УДК 519.7

Поиск гипергеометрических решений q-разностных систем с помощью разрешающих последовательностей

А. А. Рябенко[*]

[*] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ул. Вавилова, д. 40, ВЦ РАН, Москва, Россия, 119333*

Представляется алгоритм построения гипергеометрических решений для систем линейных однородных q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами, основанный на использовании разрешающих последовательностей.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, системы q-разностных линейных уравнений, гипергеометрические решения, разрешающие последовательности уравнений.

1. Введение

Алгоритм поиска гипергеометрических решений скалярного q-разностного уравнения с полиномиальными коэффициентами был предложен в [1]. В [2] было введено понятие разрешающей последовательности уравнений для нормальных разностных систем первого порядка, коэффициенты которых являются рациональными функциями, и предложен использующий разрешающие последовательности алгоритм построения гипергеометрических решений для таких систем. В [3] понятие разрешающей последовательности было обобщено на случаи дифференциальных и (q-)разностных систем линейных уравнений произвольного порядка, предложен алгоритм и его реализация построения гипергеометрических решений для систем разностных уравнений произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами.

Поиск решений системы q-разностных уравнений может быть осуществлен так же, как и в случае систем разностных уравнений, с использованием алгоритмов, представленных в [1,3] и алгоритма построения для систем q-разностных уравнений решений в виде рациональных функций, представленного в [4, 5].

2. Гипергеометрические термы

Приведем необходимые для дальнейшего изложения определения и утверждения из [1]. Пусть k — поле характеристики 0, q — трансцендентно над k. Обозначим $\mathbb{K} = k(q)$; $x = q^n$, где n — переменная, принимающая значения из $\mathbb{N}_{\geqslant 0}$.

Определение. 1 *Назовем* $h(x)$ гипергеометрическим термом *над* $\mathbb{K}(x)$*, если соотношение* $h(qx)/h(x) = r(x)$ *является рациональной функцией от* x*:* $r(x) \in \mathbb{K}(x)$*; при этом* $r(x)$ *называется* сертификатом *для* $h(x)$*.*

Гипергеометрический терм $h(x)$ является решением линейного однородного q-разностного уравнения первого порядка с полиномиальными коэффициентами:

$$a_1(x)y(qx) + a_0(x)y(x) = 0, \text{ где } a_1(x), a_0(x) \in \mathbb{K}[x].$$

Гипергеометрический терм с сертификатом $r(x) = r(q^n)$ можно записать в виде

$$h(q^n) = C_1 \prod_{k=n_0}^{n-1} r(q^k),$$

где $C_1 \in \mathbb{K}$ и q^k не является полюсом $r(x)$ для $k \in \mathbb{N}_{\geqslant n_0}$. Представим рациональную функцию $r(x)$ в нормальной форме (см. [1, Theorem 1]):

$$r(x) = z\frac{a(x)}{b(x)}\frac{c(qx)}{c(x)}\frac{d(x)}{d(qx)} = z\,U(x)\frac{V(qx)}{V(x)}, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{K}$; $a(x), b(x), c(x), d(x) \in \mathbb{K}[x]$ — приведенные полиномы; $\gcd(a(x), b(q^n x)) = 1$ для $n \in \mathbb{Z}$; $\gcd(a(x), c(x)d(qx)) = 1$; $\gcd(b(x), c(qx)d(x)) = 1$; $c(0) \neq 0$ и $d(0) \neq 0$; $U(x) = a(x)/b(x)$; $V(x) = c(x)/d(x)$. Такое представление для рациональной функции единственно. Тогда соответствующий терм можно записать в виде

$$h(q^n) = C_2 z^n V(q^n) \prod_{k=n_0}^{n-1} U(q^k), \tag{2}$$

где $C_2 \in \mathbb{K}$. В случае $U(x) = 1$ и $z = q^k$, где $k \in \mathbb{Z}$, терм $h(x) = h(q^n)$ является рациональной функцией от $x = q^n$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$.

