивным в $F(X)$, если и только если редуцированный базис Гребнера-Ширшова идеала $I$ содержит единицу.*

**Замечание 2.1** *В Теореме 2.3 алгебраическая замкнутость поля $K$ необходима только в случае, когда $1 \notin \mathrm{RedGr}(I) = \{f_1, \ldots, f_d\}$ для существования решения системы алгебраических уравнений*

$$\{f_i = 0\}_{i=1}^{d} \text{ от переменных } \{k_{s,i}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{i=1,\ldots,n}, \{a_{s,j}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}, \{b_{s,j}\}_{s=1,\ldots,n-1}^{j=1,\ldots,\mathfrak{L}}.$$

*В общем случае, если $1 \in \mathrm{RedGr}(I)$, то однородный элемент $u$ степени $d(u) = m \geqslant 3$ является почти примитивным в $F(X)$.*

Используя каноническое представление элемента в базисе регулярных одночленов, Теорему 2.3 можно модифицировать на случай свободной (анти)коммутативной алгебры и свободной алгебры Ли. В последнем случае, так же как в случае малого ранга (см. [30]) необходимо будет рассматривать проекции на линейное пространство, порожденное всеми регулярными одночленами степени $d(u)$.

## 3. Заключение

В работе были рассмотрены однородные почти примитивные элементы свободных алгебр основных шрайеровых многообразий, построены примеры неоднородных почти примитивных элементов с не почти примитивной старшей частью, критерии почти примитивности однородных элементов и алгоритм проверки с помощью построения базиса Гребнера-Ширшова. Задача распознавания неоднородных почти примитивных элементов остается открытой.

## Литература

1. J. Nilsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppe*. Math. Ann. **91** (1924), 161–183.
2. O. Schreier, *Die Untergruppen den freien Gruppen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg bf 5 (1927), 161–183.
3. А. Г. Курош, *Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр*. Мат. сб. **20** (1947), 239–262.
4. А. И. Ширшов, *Подалгебры свободных лиевых алгебр*. Мат. сб. **33** (1953), № 2, 441–452.
5. E. Witt, *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe*. Math. Z. **64** (1956), 195–216.
6. А. И. Ширшов, *Подалгебры свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр*. Мат. сб. **34** (1954), № 1, 81–88.
7. А. А. Михалев, *Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли*. Мат. зам. **37**, № 4, (1985), 653–661
8. А. С. Штерн, *Свободные супералгебры Ли*. Сиб. мат. журн. **27** (1886), № 1, 170–174.
9. А. А. Михалев, *Подалгебры свободных p-супералгебр Ли*. Мат. зам. **43**, № 2, (1988), 178–191.
10. А. И. Корепанов, *Свободные неассоциативные суперкоммутативные алгебры*. Фунд. и прикл. мат. **9** (2003), № 3, 103–109.
11. I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, *Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras*. J. Algebra **250** (2002), 533–548.
12. У. У. Умирбаев, *О шрейеровых многообразиях алгебр*. Алг. и Лог. **33** (1994), № 3, 317–340.
13. U. U. Umirbaev, *Universal derivations and subalgebras of free algebras*. Algebra(Krasnoyarsk, 1993). Berlin: Walter de Gruyter, 1996, pp. 255–271.
14. Кон П. Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975.
15. Lewin J. Free modules over free algebras and free group algebras: The Schreier technique // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 145. — P. 455–465.
16. A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, and J.-T. Yu, *Automorphic orbits in free non-associative algebras*. J. Algebra **243** (2001), 198–223.
17. Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. — Boca Raton: CRC Press, 1995.
18. Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Algorithms for primitive elements of free Lie algebras and superalgebras // Proc. ISSAC-96. — New York: ACM Press, 1996. — P. 161–169.
19. A. A. Mikhalev, V. Shpilrain, and J.-T. Yu. Combinatorial Methods: Free Groups, Polynomials, and Free Algebras. Springer-Verlag New York, 2004.
20. Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А. Примитивные элементы свободных коммутативных и антикоммутативных неассоциативных алгебр. Вестник Новосиб. гос. ун-та. Серия Математика, механика, информатика 10 (2010), вып. 4, 62–81.
21. Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А., Шампаньер К. Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 171–192.
22. Шампаньер К. Алгоритмы реализации ранга и примитивности систем элементов свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 4. — С. 1229–1238.

23. B. Fine, G. Rosenberger, D. Spellman, and M. Stille. *Test, generic and almost primitive elements in free groups*. Mat. Contemp. **14** (1998), 45–59.
24. L. P. Comerford, *Generic elements of free groups*. Arch. Math. (Basel) **65** (1995), № 3, 185–195.
25. G. Rosenberger, *A property of subgroups of free groups*. Bull. Austral. Math. Soc. **43** (1991), 269–272.
26. A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, J.-T. Yu, *Generic, Almost primitive and test elements of free Lie algebras*. Proc. AMS **130** (2002), № 5, 1303–1310.
27. A. A. Mikhalev, J.-T. Yu, *Primitive, almost primitive, test, and Δ-primitive elements of free algebras with the Nielsen-Schreier property*. J. Algebra **228** (2000), 603–623.
28. А. В. Климаков, А. А. Михалев, *Почти примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр малых рангов*. Фундамент. и прикл. мат. **17** (2012), № 1, 127–141.
29. А. В. Климаков, *Почти примитивные элементы свободных неассоциативных (анти)коммутативных алгебр малых рангов*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем. мех. **5** (2012), 19–24.
30. А. В. Климаков, *Почти примитивные элементы свободных алгебр Ли малых рангов*. Фундамент. и прикл. мат. **18** (2013), № 1, 63–74.

UDC 512.554

# Homogeneous almost primitive elements of free algebras of Schreier varieties

**A. V. Klimakov, A. A. Mikhalev**

*Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University*

Email: klimakov88@mail.ru,aamikhalev@mail.ru

A variety of algebras is said to be Schreier if any subalgebra of a free algebra of this variety is free. A subset of nonzero elements of a free algebra is said to be primitive if there is a set of free generators of algebra that containts it. A nonzero element of a free algebra is said to be almost primitive if it is not a primitive element of the algebra, but is a primitive element of any proper subalgebra that contains it. In this paper we consider almost primitive elements of free nonassociative algebra, free (anti)commutative algebra and free Lie algebra.

This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grants 16-31-00096 and 16-01-00113)

**Key words and phrases:** schreier varities of free algebras, primitive elements, almost primitive elements.

УДК 512.547.2

# Алгоритм разложения скалярного произведения в перестановочном пространстве конечной группы на неприводимые компоненты

**В. В. Корняк**

*Лаборатория информационных технологий,*
*Объединённый институт ядерных исследований,*
*ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Email: vkornyak@gmail.com

Предложенный в [1] подход к конструктивной формулировке квантового формализма основан на замене унитарной группы, действующей в гильбертовом пространстве над комплексным полем $\mathbb{C}$, унитарным представлением конечной группы в гильбертовом пространстве над циклотомическим полем. Поскольку любое представление конечной группы можно получить как подпредставление некоторого перестановочного представления, полезно уметь разложить произвольное перестановочное представление на неприводимые компоненты. Мы рассматриваем здесь алгоритм разложения перестановочного представления на неприводимые компоненты, основанный на легко вычисляемом базисе инвариантных билинейных форм с использованием того факта, что формы в инвариантных подпространствах, если их нормализовать подходящим образом, представляют собой операторы проектирования в эти подпространства. Важным элементом алгоритма является вычисление базиса Грёбнера нульмерного идеала. Работа алгоритма иллюстрируется конкретным примером.

**Ключевые слова:** конечная группа, перестановочное представление, неприводимое представление, инвариантная билинейная форма, вычислительная теория групп.

## 1. Введение

В общем случае, проблема расщепления модуля над ассоциативной алгеброй на неприводимые подмодули весьма нетривиальна. Обзор алгоритмических аспектов этой проблемы можно найти в [2]. Мы рассматриваем здесь частный, но важный с нашей точки зрения, случай проблемы.

Пусть $\mathsf{G}$ — группа перестановок на множестве $\Omega \cong \{1, \ldots, \mathsf{N}\}$. Мы будем обозначать действие $g \in \mathsf{G}$ на $i \in \Omega$ символом $i^g$. Во избежание несущественных технических усложнений будем предполагать, что $\mathsf{G}$ действует на $\Omega$ транзитивно. Орбита группы $\mathsf{G}$ на декартовом квадрате $\Omega \times \Omega$ называется *орбиталом* (или *когерентной конфигурацией Шура*) [3]. Число орбиталов, называемое *рангом* группы перестановок, будем обозначать символом $\mathrm{R}$. Мы будем предполагать, что группа $\mathsf{G}$ порождается её подмножеством из $K$ элементов: $S = \{s_1, \ldots, s_K\}$. Представление группы $\mathsf{G}$ в $\mathsf{N}$-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\mathsf{N}$ матрицами вида $\mathrm{P}(g) = \left(\delta_{i,\, i^g}\right)$, где $\delta_{i,\, j}$ — дельта Кронекера, называется *перестановочным представлением.* Обозначим матрицы перестановочного представления порождающих элементов символами $P_k = \mathrm{P}(s_k)$. Условие инвариантности билинейной формы $A = \left(a_{i,\, j}\right)$ относительно группы $\mathsf{G}$ можно записать в виде системы уравнений $A = P_k A P_k^{-1}, \quad 1 \le k \le K$. Легко проверить, что в компонентах уравнения этой системы имеют вид $a_{i,\, j} = a_{i^{s_k},\, j^{s_k}}$. Таким образом, базис всех инвариантных билинейных форм находится во взаимно однозначном соответствии с множеством орбиталов: каждому орбиталу $\Delta_r \in \{\Delta_1, \ldots, \Delta_\mathrm{R}\}$ ставится в соответствие матрица $\mathcal{A}_r$ размера $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ по правилу $(\mathcal{A}_r)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) \in \Delta_r, \\ 0, & \text{если } (i,j) \notin \Delta_r. \end{cases}$

Среди орбиталов транзитивной группы обязательно присутствует диагональ, за которой мы закрепим первый номер в списке орбиталов фиксируя тем самым $\mathcal{A}_1 = \mathbb{1}_{\mathsf{N}}$. Любую инвариантную билинейную форму можно представить в виде

$$A = x_1\mathcal{A}_1 + \cdots + x_{\mathrm{R}}\mathcal{A}_{\mathrm{R}}\,. \tag{1}$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_{\mathsf{N}}$, представляемое единичной матрицей $\mathcal{A}_1 = \mathbb{1}_{\mathsf{N}}$, называется *стандартным*. Очевидно, что стандартное скалярное произведение является инвариантным для любой группы $\mathsf{G}$ и имеет одинаковый вид в любой системе координат. В системе координат, в которой представление $\mathrm{P}$ разложено на $M$ неприводимых компонент с размерностями $d_1, \ldots, d_M$, стандартное скалярное произведение можно разложить в сумму неприводимых инвариантных компонент, являющимися стандартными скалярными произведениями в своих подпространствах: $\mathbb{1}_{\mathsf{N}} = \mathbb{1}_{d_1} \oplus\cdots\oplus \mathbb{1}_{d_M}$. В исходной системе координат это разложение имеет вид $\mathbb{1}_{\mathsf{N}} = \mathcal{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_M$. Наша задача — вычислить компоненты $\mathcal{B}_m$ для $1 \le m \le M$. Предлагаемый нами подход основан на том, что $\mathcal{B}_m$, будучи операторами проектирования, являются решениями уравнения идемпотентности для матрицы (1)

$$A^2 - A = 0. \tag{2}$$

В компонентах уравнение (2) представляет собой набор из $\mathsf{N}^2$ квадратных уравнений для переменных $x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}$. Однако лишь $\mathrm{R}$ из этих уравнений различны. Можно показать, что $\left(A^2 - A\right)_{i,j} = \left(A^2 - A\right)_{i',j'}$, если $(i, j)$ и $(i', j')$ принадлежат одному и тому же орбиталу. Таким образом, нам достаточно выбрать по одному представителю в каждом орбитале и вычислить соответствующее квадратное уравнение. Заметим, что для транзитивных групп каждый орбитал имеет элементы в каждой строке и каждом столбце квадрата $\Omega \times \Omega$. Поэтому достаточно просканировать, например, первую строку, выбирая по одному элементу вида $(1, j)$ для каждого орбитала и вычисляя соответствующее уравнение. В результате получим систему квадратных уравнений $E\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$:

$$\begin{aligned} E_1 &= Q_1\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right) - x_1 = 0,\\ &\ \vdots\\ E_{\mathrm{R}} &= Q_{\mathrm{R}}\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right) - x_{\mathrm{R}} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $Q_r\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$ — однородные полиномы второй степени. Система (3) имеет конечное число решений, т.е. её полиномы определяют нульмерный идеал. Все решения системы (3) принадлежат абелеву расширению поля $\mathbb{Q}$. Это расширение является подполем $k$-го циклотомического поля, где $k$ — некоторый делитель экспоненты (т.е. наименьшего общего кратного порядков элементов) группы $\mathsf{G}$. В подходящем лексикографическом упорядочении можно построить базис Грёбнера $GE\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$ системы (3), содержащий полином одной переменной $D\left(x_1\right)$, который мы будем называть *полиномом размерностей*, поскольку среди его корней имеются величины $d_m/\mathsf{N}$, где $d_m$ пробегает множество всех размерностей неприводимых подпредставлений представления $\mathrm{P}$. Можно сразу отбросить корни $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$, соответствующие тривиальным решениям уравнения (2). Полином $D\left(x_1\right)$ также всегда имеет корень $x_1 = 1/\mathsf{N}$, поскольку любое перестановочное представление содержит одномерное тривиальное подпредставление. Все оставшиеся корни имеют вид $d/\mathsf{N}$, где $d \in [2, \ldots, \mathsf{N} - 1]$. Помимо неприводимых размерностей $d_m$, величина $d$ может принимать ненужные нам значения, равные суммам неприводимых размерностей. Поэтому естественной процедурой представляется цикл перебора в порядке возрастания чисел $d$ в интервале $[1, \ldots, \mathsf{N} - 1]$ (число $1$ включено в цикл, поскольку одномерное подпредставление может быть неединственным). Если $x_1^* = d/\mathsf{N}$ — корень полинома $D\left(x_1\right)$, находим все решения вида $\left(x_1^*, x_2, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$ системы $GE\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$, проверяем их линейную независимость от уже построенного набора решений и либо отбрасываем либо добавляем к построенному набору, процедура оканчивается когда сумма размерностей построенных подпредставлений достигает величины $\mathsf{N}$.

## 2. Алгоритм

Исходные данные для алгоритма — множество перестановок $S = \{s_1, \ldots, s_K\}$ степени $\mathsf{N}$, порождающих группу $\mathsf{G}$. Алгоритм представляет собой последовательность следующих шагов:

**Шаг 1.** Разбиение множества $\Omega \times \Omega$ на орбиталы и построение базиса инвариантных билинейных форм $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{\mathrm{R}}\}$. Этот шаг достаточно тривиален[1] и реализуется тремя последовательно вложенными циклами: (a) по неиспользованным элементам $(i, j) \in \Omega \times \Omega$, длина цикла равна рангу группы $\mathrm{R}$; (b) по новым элементам орбитала, длина цикла равна размеру текущего орбитала $|\Delta_r|$; (c) по порождающим элементам, длина цикла равна $K$.

**Шаг 2.** Построение системы $\mathrm{R}$ квадратных уравнений для переменных $x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}$, выражающих свойство идемпотентности (2). Это цикл длины $\mathrm{R}$: в каждом орбитале выбирается один элемент $(i, j) \in \Delta_r$ и вычисляется выражение $E_r\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right) = \sum_k a_{ik} a_{kj} - a_{ij}$, где $a_{mn}$ — компоненты матрицы (1).

**Шаг 3.** К множеству полиномов $E_1, \ldots, E_{\mathrm{R}}$ для устранения тривиальных решений добавляется “полином Рабиновича” $x_1\left(x_1 - 1\right) y - 1$ и вычислется лексикографический базис Грёбнера $GE\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$, который содержит полином размерностей $D\left(x_1\right)$. Через $GR\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$ будем обозначать результат удаления из базиса Грёбнера полинома $D\left(x_1\right)$ и полинома, содержащего “переменную Рабиновича” $y$.

**Шаг 4.** Псевдокод основной части алгоритма:

**Require:** $\mathsf{N}$, $\mathrm{R}$, $D(x_1)$, $GR\left(x_1, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$

**Ensure:** $\mathrm{IrrForms} = \left\{X^{(1)}, \ldots, X^{(M)}\right\}$ {векторы коэффициентов форм $\mathcal{B}_m$}

$X^{(1)} := \frac{1}{\mathsf{N}}\left(1_1, \ldots, 1_{\mathrm{R}}\right)$ {обязательное тривиальное подпредставление}
$\mathrm{IrrForms} := \left\{X^{(1)}\right\}$
$\mathrm{M} := 1$ {текущее число неприводимых форм}
$\mathrm{sdim} := 1$ {текущая сумма размерностей}
$\mathrm{d} := 0$ {текущая потенциальная размерность}
**while** $\mathrm{sdim} < \mathsf{N}$ **do**
  $\mathrm{d} := \mathrm{d} + 1$
  $x_1^* := \mathrm{d}/\mathsf{N}$
  **if** $D\left(x_1^*\right) = 0$ **then**
    $gr\left(x_2, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right) := GR\left(x_1^*, x_2, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$
    $\mathrm{solutions} := Solve(gr\left(x_2, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right))$ {конечное множество решений}
    **for all** $\left(x_2, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right) \in \mathrm{solutions}$ **do**
      $X^{(*)} := \left(x_1^*, x_2, \ldots, x_{\mathrm{R}}\right)$
      **if** $\mathrm{rank}\left(\mathrm{IrrForms} \cup \left\{\mathrm{X}^{(*)}\right\}\right) > M$ **then**
        $\mathrm{M} := \mathrm{M} + 1$
        $X^{(M)} := X^{(*)}$
        $\mathrm{IrrForms} := \mathrm{IrrForms} \cup \left\{X^{(M)}\right\}$
        $\mathrm{sdim} := \mathrm{sdim} + \mathrm{d}$

[1]Впрочем, псевдокод алгоритма можно найти, например, на стр. 58 книги [4].

