

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ ВБЛИЗИ ЕГО
ОСОБЕННОСТЕЙ**

Александр Дмитриевич Брюно

Алижон Ахмадович Азимов

abruno@keldysh.ru

Azimov_Alijon_Akhmadovich@mail.ru

**Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Самаркандский государственный университет имени Ш.Рашидова**

**6-я Международная конференция "Компьютерная алгебра",
Москва, 23–25 июня 2025 года**

План доклада

Введение

1. Основные понятия методов степенной геометрии

2. Теория

3. Приложение

4. Разложение вблизи особой точки $P_1^{(3)}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Введение

В работах [1-3] развит новый метод решения алгебраического уравнения

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (1)$$

где f – многочлен, в виде параметрических разложений типа

$$x_i = x_i^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{ik}(t) (x_3 - x_3^0)^k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где (x_1^0, x_2^0, x_3^0) – фиксированная точка, t – глобальный параметр, φ_{ik} – рациональные функции (отношения двух многочленов от t). Также даны компьютерная реализация метода и его приложение к одному вещественному уравнению вида (1) 12 степени по x_1, x_2, x_3 , возникшему в геометрии однородных пространств.

Теперь более подробно.

[1] Bruno A.D., Azimov A.A. Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities. \ Axioms 2023, p. 469. <https://doi.org/10.3390/axioms12050469>.

[2] Bruno A.D., Azimov A.A. Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities II. \ Axioms 2024, 13(2), 106; <https://doi.org/10.3390/axioms13020106>.

[3] Брюно А.Д., Азимов А.А. Вычисление унимодулярных матриц степенных преобразований. // Программирование, 2023, № 1, с. 38–47. DOI: 10.31857/S013234742301003X.

1. Основные понятия методов степенной геометрии

Пусть точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ удовлетворяет уравнению (1), т.е. $f(\mathbf{x}^0) = 0$. Она называется *простой*, если в этой точке хотя бы одна из частных производных

$$\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \partial f / \partial x_3 \quad (3)$$

не равна нулю.

Вблизи простой точки \mathbf{x}^0 множество решений уравнения (1) образует двумерную поверхность, т.е. на ней одна из разностей $x_i - x_i^0$ аналитически выражается через две другие без особенностей. Если в точке \mathbf{x}^0 все частные производные (3) равны нулю, то точка \mathbf{x}^0 называется *особой порядка k* , если обращаются в ноль все частные производные до порядка k и имеется ненулевая частная производная порядка $k + 1$. Вблизи нее множество решений уравнения (1) устроено сложнее и новый метод позволяет это выяснить следующим образом.

Пусть $\mathbf{x}^0 = 0$. Запишем многочлен (1) в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum f_Q \mathbf{x}^Q \text{ по } Q \in \mathcal{S}, \quad (4)$$

где $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $\mathbf{x}^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3}$, f_Q — это коэффициенты. Множество \mathcal{S} векторных показателей степени Q , для которых $f_Q \neq 0$ называется *носителем* многочлена (4). Выпуклая оболочка Γ носителя \mathcal{S} называется *многогранником Ньютона* многочлена (4). Его граница $\partial\Gamma$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$, ребер $\Gamma_j^{(1)}$ и граней $\Gamma_j^{(2)}$, все они называются

обобщёнными гранями $\Gamma_j^{(d)}$, где d – размерность и j – номер. Каждой обобщенной грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют:

1. граничное множество $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_j^{(d)}$;

2. укороченный многочлен

$$\hat{f}_j^{(d)}(\mathbf{x}) = \sum f_Q \mathbf{x}^Q \text{ по } Q \in \mathbf{S}_j^{(d)}, \quad (4^*)$$

3. нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$, состоящий из всех нормалей к $\Gamma_j^{(d)}$, являющихся внешними нормальными к многограннику Γ .

Если $\mathbf{x} \rightarrow 0$ так, что $(\ln|x_1|, \ln|x_2|, \ln|x_3|)$ находится в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(d)}$, то укороченный многочлен $\hat{f}_j^{(d)}(\mathbf{x})$ является ведущей частью многочлена $f(\mathbf{x})$.