Определение. 2 *Два гипергеометрических терма $h_1(x)$, $h_2(x)$ называются* подобными*, если их отношение является рациональной функцией от x: $h_1(x)/h_2(x) \in \mathbb{K}(x)$.*

Пусть для $h_1(x)$, $h_2(x)$ их сертификаты имеют нормальные формы $r_1(x) = z_1\,U_1(x)V_1(qx)/V_1(x)$ и $r_2(x) = z_2\,U_2(x)V_2(qx)/V_2(x)$, соответственно. Тогда $h_1(x)$, $h_2(x)$ являются подобными, если и только если

$$U_1(x) = U_2(x) \text{ и } \frac{z_1}{z_2} = q^k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Множество всех гипергеометрических термов над $\mathbb{K}(x)$ обозначим $\mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)}$. Это множество не является линейным пространством. Обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)})$ пространство всех конечных сумм элементов из $\mathcal{H}_{\mathbb{K}(x)}$. Для q-разностного уравнения произвольного порядка

$$a_r y(q^r x) + \cdots + a_1 y(qx) + a_0 y(x) = 0, \text{ где } a_r(x), \ldots, a_0(x) \in \mathbb{K}[x],$$

в [1] предложен алгоритм qHyper построения базиса пространства решений из $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)})$, где $\mathbb{M}$ — поле, некоторое расширение $\mathbb{K}$. qHyper строит множество сертификатов $r_1(x), \ldots, r_s(x) \in \mathbb{M}(x)$, соответствующие которым $h_1(x), \ldots, h_s(x) \in \mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)}$ являются базисом пространства гипергеометрических решений данного уравнения.

3. q-Разностная система с невырожденными ведущей и трейлинговой матрицами и ее решения

Пусть задана система линейных q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами:

$$A_r y(q^r x) + \cdots + A_1 y(qx) + A_0 y(x) = 0, \tag{4}$$

где $A_k \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}[x])$, $k = 0, 1, \ldots, r$; $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$; $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x))^T$ — вектор-столбец неизвестных. Пусть ведущая и трейлинговая матрицы системы (A_r и A_0, соответственно) — невырождены.

Предлагаем алгоритм поиска гипергеометрических решений системы (4), т.е. решений из $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{M}(x)})^m$. Этот алгоритм, аналогично алгоритму из [3] построения гипергеометрических решений для систем разностных уравнений, использует понятие разрешающей последовательности. Приведем определение этого понятия для случая q-разностных систем, через Q обозначен оператор q-сдвига: $Qy(x) = y(qx)$.

Определение. 3 *Пусть для системы (4) $l_1, \dots, l_p$ — попарно различные положительные числа, не превосходящие m, и пусть скалярные операторы $L_1, \dots, L_p \in \mathbb{K}[Q, x]$ таковы, что если $y_{l_1}(x) = \dots = y_{l_j}(x) = 0$ (при $j \leqslant p$) для некоторого решения $y(x)$ системы (4), то*

— *в случае $j = p$ все компоненты этого решения равны нулю:*

$$y_1(x) = y_2(x) = \dots = y_m(x) = 0,$$

— *в случае $j < p$ для компоненты $y_{l_{j+1}}(x)$ этого решения выполнено*

$$L_{j+1}(y_{l_{j+1}}(x)) = 0.$$

Тогда конечная последовательность уравнений

$$L_1 z(x) = 0, \dots, \; L_p z(x) = 0 \tag{5}$$

называется разрешающей последовательностью уравнений *данной системы.*

Сформулируем q-аналог для [3, Proposition 4]:

Предложение. 1 *Пусть $h(x)R(x)$ — ненулевое решение системы (4), где $h(x)$ — гипергеометрический терм над полем $\mathbb{M}(x)$, $R(x)$ — вектор-столбец m рациональных функций из $\mathbb{M}(x)$. Пусть также (5) — разрешающая последовательность (4). Тогда в (5) найдется такое уравнение $L_k z(x) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant p$, что оно имеет подобное $h(x)$ решение: $z(x) = h(x)f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{M}(x)$.*