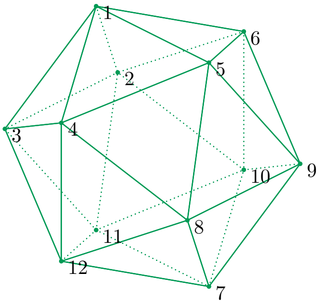



Рис. 1. Икосаэдр

19: **return** IrrForms

## 3. Иллюстрация работы алгоритма

Рассмотрим действие знакопеременной группы $\mathsf{A}_5$ на $12$ вершинах икосаэдра. Для изображённой на рис. 1 нумерации вершин, это действие можно породить, например, двумя перестановками

$$S = \{s_1, s_2\} = \{(1,7)(2,8)(3,12)(4,11)(5,10)(6,9), \quad (1,2,11,12,4)(5,6,10,7,8)\} \, .$$

**Шаг 1.** Вычисление орбиталов показывает, что $\mathrm{R} = 4$ для данного действия группы $\mathsf{A}_5$, а базис инвариантных форм имеет вид

$$\mathcal{A}_1 = \mathbb{1}_{12}, \; \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_6 & \mathbb{1}_6 \\ \mathbb{1}_6 & \mathbb{0}_6 \end{pmatrix}, \; \mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}, \; \mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} Y & X \\ X & Y \end{pmatrix},$$

$$\text{где} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Шаг 2.** Система уравнений идемпотентности:

$$\begin{aligned} E_1 &= x_1^2 + 5x_3^2 + x_2^2 + 5x_4^2 - x_1 = 0, \\ E_2 &= 2x_1x_2 + 10x_3x_4 - x_2 = 0, \\ E_3 &= 2x_1x_3 + 2x_3^2 + 4x_3x_4 + 2x_2x_4 + 2x_4^2 - x_3 = 0, \\ E_4 &= 2x_1x_4 + 2x_3x_2 + 4x_3x_4 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - x_4 = 0. \end{aligned}$$

**Шаг 3.** Полином размерностей:

$$D(x_1) = -2310 + 67079x_1 - 758049x_1^2 + 4584886x_1^3 - 16725744x_1^4 + 38652768x_1^5 - 57044736x_1^6 + 52130304x_1^7 - 26873856x_1^8 + 5971968x_1^9.$$

Остаток базиса Грёбнера $GR(x_1, x_2, x_3, x_4)$, определяющий значения $x_2, x_3, x_4$:

$$\begin{aligned}
GR_1 &= -13370 + 362423x_1 - 3674387x_1^2 + 19221048x_1^3 - 58272732x_1^4 \\
&\quad + 106468992x_1^5 - 115613568x_1^6 + 68677632x_1^7 - 17169408x_1^8 \\
&\quad + 560x_1x_2 - 280x_2\,, \\
GR_2 &= 1015 - 25521x_1 + 232629x_1^2 - 1088136x_1^3 + 2975364x_1^4 - 5007744x_1^5 \\
&\quad + 5152896x_1^6 - 2985984x_1^7 + 746496x_1^8 + 140x_2^2\,, \\
GR_3 &= -90 + 1929x_1 - 15903x_1^2 + 66858x_1^3 - 156960x_1^4 + 207936x_1^5 - 145152x_1^6 \\
&\quad + 41472x_1^7 + 240x_3 - 2360x_1x_3 + 8120x_1^2x_3 - 11520x_1^3x_3 + 5760x_1^4x_3\,, \\
GR_4 &= -69930 + 1877157x_1 - 18891513x_1^2 + 98362152x_1^3 - 297354708x_1^4 \\
&\quad + 542360448x_1^5 - 588373632x_1^6 + 349360128x_1^7 - 87340032x_1^8 \\
&\quad + 1400x_3 - 2800x_1x_3 + 2800x_2x_3\,, \\
GR_5 &= 13160 - 361583x_1 + 3673547x_1^2 - 19221048x_1^3 + 58272732x_1^4 \\
&\quad - 106468992x_1^5 + 115613568x_1^6 - 68677632x_1^7 + 17169408x_1^8 \\
&\quad + 3780x_3 - 27720x_1x_3 + 60480x_1^2x_3 - 40320x_1^3x_3 + 1400x_3^2\,, \\
GR_6 &= -9450 + 231867x_1 - 2030805x_1^2 + 8792910x_1^3 - 20956320x_1^4 \\
&\quad + 27978048x_1^5 - 19595520x_1^6 + 5598720x_1^7 + 280x_3 + 280x_4\,.
\end{aligned}$$

**Шаг 4.** Полином $D(x_1)$ имеет $9$ корней вида $x_1 = \frac{d}{12}$, где

$$d \in \{\underline{1}, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, 7, 8, 9, 11\}\,.$$

Мы здесь подчеркнули размерности неприводимых подпредставлений.
Рассмотрим работу основного цикла шага 4 алгоритма:

$d = 1:$ $\frac{1}{12}$ — корень полинома $D(x_1)$. Подстановка этого корня в $GR(x_1, x_2, x_3, x_4)$ даёт единственное решение $X^{(*)} = \frac{1}{12}(1, 1, 1, 1)$, которое отбрасывается проверкой ранга: это решение изначально включено в множество IrrForms.

$d = 2:$ $D\left(\frac{2}{12}\right) \neq 0$ — переходим к следующей потенциальной размерности.

$d = 3:$ $D\left(\frac{3}{12}\right) = 0$. Подстановка $x_1 = \frac{1}{4}$ в $GR(x_1, x_2, x_3, x_4)$ после тривиальных редукций приводит к системе уравнений

$$4x_2 + 1 = 0,\ 80x_3^2 - 1 = 0,\ x_3 + x_4 = 0,$$

из которой следует два решения
$X_+^{(*)} = \frac{1}{4}\left(1, -1, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ и $X_-^{(*)} = \frac{1}{4}\left(1, -1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
Оба решения добавляются к IrrForms. Сумма размерностей sdim $= 7$.

$d = 4:$ $D\left(\frac{4}{12}\right) = 0 \implies$ два решения $\frac{1}{12}\left(4, -2, 1 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}, 1 \mp \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$, которые отбраковываются проверкой ранга, являясь суммами решений для $d = 1$ и $d = 3$.

$d = 5:\ D\left(\frac{5}{12}\right) = 0 \implies$ решение $X^{(*)} = \frac{1}{12}(5, 5, -1, -1)$ добавляется к IrrForms. Сумма размерностей достигает предельно допустимого значения $\mathrm{sdim} = 12$ и алгоритм заканчивает работу.

Таким образом, мы установили, что перестановочное представление действия группы $\mathsf{A}_5$ на вершинах икосаэдра имеет следующее разложение на неприводимые компоненты: $\mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3'} \oplus \mathbf{5}$ (в физике принято обозначать неприводимые представления групп их размерностями в жирном шрифте). Мы также вычислили инвариантные формы в соответствующих подпространствах:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\mathbf{1}} &= \frac{1}{12}\left(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4\right),\\
\mathcal{B}_{\mathbf{3}} &= \frac{1}{4}\left(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{A}_3 - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{A}_4\right),\\
\mathcal{B}_{\mathbf{3'}} &= \frac{1}{4}\left(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{A}_3 + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{A}_4\right),\\
\mathcal{B}_{\mathbf{5}} &= \frac{1}{12}\left(5\mathcal{A}_1 + 5\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4.\right)
\end{aligned}
$$

## 4. Заключение

Принято считать, что по-настоящему эффективные методы решения проблем разложения на неприводимые компоненты должны быть вероятностными, как, например, **MeatAxe** — наиболее эффективный алгоритм для соответствующих вычислений над конечными полями [2]. Описанный здесь алгоритм основан на использовании методов полиномиальной алгебры, которые считаются алгоритмически трудными. Однако, предлагаемый нами подход представляется привлекательным по той причине, что при его использовании возникает небольшое число полиномов невысокой степени с заранее известным типом корней. Впрочем, оценка его эффективности на больших задачах и сравнение с другими методами требует дополнительной работы.

## Благодарности

Я благодарен Ю.А. Блинкову и В.П. Гердту за ценные советы, которые я использовал в работе.

## Литература

1. *Kornyak V. V.* Classical and Quantum Discrete Dynamical Systems. — Phys. Part. Nucl. 2013, **44**, No 1, pp. 47–91.
2. *Holt D. F., Eick B., O'Brien E. A.* Handbook of Computational Group Theory. — Chapman & Hall/CRC, 2005.
3. *Cameron P. J.* Permutation Groups. — Cambridge University Press, 1999.
4. *Butler G.* Fundamental Algorithms for Permutation Groups. — Springer, 1991.

UDC 512.547.2

# Algorithm for splitting inner product in permutation space of finite group into irreducible components

**V. V. Kornyak**

*Laboratory of Information Technologies*
*Joint Institute for Nuclear Research*
*Joliot-Curie 6, Dubna, Moscow region, 141980, Russia*

Email: vkornyak@gmail.com

The approach to constructive formulation of quantum formalism proposed in [1] is based on the replacement of a unitary group acting in a Hilbert space over the complex field $\mathbb{C}$ by a unitary representation of a finite group in a Hilbert space over a cyclotomic field. Since any representation of a finite group can be obtained as a subrepresentation of some permutational representation, it is useful to be able to decompose an arbitrary permutation representation into irreducible components. We describe here an algorithm for splitting a permutation representation into irreducible components based on an easily computed basis of invariant bilinear forms, and using the fact that forms in invariant spaces, if properly normalized, are operators of projection into these subspaces. An important element of the algorithm is the calculation of the Gröbner basis of a zero-dimensional ideal. The algorithm is illustrated by a concrete example.

**Key words and phrases:** finite group, permutation representation, irreducible representation, invariant bilinear form, computational group theory.

УДК 517.9

# Необходимые условия существования алгебраического интеграла у обыкновенного дифференциального уравнения

**Я. Ю. Кузив, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов**

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,*
*Российский университет дружбы народов,*
*ул. Миклухо-Маклая, д.6, Москва, Россия, 117198*

Email: yaroslav.kuziw@yandex.ru,malykam@mtu-net.ru,sevast@sci.pfu.edu.ru

Исследования М. Н. Лагутинского по теории интегрирования дифференциальных уравнений были прерваны его трагической смертью в 1915 г. В нашем докладе на Московской конференции «Компьютерная Алгебра» в 2016 эта теория была рассмотрена с точки зрения современной компьютерной алгебры и был представлен пакет Lagutinski for CAS Sagemath. В этом докладе мы используем метод Лагутинского для поиска необходимых условий существования алгебраических интегралов.

Для кольца $R$ с дифференцированием $D$ и базисом $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ введена последовательность детерминантов, которые называются далее детерминантами Лагутинского. Если один из детерминантов Лагутинского равен нулю, рациональный интеграл существует, кроме того, мы можем всегда вычислить этот интеграл. Обратное доказано для полиномиальных колец. Этот факт может использоваться не только для нахождения интегралов, но также и для доказательства условий существования или несуществования алгебраических интегралов.

Дифференцирование $D$ будем называть сжимающим, если существует базис, в котором

$$D\phi_i = c_i\phi_i + o(\phi_i), \quad c_i \in c(R).$$

Для такого дифференцирования возможно выписать простой необходимый критерий существования интегралов: среди $c_i$ индексов должны быть равные. Мы используем это утверждение для исследования интегрируемости дифференциального уравнения Брио и Буке.

**Ключевые слова:** полиномиальная компьютерная алгебра, интегрирование дифференциальных уравнений в конечном виде, символьное интегрирование, DEtools, Lsolver, Sagemath.

## 1. Введение

Задача об интегрировании дифференциальных уравнений в алгебраических функциях возникла еще в 1630-х годах, когда Дебон (Florimond de Beaune) предложил Декарту несколько «обратных задач на касательные» [1], с. 192. Сформулируем эту чисто алгебраическую задачу следующим образом.

**Задача Дебона**. Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, p, q \in k[x, y], \tag{1}$$

интеграл $r$ в поле $k(x, y)$, и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл. Здесь $k$ — поле констант, в качестве которого обычно выступают $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}[a, b, \dots]$, где $a, b, \dots$ — параметры, входящие в дифференциальное уравнение. Нет никакого смысла рассматривать эти случаи по-отдельности, поэтому мы пока предполагаем, что $k$ — бесконечное поле характеристики нуль, содержащее $\mathbb{Q}$.

Интерес к задаче Дебона то угасал, то возникал вновь. На рубеже XIX-XX веков он был обусловлен успехами в доказательстве несуществования алгебраических интегралов динамических систем; среди работ этого периода следует особо отметить мемуар Пуанкаре [2], стр. 35-95, и цикл статей М.Н. Лагутинского [3,4]. В последнее время классическая задача об отыскании алгебраического интеграла стала опять актуальной в связи с разработкой алгоритмов аналитического решения дифференциальных уравнений для систем компьютерной алгебры [5–8]. Сейчас ясно, что эта задача — простейшая из задач о символьном интегрировании дифференциальных уравнений в рамках компьютерной алгебры; прочие задачи или сводятся к этой, или приводят к тем же затруднениям, что встречаются при решении задачи Дебона. В 21-ом веке внимание к забытым работам Лагутинского привлек Ж.-М. Стрельцын [9, 10].

## 2. Метод Лагутинского

Метод определителей Лагутинского как общий прием отыскания общих и частных интегралов произвольных дифференциальных колец и его реализация в Sagemath были представлены в [8]. Напомним основные определения.

Пусть $R$ — кольцо с дифференцированием $D$ и полем констант $k$. Будем считать, что $k$ — произвольное поле характеристики нуль и $\mathbb{Q} \in k$. Общим интегралом этого дифференцирования будем называть пару линейно независимых над полем $k$ элементов $\psi_1, \psi_2$ этого кольца, удовлетворяющую равенству

$$\psi_1 D\psi_2 = \psi_2 D\psi_1.$$

Если кольцо $R$ — целостное, то дифференцирование естественным образом продолжается на его поле частных, а дробь $\psi_1/\psi_2$ удовлетворяет уравнению

$$D(\psi_1/\psi_2) = 0.$$

Мы будем работать с кольцами, в которых можно ввести базис в след. смысле. Счетное упорядоченное множество $B$ элементов $m_j$ кольца $R$ будем называть базисом кольца, если

1. любой элемент кольца $R$ можно представить как линейную комбинацию конечного числа элементов множества $B$ с постоянными коэффициентами,
2. произведение любых двух элементов множества $B$ принадлежит $B$, и следует строго после обоих сомножителей, т.е. $m_i m_j = m_n$ и $n$ строго больше чисел $i$ и $j$

На базисе введем отношение порядка: неравенство $m_i < m_j$ означает, что $i < j$ и примем, что запись

$$u = o(m_i)$$

означает, что в представлении элемента $u$ кольца $R$ в виде линейной комбинации базисных элементов присутствуют базисные элементы, номера которых строго больше $i$. Если

$$u = am_i + o(m_i), \quad a \neq 0,$$

то слагаемое $am_i$ будем называть младшим членом в $u$. Наконец, порядком элемента $u$ будем называть номер наибольшего базисного члена, входящего в разложение этого элемента по базису.

Составим бесконечную матрицу, первой строкой которой служит

$$m_1, m_2, \dots,$$

второй строкой — производная первой

$$Dm_1, Dm_2, \dots,$$

третьей — вторая производная первой

$$D^2m_1, D^2m_2, \dots,$$

и так до бесконечности. Угловой минор $n$-го порядка этой матрицы, то есть

$$\det\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ Dm_1 & Dm_2 & \dots & Dm_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{n-1}m_1 & D^{n-1}m_2 & \dots, & D^{n-1}m_n \end{pmatrix}$$

будем обозначать как $\Delta_n$ и называть определителем Лагутинского $n$-го порядка.

Применительно к задаче Дебона метод Лагутинского дает последовательность определителей

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots,$$

эта цепочка обрывается в том и только в том случае, когда существует интеграл в $k(x, y)$. Однако это условие нельзя проверить конструктивно, более того, вычисление определителей порядка $20 \div 30$ уже является весьма затратным. Поэтому важно преобразовать это утверждение в необходимое условие существования интеграла хотя бы для некоторых классов дифференцирований.

## 3. Сжимающие дифференцирования

Дифференцирование $D$ кольца $A$ назовем сжимающим, если существует такой базис $B = \{m_1, m_2, \dots\}$, в котором

$$Dm_i = c_i m_i + o(m_i). \tag{2}$$

Всякий базис, в котором действие дифференцирования удовлетворяет условиям (2), будем называть сжимаемым дифференцированием $D$, а числа $c_i$ — показателями сжатия в базисе $B$.

Вообще говоря, сжимающих базисов может быть несколько, и показатели сжатия могут быть в них различными. Возможность применения прилагаемых ниже критериев существования интеграла существенным образом зависит от возможности подобрать базис, который сжимает заданное дифференцирование.

**Теорема 1** (необходимый критерий существования общих интегралов). Сжимающее дифференцирование полиномиального кольца $R$ допускает общий интеграл только в том случае, когда среди показателей сжатия имеются равные.

Идея доказательства базируется на следующем наблюдении: если дифференцирование $D$ — сжимающее, то в подходящем базисе

$$\Delta_n = W(c_1, c_2, \dots, c_n) \prod_{i=1}^n m_i + o\left(\prod_{i=1}^n m_i\right),$$

где $W$ — определитель Вандермонда.

## 4. Необходимые условия существования рационального интеграла уравнения Брио и Буке

Указанную теорему удобно применить к вопросу об отыскании алгебраического интеграла дифференциального уравнения

$$(ay + cx + \dots)dx + (bx + \dots)dy = 0, \tag{3}$$

которое вслед за Э. Айнсом будем называть уравнением Брио и Буке [11], п. 12.6.

Интеграл уравнения (3) является также интегралом дифференцирования

$$D = (ay + cx + \dots)\frac{\partial}{\partial y} - (bx + \dots)\frac{\partial}{\partial x},$$

которое сжимает glex-базис

$$B = \{1, y, x, y^2, xy, x^2, \dots\}.$$

Отсюда сразу получаем следующий необходимый критерий существования интеграла у уравнения Брио и Буке (3).

**Теорема 2**. Дифференциальное уравнение Брио и Буке (3) может иметь рациональный интеграл в $k(x, y)$ только в том случае, когда $a$ и $b$ линейно зависимы над полем $\mathbb{Q}$.

**Пример 1.** Общее решение линейного уравнения

$$(ay + cx)dx + bxdy = 0.$$

нетрудно выписать

$$x^{a/b}\left(y + \frac{cy}{b+a}\right) = C,$$

где $C$ — константа интегрирования. Является ли выписанный интеграл алгебраическим, зависит от того, является ли отношение $a/b$ рациональным числом или нет, что вполне согласуется с доказанной леммой.

**Пример 2.** По доказанной теореме уравнение

$$(ay + cx)dx + (bx + xy)dy = 0.$$

не имеет алгебраического интеграла при произвольных $a$ и $b$; проверить это каким либо независимым способом не представляется возможным, используя известные системы компьютерной алгебры (CAS), например, на данный момент CAS Maple [12] не может его проинтегрировать.

## 5. Необходимые условия существования рационального интеграла произвольного дифференциального уравнения

Обратимся теперь к уравнению (1). Теорема Коши применима ко всем точкам плоскости $xy$, кроме тех, в которых одновременно обращаются в нуль многочлены $p$ и $q$ из $\mathbb{C}[x, y]$, их называют неподвижными особыми точками дифференциального уравнения [13]. Поместив начало координат в неподвижную особую точку, имеем

$$pdx + qdy = (a_{11}x + a_{12}y + \dots)dx + (a_{21}x + a_{22}y + \dots)dy,$$

где точками обозначены члены порядка выше первого. Коэффициент $a_{22}$ мешает применению теоремы 2, однако от него легко избавиться линейной заменой переменных. Рутинные вычисления реализованы в виде функции `lagutinski_ab` в в авторском пакете Lagutinski for CAS Sagemath [8], эта функция по заданным $p$ и $q$ возвращает `true`, если в первой неподвижной точке показатели сжатия линейно зависимы.