Для разрешения уравнения (4) вблизи точки $\mathbf{x}^0 = 0$ отбираем все двумерные грани $\Gamma_j^{(2)}$, у которых нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(2)} = \lambda P$, где число $\lambda > 0$ и целочисленный вектор $P < 0$. Для каждой из них делаем свое степенное преобразование

$$\ln \mathbf{x} = (\ln \mathbf{y}) \alpha,$$

где $\ln \mathbf{x} = (\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3)$, α – квадратная 3×3 вещественная матрица,

$\ln \mathbf{y} = (\ln y_1, \ln y_2, \ln y_3)$, т.е, если $\alpha = (\alpha_{ij})$, то

$$x_1 = y_1^{\alpha_{11}} y_2^{\alpha_{21}} y_3^{\alpha_{31}}, x_2 = y_1^{\alpha_{12}} y_2^{\alpha_{22}} y_3^{\alpha_{32}}, x_3 = y_1^{\alpha_{13}} y_2^{\alpha_{23}} y_3^{\alpha_{33}}. \quad (5)$$

А именно такое, что $\alpha P = (0, 0, -1)$, тогда укороченный многочлен $\hat{f}_j^{(2)}(\mathbf{x})$ переходит в многочлен $g(y_1, y_2) \cdot y_3^l$ и матрица α унимодулярна. Это все изложено в книге, [4].

2. Теория

Напомним, что матрица α унимодулярна, если она целочисленна и $\det \alpha = \pm 1$.

Задача 1. Пусть задан n – мерный целочисленный вектор $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_n)$. Надо найти такую n – мерную унимодулярную матрицу α , что вектор $\mathbf{A}\alpha = \mathbf{C} = (c_1, \dots, c_n)$ содержит только одну координату c_n , отличную от нуля.

Алгоритм Эйлера

Для её решения Эйлер [5] предложил следующий алгоритм. Пусть для начала все координаты вектора \mathbf{A} неотрицательны. С помощью перестановки $\mathbf{A}\alpha_0 = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ упорядочим координаты по возрастанию

$$\tilde{a}_j \leq \tilde{a}_{j+1}, j = 1, \dots, n - 1.$$

Здесь α_0 – унимодулярная матрица перестановки. Пусть \tilde{a}_k – наименьшее из чисел \tilde{a}_j , отличное от нуля.

[4] Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

[5] Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // 1785, All Works 591.

Пусть

$$b_j = \left[\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{a}_k} \right], j = 1, \dots, n.$$

Тогда $b_1 = \dots = b_{k-1} = 0, b_k = 1$. Делаем преобразование

$$d_j = \tilde{a}_j - b_j \tilde{a}_k, 1 \leq j \leq n, j \neq k, d_k = \tilde{a}_k.$$

Ему соответствует унимодулярная матрица α_1 , у которой на диагонали стоят единицы, в k -ой строке стоят

$$0, 0, \dots, 0, 1, -b_{k+1}, -b_2, \dots, -b_n,$$

т.е.

$$\tilde{A}\alpha_1 = \mathbf{D} = (d_1, \dots, d_n).$$

Теперь упорядочиваем компоненты вектора \mathbf{D} с помощью унимодулярной матрицы-перестановки β_0 так, что

$$\mathbf{D}\beta_0 = \tilde{\mathbf{D}} = (0, \dots, 0, \tilde{d}_k, \dots, \tilde{d}_n), \text{ где } \tilde{d}_j \leq \tilde{d}_{j+1}.$$

Пусть \tilde{d}_l — наименьшее из $\tilde{d}_k, \dots, \tilde{d}_n$, отличное от нуля, и $e_j = [\tilde{d}_j / \tilde{d}_l], j = 1, \dots, l$. Делаем преобразование

$$f_j = \tilde{d}_j - e_j \tilde{d}_l, \quad 1 \leq j \leq n, \quad j \neq l, \quad f_l = \tilde{d}_l$$

и так далее. На каждом шаге максимум координат вектора убывает и является n -ой координатой. Поэтому через конечное число шагов получаем вектор с одной ненулевой координатой — последней. Её величина — это НОД всех исходных координат a_1, \dots, a_n . Каждый шаг состоит из матрицы-перестановки и треугольной матрицы с единичной диагональю:

$$A\alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1\gamma_0\gamma_1 \dots \omega_0\omega_1 = A\alpha = C = (0, \dots, 0, c_n).$$

Матрица

$$\alpha = \alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1\gamma_0\gamma_1 \dots \omega_0\omega_1$$

является решением задачи.

Если не все координаты a_j исходного вектор A одного знака, то сначала упорядочиваем их по модулю

$$|\tilde{a}_j| \leq |\tilde{a}_{j+1}|,$$

и полагаем

$$b_j = [|\tilde{a}_j|/|\tilde{a}_k|] \operatorname{sgn} \tilde{a}_j \operatorname{sgn} \tilde{a}_k.$$

Теорема 1. *Алгоритм Эйлера даёт решения задачи 1.*

Алгоритм Эйлера обобщает алгоритм цепной дроби только для целочисленных векторов. В [6] предложено такое обобщение цепной дроби для n -мерного вектора, которое дает последовательность наилучших приближений и периодически, если все координаты исходного вектора являются корнями многочлена степени n с целыми коэффициентами.