Пусть построена разрешающая последовательность с помощью алгоритма из [3]. И пусть с помощью алгоритма из [1] получено гипергеометрическое решение $h_1(x)$ для $L_1 z(x) = 0$. Если $h_1(x)$ — рациональная функция от x, с помощью алгоритма из [4] находим базис пространства рациональных решений исходной системы (4): $R_{1,1}(x), \dots, R_{1,s_1}(x) \in \mathbb{M}(x)^m$. Иначе выполним подстановку

$$y(x) = \frac{h_1(x)R(x)}{V_1(x)} \tag{6}$$

в исходную систему (4), где $R(x)$ — вектор-столбец новых неизвестных, $h_1(x)$ имеет сертификат с нормальной формой z, $U(x)$, $V_1(x)$. После деления всех уравнений на $h_1(x)/V_1(x)$, получим систему с коэффициентами из $\mathbb{M}(x)$:

$$B_r R(q^r x) + \dots + B_1 R(qx) + B_0 R(x) = 0, \tag{7}$$

где

$$B_k = z^k U(q^{k-1}x) \cdots U(qx)\, U(x) A_k, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

С помощью алгоритма из [4, 5] находим все рациональные решения системы (7). Пусть $R_{1,1}(x), \dots, R_{1,s_1}(x) \in \mathbb{M}(x)^m$ — базис пространства рациональных решений, тогда $h_1(x)R_{1,1}(x)/V_1(x), \dots, h_1(x)R_{1,s_1}(x)/V_1(x)$ — линейно независимые гипергеометрические решения исходной системы (4).

Далее, если $L_1 z(x) = 0$ (или $L_2 z(x) = 0$) имеет другое гипергеометрическое решение $h_2(x)$ такое, что $h_2(x)$ и $h_1(x)$ неподобны, то аналогично находим для системы (4) гипергеометрические решения $h_2(x)R_{2,1}(x)/V_2(x), \dots, h_2(x)R_{2,s_2}(x)/V_2(x)$. Использовав все гипергеометрические (попарно неподобные) решения уравнений из разрешающей последовательности, построим систему линейно независимых решений исходной системы

$$\frac{h_1(x)R_{1,1}(x)}{V_1(x)}, \dots, \frac{h_1(x)R_{1,s_1}(x)}{V_1(x)}, \frac{h_2(x)R_{2,1}(x)}{V_2(x)}, \dots, \frac{h_2(x)R_{2,s_2}(x)}{V_1(x)}, \dots,$$

которая согласно предложению 1 является базисом пространства всех гипергеометрических решений системы (4).

4. q-Разностная система полного ранга и ее решения

Пусть теперь задана система линейных q-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами

$$D_r y(q^r x) + \dots + D_1 y(qx) + D_0 y(x) = 0 \tag{8}$$

такая, что ее ведущая D_r (или трейлинговая D_0) матрица — вырождена. Но при этом (8) — система полного ранга, т.е. все строки соответствующего системе матричного оператора

$$D_r Q^r + \dots + D_1 Q + D_0 \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}[Q, x])$$

линейно независимы над $\mathbb{K}(x)[Q]$.

С помощью ЕГ-исключений (см. [6]) для (8) строим охватывающую систему, т.е. систему вида (4), того же порядка r, с невырожденной ведущей и трейлинговой матрицей, пространство решений которой включает в себя пространство решений исходной системы (8). Для охватывающей системы строим разрешающую последовательность, находим гипергеометрические решения всех ее уравнений. Далее, для каждого $h_1(x)$ из найденных попарно неподобных гипергеометрических решений выполняем подстановку (6) в охватывающую систему (4), к полученной системе (7) применяем алгоритм построения универсального знаменателя $u_1(x)$ из [4,5]. Теперь в исходной системе (8) выполняем подстановку

$$y(x) = \frac{h_1(x)P(x)}{u_1(x)V_1(x)}, \tag{9}$$

где $P(x)$ — вектор столбец новых неизвестных. После деления всех уравнений на $h_1(x)/(u_1(x)V_1(x))$ получим систему, для которой с помощью алгоритма из [7] находим $P_{1,1}(x), \dots, P_{1,s_1}(x)$ — базис пространства всех полиномиальных решений. Поскольку подстановка (9) выполняется в исходной системе (8), а не в охватывающей, то лишних решений мы не получаем: $h_1(x)P_{1,1}(x)/(u_1(x)V_1(x)), \dots,$ $h_1(x)P_{1,s_1}(x)/(u_1(x)V_1(x))$ — линейно независимые гипергеометрические решения исходной системы (8). Использовав все гипергеометрические (попарно неподобные) решения уравнений из (5), построим базис пространства гипергеометрических решений системы (8):