**Пример 3.** CAS Maple [12] не выдает об уравнении

$$(2 - x^2 - y^2)dx + (x - y)dy = 0$$

никакой определенной информации. Применение нашего критерия дает:

```
sage: x,y=var('x,y')
sage: lagutinski_ab(2-x^2-y^2,x-y)
      False
```

Поэтому это уравнение не допускает рационального интеграла в поле $\mathbb{C}(x, y)$.

## Заключение

Основной вывод кратко можно сформулировать так: средствами теории М.Н. Лагутинского удается вывести необходимые и легко проверяемые условия существования рационального интеграла у ОДУ. Эти критерии работают и в тех случаях, в которых стандартные CAS не выдают никакой определенной информации об ОДУ.

## Благодарности

Вычисления в данной статье были выполнены в CAS Sage [14].

Публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 02.a03.21.0008). Работа частично поддержана грантами РФФИ № 15-07-08795, № 16-07-00556.

## Литература

1. Р. Декарт. *Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта.* ГОНТИ НКТП СССР, Москва-Ленинград, 1938.
2. H. Poincaré. *Œuvres*, volume 3. Gautier, Paris, 1934.
3. М. Н. Лагутинский. Приложение полярных операций к интегрировананию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде. *Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер.*, 12:111–243, 1911.
4. М. Н. Лагутинский. О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальньных алгебраических уравнений. *Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер.*, 13:200–224, 1912.
5. Guillaume Chèze. Computation of darboux polynomials and rational first integrals with bounded degree in polynomial time. *Journal of Complexity*, 27(2):246–262, 2011.
6. A. Bostan, G. Chèze, T. Cluzeau, and J.-A. Weil. Efficient algorithms for computing rational first integrals and darboux polynomials of planar polynomial vector fields. *To appear in Mathematics of Computation*, 2015. arXiv e-print (arXiv:1310.2778).
7. Ngoc Thieu Vo and Franz Winkler. Algebraic general solutions of first order algebraic odes. *Proc. of 17th International Workshop CASC'2015*, pages 479–492, 2015.
8. М.Д. Малых. Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу м.н. лагутинского. *Вестник НИЯУ МИФИ*, 5(3):35–44, 2016.
9. В. А. Добровольский, Ж. Стрельцын, and Н. В. Локоть. Михаил николаевич лагутинский (1871 - 1915). *Историко-математические исследования*, 6 (41):111–127, 2001.
10. A. J. Maciejewski and J.-M. Strelcyn. On the algebraic non-integrability of the halphen system. *arXiv e-print (arXiv:950.5002)*, 2008.
11. Э. Айнс. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Факториал Пресс, Москва, 2005.
12. Waterloo Maple (Maplesoft). *Maple*, 2016. `http://www.maplesoft.com`.
13. В.В. Голубев. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
14. W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 7.5.1).* The Sage Development Team, 2016. `http://www.sagemath.org`.

UDC 517.9

# Necessary conditions for the existence of algebraic integrals of ordinary differential equations

**Ya. Yu. Kuziv, M. D. Malykh, L. A. Savastianov**

*Department of Applied Probability and Informatics,*
*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)*
*Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

Email: yaroslav.kuziw@yandex.ru,malykam@mtu-net.ru,sevast@sci.pfu.edu.ru

Investigations of M. N. Lagutinski on the theory of integration of the differential equations were interrupted his tragic death in 1915. In our talk on the Moscow conference «Computer Algebra» in 2016 the ideas of Lagutinski are considered from viewpoint of modern computer algebra and the package Lagutinski for CAS Sagemath was presented. In this talk we use Lagutinski method for the searching of necessary conditions for the existence of algebraic integrals.

For a ring $R$ with differentiation $D$ and basis $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ the sequence of determinants is entered, they are called further as Lagutinski determinants. If one of Lagutinski determinants is equal to zero, the rational integral exists, moreover, we can always calculate this integral. The converse is proved for the polynomial rings. This fact can be used not only for finding the integrals but also for proving the conditions of the existence or the nonexistence of algebraic integrals.

The differentiation $D$ will be called as contracting differentiation if there is a basis in which

$$D\phi_i = c_i\phi_i + o(\phi_i), \quad c_i \in c(R).$$

For the differentiation it is possible to write out simple necessary criterion of existence of integrals: among indexes $c_i$ there are equal. We use this statement for the investigation of integrability of Brio and Bouquet differential equation.

**Key words and phrases:** polynomial computer algebra, integration of ordinary differential equation in finite terms, symbolic integration, DEtools, Lsolver, Sagemath.

UDC 519.85

# An algorithm for computing residue integrals for a class of systems of algebraic equations

**A. A. Kytmanov***, **A. M. Kytmanov**†, **E. K. Myshkina**†

* *Institute of Space and Information Technology*
*Siberian Federal University*
*79 Svobodny av., Krasnoyarsk, 660041, Russia*
† *Institute of Mathematics and Computer Science*
*Siberian Federal University*
*79 Svobodny av., Krasnoyarsk, 660041, Russia*

Email: aakytm@gmail.com,akytmanov@sfu-kras.ru,elfifenok@mail.ru

We present an algorithm for computing residue integrals for a special class of systems of nonlinear algebraic equations. Under certain conditions such integrals coincide with power sums of the inverses to the roots of a system of equations. This makes it possible to develop elimination methods for this class of systems. We present an example of computing power sums for a particular system of equations.

**Key words and phrases:** systems of algebraic equations, residue integrals, power sums.

## 1. Introduction

The problem of elimination of unknowns from systems of nonlinear algebraic equations is a classical algebraic problem. Its solution based on the notion of resultant was developed in works of Silvester and Bézout. This method was described in detail in the classical Van der Waerden's monograph [10]. In the middle of the 20th century, B. Buchberger suggested a new elimination method based on the notion of a Gröbner basis. Nowadays it is one of the main elimination methods in polynomial computer algebra (see, e.g., [1, 4]).

In the 1970s in [2] L. A. Aizenberg proposed a new elimination method based on the multidimensional residue theory, namely on the formulas of multidimensional logarithmic residue and Grothendieck residue. The basic idea of the method was to find certain residue integrals connected to the power sums of roots of a given system of equations without finding the roots themselves. (The formulas for computing power sums may vary depending on the given system of equations.) Then, using the classical recurrent Newton formulas, one can construct a polynomial whose roots coincide with the first coordinates of the roots of the given system with the same multiplicity (i.e., resultant). This method does not increase multiplicity of the roots in comparison with the classical method (see, e.g., [10]). Its further developments were implemented in [3], [9], and [5].

The aim of the current work is to present an algorithm that computes residue integrals for a specific kind of systems of $n$ algebraic equations according to the results obtained in [6]. We also give an example that illustrates the connection between residue integrals and power sums of the inverses to the roots (Waring's formulas).

## 2. Residue integrals

For $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ and $i = 1, \dots, n$ consider a system of functions

$$f_i(z) = q_i(z) + Q_i(z), \tag{1}$$

where $Q_i(z)$ are polynomials, and

$$q_i(z_1, \dots, z_n) = (1 - a_{i1}z_1)^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (1 - a_{in}z_n)^{m_{in}} \tag{2}$$

for $i = 1, \ldots, n$. Here $m_{ij}$ are positive integers and $a_{ij}$ are complex numbers, such that $a_{ij} \neq a_{kj}$ for $i \neq k$.

Let $J = (j_1, \ldots, j_n)$ be a multi-index where $(j_1 \ldots j_n)$ is a permutation of $(1 \ldots n)$. Then by $a_J$ we denote the vector $(a_{1j_1}, \ldots, a_{nj_n})$. For each $i$ we define a function

$$h_i(z) = \begin{cases} q_i(z), & \text{if } a_{ij} \neq 0 \text{ for each } j; \\ q_i(z) \cdot \frac{1}{z_{j_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{z_{j_k}}, & \text{if } a_{ij_1} = \ldots = a_{ij_k} = 0. \end{cases}$$

The system

$$h_i(z) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

has $n!$ isolated roots in $\overline{\mathbb{C}}^n$, where $\overline{\mathbb{C}}^n = \overline{\mathbb{C}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{C}}$. Since $\overline{\mathbb{C}}$ is a compactification of the complex plane $\mathbb{C}$, then $\overline{\mathbb{C}}^n$ is one of the known compactifications of $\mathbb{C}^n$. The roots of (3) are

$$\tilde{a}_J = \begin{cases} \big(1/a_{1j_1}, \ldots, 1/a_{nj_n}\big), & \text{if } a_{kj_k} \neq 0 \text{ for each } k = 1, \ldots, n, \\ \big(1/a_{1j_1}, \ldots, \infty_{[i_1]}, \ldots, \infty_{[i_k]}, \ldots, 1/a_{nj_n}\big), & \text{if } a_{i_1 j_{i_1}} = \ldots = a_{i_k j_{i_k}} = 0, \end{cases}$$

where $k, j = 1, \ldots, n$, and $J = (j_1, \ldots, j_n)$. Note that we write $\infty$ (as a point in $\overline{\mathbb{C}}$) in $\tilde{a}_J$ whenever $a_{kj_k} = 0$.

By $\Gamma_h$ we denote the cycle

$$\Gamma_h = \{z \in \mathbb{C}^n \colon |h_i(z)| = r_i,\ r_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Now we define the cycle $\Gamma_{h,\tilde{a}_J}$ by

$$\begin{cases} |l_1| = r_1, \\ \ldots \\ |l_n| = r_n, \end{cases} \quad \text{where} \quad \begin{cases} l_k = 1 - a_{kj_k} z_k, & \text{if } a_{kj_k} \neq 0, \\ l_k = 1/z_k, & \text{if } a_{kj_k} = 0. \end{cases}$$

In [6] it was proved that for sufficiently small $r_i$ a global cycle $\Gamma_h$ defined by (4) has connected components (local cycles) in the neighborhoods of the roots $a_J$. Moreover, $\Gamma_h$ is homologous to the sum of the local cycles $\Gamma_{h,\tilde{a}_J}$.

For

$$F_i(z, t) = q_i(z) + t \cdot Q_i(z), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

where $q_i$ are defined by (2), consider the system of equations $F_i(z, t) = 0$ which depends on a real parameter $t \geqslant 0$.

Let $r_1 > 0, \ldots, r_n > 0$ be fixed real numbers. Compactness of the cycles $\Gamma_h$ defined by (4) yields the fact that for sufficiently small $t > 0$, the inequalities

$$\big|q_i(z)\big| > \big|t \cdot Q_i(z)\big|,\ i = 1, \ldots, n$$

hold on $\Gamma_h$.

By $J_\gamma(t)$ we denote the integral

$$J_\gamma(t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_h} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \cdot \frac{dF}{F} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_h} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{dF_1}{F_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dF_n}{F_n},$$

where $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ is a multi-index and $I = (1, \ldots, 1)$. This integral we call the residue integral in accordance with [7].

We now follow the results from [6].

Denote by $\Delta = \Delta(t)$ the Jacobian of the system $F_1(z,t),\dots,F_n(z,t)$ with respect to $z_1,\dots,z_n$. Let $(-1)^{s(J)}$ be the sign of the permutation $J$, and $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ be a multi-index of length $n$. By $q^{\alpha+I}(J)$ we denote $q_1^{\alpha_1+1}[j_1]\cdot\ldots\cdot q_n^{\alpha_n+1}[j_n]$, where $q_s[j_s]$ is a product of all $(1-a_{j1}z_1)^{m_{j1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{jn}z_n)^{m_{jn}}$ except $(1-a_{sj_s}z_s)^{m_{sj_s}}$. By $\beta(\alpha,J)$ we denote the vector $\beta(\alpha,J) = \big(m_{1j_1}(\alpha_{j_1}+1)-1,\dots,m_{nj_n}(\alpha_{j_n}+1)-1\big)$, and, correspondingly, $\beta(\alpha,J)! = \prod_p\big(m_{pj_p}(\alpha_{j_p}+1)-1\big)!$.

Finally, $a_J^{\beta+I}$ denotes $a_{1j_1}^{m_{1j_1}(\alpha_{j_1}+1)}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}^{m_{nj_n}(\alpha_{j_n}+1)}$, and

$$\frac{\partial^{||\beta(\alpha(J)||}}{\partial z^{\beta(\alpha,J)}} = \frac{\partial^{m_{1j_1}(\alpha_{j_1}+1)-1+\ldots+m_{nj_n}(\alpha_{j_n}+1)-1}}{\partial z_1^{m_{1j_1}(\alpha_{j_1}+1)-1}\ldots\partial z_n^{m_{nj_n}(\alpha_{j_n}+1)-1}}.$$

**Theorem 1 (Formulas for residue integrals, [6])** *Under the assumptions made for the functions $F_i$ defined by* (5)*, the following formulas for $J_\gamma(t)$ as a convergent (for sufficiently small $t$) series are valid:*

$$J_\gamma(t) = \sum_J{}' \sum_\alpha (-t)^{||\alpha||+\|\beta(\alpha,J)|+n}\frac{(-1)^{s(J)}}{\beta(\alpha,J)!\cdot a_J^{\beta+I}}\times$$
$$\times\frac{\partial^{||\beta(\alpha(J)||}}{\partial z^{\beta(\alpha,J)}}\left[\frac{\Delta(t)}{z_1^{\gamma_1+1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\gamma_n+1}}\cdot\frac{Q^\alpha}{q^{\alpha+I}(J)}\right]_{z=\tilde{a}_J},$$

*where $\sum_J'$ means that the summation is performed over such all multi-indices $J$ such that $a_J$ have no zero components.*

## 3. Residue integrals and Waring's formulas

Suppose $Q_i(z)$ are the polynomials:

$$Q_i(z) = z_1\cdot\ldots\cdot z_n\sum_{|\alpha\|\geq 0} C_\alpha^i z^\alpha \quad i=1,\dots,n, \tag{6}$$

where $\alpha$ is a multi-index, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\alpha_n}$, and $\deg_{z_j} Q_i \leqslant m_{ij}$, $i,j = 1,\dots,n$ for all non-zero $a_{ij}$. If $a_{ij}=0$ then no restriction on $\deg_{z_j} Q_i$ is needed.

Assuming that all $w_j \neq 0$, we substitute $z_j = \dfrac{1}{w_j}$, $j=1,\dots,n$ in the functions

$$F_i(z,t) = \big(q_i(z) + t\cdot Q_i(z)\big), \quad i=1,\dots,n$$

and arrive at

$$F_i\left(\frac{1}{w_1},\dots,\frac{1}{w_n},t\right) = \left(\frac{1}{w_1}\right)^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{w_n}\right)^{m_{in}}\cdot\left(\widetilde{q}_i(w)+t\cdot\widetilde{Q}_i(w)\right),$$

where $\widetilde{q}_i$ are the functions

$$\widetilde{q}_i = (w_1-a_{i1})^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot(w_n-a_{in})^{m_{in}},$$

and $\widetilde{Q}_i$ are the polynomials

$$\widetilde{Q}_i = w_1^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot w_n^{m_{in}}\cdot Q_i\left(\frac{1}{w_1},\dots,\frac{1}{w_n}\right).$$

Denote

$$\widetilde{F_i} = \widetilde{F_i}(w,t) = \widetilde{q}_i(w) + t \cdot \widetilde{Q}_i(w), \quad i = 1, \dots, n. \tag{7}$$

When $0 \leqslant t \leqslant 1$, the system (7) has finite number of zeros in $\mathbb{C}^n$ which depend on $t$. Moreover, (7) does not have infinite roots in $\overline{\mathbb{C}}^n$ (see [8] and [5, Theorems 8.5, 8.6]). As it was shown in [8] (see also [5, Theorem 8.5]) the number of zeros (counting multiplicities) is equal to the permanent of the matrix $(m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Consider the cycle

$$\widetilde{\Gamma}_h = \left\{ w \in \mathbb{C}^n : \left| h_i \left( \frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_n} \right) \right| = \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

for small enough $t$.

**Lemma 2 (Formulas for computing residue integrals, [6])** *Let $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(w,t)$ be the Jacobian of (7) with respect to $w_1, \dots, w_n$. Then*

$$J_\gamma(t) = \sum_{K \in \Re} (-t)^{||K||+n} \sum_J \frac{(-1)^{s(J)}}{\beta(K,J)!} \times \\ \times \frac{\partial^{||\beta(K,J)||}}{\partial w^{\beta}(K,J)} \left[ \widetilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}^K}{\widetilde{q}^{K+I}(J)} \right]_{w=a_J}, \tag{8}$$

*where $K = (k_1, \dots, k_n)$ is multi-index, $\widetilde{Q}^K = \widetilde{Q}_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{Q}_n^{k_n}$,*

$$\beta(K,J) = \big(m_{1j_1}(k_{j_1}+1) - 1, \dots, m_{nj_n}(k_{j_n}+1) - 1\big),$$

*$\beta(K,J)! = \prod\limits_p \big(m_{pj_p}(k_{j_p}+1) - 1\big)!$, and*

$$\Re = \{K = (k_1, \dots, k_n)\colon \text{there exists } \gamma_i \text{ such that } \|K\| < \gamma_i + 2,\ i = 1, \dots, n\}.$$

The rest of the notations in the statement are as in Theorem 1.

Denote

$$\sigma_{\gamma+I} = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot z_{jn}^{\gamma_n+1}},$$

where $z^{(j)} = (z_{j1}, \dots, z_{jn}) = (z_{j1}(1), \dots, z_{jn}(1))$, $j = 1, \dots, p$.

**Theorem 3 (Waring's formulas, [6])** *For the system $f_j = 0$, $j = 1, \dots, n$ with functions $f_j$ defined by (1) and $Q_i$ defined by (6) the following formulas are valid:*

$$\sigma_{\gamma+I} = \sum_{K \in \Re} (-1)^{||K||+n} \sum_J \frac{(-1)^{s(J)}}{\beta(K,J)!} \times \\ \times \frac{\partial^{||\beta(K,J)||}}{\partial w^{\beta}(K,J)} \left[ \widetilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\widetilde{Q}^K}{\widetilde{q}^{K+I}(J)} \right]_{w=a_J}.$$

## 4. The algorithm

In this section we present an algorithm that computes residue integrals $J_\gamma(t)$ at $t = 1$ according to the formula (8).

First, we compute all the components of (1) in new variables $w_j$ and the Jacobian $\widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}(w, 1)$. The list of permutations $J$ and the set $K := \big\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+ :$ there exists $i$ such that $k_1 + \ldots + k_n < \gamma_i + 2,\ i = 1, \ldots, n\big\}$ are implemented by the individual procedures. Finally, we add up all the summands in the formula for $J_\gamma(1)$.

---

**Algorithm 1:** Algorithm for computing residue integrals $J_\beta$

---

**Input:** The matrices $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ from (2), the functions $Q_i(z)$ given by the list $C$ of lists for $i = 1, \ldots, n$ of the coefficients $C^i_\alpha$ from (6), the vector $\gamma$.