Пусть укороченная сумма $\tilde{f}_j^{(2)}(X) = \sum f_Q X^Q$ по $Q \in \mathcal{S}_j^{(2)}$.

[6] Брюно А. Д. Вычисление основных единиц числовых колец с помощью обобщённой цепной дроби // Программирование. 2019, № 2, 17–31. DOI: 10.1134/S0132347419020055

Теорема 2. Для грани $\Gamma_j^{(2)}$ существует степенное преобразование

$$\ln Y = \ln X \cdot \alpha \quad (5^*)$$

где $\ln y = (\ln y_1, \ln y_2, \ln y_3)$, $\ln x = (\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3)$ с унимодулярной матрицей α , которое переводит укороченную сумму (4*) в многочлен g от двух координат, т. е.

$$\tilde{f}_j^{(2)}(\mathbf{x}) = Y^T g(y_1, y_2),$$

где $T = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{Z}^3$.

Эта теорема известна давно, но раньше не было указано, как вычислять унимодулярную матрицу α . Итак:

- Найден алгоритм вычисления унимодулярной матрицы α любой размерности. Он основан на алгоритме Эйлера обобщения цепной дроби и имплементирован в работе [3].
- Решения алгебраического уравнения $g(y_1, y_2) = 0$ находятся в виде параметризации

$$y_1 = b_1(t), y_2 = b_2(t),$$

где b_1 и b_2 — рациональные функции, с помощью команды *parametrization*, имеющейся в системе компьютерной алгебры *Maple*.

- После степенного преобразования (5), (5*) многочлен (4) переходит в сумму

$$f(\mathbf{x}) = y_3^l \sum_{k \geq 0} g_k(y_1, y_2) y_3^k.$$

В нее делаем подстановку

$$y_i = b_i(t) + \varepsilon, i = 1, 2.$$

Тогда уравнение $f(\mathbf{x}) = 0$ переходит в уравнение

$$\sum_{k=1}^m g_k(b_1 + \varepsilon, b_2 + \varepsilon) y_3^k = 0.$$

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$, тогда

$$X^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}, \quad \|Q\| = |q_1| + \dots + |q_n|.$$

Теорема 3. Пусть

$$f(X, \varepsilon, T) = \sum a_{Q,r}(T) X^Q \varepsilon^r,$$

где $0 \leq Q \in \mathbb{Z}^n$, $0 \leq r \in \mathbb{Z}$, сумма конечна, $a_{Q,r}(T)$ —некоторые функции от

$T = (t_1, \dots, t_m)$, причём $a_{00}(T) \equiv 0$, $a_{01}(T) \neq 0$. Тогда решение уравнения $f(X, \varepsilon, T) = 0$ имеет вид

$$\varepsilon = \sum b_R(T) X^R,$$

где $0 \leq R \in \mathbb{Z}^n$, $0 < \|R\|$, коэффициенты $b_R(T)$ —функции от T , являющиеся многочленами от $a_{Q,r}(T)$ с $\|Q\| + r \leq \|R\|$, деленными на $a_{01}^{2\|R\|-1}$. Разложение ε является единственным.

Возвращаясь к исходным координатам, получаем параметрическое разложение вида (2) решений исходного уравнения (1) вблизи его особой точки.

3. Приложение

При изучении геометрии однородных пространств возникла такая конструкция. Задана вещественная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial x_i / dt = f_i(x, a), i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ – вещественный вектор, $a = (a_1, a_2, a_3)$ – вещественные параметры, f_i – конкретные аналитические вещественные функции. Решения системы (6) образуют нормализованный поток Риччи на пространствах Уоллаха на римановом многообразии. Каждой неподвижной вещественной точке x^0 системы (6) соответствует инвариантная метрика Эйнштейна. Матрица линейной части системы (6) вблизи особой точки x^0 имеет три собственных числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Если одно из них равно нулю, то неподвижная точка x^0 называется *вырожденной*.

В работах Абиева, Никонорова и др. [7-9] было доказано, что множество Ω значений параметров a , при которых система (6) имеет хотя бы одну вырожденную особую точку x^0 , описывается уравнением

[7] Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Y.G., Siasos P. The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces. *Differential Geometry and its Applications* 2014, 35, 26–43. <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2014.02.002>.

[8] Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Y.G., Siasos P. The Ricci flow on some generalized Wallach spaces. In *Geometry and its Applications*; Rovenski, V.; Walczak, P., Eds.; Springer, 2014; Vol. 72, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, pp. 3–37.