$$\frac{h_1(x)P_{1,1}(x)}{u_1(x)V_1(x)}, \dots, \frac{h_1(x)P_{1,s_1}(x)}{u_1(x)V_1(x)}, \frac{h_2(x)P_{2,1}(x)}{u_2(x)V_2(x)}, \dots, \frac{h_2(x)P_{2,s_2}(x)}{u_2(x)V_2(x)}, \dots$$

5. Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} x & q\,x^2 \\ 2\,q\,x + x^2 & q^2x^2 + q\,x^3 \end{pmatrix} y(q^2x) + \\ \begin{pmatrix} -q^3x^2 + q^2 - q\,x & -q^3x^3 + q^2x - q\,x^2 \\ -q^4x^2 - q^3x^3 + q^3 - q^2x & -q^4x^3 - q^3x^4 + q^3x - qx^3 \end{pmatrix} y(q\,x) + \\ \begin{pmatrix} -q^4x + q^3x^2 & -q^3x^2 + q^2x^3 \\ -q^5x + q^3x^3 - q^2x^2 & -q^4x^2 + q^2x^4 \end{pmatrix} y(x) = 0. \tag{10}$$

Ведущая и трейлинговая матрицы системы невырождены. Разрешающая последовательность уравнений для этой системы:

$$z(q^2x) + (x - q)\, z(q\, x) - q\, x\, z(x) = 0,$$

$$x\, z(q^2x) + (-q^2x^2 + q - x)\, z(q\, x) + (q\, x^2 - q^2x)\, z(x) = 0.$$

Оба уравнения имеют гипергеометрические решения. Множество их сертификатов — $\{q,\, q\, x\}$.

Для сертификата $r(x) = q$ нормальная форма (1): $z = q$, $U(x) = 1$, $V(x) = 1$. Этому сертификату соответствует $h_1(q^n) = q^n$ — рациональная функция от q^n. Базис рациональных решений системы (10) состоит из одного элемента:

$$R_{1,1}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -q \end{pmatrix}.$$

Для второго сертификата $r(x) = q\, x$ получаем $z = q$, $U(x) = x$, $V(x) = 1$. Этому сертификату соответствует

$$h_2(q^n) = q^n\, q\, q^2 \cdots q^{n-1} = q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Проверяем условие (3), получаем, что $h_1(q^n)$ и $h_2(q^n)$ неподобны. Система (7) в данном примере имеет вид:

$$\begin{pmatrix} q\, x^2 & q^2x^3 \\ 2\, q^2x^2 + q\, x^3 & q^3x^3 + q^2x^4 \end{pmatrix} R(q^2x) + \begin{pmatrix} -q^2x^2 + q - x & -q^2x^3 + q\, x - x^2 \\ -q^3x^2 - q^2x^3 + q^2 - q\, x & -q^3x^3 - q^2x^4 + q^2x - x^3 \end{pmatrix} R(q\, x) + \begin{pmatrix} -q^2 + q\, x & -q\, x + x^2 \\ -q^3 + q\, x^2 - x & -q^2x + x^3 \end{pmatrix} y(x) = 0,$$

базис пространства ее рациональных решений также состоит из одного элемента:

$$R_{2,1}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Базис пространства гипергеометрических решений для исходной системы (10):

$$\left\{ \begin{pmatrix} q^n \\ -q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{pmatrix} \right\}.$$

6. Реализация

Алгоритм построения базиса пространства гипергеометрических решений системы q-разностных линейных уравнений с полиномиальными коэффициентами реализован в системе компьютерной алгебры Maple 2017 (см. [8]) в процедуре `HypergeometrisSolution` пакета `LqRS` (Linear q-Recurrence Systems). Пакет и примеры использования его процедур доступны по адресу `http://www.ccas.ru/ca/lqrs`.