**Output:** Value of the residue integral $J_\gamma$.

**if** *linear size of* $M$ = *linear size of* $A$ = *lengths of* $C$ = *length of* $\gamma$ **then**
  $n :=$ length of $\gamma$
**else**
  **return**

$q := \big\{(1-a_{11}z_1)^{m_{11}} \ldots (1-a_{1n}z_n)^{m_{1n}}, \ldots, (1-a_{n1}z_1)^{m_{n1}} \ldots (1-a_{nn}z_n)^{m_{nn}}\big\}$

$\widetilde{q} = \big\{(w_1 - a_{11})^{m_{11}} \ldots (w_n - a_{1n})^{m_{1n}}, \ldots, (w_1 - a_{n1})^{m_{n1}} \ldots (w_n - a_{nn})^{m_{nn}}\big\}$

$Q := \big\{z_1 \ldots z_n \sum_{|\alpha\|\geq 0} C^1_\alpha z^\alpha, \ldots, z_1 \ldots z_n \sum_{|\alpha\|\geq 0} C^n_\alpha z^\alpha\big\}$

$\widetilde{Q} :=$

$$\left\{w_1^{m_{11}} \ldots w_n^{m_{1n}} Q_1\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right), \ldots, w_1^{m_{n1}} \ldots w_n^{m_{nn}} Q_n\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)\right\}$$

$$\widetilde{\Delta} := \left|\frac{\partial\left(\widetilde{q} + \widetilde{Q}\right)}{\partial W}\right|$$

$J := \big\{(1, \ldots, n), \ldots, (n, \ldots, 1)\big\}$ — list of all permutations of $(1, \ldots, n)$

$M^T := \big\{(m_{11}, \ldots, m_{n1}), \ldots, (m_{1n}, \ldots, m_{nn})\big\}$

$A^T := \big\{(a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{nn})\big\}$

$\widetilde{q}(J) :=$ list of all vectors $(\widetilde{q}_1[j_1], \ldots, \widetilde{q}_n[j_n])$ where $(j_1, \ldots, j_n)$ is a permutation from $J$ and $q_p[j_p]$ is a product of all $(1 - a_{p1}z_1)^{m_{p1}} \ldots (1 - a_{pn}z_n)^{m_{pn}}$ except $(1 - a_{pj_p}z_{jp})^{m_{pj_p}}$

$K := \big\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+ :$ there exists $i$ such that $k_1 + \ldots + k_n < \gamma_i + 2,\ i = 1, \ldots, n\big\}$

$J_\gamma := 0$

**for** $i = 1, \ldots,$ *number of elements in* $K$ **do**
  $\operatorname{sign}(K) := (-1)^{k_1+\ldots+k_n+n}$ **for** $j = 1, \ldots,$ *number of elements in* $J$ **do**
    $\beta := \big(m_{1j_1}(k_{j_1} + 1) - 1, \ldots, m_{sj_n}(k_{j_n} + 1) - 1\big)$
    $\beta! := \prod_p \big(m_{pj_p}(k_{j_p} + 1) - 1\big)!$
    $\operatorname{sign}(J) :=$ parity of the permutation $J$

$$J_\gamma := J_\gamma + \frac{\operatorname{sign}(K)\operatorname{sign}(J)}{\beta!} \cdot \frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^\beta}\left[\frac{\widetilde{\Delta} w_1^{\gamma_1+1} \ldots w_n^{\gamma_n+1} \widetilde{Q}_1^{k_1} \ldots \widetilde{Q}_n^{k_n}}{\widetilde{q}_1^{k_1+1}[j_1] \ldots \widetilde{q}_n^{k_n+1}[j_n])}\right]_{w=a_J}$$

**return** $J_\gamma$

---

## 5. Example

Consider the system in two complex variables

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = (1 - a_2 z_2)^2 + a_3 z_1 z_2^2 = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = (1 - b_1 z_1)^2 (1 - b_2 z_2) + b_3 z_1^2 z_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

with real coefficients $a_i$ and $b_i$. For this system, $Q_1$ and $Q_2$ are of the form (6). It is not hard to verify that the system (9) has 5 roots $(z_{j1}, z_{j2})$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. If $a_2 \neq b_2$, then all the roots do not lie in the coordinate hyperplanes.

After the substitution $z_1 = 1/w_1$, $z_2 = 1/w_2$, (9) takes the form

$$\begin{cases} \widetilde{f}_1 = w_1 (w_2 - a_2)^2 + a_3 = 0, \\ \widetilde{f}_2 = (w_1 - b_1)^2 (w_2 - b_2) + b_3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

The Jacobian $\widetilde{\Delta}$ of (10) is equal to

$$\widetilde{\Delta} = \begin{vmatrix} (w_2 - a_2)^2 & 2w_1(w_2 - a_2) \\ 2(w_1 - b_1)(w_2 - b_2) & (w_1 - b_1)^2 \end{vmatrix}$$
$$= (w_1 - b_1)^2 (w_2 - a_2)^2 - 4w_1 (w_1 - b_1)(w_2 - a_2)(w_2 - b_2).$$

Now, using Theorem 3, we compute the power sums

$$\sigma_\gamma = \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1}} \cdot \frac{1}{z_{j2}^{\gamma_2+1}} = \sum_J (-1)^{s(j)} \sum_{K \in \Re} \frac{(-1)^{\|K\|}}{(2\pi i)^2} \times$$
$$\times \int\limits_{\widetilde{\Gamma}_{h,a_J}} \frac{w_1^{\gamma_1+1} \cdot w_2^{\gamma_2+1} \cdot a_3^{k_1} \cdot b_3^{k_2} \cdot \widetilde{\Delta} \cdot dw_1 \wedge dw_2}{w_1^{k_1+1} (w_2 - a_2)^{2(k_1+1)} \cdot (w_1 - b_1)^{2(k_2+1)} (w_2 - b_2)^{k_2+1}}.$$

Here $\Re = \{K = (k_1, k_2)$: there exists $i$ such that $\gamma_i + 2 > k_1 + k_2$ for $i = 1, 2\}$, and $\widetilde{\Gamma}_{h,a_J}$ are the cycles either $\{|w_1| = r_{11}, |w_2 - b_2| = r_{22}\}$ oriented positively or $\{|w_2 - a_2| = r_{12}, |w_1 - b_1| = r_{21}\}$ oriented negatively.

In particular, by computing $J_{(0,0)}$ and performing necessary algebra, we obtain that

$$\sigma_{(1,1)} = 4a_2 b_1 - \frac{a_3 b_2}{(b_2 - a_2)^2}$$

without finding the roots.


## Acknowledgments

This is partially supported by grants of the President of the Russian Federation for young scientists, project MD-197.2017.1 and for leading scientific schools, project NSh-9149.2016.1, by grant of the Government of the Russian Federation for investigations under the guidance of the leading scientists of the Siberian Federal University (contract No. 14.Y26.31.0006), and by the Russian Foundation for Basic Research, project 15-01-00277-a.

## References


1. *Adams W. W., Loustaunau P.* An introduction to Gröbner bases. — Graduate Studies in Mathematics. — Vol. 3. — Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1994.
2. *Aizenberg L. A.* On a formula of the gereralized multidimensional logarithmic residue and the solution of system of nonlinear equations. — Sov. Math. Doc. — Vol. 18 — P. 691–695, 1977.
3. *Aizenberg L. A., Yuzhakov A. P.* Integral representations and residues in multidimensional complex analysis. — Translations of Mathematical Monographs. — Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1983.
4. *Buchberger B.* Gröbner bases, an algorithmic method in polynomial ideal theory. — In Multidimensional Systems Theory (N. K. Bose ed.). — Reidel, Dordrecht. — P. 184–232, 1985.
5. *Bykov V., Kytmanov A., Lazman M., Passare M. (ed).* Elimination Methods in Polynomial Computer Algebra. — Math. and Appl. — Vol. 448. — Kluwer Acad. Publ. Dordreht, Boston, London, 1998.
6. *Kytmanov A. A., Kytmanov A. M., Myshkina E. K.* Residue Integrals and Waring's Formulas for a Class of Systems of Transcendental Equations in $\mathbb{C}^n$. — arXiv:1709.00791 [math.CV].
7. *Passare M., Tsikh A.* Residue integrals and their Melin transforms. — Can. J. Math. — Vol. 47, no. 5 — P. 1037–1050, 1995.
8. *Tsikh A. K.* The Bezout theorem in the space of theory functions. On the solution of a system of algebraic equations. — Nekotorye voprosy mnogomernogo kompleksnogo analiza (in Russian). — Krasnoyarsk: Institut fiziki SO AN SSSR. — P. 185–196, 1980.
9. *Tsikh A. K.* Multidimensional residues and their applications. — Translations of Mathematical Monographs. — Vol. 103. — Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1992.
10. *Van der Waerden B. L.* Modern algebra. — New York: Frederick Unger Publishing Co., 1950.


УДК 519.85

# Алгоритм вычисления вычетных интегралов для класса систем алгебраических уравнений


**А. А. Кытманов*, А. М. Кытманов†, Е. К. Мышкина†**

* *Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, пр. Свободный 79, Красноярск, Россия, 660041*

† *Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, пр. Свободный 79, Красноярск, Россия, 660041*

Email: aakytm@gmail.com,akytmanov@sfu-kras.ru,elfifenok@mail.ru



В работе приведен алгоритм вычисления вычетных интегралов для класса систем нелинейных алгебраических уравнений. При определенных условиях данные интегралы совпадают со степенными суммами обратных величин к корням системы уравнений, что позволяет разрабатывать методы исключения для данного класса систем. В работе приведен пример вычисления степенных сумм для системы уравнений.



**Ключевые слова:** системы трансцендентных уравнений, вычетные интегралы, степенные суммы.

UDC 517.926

# Irreducible differential systems and satellite unknowns

**A. A. Panferov**[*][†]

[*] *Department of Computational Mathematics and Cybernetics*
*Moscow State University*
*Moscow, 119991 Russia*

[†] *Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center "Computer Science and Control"*
*of Russian Academy of Sciences,*
*Vavilov str. 40, CCAS, Moscow, 119333, Russia*

Email: ast.a_s@mail.ru

We consider satellite unknowns in irreducible differential systems with selected unknowns. We prove that in such systems any unselected unknown is always satellite for any set of selected unknowns. We also present a system factorization algorithm. This algorithm has polynomial complexity, but also it has some strict precondition, so it cannot be applied to every differential system.

**Key words and phrases:** computer algebra, irreducible differential systems, satellite unknowns, system factorization.

## 1. Introduction

We consider the following normal differential system $S$:

$$y' = Ay, \tag{1}$$

where $y = (y_1, \dots, y_m)^T$ is a vector of unknowns, $A$ is a system matrix — square matrix with entries from some differential field $K$ of characteristic 0 with derivation $\partial = {}'$. Suppose some components of the unknown vector $y$ are *selected*. Denote this set of selected unknowns by $s$: $\varnothing \neq s \subset \{y_1, \dots, y_m\}$.

Earlier the concept of *satellite* unknowns was introduced (see [1–3]): an unselected unknown $y_j$ is called satellite unknown for a set of selected unknowns $s$ in system $S$ if the $j$-th component of any solution to $S$ belongs to the same differential extension as all selected components of any solution to $S$. For the case $K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ denotes the algebraic closure of $\mathbb{Q}$) the algorithm for satellite unknown testing was presented. The complexity of this algorithm is rather high because on one of its steps it is required to test embedding of the Picard–Vessiot extensions (see [4]) for two constructed systems. One of the algorithm that allows this test is described in [5, Sect. 5.3.3 (H)]. This algorithm uses Hrushovski's algorithm [6] to compute differential Galois groups in the form of defining polynomials, and degrees of these polynomials for some cases are estimated to be from four-fold to six-fold exponential of the size of system matrix (e.g., see [7]). That is why the satellite testing algorithm is too difficult to use in practice. But in some particular cases partial algorithms for satellite testing can be used (see [3]).

Also the concept of *linearly satellite* unknowns was proposed (see [8]): an unselected unknown $y_j$ is called linearly satellite for a set of selected unknowns $s$ in system $S$ if for any solution to $S$ its $j$-th component can be linearly expressed with coefficients from $K$ via selected components of this solution and their derivatives. In contrast to the satellite testing algorithm, the linearly satellite testing algorithm does not require Picard–Vessiot extensions embedding test. So its complexity is rather low, it can be implemented in computer algebra systems and used in practice.

From the definitions (see Subsection 2.1) it follows that in system $S$ with selected unknowns $s$ any linearly satellite unknown for $s$ is also satellite unknown. So in some cases it is possible to use the linearly satellite testing algorithm for satellite testing. There exist differential systems, where any satellite unknown is also linearly satellite. Irreducible systems posses this property. Our main result is to prove this fact.

## 2. Preliminaries

We consider system $S$ of the form (1) with a set of selected unknowns $s$. The *size* $|S|$ of system $S$ is equal to $m$ — the size of system matrix: $|S| = m$.

### 2.1. Satellite unknowns

Recall shortly the definitions of satellite and linearly satellite unknowns and also corresponding testing algorithms (more details in [2]).

**Definition 1.** An unselected unknown $y_j$ ($y_j \notin s$) is called *satellite* unknown for a set of selected unknowns $s$ in system $S$, if for any solution to $S$ its $j$-th component belongs to the differential extension of $K$, that is generated by all selected components of all solutions to $S$.

**Definition 2.** An unselected unknown $y_j$ ($y_j \notin s$) is called *linearly satellite* unknown for a set of selected unknowns $s$ in system $S$, if for any solution to $S$ its $j$-th component can be linearly expressed with coefficients from $K$ via selected components of this solution and their derivatives.

Directly from the definitions it follows that for fixed set of selected unknowns the linearly satellite unknown is satellite. The converse does not hold. The following example illustrate this situation.

**Example 1.** Let $K = \overline{\mathbb{Q}}(x)$, $y = (y_1, y_2)^T$. Consider system $S$ of the following form:

$$y' = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1/x \end{bmatrix} y. \tag{2}$$

It is clear, that both components of any solution to (2) belong to $K$. This means that $y_2$ is satellite for $s = \{y_1\}$. At the same time $(0, x)^T$ is the solution to (2), so $y_2$ is not linearly satellite for $\{y_1\}$.

### 2.2. AB-algorithm

The basis of the satellite testing algorithms is the AB-algorithm, that was proposed by S. A. Abramov and M. Bronstein in [9]. This algorithm for a given differential system $S$ of the form (1) and a set of selected unknowns $s$ produces a new differential system

$$z' = Bz, \tag{3}$$

where $B$ is a square matrix over $K$ and the components of the unknown vector $z$ are the selected components from $s$ and, possibly, some their derivatives. Denote system (3) by $S_s^{\mathrm{AB}}$. Namely $S_s^{\mathrm{AB}}$ is the result of application the AB-algorithm to the system $S$ with respect to the set of selected unknowns $s$. Note that the AB-algorithm computes matrix $B$ in $O(m^4)$ operations in $K$ (since the most complicated part of the algorithm is to solve no more then $m$ systems of linear algebraic systems with $m$ unknowns).

### 2.3. Testing algorithms

Here we confine ourself to present only formal description of the satellite testing algorithms with some remarks. Details can be found in [2, 8].

### 2.3.1. Satellite testing algorithm

**Input:** Differential system $S$ with selected unknowns $s$ and an unselected unknown $y_j$.
**Output:** YES, if $y_j$ is satellite unknown for $s$ in $S$, NO otherwise.

1. Construct the system $S_s^{\mathrm{AB}}$.
2. If $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S|$, then **return** YES.
3. Construct the system $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, where $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. If $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$, then **return** YES.
5. If the Picard–Vessiot extension for system $S_s^{\mathrm{AB}}$ is equal to the Picard–Vessiot extension for system $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, then **return** YES.
6. **Return** NO.

By the properties of the AB-algorithm, instead of equality testing on step 5 it is sufficient to test if the Picard–Vessiot extension for system $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$ is embedded in the Picard–Vessiot extension for system $S_s^{\mathrm{AB}}$. So the algorithm [5, Sect. 5.3.3] can be used for this purpose.

### 2.3.2. Linearly satellite testing algorithm

This algorithm differs from the previous one by the absence of the most costly (from the computational point of view) step 5.

**Input:** Differential system $S$ with selected unknowns $s$ and an unselected unknown $y_j$.
**Output:** YES, if $y_j$ is linearly satellite unknown for $s$ in $S$, NO otherwise.

1. Construct the system $S_s^{\mathrm{AB}}$.
2. If $|S_s^{\mathrm{AB}}| = |S|$, then **return** YES.
3. Construct the system $S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}$, where $\tilde{s} = s \cup \{y_j\}$.
4. If $|S_{\tilde{s}}^{\mathrm{AB}}| = |S_s^{\mathrm{AB}}|$, then **return** YES.
5. **Return** NO.

So, the problem of linearly satellite unknown testing is solved in no more than two applications of the AB-algorithm.

**Remark.** The concept of satellite and linearly satellite unknowns can be extended to the case of homogeneous linear differential systems of high order (see [2, Sect. 4]). The Extract algorithm [10, 11] can be used to generalize the testing algorithms.

## 3. System factorization based on the AB-algorithm

**Definition 3.** Two systems $y' = Ay$ and $z' = Bz$ ($A, B \in K^{m\times m}$) are said to be *equivalent (over $K$)* if there exists $T$ in $\mathrm{GL}_m(K)$ such that $T' = AT - TB$. In this case $z = Ty$.

**Definition 4.** A system $y' = Ay$ is said to be *reducible* if it is equivalent to a system $z' = Bz$ with $B$ of the block-triangular form

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & 0 \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

where $B_{1,1}$ and $B_{2,2}$ are square matrices. If $y' = Ay$ is not reducible, then it is said to be *irreducible*.

Let us define now what we mean by a system factorization. Factoring the system $y' = Ay$ over $K$ will mean either finding an equivalent system $z' = Bz$ where the matrix $B$ has block-triangular form (4) or showing that such an equivalent system does not exist.

Let for some $i$ ($1 \le i \le m$) the following condition holds:

$$|S^{\mathrm{AB}}_{\{y_i\}}| = n < m. \tag{5}$$

It can be proved that condition (5) is sufficient for system to be reducible. In this section we present an algorithm, that for the case, when (5) holds, allows one to construct an equivalent system with block-triangular matrix.

Without loss of generality, we can assume that $i = 1$ in (5).

**Algorithm:** System factorization.
**Input:** Differential system $S$ such that $|S^{\mathrm{AB}}_{\{y_1\}}| = n < m$.
**Output:** Matrix $B$ of an equivalent system with block-triangular form (4) and matrix $T$ such that $T' = AT - TB$.

1. $s := \{y_1\}$;
2. **for** $y_i$ **in** $\{y_2, \ldots, y_m\}$ **do**
   (a) **if** $|S^{\mathrm{AB}}_{s\cup\{y_i\}}| > |S^{\mathrm{AB}}_s|$ **then** $s := s \cup \{y_i\}$;
   (b) **if** $|S^{\mathrm{AB}}_s| = m$ **then break**;
3. $B :=$ the matrix of system $S^{\mathrm{AB}}_s$;
4. Unknowns of system $z' = Bz$ are unknowns from $s$ (a part of the initial system unknowns), and some their derivatives, s.t.
   — first components $z_1, \ldots, z_n$ correspond to $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$;
   — if $z_j = y_i^{(k)}$, $k > 0$, then $z_{j-1} = y_i^{(k-1)}$, assuming $y_i^{(0)} \equiv y_i$.
   Matrix $T$ is constructed row by row. Denote the $i$-th row of $T$ by $T_i$.
   **for** $i$ **from** 1 **to** $m$ **do**
   (a) **if** $z_i = y_j$ **then** $T_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, where «1» is in the $j$-th position;
   (b) **if** $z_i = y_j^{(p)}$ **then** $T_i := T'_{i-1} + T_{i-1}A$;
5. **return** $B$, $T$.