[9] Абиев Н.А., Арванитойоргос А., Никоноров Ю.Г., Сиасос П. Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха, Математический форум, Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, 2014; Том 8, сс. 25–42.

[10] Брюно А.Д., Батхин А.Б. Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // *Программирование*, 2015, № 2, с. 7–17.

$$\begin{aligned}
& Q(s_1, s_2, s_3) \stackrel{\text{def}}{=} \\
& \stackrel{\text{def}}{=} (2s_1 + 4s_3 - 1)(64s_1^5 - 64s_1^4 + 8s_1^3 + 240s_1^2s_3 - 1536s_1s_3^2 - 4096s_3^3 + 12s_1^2 - 240s_1s_3 \\
& + 768s_3^2 - 6s_1 + 60s_3 + 1) - 8s_1s_2(2s_1 + 4s_3 - 1)(2s_1 - 32s_3 - 1)(10s_1 + 32s_3 - 5) - \\
& \quad - 16s_1^2s_2^2(52s_1^2 + 640s_1s_3 + 1024s_3^2 - 52s_1 - 320s_3 + 13) + \\
& \quad + 64(2s_1 - 1)s_2^3(2s_1 - 32s_3 - 1) + 2048s_1(2s_1 - 1)s_2^4 = 0,
\end{aligned}$$

где s_1, s_2, s_3 — элементарные симметрические многочлены, равные соответственно

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \quad s_3 = a_1a_2a_3.$$

В работе А.Д.Брюно и А.Б.Батхина [10] из соображений симметрии от координат $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ перешли к координатам $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ и были найдены все особые точки многообразия Ω в координатах \mathbf{A} . Имеется пять точек третьего порядка, три точки второго порядка и 9 алгебраических кривых особых точек первого порядка. При этом основными являются 3 точки третьего порядка, 1 точка второго порядка и 3 кривых особых точек первого порядка. Остальные получаются из них поворотом плоскости A_1, A_2 на углы $\pm 2\pi/3$.

В работе [1-2] с помощью алгоритмов степенной геометрии и программ компьютерной алгебры получены локальные параметризации многообразия Ω вблизи всех основных 4 особых точек (метод уже описан), 3 кривых особых точек первого порядка (метод описан в [2]) и рассмотрим один случай особой точки $P_1^{(3)}$: $(A_1, A_2, A_3) = (0, 0, 3/4)$.

4. Разложение вблизи особой точки $P_1^{(3)}$

Вблизи точки $P_1^{(3)}: A = (0,0,3/4)$ введём локальные координаты x_1, x_2, x_3 :

$$A_1 = x_1, \quad A_2 = x_2, \quad A_3 = \frac{3}{4} + x_3$$

и из многочлена $R(A) \stackrel{\text{def}}{=} Q(s) = 0$ получаем многочлен 12 степени

$$S(x_1, x_2, x_3) = R(A) = Q(s_1, s_2, s_3).$$

Вычисляем его носитель, многогранник Ньютона Γ_1 , его грани $\Gamma_j^{(2)}$ и их внешние нормали, используя пакет PolyhedralSets системы компьютерной алгебры (СКА) Maple 2021. Получаем 5 граней $\Gamma_j^{(2)}$. Граф многогранника Γ_1 показан на рис.1

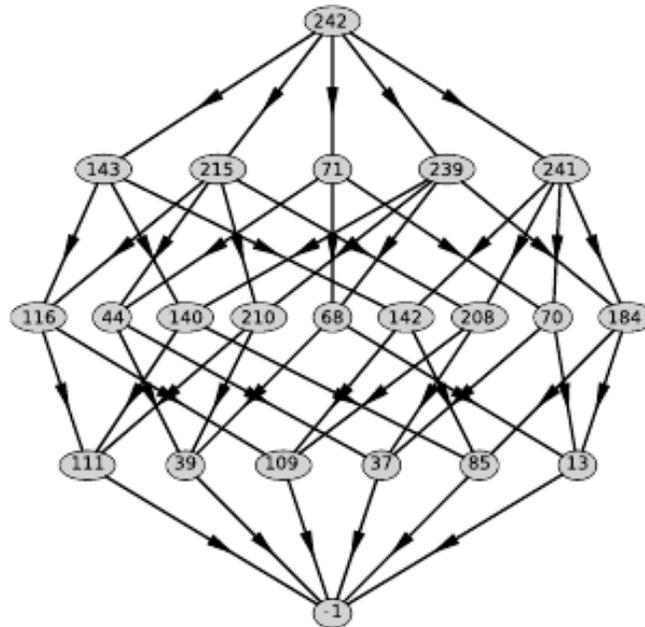


Рис.1. Граф многогранника Γ_1

В верхней строке – весь многогранник, в следующей – все двумерные грани. Еще ниже – ребра, затем вершины и внизу – пустое множество. Внешние нормали к его двумерным граням суть $N_{71} = (-2, -2, -1)$, $N_{143} = (1, 1, 1)$, $N_{215} = (-1, 0, 0)$, $N_{239} = (0, -1, 0)$, $N_{241} = (0, 0, -1)$.