Аргументы процедуры `HypergeometrisSolution`:

1. система вида (8), записывается как однородное линейное q-разностное уравнение с матричными коэффициентами, элементы матриц — из $\mathbb{Q}(q, x)$;
2. имя неизвестной, например $y(x)$;
3. имя переменной n, необходимое для построения гипергеометрических термов в виде (2).

В качестве результата процедура возвращает список векторов, элементы которых являются гипергеометрическими термами.

Для построения сертификатов базиса пространства гипергеометрических решений скалярного q-разностного уравнения используется процедура `QHypergeometricSolution` стандартного Maple-пакета `QDifferenceEquations`, реализующая агоритм qHyper из [1]. Для построения нормальной формы рациональной функции используется процедура `QRationalCanonicalForm[1]` пакета `QDifferenceEquations`. Для построения универсального знаменателя для системы q-разностных уравнений используется процедура `UniversalDenominator` из пакета `LqRS`, реализующая алгоритм из [4]. Для построения базиса пространства полиномиальных решений системы q-разностных уравнений используется процедура `PolynomialSolution` стандартного Maple-пакета `LinearFunctionalSystems`. Для построения разрешающей последовательности уравнений, охватывающей системы используются процедуры `ResolvingSequence` и `EG`, соответственно, из пакета `LqRS`.

Запишем систему (10) в сессии Maple:

```
>S := <<x, q*x^2>|<2*q*x+x^2, q^2*x^2+q*x^3>>.y(q^2*x)+
     <<-q^3*x^2+q^2-q*x|-q^3*x^3+q^2*x-q*x^2>,
      <-q^4*x^2-q^3*x^3+q^3-q^2*x|-q^4*x^3-q^3*x^4+q^3*x-q*x^3>>.y(q*x)+
     <<-q^4*x+q^3*x^2|-q^3*x^2+q^2*x^3>,
      <-q^5*x+q^3*x^3-q^2*x^2|-q^4*x^2+q^2*x^4>>.y(x) = 0:
```

Подгружаем пакет `LqRS`:

```
>read "lqrs.mpl":
```

Получаем базис пространства гипергеометрических решений:

```
>LqRS:-HypergeometrisSolution(S, y(x), n);
```

$$\left[\begin{bmatrix} q^n \\ -q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ q^n q^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n} \end{bmatrix}\right]$$

Благодарности

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 16-01-00174 А.

Литература

1. Abramov S., Paule P., Petkovšek M. q-Hypergeometric solutions of q-difference equations // Discrete Mathematics. — 1998. — Vol. 180, no. 1. — P. 3–22.
2. Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A. Hypergeometric solutions of first-order linear difference systems with rational-function coefficients // CASC'2015 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 9301. — P. 1–14.
3. Abramov S., Petkovšek M., Ryabenko A. Resolving sequences of operators for linear ordinary differential and difference systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, no. 5. — P. 894–910.
4. Abramov S. EG-eliminations as a tool for computing rational solutions of linear q-difference systems of arbitrary order with polynomial coefficients // Proceedings of the 2nd International Conference "Computer Algebra", Moscow, October 30 – November 3, 2017.
5. Abramov S. A direct algorithm to compute rational solutions of first order linear q-difference systems // Discrete Mathematics. — 2002. — Vol. 246, no. 1. — P. 3–12.

6. Abramov S. EG-eliminations // Journal of Difference Equations and Applications. — 1999. — Vol. 5, no. 4–5. — P. 393–433.
7. Abramov S., Bronstein M. On solutions of linear functional systems // Proceedings of the 2001 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. — 2001. — P. 1–6.
8. Maple online help. — URL: `http://www.maplesoft.com/support/help`.

UDC 519.7

Search for hypergeometric solutions of q-difference systems by resolving sequences

A. A. Ryabenko*

* *Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences,*
Vavilov str. 40, CCAS, Moscow, 119333, Russia

An algorithm to search for hypergeometric solutions of systems of linear homogeneous q-difference equations with polynomial coefficients is presented. The algorithm is based on use of the resolving sequences.

Key words and phrases: symbolic computation, q-difference linear systems, hypergeometric solutions, resolving sequences of equations.