The condition of step 2(a) guarantees that the first $n$ unknowns of the equivalent system constructed by the algorithm will be $y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}$. This means that matrix $B$ at the output of the algorithm will take the form (4), where $B_{1,1}$ is the matrix of system $S^{\mathrm{AB}}_{\{y_1\}}$.

Presented system factorization algorithm solves the problem partially, only for systems for which condition (5) is satisfied. Note that the verification of this condition is simple enough (can be done in polynomial time), because it needs no more than $m$ applications of the AB-algorithm (not only $y_1$ but every system unknown should be checked).

The factorization problem is often considered with respect to scalar differential operators (see [12–18]). It should be noted that the computational complexity of the algorithms described in these works is tremendously high (not polynomial). It is clear that the factorization problem for scalar differential operator

$$L = \partial^m + a_{m-1}\partial^{m-1} + \cdots + a_1\partial + a_0\partial^0$$

can be reduced to the factorization problem for equivalent system $\tilde{S}$: $y' = A_L y$, where $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ and

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{m-1} \end{bmatrix}.$$

But the algorithm described in this section is not applicable to $\tilde{S}$, because $|\tilde{S}^{\mathrm{AB}}_{\{y_1\}}| = m$ (it is not necessary so if other unknown will be used instead of $y_1$).

Note that known algorithms for system factorization also have high complexity. For example, in [19] one of such algorithms is presented with a complexity analysis. The complexity of the algorithm from [19] is estimated by a threefold exponential of the system size.

## 4. Satellite unknowns in irreducible systems

As it was mentioned in Introduction, there exist differential systems, where for a fixed set of selected unknowns any satellite unknown is also linearly satellite. So, the notions of satellite and linearly satellite unknowns are equal in such systems. This means, that instead of the satellite testing algorithm with high complexity the linearly satellite testing algorithm can be used. An example of such systems are irreducible systems.

**Proposition 1.** *Let $S$ be an irreducible differential system. Then $|S^{\mathrm{AB}}_{\{y_i\}}| = |S|$ for any $i = 1, \ldots, m$.*

Indeed, if $|S^{\mathrm{AB}}_{\{y_i\}}| = n < m = |S|$ for some $i$ from 1 to $m$ then it means system $S$ to be reducible (see algorithm from Section 3).

From Proposition 1 it follows that the condition on step 2 of the linearly satellite testing algorithm (Subsection 2.3.2) holds for irreducible systems. This gives the following corollary.

**Corollary 1.** *Let $S$ be an irreducible differential system. Then for any set $s$ of selected unknowns, any unselected unknown is linearly satellite.*

Any linearly satellite unknown is a satellite unknown for a fixed set of selected unknowns. Moreover, the first two steps of the testing algorithms from Section 2.3 are identical. This implies the following statement.

**Corollary 2.** *For irreducible systems, the concepts of satellite and linearly satellite unknowns are equivalent.*

Irreducible systems do not exhaust the set of differential systems for which the concepts of satellite and linearly satellite unknowns are equivalent. There are reducible systems in which each satellite unknown for an arbitrary fixed set of selected unknowns is also linearly satellite. An example of such a system is the following.

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y, \tag{6}$$

$y = (y_1, y_2)^T$. It is easy to check that $y_1$ is linearly satellite for $\{y_2\}$, and $y_2$ is linearly satellite for $\{y_1\}$. System (6) is reducible: using the change of variables

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} y$$

system (6) takes the form

$$z' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z.$$

Thus, satellite testing algorithms cannot be the basis for irreducibility testing procedures.

## 5. Conclusions

For irreducible systems it is shown that for any non-empty set of selected unknowns all the remaining unselected unknowns turn to be linearly satellite. This means that choosing any component of the solution to an irreducible system (1) all other component of this solution can be linearly expressed via chosen one and its derivatives of order not higher that $m-1$ with coefficients from $K$.

The algorithm from Section 3 can be used for system factorization. In contrast to the known factorization algorithms, whose complexity is exponential, the algorithm from Section 3 has polynomial complexity. Although this algorithm is not always applicable, the recognition of cases where it can be used is possible algorithmically with a little complexity.

## Acknowledgments

The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 16-01-00174.

## References

1. Panferov A. On determination of satellite unknowns in linear differential systems // Computer Algebra. International Conference Materials. — 2016. — P. 78–80.
2. Panferov A. A. Selected and satellite unknowns in linear differential systems // Advances in Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 85. — P. 1–11.
3. Panferov A. A. Partial algorithms for satellite unknowns determination // Programming and Computer Software. — 2017. — Vol. 43, no. 2. — P. 119–125.
4. van der Put M., Singer M. F. Galois theory of linear differential equations. — Springer, Berlin, 2003.
5. Minchenko A., Ovchinnikov A., Singer M. F. Reductive linear differential algebraic groups and the galois groups of parameterized linear differential equations // Int. Math. Res. Notices. — 2015. — Vol. 215, no. 7. — P. 1733–1793.
6. Hrushovski E. Computing the Galois group of a linear differential equation // Banach Center Publications. — 2002. — Vol. 58. — P. 97–138.
7. Feng R. Hrushovski's algorithm for computing the Galois group of a linear differential equation // Advances in Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 65. — P. 1–37.
8. Panferov A. A. Symbolic algorithm for satellite unknowns recognizing in linear differential systems with selected unknowns // Lomonosov Readings: Scientific Conference, Moscow, CMC MSU, April 17–26, 2017. Abstracts. — 2017. — P. 122–122.
9. Abramov S. A., Bronstein M. Solving linear systems of differential and difference equations with respect to a part of the unknowns // Comput. Math. Math. Phys. — 2006. — Vol. 46, no. 2. — P. 218–230.
10. Panferov A. A. Differential equation systems with selected part of the unknowns // Programming and Computer Software. — 2015. — Vol. 41, no. 2. — P. 90–97.
11. Panferov A. A. Partitions of the set of selected unknowns in linear differential-algebraic systems // Programming and Computer Software. — 2016. — Vol. 42, no. 2. — P. 84–89.
12. Beke E. Die irreducibilität der homogenen linearen differentialgleichungen // Mathematische Annalen. — 1894. — Vol. 45. — P. 185–195.

13. Schwarz F. A factorization algorithm for linear ordinary differential equations // Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation ISSAC'89, Portland, Oregon, USA. — 1989. — P. 17–25.
14. Bronstein M. On solutions of linear differential equations in their coefficient field // Journal of Symbolic Computation. — 1992. — Vol. 13. — P. 413–439.
15. Grigoriev D. Y. Complexity of factoring and calculating the gcd of linear ordinary differential operators // Journal of Symbolic Computation. — 1990. — Vol. 10. — P. 7–37.
16. Singer M. F. Testing reducibility of linear differential operators: A group theory perspective // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. — 1996. — Vol. 7, no. 2. — P. 77–104.
17. Tsarev S. P. An algorithm for complete enumeration of all factorizations of a linear ordinary differential operator // Proceedings of the 1996 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation ISSAC'96, Zurich, Switzerland. — 1996. — P. 226–231.
18. van Hoeij M. Factorization of differential operators with rational functions coefficients // Journal of Symbolic Computation. — 1997. — Vol. 24. — P. 537–561.
19. Grigoriev D. Y. Complexity of irreducibility testing for a system of linear ordinary differential equations // Proceedings of the 1990 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation ISSAC'90, Tokyo, Japan. — 1990. — P. 225–230.

УДК 517.926

# Неприводимые дифференциальные системы и сателлитные неизвестные

**А. А. Панфёров**[*†]

[*] *Факультет вычислительной математики и кибернетики*
*МГУ им. М.В. Ломоносова*
*Москва, 119991, Воробьевы горы*

[†] *Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН,*
*ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333.*

Email: ast.a_s@mail.ru

Рассматриваются сателлитные неизвестные в неприводимых дифференциальных системах с выделенными неизвестными. Доказывается, что в таких системах любая невыделенная неизвестная всегда является сателлитной для любого множества выделенных неизвестных. Предлагается алгоритм факторизации систем, имеющий полиномиальную сложность, но применимый не всегда.

**Ключевые слова:** компьютерная алгебра, неприводимые дифференциальные системы, сателлитные неизвестные, факторизация систем.

УДК 519.7

# Поиск гипергеометрических решений $q$-разностных систем с помощью разрешающих последовательностей

**А. А. Рябенко**

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333*

Email: anna.ryabenko@gmail.com

Представляется алгоритм построения гипергеометрических решений для систем линейных однородных $q$-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, основанный на использовании разрешающих последовательностей.

**Ключевые слова:** компьютерная алгебра, системы q-разностных линейных уравнений, гипергеометрические решения, разрешающие последовательности уравнений.

## 1. Введение

Алгоритм поиска гипергеометрических решений скалярного $q$-разностного уравнения с полиномиальными коэффициентами был предложен в [1]. В [2] было введено понятие разрешающей последовательности уравнений для нормальных разностных систем первого порядка, коэффициенты которых являются рациональными функциями, и предложен использующий разрешающие последовательности алгоритм построения гипергеометрических решений для таких систем. В [3] понятие разрешающей последовательности было обобщено на случаи дифференциальных и ($q$-)разностных систем линейных уравнений произвольного порядка, предложен алгоритм и его реализация построения гипергеометрических решений для систем разностных уравнений произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами.

Поиск решений системы $q$-разностных уравнений может быть осуществлен так же, как и в случае систем разностных уравнений, с использованием алгоритмов, представленных в [1,3] и алгоритма построения для систем $q$-разностных уравнений решений в виде рациональных функций, представленного в [4,5].

## 2. Гипергеометрические термы

Приведем необходимые для дальнейшего изложения определения и утверждения из [1]. Пусть $k$ — поле характеристики 0, $q$ — трансцендентно над $k$. Обозначим $\mathbb{K} = k(q)$; $x = q^n$, где $n$ — переменная, принимающая значения из $\mathbb{N}_{\geqslant 0}$.

**Определение. 1** *Назовем* $h(x)$ гипергеометрическим термом *над* $\mathbb{K}(x)$, *если соотношение* $h(qx)/h(x) = r(x)$ *является рациональной функцией от* $x$*:* $r(x) \in \mathbb{K}(x)$*; при этом* $r(x)$ *называется* сертификатом *для* $h(x)$.

Гипергеометрический терм $h(x)$ является решением линейного однородного $q$-разностного уравнения первого порядка с полиномиальными коэффициентами:

$$a_1(x)y(qx) + a_0(x)y(x) = 0, \text{ где } a_1(x), a_0(x) \in \mathbb{K}[x].$$

Гипергеометрический терм с сертификатом $r(x) = r(q^n)$ можно записать в виде

$$h(q^n) = C_1 \prod_{k=n_0}^{n-1} r(q^k),$$

где $C_1 \in \mathbb{K}$ и $q^k$ не является полюсом $r(x)$ для $k \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}$. Представим рациональную функцию $r(x)$ в нормальной форме (см. [1, Theorem 1]):

$$r(x) = z\frac{a(x)}{b(x)}\frac{c(qx)}{c(x)}\frac{d(x)}{d(qx)} = z\,U(x)\frac{V(qx)}{V(x)}, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{K}$; $a(x), b(x), c(x), d(x) \in \mathbb{K}[x]$ — приведенные полиномы; $\gcd(a(x), b(q^n x)) = 1$ для $n \in \mathbb{Z}$; $\gcd(a(x), c(x)d(qx)) = 1$; $\gcd(b(x), c(qx)d(x)) = 1$; $c(0) \neq 0$ и $d(0) \neq 0$; $U(x) = a(x)/b(x)$; $V(x) = c(x)/d(x)$. Такое представление для рациональной функции единственно. Тогда соответствующий терм можно записать в виде

$$h(q^n) = C_2 z^n V(q^n) \prod_{k=n_0}^{n-1} U(q^k), \tag{2}$$

где $C_2 \in \mathbb{K}$. В случае $U(x) = 1$ и $z = q^k$, где $k \in \mathbb{Z}$, терм $h(x) = h(q^n)$ является рациональной функцией от $x = q^n$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$.

**Определение. 2** *Два гипергеометрических терма $h_1(x)$, $h_2(x)$ называются* подобными*, если их отношение является рациональной функцией от $x$: $h_1(x)/h_2(x) \in \mathbb{K}(x)$.*

Пусть для $h_1(x)$, $h_2(x)$ их сертификаты имеют нормальные формы $r_1(x) = z_1\,U_1(x)V_1(qx)/V_1(x)$ и $r_2(x) = z_2\,U_2(x)V_2(qx)/V_2(x)$, соответственно. Тогда $h_1(x)$, $h_2(x)$ являются подобными, если и только если

$$U_1(x) = U_2(x) \text{ и } \frac{z_1}{z_2} = q^k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Множество всех гипергеометрических термов над $\mathbb{K}(x)$ обозначим $\mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)}$. Это множество не является линейным пространством. Обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)})$ пространство всех конечных сумм элементов из $\mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)}$. Для $q$-разностного уравнения произвольного порядка

$$a_r y(q^r x) + \dots + a_1 y(qx) + a_0 y(x) = 0, \text{ где } a_r(x), \dots, a_0(x) \in \mathbb{K}[x],$$

в [1] предложен алгоритм qHyper построения базиса пространства решений из $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)})$, где $\mathbb{M}$ — поле, некоторое расширение $\mathbb{K}$. qHyper строит множество сертификатов $r_1(x), \dots, r_s(x) \in \mathbb{M}(x)$, соответствующие которым $h_1(x), \dots, h_s(x) \in \mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)}$ являются базисом пространства гипергеометрических решений данного уравнения.

## 3. $q$-Разностная система с невырожденными ведущей и трейлинговой матрицами и ее решения

Пусть задана система линейных $q$-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами:

$$A_r y(q^r x) + \dots + A_1 y(qx) + A_0 y(x) = 0, \tag{4}$$

где $A_k \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}[x])$, $k = 0, 1, \dots, r$; $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$; $y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x))^T$ — вектор-столбец неизвестных. Пусть ведущая и трейлинговая матрицы системы ($A_r$ и $A_0$, соответственно) — невырождены.

Предлагаем алгоритм поиска гипергеометрических решений системы (4), т.е. решений из $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)})^m$. Этот алгоритм, аналогично алгоритму из [3] построения гипергеометрических решений для систем разностных уравнений, использует понятие разрешающей последовательности. Приведем определение этого понятия для случая $q$-разностных систем, через $Q$ обозначен оператор $q$-сдвига: $Qy(x) = y(qx)$.

**Определение. 3** *Пусть для системы* (4) $l_1, \ldots, l_p$ *— попарно различные положительные числа, не превосходящие* $m$, *и пусть скалярные операторы* $L_1, \ldots, L_p \in \mathbb{K}[Q, x]$ *таковы, что если* $y_{l_1}(x) = \cdots = y_{l_j}(x) = 0$ *(при* $j \leqslant p$*) для некоторого решения* $y(x)$ *системы* (4), *то*

— *в случае* $j = p$ *все компоненты этого решения равны нулю:*

$$y_1(x) = y_2(x) = \cdots = y_m(x) = 0,$$

— *в случае* $j < p$ *для компоненты* $y_{l_{j+1}}(x)$ *этого решения выполнено*

$$L_{j+1}(y_{l_{j+1}}(x)) = 0.$$

*Тогда конечная последовательность уравнений*

$$L_1 z(x) = 0, \ldots, \; L_p z(x) = 0 \tag{5}$$

*называется* разрешающей последовательностью уравнений *данной системы.*

Сформулируем $q$-аналог для [3, Proposition 4]:

**Предложение. 1** *Пусть* $h(x)R(x)$ *— ненулевое решение системы* (4), *где* $h(x)$ *— гипергеометрический терм над полем* $\mathbb{M}(x)$, $R(x)$ *— вектор-столбец* $m$ *рациональных функций из* $\mathbb{M}(x)$. *Пусть также* (5) *— разрешающая последовательность* (4). *Тогда в* (5) *найдется такое уравнение* $L_k z(x) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant p$, *что оно имеет подобное* $h(x)$ *решение:* $z(x) = h(x)f(x)$, *где* $f(x) \in \mathbb{M}(x)$.

Пусть построена разрешающая последовательность с помощью алгоритма из [3]. И пусть с помощью алгоритма из [1] получено гипергеометрическое решение $h_1(x)$ для $L_1 z(x) = 0$. Если $h_1(x)$ — рациональная функция от $x$, с помощью алгоритма из [4] находим базис пространства рациональных решений исходной системы (4): $R_{1,1}(x), \ldots, R_{1,s_1}(x) \in \mathbb{M}(x)^m$. Иначе выполним подстановку

$$y(x) = \frac{h_1(x)R(x)}{V_1(x)} \tag{6}$$

в исходную систему (4), где $R(x)$ — вектор-столбец новых неизвестных, $h_1(x)$ имеет сертификат с нормальной формой $z$, $U(x)$, $V_1(x)$. После деления всех уравнений на $h_1(x)/V_1(x)$, получим систему с коэффициентами из $\mathbb{M}(x)$:

$$B_r R(q^r x) + \cdots + B_1 R(qx) + B_0 R(x) = 0, \tag{7}$$

где

$$B_k = z^k U(q^{k-1}x) \cdots U(qx)\, U(x) A_k, \quad k = 0, 1, \ldots, r.$$

С помощью алгоритма из [4, 5] находим все рациональные решения системы (7). Пусть $R_{1,1}(x), \ldots, R_{1,s_1}(x) \in \mathbb{M}(x)^m$ — базис пространства рациональных решений, тогда $h_1(x)R_{1,1}(x)/V_1(x), \ldots, h_1(x)R_{1,s_1}(x)/V_1(x)$ — линейно независимые гипергеометрические решения исходной системы (4).

Далее, если $L_1 z(x) = 0$ (или $L_2 z(x) = 0$) имеет другое гипергеометрическое решение $h_2(x)$ такое, что $h_2(x)$ и $h_1(x)$ неподобны, то аналогично находим для системы (4) гипергеометрические решения $h_2(x)R_{2,1}(x)/V_2(x), \ldots, h_2(x)R_{2,s_2}(x)/V_2(x)$. Использовав все гипергеометрические (попарно неподобные) решения уравнений из разрешающей последовательности, построим систему линейно независимых решений исходной системы

$$\frac{h_1(x)R_{1,1}(x)}{V_1(x)}, \ldots, \frac{h_1(x)R_{1,s_1}(x)}{V_1(x)}, \frac{h_2(x)R_{2,1}(x)}{V_2(x)}, \ldots, \frac{h_2(x)R_{2,s_2}(x)}{V_1(x)}, \ldots,$$

которая согласно предложению 1 является базисом пространства всех гипергеометрических решений системы (4).

## 4. $q$-Разностная система полного ранга и ее решения

Пусть теперь задана система линейных $q$-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами

$$D_r y(q^r x) + \cdots + D_1 y(qx) + D_0 y(x) = 0 \tag{8}$$

такая, что ее ведущая $D_r$ (или трейлинговая $D_0$) матрица — вырождена. Но при этом (8) — система полного ранга, т.е. все строки соответствующего системе матричного оператора

$$D_r Q^r + \cdots + D_1 Q + D_0 \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}[Q, x])$$

линейно независимы над $\mathbb{K}(x)[Q]$.