Здесь только у одной нормали N_{71} все координаты отрицательны. Поэтому в окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ многообразие Ω приближенно описывается нулями укороченного многочлена

$$\hat{f}_{71} = -\frac{4096}{81}x_3^8 + \frac{3}{4}x_1^4 + \frac{3}{4}x_2^4 + \frac{64}{3}x_1^2x_3^4 - \frac{16}{3}x_1^3x_3^2 + \frac{64}{3}x_2^2x_3^4 - \frac{16}{3}x_2^3x_3^2 + \frac{3}{2}x_1^2x_2^2 + 16x_1^2x_2x_3^2 + 16x_1x_2^2x_3^2,$$

соответствующего грани номер 71 с нормалью $N_{71} = (-2, -2, -1)$, у которой все координаты отрицательны. Согласно Теорема 1 находим унимодулярную матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

такую, что

$$N_{71}\alpha = (0, 0, -1).$$

Следовательно, надо сделать степенное преобразование

$$(\ln y_1, \ln y_2, \ln y_3) = (\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3) \cdot \alpha,$$

т.е

$$(\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3) = (\ln y_1, \ln y_2, \ln y_3) \cdot \alpha^{-1}.$$

Поскольку $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$x_1 = y_1 y_3^2, \quad x_2 = y_2 y_3^2, \quad x_3 = y_3. \quad (7)$$

При этом

$$\hat{f}_{71}(x_1, x_2, x_3) = y_3^8 \cdot F_1(y_1, y_2);$$

где

$$F_1(y_1, y_2) = -4096/81 + \frac{3}{4}y_1^4 + \frac{3}{4}y_2^4 + \frac{64}{3}y_1^2 - \frac{16}{3}y_1^3 + \frac{64}{3}y_2^2 - \frac{16}{3}y_2^3 + \frac{3}{2}y_1^2 y_2^2 + 16y_1^2 y_2 + 16y_1 y_2^2. \quad (8)$$

Согласно программе `algsurves` из системы компьютерной алгебры Maple кривая $F_1(y_1, y_2) = 0$ имеет род 0, параметризацию

$$y_1 = b_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\left(8(21434756829626557083983t^4 + 1417074727891594177202560t^3 + 31706038193372580461588706t^2 + 335726200061958227448792184t + 8333103427347345384379)\right)}{\left(9(85576987369t^2 + 3099727166140t + 37630556816821)\right)^2} \quad (9)$$

$$y_2 = b_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-\left(56(3053430900966931440569t^4 + 198407502991736938316080t^3 + 3883533208553253313258158t^2 + 9193559104820491279715848t - 262262822183337506658650323)\right)}{\left(9(85576987369t^2 + 3099727166140t + 37630556816821)\right)^2}$$

и график, показанный на рис.2.

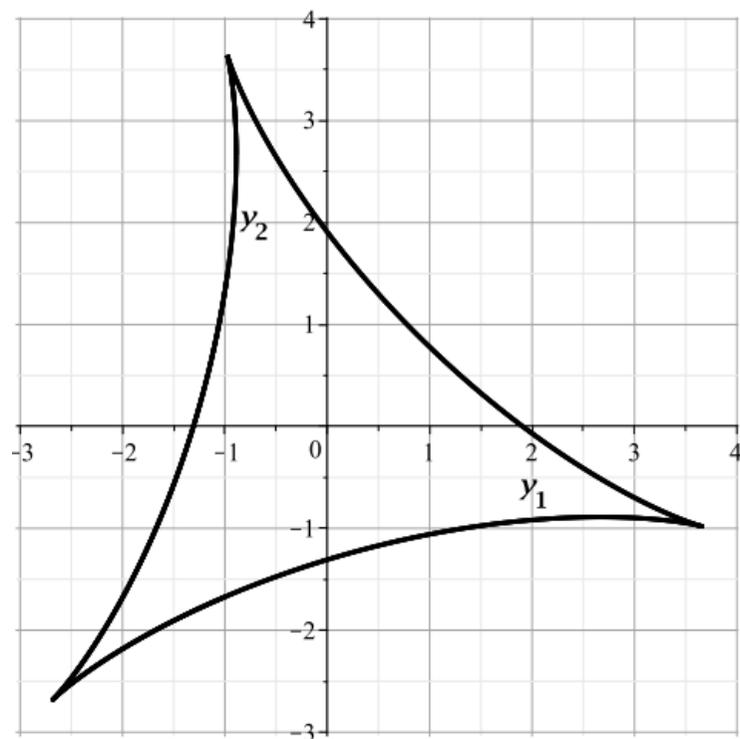


Рис.2. График кривой $F_1(y_1, y_2) = 0$.

