

На правах рукописи

Ильин Олег Вадимович

**ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ УРАВНЕНИЯ
БОЛЬЦМАНА**

Специальность 01.01.03 - Математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Вычислительном центре им. А. А. Дородницына Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Аристов Владимир Владимирович

Официальные оппоненты:

Бишаев Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Московский физико-технический институт, доцент,

Жаринов Виктор Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник.

Ведущая организация: Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, Физический факультет.

Защита диссертации состоится «____» _____ января 2013г. в ____ час. на заседании Диссертационного Совета Д 002.017.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Вычислительном центре им. А. А. Дородницына Российской академии наук по адресу: 119333, Москва, Вавилова, 40, ауд. ____

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН

Автореферат разослан «____» _____ декабря 2012г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Д 002.017.01 д.ф.-м.н., профессор _____ В.И. Зубов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Основным объектом изучения кинетической теории газов является система из большого числа частиц (молекул). Такие системы описываются методами статистической физики, то есть с помощью нестационарной функции распределения f в фазовом пространстве скоростей $\vec{v}$ и координат $\vec{x}$. Эволюция функции распределения задается кинетическими уравнениями, которые в случае короткодействующих сил представляются в следующей форме ^{1,2}:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = I(f, f), \quad (1)$$

где $I(f, f)$ – квадратичный оператор по функции распределения $f(t, \vec{x}, \vec{v})$, описывающий парные столкновения.

Основным уравнением кинетической теории является уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{w} d\vec{n} \sigma \left(u, \frac{\vec{u}\vec{n}}{u} \right) u [f(\vec{v}') f(\vec{w}') - f(\vec{v}) f(\vec{w})], \quad (2)$$

где $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n}$ – единичный вектор, $d\vec{n}$ – элемент площади единичной двумерной сферы S_2 , а $\sigma(u, \vec{u}\vec{n}/u)$ сечение столкновения. Считается, что две частицы, сталкивающиеся при скоростях $\vec{v}, \vec{w}$, после столкновения приобретают скорости $\vec{v}', \vec{w}'$, а вектор $\vec{n}$ указывает направление относительной скорости после столкновения:

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= \vec{v}' - \vec{w}' = u\vec{n}, & \vec{u} &= \vec{v} - \vec{w}, & u &= |\vec{u}|, \\ \vec{v}' &= \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w} + u\vec{n}), & \vec{w}' &= \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w} - u\vec{n}). \end{aligned}$$

Уравнение Больцмана является одним из сложнейших уравнений математической физики благодаря нелинейной форме оператора столкновений.

¹Больцман Л., Лекции по теории газов. – М.: Гостехиздат, 1956

²Коган М.Н., Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967

За десятки лет исследования уравнения найдено всего лишь несколько точных решений данного уравнения^{3,4,5}. Даже в линеаризованной форме уравнение (2) сложно для изучения из-за интеграла столкновений. Поэтому для решения конкретных физических задач прибегают к различным упрощениям.

Одним из возможных упрощений является замена интегрирования на суммирование по некоторым избранным скоростям. Такое приближение, называемое методом дискретных скоростей, получило широкое распространение в последние десятилетия^{6,7}. Считается, что модельный газ состоит из N групп частиц, в каждой из которых частицы обладают одной скоростью $\vec{\Omega}_i, i = 1 \dots N$. Тогда вместо $f(t, \vec{x}, \vec{v})$ получается конечный набор функций распределения $f_1(t, \vec{x}) \dots f_N(t, \vec{x})$, где каждая функция f_k соответствует группе частиц с определенной скоростью. При столкновении частицы переходят из одной группы в другую. Отметим, что вид взаимодействия не конкретизируется, а определено лишь только то, что частицы обмениваются импульсом и энергией. Система кинетических уравнений, соответствующая данному приближению, имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (\vec{\Omega}_i, \nabla f_i) = F_i(f_1, \dots, f_N), \quad (3)$$

$$\vec{\Omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_N); \quad i = 1, \dots, N,$$

³Бобылев А.В., Об одном классе инвариантных решений уравнения Больцмана // ДАН, 1976, 231, С. 571–574.

⁴Krook T., Wu T., Formation of Maxwellian Tails. // Phys. Rev. Lett, 1976, 76, P. 1107–1109.

⁵Bobylev A., Cercignani C., Exact eternal solutions of the Boltzmann equation. // J.Stat. Phys., 2002, 106, P. 1019–1038.

⁶Годунов С.К., Султангазин У.М., О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана.// УМН, 1971, 26, 3 (159), С. 1–51.

⁷Monaco R., Preziosi L., Fluid dynamic applications of the discrete Boltzmann equation. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences vol. 3. World Scientific publishing Co.Pte.Ltd., 1991.