С помощью ЕГ-исключений (см. [6]) для (8) строим охватывающую систему, т.е. систему вида (4), того же порядка $r$, с невырожденной ведущей и трейлинговой матрицей, пространство решений которой включает в себя пространство решений исходной системы (8). Для охватывающей системы строим разрешающую последовательность, находим гипергеометрические решения всех ее уравнений. Далее, для каждого $h_1(x)$ из найденных попарно неподобных гипергеометрических решений выполняем подстановку (6) в охватывающую систему (4), к полученной системе (7) применяем алгоритм построения универсального знаменателя $u_1(x)$ из [4, 5]. Теперь в исходной системе (8) выполняем подстановку

$$y(x) = \frac{h_1(x)P(x)}{u_1(x)V_1(x)}, \tag{9}$$

где $P(x)$ — вектор столбец новых неизвестных. После деления всех уравнений на $h_1(x)/(u_1(x)V_1(x))$ получим систему, для которой с помощью алгоритма из [7] находим $P_{1,1}(x), \dots, P_{1,s_1}(x)$ — базис пространства всех полиномиальных решений. Поскольку подстановка (9) выполняется в исходной системе (8), а не в охватывающей, то лишних решений мы не получаем: $h_1(x)P_{1,1}(x)/(u_1(x)V_1(x)), \dots, h_1(x)P_{1,s_1}(x)/(u_1(x)V_1(x))$ — линейно независимые гипергеометрические решения исходной системы (8). Использовав все гипергеометрические (попарно неподобные) решения уравнений из (5), построим базис пространства гипергеометрических решений системы (8):

$$\frac{h_1(x)P_{1,1}(x)}{u_1(x)V_1(x)}, \dots, \frac{h_1(x)P_{1,s_1}(x)}{u_1(x)V_1(x)}, \frac{h_2(x)P_{2,1}(x)}{u_2(x)V_2(x)}, \dots, \frac{h_2(x)P_{2,s_2}(x)}{u_2(x)V_2(x)}, \dots$$

## 5. Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} x & q\,x^2 \\ 2\,q\,x + x^2 & q^2x^2 + q\,x^3 \end{pmatrix} y(q^2x) + \\ \begin{pmatrix} -q^3x^2 + q^2 - q\,x & -q^3x^3 + q^2x - q\,x^2 \\ -q^4x^2 - q^3x^3 + q^3 - q^2x & -q^4x^3 - q^3x^4 + q^3x - qx^3 \end{pmatrix} y(q\,x) + \\ \begin{pmatrix} -q^4x + q^3x^2 & -q^3x^2 + q^2x^3 \\ -q^5x + q^3x^3 - q^2x^2 & -q^4x^2 + q^2x^4 \end{pmatrix} y(x) = 0. \tag{10}$$

Ведущая и трейлинговая матрицы системы невырождены. Разрешающая последовательность уравнений для этой системы:

$$z(q^2x) + (x - q)\, z(q\,x) - q\,x\,z(x) = 0,$$

$$x\,z(q^2x) + (-q^2x^2 + q - x)\, z(q\,x) + (q\,x^2 - q^2x)\, z(x) = 0.$$

Оба уравнения имеют гипергеометрические решения. Множество их сертификатов — $\{q,\, q\,x\}$.

Для сертификата $r(x) = q$ нормальная форма (1): $z = q$, $U(x) = 1$, $V(x) = 1$. Этому сертификату соответствует $h_1(q^n) = q^n$ — рациональная функция от $q^n$. Базис рациональных решений системы (10) состоит из одного элемента:

$$R_{1,1}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -q \end{pmatrix}.$$

Для второго сертификата $r(x) = q\,x$ получаем $z = q$, $U(x) = x$, $V(x) = 1$. Этому сертификату соответствует

$$h_2(q^n) = q^n\,q\,q^2 \cdots q^{n-1} = q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Проверяем условие (3), получаем, что $h_1(q^n)$ и $h_2(q^n)$ неподобны. Система (7) в данном примере имеет вид:

$$\begin{pmatrix} q\,x^2 & q^2x^3 \\ 2\,q^2x^2 + q\,x^3 & q^3x^3 + q^2x^4 \end{pmatrix} R(q^2x) + \begin{pmatrix} -q^2x^2 + q - x & -q^2x^3 + q\,x - x^2 \\ -q^3x^2 - q^2x^3 + q^2 - q\,x & -q^3x^3 - q^2x^4 + q^2x - x^3 \end{pmatrix} R(q\,x) + \begin{pmatrix} -q^2 + q\,x & -q\,x + x^2 \\ -q^3 + q\,x^2 - x & -q^2x + x^3 \end{pmatrix} y(x) = 0,$$

базис пространства ее рациональных решений также состоит из одного элемента:

$$R_{2,1}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Базис пространства гипергеометрических решений для исходной системы (10):

$$\left\{ \begin{pmatrix} q^n \\ -q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{pmatrix} \right\}.$$

## 6. Реализация

Алгоритм построения базиса пространства гипергеометрических решений системы $q$-разностных линейных уравнений с полиномиальными коэффициентами реализован в системе компьютерной алгебры Maple 2017 (см. [8]) в процедуре `HypergeometrisSolution` пакета `LqRS` (Linear $q$-Recurrence Systems). Пакет и примеры использования его процедур доступны по адресу `http://www.ccas.ru/ca/lqrs`.

Аргументы процедуры `HypergeometrisSolution`:

1. система вида (8), записывается как однородное линейное $q$-разностное уравнение с матричными коэффициентами, элементы матриц — из $\mathbb{Q}(q,x)$;
2. имя неизвестной, например $y(x)$;
3. имя переменной $n$, необходимое для построения гипергеометрических термов в виде (2).

В качестве результата процедура возвращает список векторов, элементы которых являются гипергеометрическими термами.

Для построения сертификатов базиса пространства гипергеометрических решений скалярного $q$-разностного уравнения используется процедура `QHypergeometricSolution` стандартного Maple-пакета `QDifferenceEquations`, реализующая агоритм qHyper из [1]. Для построения нормальной формы рациональной функции используется процедура `QRationalCanonicalForm[1]` пакета `QDifferenceEquations`. Для построения универсального знаменателя для системы $q$-разностных уравнений используется процедура `UniversalDenominator` из пакета `LqRS`, реализующая алгоритм из [4]. Для построения базиса пространства полиномиальных решений системы $q$-разностных уравнений используется процедура `PolynomialSolution` стандартного Maple-пакета `LinearFunctionalSystems`. Для построения разрешающей последовательности уравнений, охватывающей системы используются процедуры `ResolvingSequence` и `EG`, соответственно, из пакета `LqRS`.

Запишем систему (10) в сессии Maple:

```
>S := <<x, q*x^2>|<2*q*x+x^2, q^2*x^2+q*x^3>>.y(q^2*x)+
     <<-q^3*x^2+q^2-q*x|-q^3*x^3+q^2*x-q*x^2>,
      <-q^4*x^2-q^3*x^3+q^3-q^2*x|-q^4*x^3-q^3*x^4+q^3*x-q*x^3>>.y(q*x)+
     <<-q^4*x+q^3*x^2|-q^3*x^2+q^2*x^3>,
      <-q^5*x+q^3*x^3-q^2*x^2|-q^4*x^2+q^2*x^4>>.y(x) = 0:
```

Подгружаем пакет `LqRS`:

```
>read "lqrs.mpl":
```

Получаем базис пространства гипергеометрических решений:

```
>LqRS:-HypergeometrisSolution(S, y(x), n);
```

$$\left[\begin{bmatrix} q^n \\ -q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ q^n q^{\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n} \end{bmatrix}\right]$$

## Благодарности

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 16-01-00174 А.

## Литература

1. Abramov S., Paule P., Petkovšek M. q-hypergeometric solutions of q-difference equations // Discrete Mathematics. — 1998. — Vol. 180, no. 1. — P. 3–22.
2. Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A. Hypergeometric solutions of first-order linear difference systems with rational-function coefficients // CASC'2015 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 9301. — P. 1–14.
3. Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A. Resolving sequences of operators for linear ordinary differential and difference systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, no. 5. — P. 894–910.
4. Abramov S. EG-eliminations as a tool for computing rational solutions of linear $q$-difference systems of arbitrary order with polynomial coefficients // Proceedings of the 2nd International Conference "Computer Algebra", Moscow, October 30 – November 3, 2017.
5. Abramov S. A direct algorithm to compute rational solutions of first order linear q-difference systems // Discrete Mathematics. — 2002. — Vol. 246, no. 1. — P. 3–12.

6. Abramov S. EG-eliminations // Journal of Difference Equations and Applications. — 1999. — Vol. 5, no. 4–5. — P. 393–433.
7. Abramov S., Bronstein M. On solutions of linear functional systems // Proceedings of the 2001 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. — 2001. — P. 1–6.
8. Maple online help. — URL: `http://www.maplesoft.com/support/help`.

UDC 519.7

# Search for hypergeometric solutions of $q$-difference systems by resolving sequences

**A. A. Ryabenko**

*Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences,*
*Vavilov str. 40, CCAS, Moscow, 119333, Russia*

Email: anna.ryabenko@gmail.com

An algorithm to search for hypergeometric solutions of systems of linear homogeneous $q$-difference equations with polynomial coefficients is presented. The algorithm is based on use of the resolving sequences.

**Key words and phrases:** symbolic computation, q-difference linear systems, hypergeometric solutions, resolving sequences of equations.

УДК 510.52

# Поиск точек на гладкой кубической гиперповерхности

**А. В. Селиверстов**

*Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук,*
*Большой Каретный переулок, д.19, стр. 1, Москва, Россия, 127051*

Email: slvstv@iitp.ru

Хорошо известно, что гладкая проективная кубическая гиперповерхность размерности два или выше с отмеченной точкой над некоторым полем характеристики нуль унирациональна над этим полем. Следовательно, множество точек гиперповерхности над этим полем всюду плотное в топологии Зарисского. Рассмотрена вычислительная сложность поиска этих точек. Показано, что доминантное рациональное отображение из проективного пространства в гиперповерхность можно вычислить вероятностным алгоритмом, работающим без ошибок, который с высокой вероятностью завершает работу, делая лишь полиномиально ограниченное число арифметических операций над полем. В общем случае образ этого рационального отображения содержит не все точки над этим полем, но лишь большой набор таких точек. В частности, вычисление таких точек над конечным расширением поля рациональных чисел позволяет отказаться от аппроксимации вещественных или комплексных чисел, но использовать больше возможностей символьных вычислений. Эта задача тесно связана с подтверждением гладкости гиперповерхности и могут быть использованы для решения некоторых комбинаторных задач. Ранее И.В. Латкин и автор показали, что задача о разбиении множества сводится к задаче поиска особых точек на кубической гиперповерхности. Рациональная параметризация поверхностей используется в компьютерной графике.

**Ключевые слова:** кубическая гиперповерхность, рациональное отображение, вычислительная сложность.

## 1. Введение

Многообразие $X$ унирационально над полем $K$, если его поле рациональных функций $K(X)$ вкладывается в чисто трансцендентное расширение поля $K$. Существование такого вложения полей эквивалентно существованию доминантного рационального отображения $\mathbb{P}^m \dashrightarrow X$, определённого над полем $K$, где $m = \dim X$. Рациональное отображение обозначено символом $\dashrightarrow$, поскольку оно определено лишь на открытом всюду плотном множестве.

Гладкая кубическая гиперповерхность размерности не меньше двух, определённая над некоторым полем $K$, унирациональна над $K$ тогда и только тогда, когда ей принадлежит некоторая $K$-точка [1]. Для гладких поверхностей над полем рациональных чисел это доказал Сегре [2]. В случае бесконечного поля $K$, если существует $K$-точка, то множество $K$-точек всюду плотное в топологии Зарисского. В общем случае унирациональность над полем $K$ позволяет найти не все $K$-точки, но лишь большой набор $K$-точек.

Многообразие рационально над полем $K$, если поле рациональных функций изоморфно чисто трансцендентному расширению поля $K$. Гладкая кубическая кривая на плоскости и гладкая трёхмерная гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ иррациональные [3]. Кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ рациональна над полем комплексных чисел. Однако над полем вещественных чисел гладкая проективная поверхность, имеющая две вещественные компоненты связности, иррациональная. Рациональная параметризация поверхностей используется в компьютерной графике [4, 5]. Для поверхности вычисление параметризации сводится к вычислению базиса Грёбнера полиномиального идеала, например, с помощью программ для символьных вычислений, включая облачный сервис MathPartner [6]. Однако с увеличением размерности сложность такого вычисления может быстро расти [7]. Это объясняет интерес к изучению вычислительной сложности поиска точек на гиперповерхности большой размерности. В частности, он связан с распознаванием гладкости гиперповерхности [8] и может применяться для решения комбинаторных задач [9].

## 2. Обозначения и предварительные сведения

Фиксируем счётное поле $K$ характеристики нуль с нумерацией, при которой арифметические операции $+$, $-$, $\times$ и $(\cdot)^{-1}$ вычислимы за полиномиальное время. Примером такого поля служит конечное расширение поля рациональных чисел, элементы которого представимы многочленами ограниченной степени с рациональными коэффициентами, а для записи числителя и знаменателя дроби используется двоичная запись. Элементы конечного расширения поля рациональных чисел представимы многочленами ограниченной степени с рациональными коэффициентами; арифметические операции над таким полем подразумевают вычисление остатков от деления многочленов. В сервисе MathPartner это выполнимо посредством команды reduceByGB. В общем случае, если два поля, в каждом из которых операции вычислимы за полиномиальное время, изоморфны друг другу, не существует изоморфизма, вычислимого за полиномиальное время [10]. Поэтому, говоря о расширении поля $L/K$, мы подразумеваем, что операции в поле $L$ также вычислимы за полиномиальное время, более того, существует полиномиально вычислимый изоморфизм между полем $K$ и подполем поля $L$. Выполнимость этого условия зависит от выбора нумерации полей.

Отождествим проективное пространство $\mathbb{P}^n$ с множеством одномерных линейных подпространств в $K^{n+1}$. Обозначаем через $(x_0 : \cdots : x_n)$ однородные координаты в $\mathbb{P}^n$. Фиксируем такую нумерацию векторов из $K^{n+1}$, при которой сложение и умножение на элементы поля $K$ выполняются за полиномиальное время. Говоря о вычислениях с точками из $\mathbb{P}^n$, мы подразумеваем вычисления с некоторыми векторами из $K^{n+1}$, соответствующими этим точкам. Для краткости мы будем оценивать сложность вычислений количеством арифметических операций над полем $K$. Эта оценка отличается от числа шагов некоторой машины Тьюринга лишь множителем, ограниченным некоторым многочленом от длины входа.

Дискриминант многочлена степени $d$ от одной переменной над полем комплексных чисел равен нулю, если некоторый корень кратный. Дискриминант сам является однородным многочленом с целыми коэффициентами от всех коэффициентов исходного многочлена. Дискриминант многочлена $at^3 + bt^2 + pt + q$ равен $b^2p^2 - 4ap^3 - 4b^3q - 27a^2q^2 + 18abpq$. Дискриминант формы $g(s, t)$ от двух переменных степени $d$ равен дискриминанту любого из двух многочленов от одной переменной $g(1, t)$ и $g(s, 1)$, вычисляемому по формуле для степени $d$. Если степень неоднородного многочлена меньше $d$, то он формально рассматривается как многочлен степени $d$, а старшие коэффициенты принимаются равными нулю. Поскольку форма $g(s, t)$ определяет $d$ точек на проективной прямой $\mathbb{P}^1$, её дискриминант обращается в нуль, если среди этих точек есть совпадающие.

Обозначим через $\overline{K}$ алгебраическое замыкание поля $K$. Заданная уравнением $f = 0$ гиперповерхность гладкая, если частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ не обращаются одновременно в нуль над полем $\overline{K}$, когда некоторая переменная отлична от нуля.

**Лемма 1** *Дана гладкая гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ степени не ниже второй, где $n \geqslant 4$. Размерность линейного подпространства $Y \subset X$ строго меньше $\frac{n}{2}$.*

*Доказательство.* Обозначим через $f$ форму, определяющую $X$. Поскольку $X$ неприводимая и отлична от гиперплоскости, каждая частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ не равна тождественно константе. Без ограничения общности можно считать, что подпространство $Y$ задано уравнениями $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0$, где $k = \dim Y$. Тогда при всех значениях индекса $i \leqslant k$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ обращаются в нуль на $Y$. Если число $n - k$ оставшихся частных производных не превышает размерности $k$ подпространства $Y$, то они имеют нетривиальный общий нуль на $Y$, который соответствует особой $\overline{K}$-точке гиперповерхности $X$. Следовательно, $2k < n$.
□

Обозначим через $T_p$ проективную касательную гиперплоскость к гиперповерхности $X$ в точке $p$. Обозначим через $C_p$ сечение гиперповерхности $X$ гиперплоскостью $T_p$.

**Лемма 2** *Дана гладкая кубическая гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$, где $n \geqslant 4$. Для любой точки $p \in X$ гиперплоское сечение $C_p$ неприводимое.*

*Доказательство.* Гиперплоское сечение гиперповерхности определяется одной кубической формой. Если эта форма приводимая, то один из её делителей — линейная форма. В этом случае на гиперповерхности лежит линейное подпространство размерности $n-2$. При $n \geqslant 4$ это противоречит лемме 1. □

Плоское сечение гладкой кубической поверхности может быть приводимым, поскольку над алгебраически замкнутым полем на такой поверхности лежат 27 прямых. Поэтому мы ограничимся случаем $n \geqslant 4$, чтобы избежать проверки условий, истинных в высоких размерностях в силу леммы 2.

**Лемма 3** *Дана гладкая кубическая гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$, где $n \geqslant 4$. Общая точка $p \in X$ служит двойной точкой гиперплоского сечения $C_p$.*

*Доказательство.* Точка $p$ может быть двойной или тройной особой точкой сечения $C_p$. Если $p$ тройная, то $C_p$ — это конус с вершиной $p$. Это верно и для сечения общей плоскостью. Но сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину и не лежащей целиком на конусе, состоит из объединения прямых. По теореме Бертини, сечение гиперповерхности $X$ общей плоскостью — это гладкая кубическая кривая. Следовательно, для общей точки $p$ сечение $C_p$ не является конусом. □

Свойство, истинное в общей точке, истинно с большой вероятностью в случайно выбранной точке. Для оценки этой вероятности мы будем использовать лемму Шварца–Зиппеля [11].

**Лемма Шварца–Зиппеля** *Даны многочлен $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ полной степени $d$ и конечное множество $S \subset K$ мощности $|S|$. Если случайные величины $r_0, \ldots, r_n$ независимы и равномерно распределены на множестве $S$, то вероятность $\Pr[f(r_0, \ldots, r_n) = 0] \leqslant \frac{d}{|S|}$.*

Работая с полями характеристики нуль, удобно в качестве $S$ использовать положительные целые рациональные числа из некоторого интервала. Если случайные числа собираются из независимых бернуллиевских случайных величин (случайных битов), то мощность множества $S$ должна быть степенью двойки. Увеличение мощности не ухудшает оценку вероятности в лемме Шварца–Зиппеля и получаемых на её основе результатов. Поэтому множество $S = \{1, \ldots, N\}$ можно заменить на множество $\{1, \ldots, 2^{\lceil \log_2 N \rceil}\}$, увеличивая мощность менее чем в два раза. Далее такая возможность явно не оговаривается, но может использоваться для реализации алгоритмов. Широко применяются различные псевдослучайные последовательности, однако трудно строго обосновать достижимость ожидаемого результата. Обсуждение генераторов псевдослучайных чисел выходит за рамки этой работы. Допуская некоторую вольность, мы не будем последовательно различать случайную величину и реализацию этой случайной величины. По сути, вероятностный алгоритм получает на вход конкретную реализацию случайной величины.