Это криволинейный треугольник с вершинами

$$(y_1, y_2) = -\frac{8}{3}(1,1), -\frac{8}{3}\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right), -\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

Теперь, чтобы описать строение многообразия Ω вблизи точки $P_1^{(3)}$ делаем степенное преобразование (7) в многочлене S и получаем многочлен $T(y_1, y_2, y_3)$. Он разбивается на сумму

$$T(y_1, y_2, y_3) = y_3^8 \sum_{k=0}^m T_k(y_1, y_2) y_3^k$$

при этом $T_0(y_1, y_2) = F_1(y_1, y_2)$. С помощью команды *coeff(f, x[k], m)* в CAS Maple, вычисляем мономы, содержащие x_k^m для $k = 3$ и $m = 1$ получаем

$$T_1 \stackrel{\text{def}}{=} G(y_1, y_2) = 8y_1^4 + 16y_1^2 y_2^2 + 8y_2^4 - \frac{1216}{27} y_1^3 + \frac{1216}{9} y_1^2 y_2 + \frac{1216}{9} y_1 y_2^2 - \frac{1216}{27} y_2^3 + \frac{3584}{27} y_1^2 + \frac{3584}{27} y_2^2 - \frac{65536}{729}. \quad (10)$$

В многочлены $T_k(y_1, y_2)$ делаем подстановку

$$y_1 = b_1(t) + \varepsilon, y_2 = b_2(t) + \varepsilon. \quad (11)$$

Получаем многочлен $u(\varepsilon, y_3) = T(y_1, y_2, y_3)/y_3^8$ с коэффициентами, зависящими от t через $b_1(t)$ и $b_2(t)$. В этом многочлене

$$u(\varepsilon, y_3) = \sum_{k=0}^m T_k(b_1 + \varepsilon, b_2 + \varepsilon) y_3^k = \sum_{p, q \geq 0} u_{pq} \varepsilon^p y_3^q$$

где $u_{00} = F_1(b_1(t), b_2(t))$ из (9) поэтому $u_{00} = 0$,

$$\begin{aligned} u_{10} &= \frac{\partial F_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} = \\ &= 3y_1^3 + \frac{128}{3} y_1 + 3y_1 y_2^2 + 3y_1^2 y_2 + 64y_1 y_2 + 3y_2^3 + \frac{128}{3} y_2 \stackrel{\text{def}}{=} H(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (12)$$

и вообще

$$u_{pq} = \sum_{p_1+p_2=p \geq 1} \frac{1}{p_1!p_2!} \cdot \frac{\partial^p T_q}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2}} \text{ при } y_i = b_i(t), \quad p_1, p_2 \geq 0, p \geq 1, i = 1, 2 \quad (13)$$

согласно замене (9) и подстановке (11). Теперь согласно (10) и (12)

$$\begin{aligned} u_{10}(t) &= H(b_1(t), b_2(t)) = \\ &= -\frac{32768(254517259607t^2 + 8638940893220t + 63662194408079)^3(23525t + 3508186)^4}{243(85576987369t^2 + 3099727166140t + 37630556816821)^5}, \\ u_{01}(t) &= G(b_1(t), b_2(t)) = \\ &= \frac{5242880(23525t + 3508186)^4(254517259607t^2 + 8638940893220t + 63662194408079)^4}{19683(85576987369t^2 + 3099727166140t + 37630556816821)^6}. \end{aligned}$$

Функции $u_{10}(t)$ и $u_{01}(t)$ имеют по три кратных корня

$$t_1 = -\frac{3508186}{23525}, \quad t_{2,3} = -\frac{4319470446610}{254517259607} \pm \frac{904562081493\sqrt{3}}{254517259607}. \quad (14)$$

Эти значения соответствуют вершинам криволинейного треугольника рис.2.