где

$$F_i(f_1, \dots, f_N) \equiv \sum_{jkl}^N \sigma_{kl}^{ij} (f_k f_l - f_i f_j). \quad (4)$$

Очевидно, что (4) есть упрощенная форма интеграла столкновений уравнения Больцмана. Отметим, что σ_{kl}^{ij} величина, пропорциональная вероятности того, что две частицы со скоростями Ω_i и Ω_j после столкновения будут иметь скорости Ω_k и Ω_l . Согласно закону детального равновесия⁶ выполняется равенство $\sigma_{kl}^{ij} = \sigma_{ij}^{kl}$. Изучению математических свойств таких уравнений посвящена диссертационная работа. Доказано, что при увеличении числа скоростей решения дискретных моделей сходятся к решениям полного уравнения Больцмана⁸.

Дискретные модели активно исследовались последние десятилетия. Были доказаны теоремы существования решений для различных краевых задач и разных классов функций^{9,10,11}, а также получена теорема единственности H -функции¹². Дискретные модели уравнения Больцмана проще полного уравнения Больцмана, однако построение точных аналитических решений для дискретных моделей в явном виде представляет нетривиальную

⁸Palczewski A., Schneider J., Existence, stability and convergence of solutions of discrete-velocity models to the Boltzmann equation.// J. Stat. Phys., 1998, Vol. 91, 307-326.

⁹Веденяпин В., О разрешимости в целом задачи Коши для дискретных моделей уравнения Больцмана.// ДАН СССР, 1975, Том 215, 1, С. 21-23.

¹⁰Toscani G., On the Cauchy Problem for the discrete Boltzmann equation with initial values in $L_+^1(\mathbb{R})$.// Comm. Math. Phys., 1989, Vol. 121, p. 121.

¹¹Cercignani C., Illner R., Shinbrot M., A boundary value problem for the two dimensional Broadwell model.// Comm. Math. Phys., 1988, 114, P. 687-698

¹²Веденяпин В., Дифференциальные формы в пространствах без нормы. Теорема единственности H -функции Больцмана.// Успехи математических наук, 1988, Том 43, 1, С. 159-179.

задачу, исследовавшуюся многими авторами^{13,14,15}.

Простейшей дискретной моделью уравнения Больцмана является система Карлемана двух скоростей, которая представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа¹⁶:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} = (f_2^2 - f_1^2), \quad (5)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = (f_1^2 - f_2^2). \quad (6)$$

Система Карлемана описывает частицы двух групп, а именно, первая группа частиц, которой отвечает плотность $f_1(t, x)$, движется с единичной скоростью в направлении оси x , а вторая группа, имеющая плотность $f_2(t, x)$, движется с единичной скоростью в противоположном направлении. При этом взаимодействуют только частицы внутри одной группы, то есть только сами с собой, меняя направление движения. С физической точки зрения это является недостатком, однако система (5) – (6) обладает рядом свойств, которые имеются у уравнения Больцмана (2). Например, для нее справедлива H -теорема. Также уравнения (5) – (6) качественно описывает процессы релаксации и свободного движения¹⁷.

Более сложной является модель, предложенная Бродуэллом¹⁸. Четырех-

¹³Cornille H., Construction of positive exact $(2 + 1)$ -dimensional shock-wave solutions for two discrete velocity Boltzmann models.// J. Stat. Phys., 1988, 52, P. 897–949

¹⁴Bobylev A., Spiga G., On a class of exact two-dimensional stationary solutions for the Broadwell model of the Boltzmann equation.// J. Phys. A.: Math. Gen., 1994, 27, P. 7451–7459.

¹⁵Cabannes H., New analytic solutions for the Broadwell equations on discrete kinetic theory.// Eur. J. Mech. B/Fluids, 1997, 16, P. 1–15.

¹⁶Карлеман Т., Математические задачи кинетической теории газов.– М.: Изд. иностр. лит., 1960.

¹⁷Веденяпин В.В., Кинетические уравнения Больцмана и Власова. – М.: Физматлит, 2001.

¹⁸Broadwell J., Study of shear flow by the discrete velocity method.// J. Fluid Mech., 1964,

скоростная модель Бродуэлла для двух пространственных координат имеет вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = (f_3 f_4 - f_1 f_2), \quad (7)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_4}{\partial t} - \frac{\partial f_4}{\partial y} = (f_1 f_2 - f_3 f_4), \quad (8)$$

где $f_i(t, x, y), i = 1 \dots 4$ есть плотности частиц, движущиеся в $\pm x, \pm y$ направлениях. Для модели Бродуэлла справедлива H -теорема, выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии.

Для дискретных кинетических моделей показано, что пространственно-однородные стационарные решения (аналоги распределения Максвелла) устойчивы в линейном приближении⁶. Однако пространственно-неоднородные стационарные решения оставались неисследованными. Таким образом, сказанное выше показывает актуальность следующей задачи: получить новые пространственно-неоднородные решения дискретных кинетических моделей и изучить их устойчивость.