Рассмотренные алгоритмы используют решение систем линейных уравнений. Здесь точная оценка сложности сама может служить темой для большой работы. Однако алгоритмы, асимптотически более эффективные, чем метод Гаусса, обычно не используются на практике. С другой стороны, в MathPartner решение системы линейных уравнений выполнимо одной командой solve.

## 3. Основная часть

**Лемма 4** *Даны гладкая кубическая гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$, определённая формой $f(x_0,\dots,x_n)$, причём $f(0,\dots,0,1)=0$, и положительное число $\varepsilon$. Если случайные величины $r_1,\dots,r_{n-1}$ независимы и равномерно распределены на множестве целых рациональных чисел от 1 до $N=\lceil\frac{6n+9}{\varepsilon}\rceil$, то прямая $\ell$, проходящая через точки $(0:\dots:0:1)$ и $(1:r_1:\dots:r_{n-1}:0)$, пересекает гиперповерхность $X$ ровно в двух разных $\overline{K}$-точках $p$ и $q$, которые не принадлежат гиперповерхности $x_0=0$ и служат двойными точками сечений $C_p$ и $C_q$, соответственно, с вероятностью не меньше $1-\varepsilon$.*

*Доказательство.* Покажем, что с большой вероятностью прямая $\ell$ трансверсально пересекает $X$ в двух $\overline{K}$-точках $p$ и $q$, отличных от точки $(0:\dots:0:1)$. Ограничение $f$ на эту прямую — это кубическая форма $f(x_0,r_1x_0,\dots,r_{n-1}x_0,x_n)$. Если точки $p$ и $q$ совпадают между собой, или одна из них совпадает с $(0:\dots:0:1)$, то дискриминант этой формы от двух переменных $x_0$ и $x_n$ равен нулю. Этот дискриминант — форма $\Delta(r_1,\dots,r_{n-1})$ шестой степени. Поскольку $X$ гладкая, из теоремы Бертини следует, что $\Delta(r_1,\dots,r_{n-1})$ не обращается тождественно в нуль. По лемме Шварца–Зиппеля, вероятность её обращения в нуль не превышает $\frac{6}{N}$.

Предположим, что это условие выполнено. Точки $p$ и $q$ — это особые точки сечений $C_p$ и $C_q$, соответственно. Остаётся оценить вероятность того, что ни $C_p$, ни $C_q$ не является конусом.

Касательная гиперплоскость $T_p$ определена линейной формой $h_0x_0+\dots+h_nx_n$, где $h_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_p$. Поскольку $\ell$ пересекает $X$ трансверсально, $h_n\neq 0$. Поэтому $C_p$ определяется внутри $T_p$ кубической формой

$$g(x_0,\dots,x_{n-1})=f(h_nx_0,\dots,h_nx_{n-1},-h_0x_0-\dots-h_{n-1}x_{n-1}).$$

$C_p$ — это конус тогда и только тогда, когда частные производные $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ линейно зависимы [12]. Эти производные — формы, чьи коэффициенты равны формам шестой степени от однородных координат $p_0$, $r_1,\dots,r_{n-1}$ и $p_n$ точки $p$. Поэтому их линейная независимость эквивалентна полному рангу матрицы, содержащей $n$ строк и составленной из коэффициентов этих форм. В свою очередь, это эквивалентно необращению в нуль некоторого минора порядка $n$. По лемме 3, некоторый из этих миноров не обращается тождественно в нуль на гиперповерхности. Обозначим его через $M(x_0,r_1,\dots,r_{n-1},p_n)$. При условии $\Delta\neq 0$, ни одно из двух сечений $C_p$ и $C_q$ не является конусом, если ложно условие

$$(\exists x_n)f(1,r_1,\dots,r_{n-1},x_n)=0\wedge M(1,r_1,\dots,r_{n-1},x_n)=0.$$

Эта формула эквивалентна обращению в нуль результанта $\mathrm{Res}_{x_n}(f,M)$. Таким образом, нам нужно оценить вероятность необращения в нуль произведения двух многочленов $\Delta$ и $\mathrm{Res}_{x_n}(f,M)$, каждый из которых зависит от случайных чисел $r_1,\dots,r_n$. По лемме Шварца–Зиппеля, эта вероятность не меньше $1-\frac{6n+9}{N}$. □

**Теорема 1** *При всех $n\geqslant 2$ особая неприводимая кубическая гиперповерхность $X\subset\mathbb{P}^n$ с двойной $K$-точкой $p$ над полем $K$ характеристики нуль рациональная над $K$. Существует бирациональное отображение $\varphi:\mathbb{P}^{n-1}\dashrightarrow X$, заданное формами с коэффициентами из поля $K$. Более того, существует алгоритм, который получает на вход форму $f$, определяющую гиперповерхность $X$, и координаты двойной точки $p$, а выдаёт формы, определяющие отображение $\varphi$, делая $O(n^3)$ операций над полем $K$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что точка $p$ имеет однородные координаты $(1 : p_1 : \cdots : p_n)$. В противном случае достаточно сделать линейную замену переменных, вычислимую за полиномиальное время. Отождествим проективное пространство $\mathbb{P}^{n-1}$ с множеством прямых в $\mathbb{P}^n$, проходящих через точку $p$. В аффинном пространстве, где $x_0 = 1$, эти прямые заданы параметрически $(p_1 + a_1 t : \cdots : p_n + a_n t)$. Точка $p$ соответствует значению $t = 0$. Отображение $\varphi$ сопоставляет прямой, проходящей через точку $p$, другую точку пересечения этой прямой с $X$. Поскольку точка $p$ двойная, это отображение определено почти везде. Ограничение формы $f$ на прямую — это форма от двух переменных, коэффициентами которой служат формы от координат $p_1,\dots, p_n$ точки $p$ и коэффициентов $a_1,\dots, a_n$. Поскольку точка $p$ двойная, зная коэффициенты этого ограничения, легко найти образ отображения $\varphi$. Исключение составляет случай, когда прямая лежит на гиперповерхности $X$. □

Построение бирационального отображения из теоремы 1 существенно использует предположение, что точка $p$ — это двойная, а не тройная точка. Если точка $p$ тройная, то $X$ — это конус, а точка $p$ принадлежит вершине этого конуса.

**Теорема 2** *Существует вероятностный алгоритм, который получает на вход кубическую форму $f(x_0, \dots, x_n)$, определяющую гладкую кубическую гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$, где $n \geqslant 4$, координаты $K$-точки на $X$, положительное число $\varepsilon$ и $n - 1$ независимую случайную величину, каждая из которых равномерно распределена на множестве целых рациональных чисел от 1 до $N = \lceil \frac{6n+9}{\varepsilon} \rceil$. С вероятностью не ниже $1 - \varepsilon$ алгоритм выдаёт доминантное рациональное отображение $\mathbb{P}^{2n-4} \dashrightarrow X$ над полем $K$, то есть список рациональных функций. Иначе с вероятностью меньше $\varepsilon$ алгоритм выдаёт сообщение об отказе от вычисления. При этом алгоритм делает $O(n^4)$ арифметических операций над полем $K$.*

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что точка с однородными координатами $(0 : \cdots : 0 : 1)$ принадлежит $X$. Если на $X$ существует некоторая $K$-точка, то этого можно добиться линейной заменой координат над полем $K$. Рассмотрим прямую $\ell$, проходящую через точки $(0 : \cdots : 0 : 1)$ и $(1 : r_1 : \cdots : r_{n-1} : 0)$ для случайных чисел $r_i \in \{1, \dots, N\}$. Согласно лемме 4, с вероятностью не меньше $1-\varepsilon$ прямая $\ell$ пересекает $X$ ровно в трёх различных точках, хотя бы две из которых $p$ и $q$ служат двойными точками сечений $C_p$ и $C_q$, соответственно.

Для поданного на вход набора случайных чисел алгоритм проверяет это условие. Если оно не выполнено, то выдаётся отказ от вычисления. Предположим, что это условие выполнено.

С точностью до мультипликативной константы ограничение формы $f$ на прямую $\ell$ имеет вид $x_0(x_n^2 - 2bx_0x_n + cx_0^2)$, где функции $b(r_1, \dots, r_{n-1})$ и $c(r_1, \dots, r_{n-1})$ определены над полем $K$. Точки $p$ и $q$ соответствуют значениям координат $x_0 = 1$, $x_i = r_i$ и $x_n = b \pm \sqrt{b^2 - c}$, где $\sqrt{b^2 - c} \neq 0$. Для выбранных значений чисел $r_i$ обозначим через $L/K$ расширение поля $K$ присоединением корня $\sqrt{b^2 - c}$. Поле $L$ может совпадать с полем $K$. Рассмотрим сюръективное $K$-линейное отображение $\tau : K \times K \to L$, заданное формулой $\tau(y, z) = y + z\sqrt{b^2 - c}$. Для всех $y, z \in K$ произведение $\tau(y, z)\tau(y, -z) \in K$ и сумма $\tau(y, z) + \tau(y, -z) \in K$. Если $K \neq L$, то отображение $\tau$ служит изоморфизмом $K$-линейных пространств.

Определим рациональное отображение $\gamma : X \times X \dashrightarrow X$, которое сопоставляет двум точкам $v, w \in X$ третью точку пересечения прямой, проходящей через точки $v$ и $w$, с $X$. Это отображение не определено, если прямая лежит в $X$. Иначе вычисление точки $\gamma(v, w)$ сводится к решению системы линейных уравнений и выполнимо посредством полиномиального числа арифметических операций над полем $K$. Для двух $K$-точек $v$ и $w$ образ $\gamma(v, w)$ снова будет $K$-точкой.

Касательные гиперплоскости $T_p$ и $T_q$ различны. Действительно, если $T_p = T_q$, то прямая, проходящая через точки $p$ и $q$, целиком лежит на $X$. По лемме 2, оба сечения $C_p$ и $C_q$ неприводимые. По теореме 1, оба сечения $C_p$ и $C_q$ рациональны над полем $L$. Соответствующие бирациональные отображения $\varphi_p : L^{n-2} \dashrightarrow C_p$ и $\varphi_q : L^{n-2} \dashrightarrow C_q$ вычислимы посредством полиномиального числа операций над полем $K$. Определим доминантное рациональное отображение $\psi : L^{2n-4} \dashrightarrow X$, которое равно композиции

$$L^{2n-4} = L^{n-2} \times L^{n-2} \overset{\varphi_p \times \varphi_q}{\dashrightarrow} C_p \times C_q \overset{\gamma}{\dashrightarrow} X.$$

Композиция $\psi(\tau(y_1, z_1), \ldots, \tau(y_{n-2}, z_{n-2}), \tau(y_1, -z_1), \ldots, \tau(y_{n-2}, -z_{n-2}))$ даёт искомое доминантное рациональное отображение $K^{2n-4} \dashrightarrow X$, определённое над полем $K$. □

Хотя доказательство унирациональности использует разбор случаев, в зависимости от принадлежности квадратного корня полю $K$, алгоритм не проверяет это условие, а работает одинаково во всех случаях. Это иллюстрирует различие между собственно алгоритмом и методом его обоснования, опирающемся на разбор случаев и чистые теоремы существования.

Алгоритм из теоремы 2 может быть преобразован следующим способом. Существует вероятностный алгоритм, который никогда не отказывается от вычислений и даёт правильный ответ за конечное время, причём с высокой вероятностью время его работы будет маленьким, но алгоритм может работать длительное время при некоторой реализации используемых случайных чисел. Для этого достаточно повторять вычисление на новых реализациях случайных чисел до тех пор, пока требуемое отображение не будет построено.

Если поле рациональных функций $K(X)$ полиномиально вычислимое и известно доминантное рациональное отображение $\mathbb{P}^m \dashrightarrow X$, то легко построить вычислимое за полиномиальное время чисто трансцендентное расширение поля $K$ и вычислимое за полиномиальное время вложение поля рациональных функций $K(X)$ в это расширение.

## 4. Заключение

Предлагаемый метод позволяет быстро найти всюду плотное в топологии Зарисского множество $K$-точек на кубической гиперповерхности с известной $K$-точкой. В свою очередь, это даёт возможность проводить вычисления на гиперповерхности, работая над исходным полем, эффективно используя возможности символьных вычислений, вместо применения приближённых вычислений, которые могут быть связаны с большими погрешностями в высоких размерностях. Аналогичный метод применим и для поиска точек на кубической поверхности, но в этом случае требуется дополнительная проверка неприводимости сечения поверхности касательными плоскостями. Соответственно, в этом случае изменится оценка вероятности успеха.

## Благодарности

Автор благодарит анонимного рецензента за полезные замечания.

## Литература

1. *Kollár J.* Unirationality of cubic hypersurfaces // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. — 2002. — Vol. 1. — P. 467–476.
2. *Segre B.* A note on arithmetical properties of cubic surfaces // Journal of the London Mathematical Society. 1943. — Vol. 18. — P. 24–31.
3. *Clemens C. H., Griffiths P. A.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Annals of Mathematics. Second Series. — 1972. — Vol. 95, no. 2. — P. 281–356.
4. *Polo-Blanco I., Top J.* A remark on parameterizing nonsingular cubic surfaces // Computer Aided Geometric Design. — 2009. — Vol. 26, no. 8. — P. 842–849.
5. *González-Sánchez J., Polo-Blanco I.* Construction algorithms for rational cubic surfaces // Journal of Symbolic Computation. — 2017. — Vol. 79. — P. 309–326.

6. *Малашонок Г. И.* Система компьютерной алгебры MathPartner // Программирование. — 2017. — No. 2. — P. 63–71. Перевод: *Malaschonok G. I.* MathPartner computer algebra // Programming and Computer Software. — 2017. — Vol. 43, no. 2. — P. 112–118.
7. *Mayr E.W., Ritscher S.* Dimension-dependent bounds for Gröbner bases of polynomial ideals // Journal of Symbolic Computation. — 2013. — Vol. 49. — P. 78–94.
8. *Селиверстов А. В.* О касательных прямых к аффинным гиперповерхностям // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27, № 2. — С. 248–256.
9. *Seliverstov A. V.* On probabilistic algorithm for solving almost all instances of the set partition problem // *Weil P.* (ed.) Computer Science – Theory and Applications. CSR 2017. LNCS. — Vol. 10304. Springer, Cham, 2017. — P. 285–293.
10. *Алаев П. Е.* Структуры, вычислимые за полиномиальное время. I // Алгебра и логика. — 2016. — Т. 55, № 6. — С. 647–669. Перевод: *Alaev P. E.* Structures computable in polynomial time. I // Algebra and Logic. — 2017. — Vol. 55, no. 6. — P. 421–435.
11. *Schwartz J. T.* Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities // Journal of the ACM. — 1980. — Vol. 27, no. 4. — P. 701–717.
12. *Gondim R., Russo F.* On cubic hypersurfaces with vanishing hessian // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2015. — Vol. 219, no. 4. — P. 779–806.

UDC 510.52

# Looking for points on a smooth cubic hypersurface

**A. V. Seliverstov**

*Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)*
*Bolshoy Karetny per. 19, build.1, Moscow, 127051, Russia*

Email: `slvstv@iitp.ru`

It is well known that a smooth projective cubic hypersurface of dimension two or higher with a marked point over a field of characteristic zero is unirational over the field. Consequently, the set of points of the hypersurface over the field is dense in the Zariski topology. There is considered the computational complexity of the search for such points. It is shown that a dominant rational map from a projective space to the hypersurface can be calculated by a probabilistic algorithm that works without errors and completes the work with a high probability, making a polynomially bounded number of arithmetic operations over the field. In the general case, the image of the rational map does not contain all points over the field, but only a large set of such points. In particular, the calculation of such points over a finite extension of the field of rational numbers allows us to abandon the approximation of real or complex numbers, but use more possibilities of symbolic computations. The problem is closely related to the proof of the smoothness of the hypersurface and can be used to solve some combinatorial problems. Earlier, I.V. Latkin and the author have shown the set partition problem can be reduced to the problem of finding singular points of a cubic hypersurface. Rational parametrization of surfaces is used in computer graphics.

**Key words and phrases:** cubic hypersurface, rational map, computational complexity.

УДК 519.671, 517.958:[531–142.6+536], 517.958:530.145.86

# Символьные вычисления в моделях Изинга

**Н. П. Третьяков*†, В. В. Маршалов†, Е. А. Тевелева***

* *Кафедра прикладных информационных технологий,*
*Институт общественных наук,*
*Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации,*
*Проспект Вернадского, 82, стр.1, Москва, Россия, 119571*

† *Кафедра информатики и прикладной математики,*
*Российский государственный социальный университет,*
*ул. Вильгельма Пика, дом 4, стр.1, Москва, Россия, 129226*

Email: trn11@rambler.ru,marshalovvlad@mail.ru,eteveleva@yandex.ru

В работе приведены примеры автоматизации расчётов моделей Изинга, в том числе в случае наличия магнитного поля, с использованием систем компьютерной алгебры. Рассмотрены различные алгоритмы нахождения статистических сумм двумерных и трехмерных моделей Изинга (с квадратной и кубической решетками). Произведено сравнение значений, полученных в результате расчётов по точным и приближенным формулам. В системах компьютерной алгебры была реализована формула Онсагера для статистической суммы двумерной модели. Опытным путём проверено, что формула Онсагера расходится с точными вычислениями при малых размерах решетки (в том числе по формулам Кауфман). Символьные аналитические системы имеют крайне ограниченное применение при исследовании решеточных спиновых моделей в вычислительном аспекте, ввиду экспоненциального роста сложности при увеличении размеров системы. Здесь эффективны имитационные методы Монте-Карло (в том числе с использованием видеокарт). Однако,как показали рассмотренные примеры в данной работе, аналитические методы незаменимы при попытках получения новых точных решений, при анализе существующих аналитических решений, а также при поиске новых эффектов. Например, в данной работе обнаружено наличие сингулярностей на графиках логарифмов статистических сумм трехмерных моделей Изинга с магнитным полем. Выяснение вопроса, является ли это вычислительным артефактом или говорит о возможности фазовых переходов, требует дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** двумерная модель Изинга, трехмерная модель Изинга, статистическая сумма, численно-аналитические пакеты.

## 1. Введение

Модель Изинга является одной из ключевых математических моделей, используемых в статистической физике. Исторически это была первая аналитическая модель, в которой удалось обнаружить фазовый переход (и до сих пор остается одной из немногих таких моделей).Точное выражение для статистической суммы и задача о фазовом переходе была впервые решена Л. Онсагером в 1944 г. Этот результат часто называют одним из самых выдающихся достижений теоретической физики в 20 веке [1–6]. Несмотря на кажущуюся простоту модели, для двумерных моделей Изинга при наличии магнитного поля или в случае трехмерных моделей (наиболее актуальных, ибо позволяют передать структуру вещества), точные решения до сих пор не найдены [7].