По теореме 3 уравнение $u(\varepsilon, y_3) = 0$ имеет решение в виде степенного ряда по y_3

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cdot y_3^k, \quad (15)$$

где $c_k(t)$ — это рациональные функции, которые выражается через коэффициенты $u_{pq}(t)$, которые в свою очередь выражаются через $b_1(t)$ и $b_2(t)$ согласно (13). Это разложение справедливо для всех значений t , кроме быть может окрестностей корней (14). В частности,

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\left(\frac{u_{01}}{u_{10}}\right) = -\frac{G}{H} = \\ &= \frac{160(254517259607t^2 + 8638940893220t + 63662194408079)}{81(85576987369t^2 + 3099727166140t + 37630556816821)}, \end{aligned}$$

где знаменатель не имеет вещественных корней. Согласно (15) приближенно $\varepsilon \approx c_1(t)y_3$.

Вернемся к исходным координатам, которые при малых $|y_3|$ на многообразии Ω приближенно равны

$$A_1 = x_1 = (b_1(t) + c_1(t)y_3)y_3^2, \quad A_2 = x_2 = (b_2(t) + c_1(t)y_3)y_3^2 \quad (16)$$

при этом

$$A_1 = x_1, \quad A_2 = x_2, \quad A_3 = \frac{3}{4} + y_3. \quad (16a)$$

Если $y_3 = -\frac{1}{50}$, т.е. $A_3 = \frac{73}{100}$, то кривая (16) показана на рис.3.

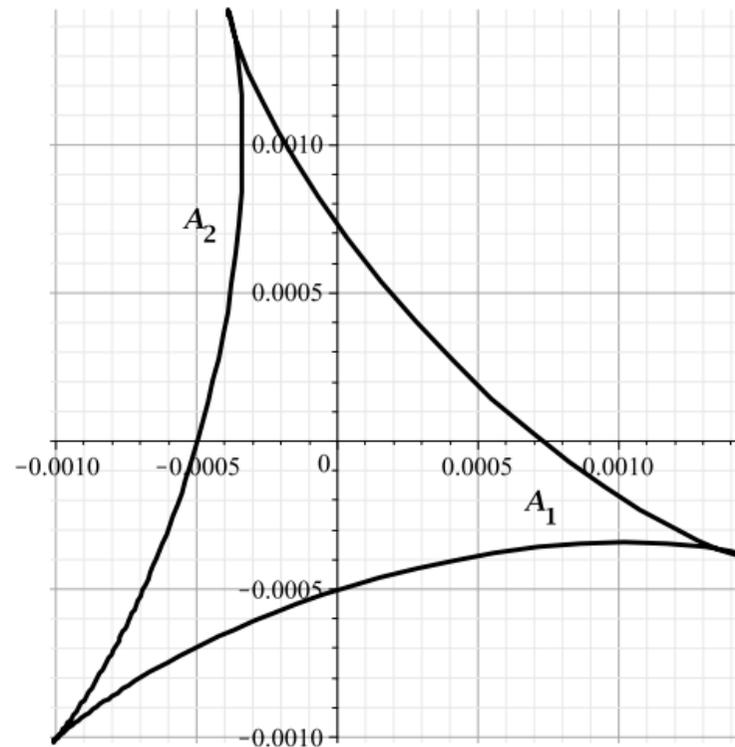


Рис.3. График кривой (16) для $y_3 = -1/50$.

Если $y_3 = \frac{1}{20}$, т. е $A_3 = \frac{4}{5}$, то кривая (16) показана на рис.4.