Целью данной работы является автоматизация расчётов моделей Изинга, в том числе в случае наличия магнитного поля, с использованием систем компьютерной алгебры, таких, как Maple, Mathematica, Mathcad, Axiom и других. В нашей работе [9] было приведено описание программы для расчета статистических сумм двумерной модели Изинга с помощью точных выражений и формул Кауфман и Онсагера. Опытным путём проверено, что формула Онсагера расходится с точными вычислениями при малых размерах решетки. В качестве задач, выдвигаемых в данной работе, можно выделить следующие: рассмотреть различные алгоритмы нахождения статсумм двумерных моделей Изинга, в том числе с магнитным полем;

на основе рассмотренных алгоритмов рассчитать двумерные модели, составить для них графики; сравнить значения, полученные в результате расчётов по точным и приближенным формулам; реализовать расчёты статистических сумм для трехмерных моделей Изинга размерностей 2 и 3; проверить наличие сингулярностей в трехмерных моделях Изинга; составить программу дпя численного расчета статистических сумм трехмерной модели Изинга.

Следует отметить, что значение такого рода расчетов состоит прежде всего в том, что при выводе в будущем точных формул для статистических сумм с магнитным полем и трехмерных моделей, это будет невозможно без параллельных оценок и сравнений с использованием компьютерной алгебры и других машинных расчетов, в том числе имитационных [8]. Кроме того, и без указанных точных формул, подобные программы позволят продвинуться в изучении спиновых решеточных моделей. И, наконец, возможна и обратная связь: подобные программы и расчеты могут дать ряд новых технических приемов использования аналитических символических вычислений, которые впоследствии могут быть использованы в других задачах.

## 2. Основная часть

Рассматриваемая модель представляет собой плоскую квадратную решетку, состоящую из $N$ узлов ($N = L^2$, где L – сторона квадрата), в каждом из которых находится «спин», с осью, перпендикулярной к плоскости решетки. Спин может иметь две противоположные ориентации, так что общее число всевозможных конфигураций спинов в решетке равно $2^N$. Основная задача состоит в вычислении статистической суммы

$$S = \sum_{(\sigma)} \exp[K \sum_{i,j=1}^{L} (\sigma_{i,j}\sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j}) + h \sum_{i,j=1}^{L} \sigma_{i,j}] \qquad (1)$$

(обычно предполагают циклические граничные условия). Здесь $K = J/k_B T$, $J$ - энергия взаимодействия спинов, $k_B$ - постоянная Больцмана, $T$ - температура, $h = H/k_B T$, $H$ - напряженность магнитного поля. Производится суммирование по всем $\sigma_{ij} = \pm 1$. Несмотря на кажущуюся простоту, в случае размерности больше единицы, задача получения аналитического (в виде функции или хотя бы в более или менее "свернутом"виде) выражения для (1) относится к числу сложнейших и показывает, что сложная для вычислений система может возникнуть в относительно простой исходной ситуации. Что касается непосредственного вычисления по формуле (1) для фиксированных $L$, то здесь основной проблемой является степенной рост числа комбинаций, требующих подсчёта, а значит, и времени действия программы.

Рассмотрим сначала модель без магнитного поля. Знаменитое решение Онсагера является не вполне точным, а асимптотическим выражением, справедливым в пределе больших N (т.е. для бесконечной решетки). Оно имеет вид [10]

$$S = 2^N (1-x^2)^{-N} \prod_{i,j=0}^{L} [(1+x^2)^2 - 2x(1-x^2)(cos\frac{2\pi i}{L} + cos\frac{2\pi j}{L})]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

где $x = th(K)$. Решение Кауфман является точным выражением для суммы (1) при любом $L$ и представляет собой сумму четырех слагаемых $S = S^+_{odd} + S^-_{odd} + S^+_{even} + S^-_{even}$, где

$$S^{\pm}_{odd} = (e^{2K} - e^{-2K})^{\frac{N}{2}} \prod_{j=0}^{L-1} (e^{\frac{L}{2}\beta_{2j+1}} \pm e^{-\frac{L}{2}\beta_{2j+1}});$$

$$S^{\pm}_{even} = (e^{2K} - e^{-2K})^{\frac{N}{2}} \prod_{j=0}^{L-1} (e^{\frac{L}{2}\beta_{2j}} \pm e^{-\frac{L}{2}\beta_{2j}}), \qquad (3)$$

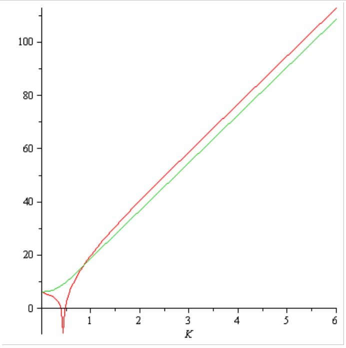



Рис. 1. Сравнительный график значений логарифма статсуммы для $L = 3$, полученных с помощью решения Онсагера (с сингулярностью) и с помощью точных вычислений

где $\beta_0 = e^{2K} th(K)$; $\beta_j = arccosh[cth(2K)ch(2K) - 2cos(\frac{\pi j}{L})]$ при $j > 0$.

В работе проведена реализация описанных формул в системах компьютерной алгебры. Следует отметить, что $e^K = exp(K)$ в программах было заменено на одиночный символ ek для повышения производительности программы. Для нескольких небольших значений $L$ была показана эквивалентность формул (1) и (3). Например, для $L = 4$ получается следующее выражение:

$$S := 20524 + 424 * ek^{16} + 13568 * ek^4 + 6688 * ek^8 + 1728 * ek^{12} + 32/ek^{24} + 64/ek^{20} +$$

$$1728/ek^{12} + 13568/ek^4 + 32 * ek^{24} + 64 * ek^{20} + 2 * ek^{32} + 2/ek^{32} + 6688/ek^8 + 424/ek^{16}.$$

При увеличении параметра L, вычисления по формуле Кауфман занимают все больше и больше аппаратных ресурсов. Расчёты по точной формуле занимали гораздо меньше времени. Интересно, что формула Кауфман считается "решением"и в принципе должна была бы приводить к ускорению, т. к. в ней, в отличии от (1), нет "комбинаторики". Безусловно, для численных расчетов статсумм это так и есть, но при символьных вычислениях, т. е. получении аналитических выражений, зависящих от переменной $K$ (а также $h$ при наличии магнитного поля), - формула (3) безусловно проигрывает (1). Также первичные результаты по (3) получались очень громоздкими, и их приходилось упрощать, например, в Maple здесь полезен оператор $simplify$ с опцией $symbolic$. . В системах компьютерной алгебры была реализована формула Онсагера (2). Например, в Maple, для оптимизации вычислений, сначала составляется выражение точно по (2), после чего, с помощью встроенных команд subs, в формулу подставляется сначала $N = L^2$, а потом $x = th(K)$. Полученные аналитические выражения можно визуализировать, построив графики в зависимости от $K$. На рис. 1 приведены графики логарифма статсуммы, полученных по формуле Онсагера и в результате точных вычислений по формуле (1). Как видно из рисунка, различия (особенно при малых $K$, а значит, при высоких температурах) значительны; при больших $K$ разница в значениях уменьшается. Кроме того, с ростом параметра $L$ расхождение будет еще более сокращаться (как и должно быть, ведь решение Онсагера - точное при $L \to \infty$). При построении графиков для разных $L$, было замечено, что разрыв наблюдается в одной и той же точке, которая, очевидно, будет являться нулем решения Онсагера при любых значениях $L$ (с ростом $L$ график будет располагаться все выше). Эта сингулярность наблюдается в точке $K \approx 0,4407$ и согласуется с правильным значением $K_c = J/k_B T_c = ln(1 + \sqrt{2})/2$ [6].

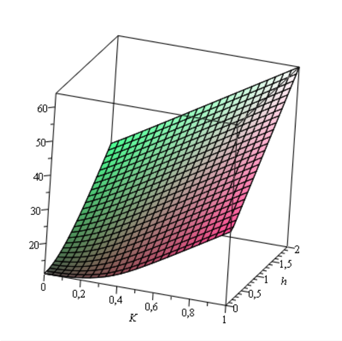



Рис. 2. Зависимость от параметров $K$ и $h$ логарифма статсуммы двумерной $4 \times 4$ решетки во внешнем магнитном поле

При расчётах статистических сумм двумерных моделей Изинга в магнитном поле, единственной возможностью являются точные формулы типа (1). Нахождение конечных формул для статсумм моделей Изинга во внешнем магнитном поле - трудоемкая задача, как при ручном, так и при машинном счете. Уже при $L = 4$ получаеся многочлен с 80 слагаемыми. На рис. 2 приведен график зависимости логарифма полученной формулы от параметров $K$ и $h$. Стоит помнить, что при счете статсумм при больших значениях L, вычисления по формуле (1) занимают крайне много времени и памяти вычислительной машины. Таким образом, при расчёте двумерных моделей Изинга во внешнем магнитном поле рекомендуется использовать специализированные суперкомпьютеры.

Были проведены расчеты для трехмерных моделей Изинга. В отличие от двумерных моделей, для них не существует формул точного решения даже в отсутствии магнитного поля, что, вместе с значительно растущей сложностью, создает проблемы при их расчёте. В данной работе рассмотрены $L \times L \times L$ простые кубические решетки при $L$ равном 2 и 3. Так же как и в двумерном случае, предполагались циклические граничные условия. Формула для вычисления аналогична (4):

$$S = \sum_{(\sigma)} \exp[K \sum_{i,j,m=1}^{L} (\sigma_{i,j,m}\sigma_{i+1,j,m} + \sigma_{i,j,m}\sigma_{i,j+1,m} + \sigma_{i,j,m}\sigma_{i,j,m+1}) + h \sum_{i,j,m=1}^{L} \sigma_{i,j,m}] \tag{4}$$

Для значений L=3 и выше (особенно, в магнитном поле) задача является весьма сложной и практически нерешаема без использования мощных ЭВМ. Объясняется это тем, что двумерная квадратная решетка будет иметь $2^{(L^2)}$ конфигураций спинов, а трехмерная кубическая - $2^{(L^3)}$. Например, уже для $L = 2$ различие будет значительным - 16 у двумерной против 256 у трехмерной. Помня про степенной рост числа конфигураций спинов, а значит, и сложности программы, стоит еще раз напомнить, что для ускорения работы выражения $e^K = exp(K)$ и $e^h = exp(h)$ необходимо заменить на переменные "$ek$"и "$eh$". Для случая $L = 2$, т. е. для $2 \times 2 \times 2$ решетки с циклическими граничными условиями, получается следующее выражение:

$Sh := 32 + 24/ek^4/eh^2 + 24 * ek^4 * eh^2 + 24 * eh^2/ek^4 + 12 * ek^8 * eh^4 + 8/ek^{12}/eh^2 + 8 * eh^2/ek^{12} + 8 * ek^{12} * eh^6 + 24 * ek^4/eh^2 + ek^{24}/eh^8 + 8 * ek^{12}/eh^6 + 12 * ek^8/eh^4 + ek^{24} * eh^8 + 30/ek^8 + 16/eh^4 + 6 * ek^8 + 16 * eh^4 + 2/ek^{24}$.

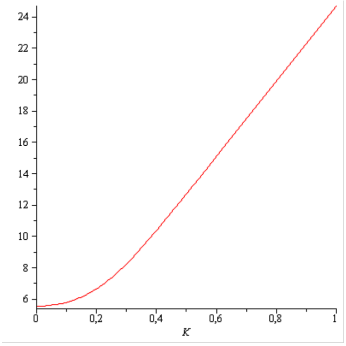



Рис. 3. Зависимость логарифма статсуммы трехмерной решетки при $L = 2$ от параметра $K$

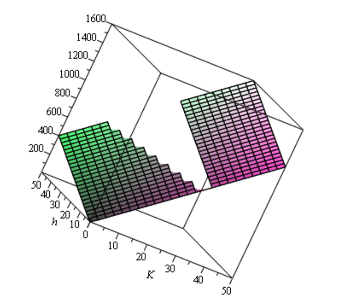



Рис. 4. Зависимость значения логарифма статсуммы трехмерной $2 \times 2 \times 2$ решетки от параметров $K$ и $h$, $K \in [0..50], h \in [0..50]$

График логарифма этой статсуммы в отсутствии магнитного поля ($eh = 1$) приведен на рис. 3. Он экспоненциально возрастает с уменьшением температуры, и его поведение мало отличается от соответствующей зависимости для двумерной решетки (график без сингулярности на рис. 1).

При наличии магнитного поля график зависимости логарифма статсуммы от параметров $K$ и $h$ также аналогичен двумерному случаю (рис. 2), однако при расширении диапазона может проявится странная аномальная область, как видно из рис. 4. Аналогичный эффект наблюдается и для решетки большего размера $L = 3$, причем там он имеет место для меньших значений $K$ и $h$, а значит, при больших температурах (статсумма представляет собой многочлен, состоящий из 270 слагаемых, график на рис. 5). Таким образом, можно сделать предположение о существовании сингулярностей (что говорит о возможности фазовых переходов) в графиках логарифмов статистических сумм трехмерных моделей Изинга при наличии магнитного поля. Такими областями являются участки поверхности, где значения статистической суммы бесконечно малы. Как видно из рис. 4 и 5, этот эффект имеет место в случае ненулевого магнитного поля и при больших значениях $K$, т. е. при низких температурах, причем чем сильнее поле, тем выше температура

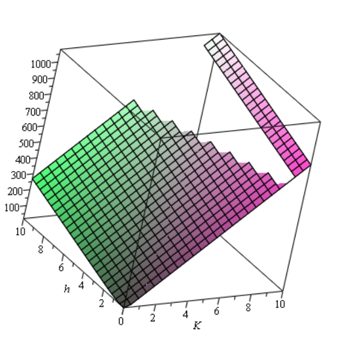



Рис. 5. Зависимость значения логарифма статсуммы трехмерной $3 \times 3 \times 3$ решетки от параметров $K$ и $h$, $K \in [0..10], h \in [0..10]$

подобного перехода. Вполне возможно, конечно, что это лишь некий вычислительный артефакт. В самом деле, трудно предположить, что в такой простой (если не сказать примитивной) системе, как кубическая $2 \times 2 \times 2$ решетка (просто одиночный кубик) возможен фазовый переход, пусть даже при наличии магнитного поля. Тем не менее, попытки построить графики рис. 4 и 5 в более крупном масштабе, вблизи аномальной области, показывают, что там действительно "что-то есть". Возможно вычислить значение логарифма статсуммы в какой-либо выбранной точке внутри аномальной области. Однако при попытке построить график в диапазоне, который содержит участок этой области, - система отказывается это делать. Это говорит о том, что в этой области существует множество точек, в которых статсумма все же обращается в ноль. Что это за множество (конечное, бесконечное) и как интерпретировать данный эффект - выходит за рамки данной работы и требует дальнейших исследований.

## 3. Заключение

Символьные аналитические системы имеют крайне ограниченное применение при исследовании решеточных спиновых моделей в вычислительном аспекте, ввиду экспоненциального роста сложности при увеличении размеров системы. Здесь эффективны имитационные методы Монте-Карло [8] (в том числе с использованием видеокарт). Однако,как показали рассмотренные примеры в данной работе, аналитические методы незаменимы при попытках получения новых точных решений, при анализе существующих аналитических решений, а также при поиске новых эффектов.

## Литература

1. *Bhattacharjee S. M., Khare A.* Fifty Years of the Exact solution of the Two-dimensional Ising Model by Onsager. Curr. Sci. — Vol. 69, no. 1. — P. 816–820.
2. *Kaufman B.* Crystal Statistics. II. Partition Function Evaluated by Spinor Analysis. Phys. Rev. — Vol. 76 — P. 1232–1243.
3. *Kaufman B., Onsager L.* Crystal Statistics. III. Short-Range Order in a Binary Ising Lattice. Phys. Rev. — Vol. 76 — P. 1244–1252.
4. *Baxter R. J.* Onsager and Kaufman's calculation of the spontaneous magnetization of the Ising model. J. Stat. Phys. — Vol. 145 —P. 518–548.

5. *Baxter R. J.* Onsager and Kaufman's calculation of the spontaneous magnetization of the Ising model: II. J. Stat. Phys. — Vol. 149 —P. 1164–1167.
6. *Бакстер Р.* Точно решаемые модели в статистической механике. — М: Мир, 1985.
7. *McCoy B., Tsun Wu T.* The Two-Dimensional Ising Model. — Dover Publications, 2014.
8. *Adler M.* Monte-Carlo Simulations of the Ising Model. — Anchor Academic Publishing, 2016.
9. *Умнов А. М., Днестровский А. Ю., Третьяков Н. П., Милантьев В. П.* Современныечисленно-аналитические пакеты для сложных инженерно-физических вычислений. — Издательство РУДН, 2008.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Часть 1. — М: Наука, 1976.

UDC 519.671, 517.958:[531–142.6+536], 517.958:530.145.86

# Symbolic calculations in Ising models

**N. P. Tretyakov[*†], V. V. Marshalov[†], E. A. Teveleva[*]**

[*] *Department of Applied Information Technologies*
*Russian State Social University*
*Wilhelm Pieck street, 4, build.1, Moscow, 119571, Russia*
[†] *Department of Informatics and Applied Mathematics*
*Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration*
*Prospect Vernadskogo, 82, bldg 2, Moscow, 129226, Russia*

Email: trn11@rambler.ru,marshalovvlad@mail.ru,eteveleva@yandex.ru

In this work some examples of computer algebra calculations of partition functions of Ising models, including in the case of nonzero magnetic field are given. Various algorithms for finding partition functions of two- and three-dimensional Ising models (with square and cubic lattices) are considered. The values obtained as a result of calculations using exact and approximate formulas are compared. The Onsager formula for the partition function of the two-dimensional model was calculated using some computer algebra systems. It is verified experimentally that the Onsager formula is divergent with exact calculations (including Kaufmann formulas) for small lattice sizes. Symbolic analytical systems have extremely limited application in the study of lattice spin models in the computational aspect, in view of the exponential growth of complexity with increasing system sizes. Monte Carlo imitation methods are effective here (especially when using video cards). However, as the examples examined in this paper have shown, analytical methods are indispensable when trying to obtain new exact solutions, when analyzing existing analytical solutions, and when searching for new effects. For example, in this paper we have discovered the existence of singularities on some graphs of the logarithms of the partition function of three-dimensional Ising models with nonzero magnetic field. Finding out whether this is a computational artifact or talking about the possibility of phase transitions requires further research.

**Key words and phrases:** two-dimensional Ising model, three-dimensional Ising model, partition function, computer algebra systems.

# Авторский указатель

# Author index

Научное издание

**КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА**

Материалы Международной конференции

Москва, 30 октября – 3 ноября 2017 г.

Макет и компьютерная верстка *Д. С. Кулябов*

Подписано в печать 05.10.2017. Формат 60x84 1/16.
Уч.-изд. л. 16,34. Усл. печ. л. 10,75. Тираж 150 экз. Заказ

ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова».
117997, Москва, Стремянный пер., 36.

Напечатано в ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова».
117997, Москва, Стремянный пер., 36.

ISBN 978-5-7307-1266-9