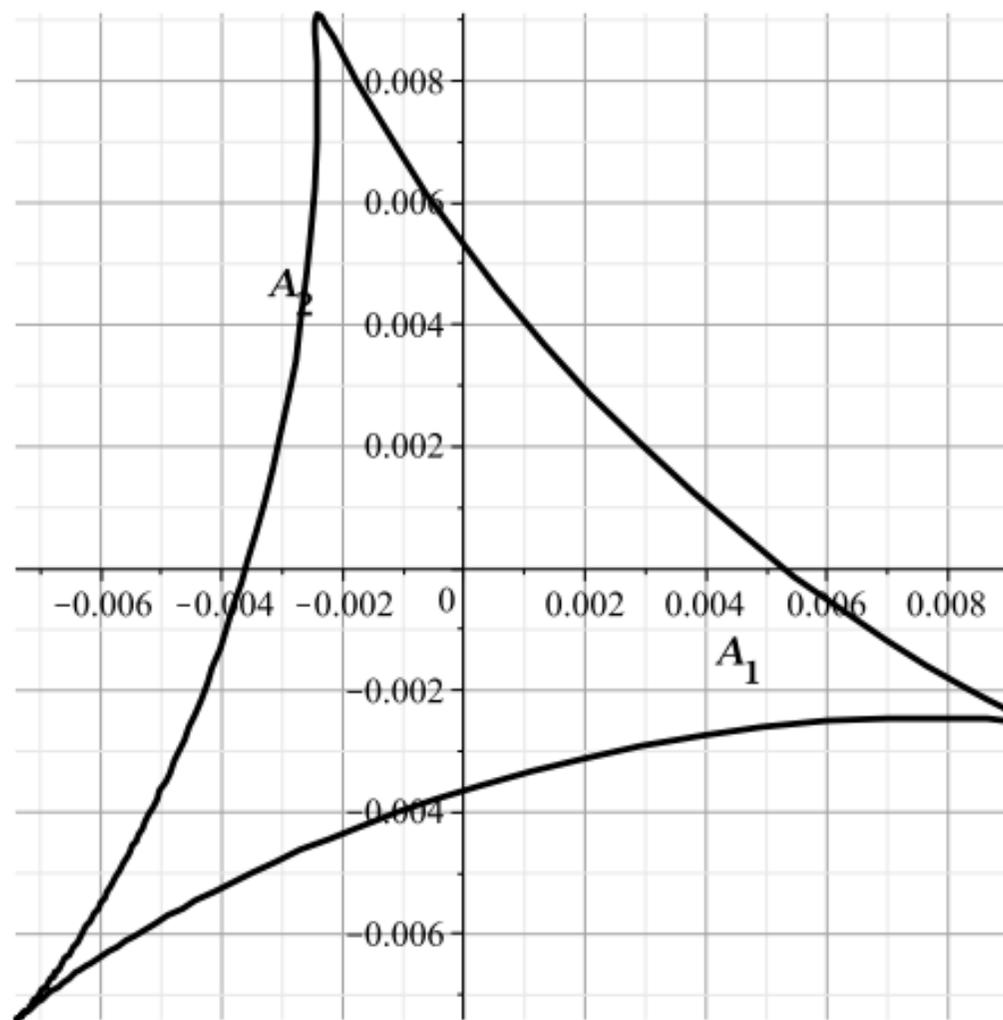


Рис.4. График кривой (16) для $y_3 = 1/20$.

Итак, доказана

Теорема 4. *В окрестности особой точки $P_1^{(3)}$ многообразия Ω имеет локальное особое параметрическое разложение (11),(15),(7),(16a). При $A_3 = 3/4$ объединение ветвей стягивается в особую точку $P_1^{(3)}$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При изучении инвариантных метрик Эйнштейна получено алгебраическое многообразие, которое описывается алгебраическим уравнением 12 го порядка от трёх переменных. Это многообразие имеет несколько особых точек и кривых особых точек. Вблизи всех особых точек и кривых особых точек методами степенной геометрии вычисляются локальные параметрические разложения алгебраического многообразия. С их помощью вблизи особых точек и кривых особых точек изучено строение многообразия Ω в конечной части пространства. Для каждого случая вычисляется укороченное уравнение, строится многогранник Ньютона. Если укороченные уравнения содержат нелинейные множители, то применяется степенное преобразование переменных.

В целом разработанный метод анализа структуры алгебраического многообразия оказался эффективным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bruno A.D., Azimov A.A. Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities. // *Axioms* 2023, p. 469. <https://doi.org/10.3390/axioms12050469>.
- [2] Bruno A.D., Azimov A.A. Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities II. // *Axioms* 2024, 13(2), 106; <https://doi.org/10.3390/axioms13020106>.
- [3] Брюно А.Д., Азимов А.А. Вычисление унимодулярных матриц степенных преобразований. // *Программирование*, 2023, № 1, с. 38–47. DOI: 10.31857/S013234742301003X.
- [4] Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
- [5] *Euler L.* De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // 1785, All Works 591.
- [6] Брюно А. Д. Вычисление основных единиц числовых колец с помощью обобщённой цепной дроби // *Программирование*. 2019, № 2, 17–31. DOI: 10.1134/S0132347419020055
- [7] Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Y.G., Siasos P. The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces. *Differential Geometry and its Applications* 2014, 35, 26–43. <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2014.02.002>.
- [8] Abiev N.A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Y.G., Siasos P. The Ricci flow on some generalized Wallach spaces. In *Geometry and its Applications*; Rovenski, V.; Walczak, P., Eds.; Springer, 2014; Vol. 72, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, pp. 3–37.
- [9] Абиев Н.А., Арванитойоргос А., Никонов Ю.Г., Сиасос П. Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха, Математический форум, Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, 2014; Том 8, сс. 25–42.
- [10] Брюно А.Д., Батхин А.Б. Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // *Программирование*, 2015, № 2, с. 7–17.