Цель и задачи диссертационного исследования

Перечислим основные задачи исследования:

1. Построить решение стационарной краевой задачи на отрезке для системы уравнений Карлемана.
2. Получить достаточные условия неустойчивости решений краевой задачи на отрезке для системы Карлемана в линейном приближении.
3. Исследовать краевую задачу на отрезке для системы Карлемана с помощью разностной схемы и изучить численно сценарий развития неустойчивости.
4. Получить новые точные решения краевых задач для стационарной модели Бродуэлла.

Теоретическая ценность

Впервые показано, что при определенных условиях пространственно-неоднородные стационарные решения дискретных кинетических моделей являются неустойчивыми. На основе данных уравнений можно изучать сложные нелинейные процессы.

Практическая ценность

Построенные в работе точные решения дискретных кинетических уравнений могут использоваться для проверки правильности расчетов на основе разностных схем.

Научная новизна

В работе рассмотрен вопрос устойчивости стационарного решения задачи Карлемана. Ранее было показано, что абсолютно-максвелловское распределение устойчиво относительно малых возмущений⁶. В настоящей работе рассмотрены пространственно неоднородные стационарные решения, доказано, что эти решения при определенных условиях неустойчивы.

Система Карлемана также исследовалась численно. Для модели Карлемана наблюдается переход к хаотическому режиму через последовательность бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума). Впервые показано, что в дискретной модели уравнения Больцмана может наблюдаться хаотическая динамика.

Построены новые точные решения четырехскоростной системы Бродуэлла. Для всех классов решений указаны краевые задачи, которым они удовлетворяют. Все решения выражаются через элементарные функции и квадратуры.

Апробация работы

Научные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

◇ Общеинститутский семинар "Методы решения задач математической физики"Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН, Москва, 2007.

◇ Общеинститутский семинар "Методы решения задач математической физики"Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН, Москва, 2008.

◇ 26th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. Kyoto, Japan, 2008.

◇ 17-ая международная конференция "Математика. Компьютер. Образование Дубна, 2010.

◇ Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.А.Дородницына. ВЦ РАН, Москва, 7-11 декабря 2010 г.

◇ 27th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. Asilomar, USA, 2010.

◇ International Conference on Computational Science, ICCS2010, Amsterdam, 2010.

Личный вклад автора

Результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно.

Публикации

Результаты опубликованы в пяти печатных работах, из них четыре из списка ВАК. Статьи [1, 3, 4, 5] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Список публикаций находится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Библиографический список включает в себя 55 наименований. Полный объем диссертации составляет 72 страницы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** дается общая характеристика работы, формулируются основные результаты и приводится краткий исторический обзор исследований по дискретным кинетическим моделям уравнения Больцмана.

В **первой главе** рассмотрен вопрос устойчивости стационарного решения задачи Карлемана. Интерес к вопросу устойчивости стационарных решений кинетических уравнений берет начало от неустойчивостей, обнаруженных в неоднородных по пространству течениях при численном решении уравнения Больцмана и модели БГК.¹⁹ Ранее было показано, что абсолютно-максвелловское распределение устойчиво относительно малых возмущений. В диссертационной работе рассмотрена следующая стационарная краевая задача для системы Карлемана в безразмерном виде²⁰:

$$\frac{df_1}{dx} = \varepsilon^{-1} [(f_2)^2 - (f_1)^2], \quad -\frac{df_2}{dx} = \varepsilon^{-1} [(f_1)^2 - (f_2)^2], \quad x \in (0, 1), \quad (0.1)$$

$$f_1(0) = u_{1a}, \quad f_2(1) = u_{2b}, \quad (0.2)$$

где $\varepsilon > 0$. Задача (0.1)-(0.2) имеет следующее решение:

$$f_1 = A \exp\left(\frac{2cx}{\varepsilon}\right) - \frac{c}{2}, \quad f_2 = A \exp\left(\frac{2cx}{\varepsilon}\right) + \frac{c}{2}. \quad (0.3)$$

Параметры A, c зависят от граничных условий и параметра ε :

$$A = A(u_a^1, u_b^2, \varepsilon), \quad c = c(u_a^1, u_b^2, \varepsilon).$$

¹⁹Аристов В.В., Решение уравнения Больцмана при малых числах Кнудсена.// ЖВМиМФ, 2004, Том 44, 6, С. 1127-1140.

²⁰Ильин О.В., Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана.// ЖВМиМФ, 2007, Том 47, 12, С. 2076-2087.

В диссертации изучаются малые отклонения от равновесного распределения:

$$F_i(t, x) = f_i(x) + \Phi_i(t, x), \quad i = 1, 2,$$

где $\Phi_i(t, x)$ полагаются малыми. Согласно классической теории линейной устойчивости требуется, чтобы функции $F_i(t, x), i = 1, 2$ удовлетворяли нестационарной системе Карлемана. На границах потребуем выполнение условий (0.2). Это отвечает занулению нестационарных слагаемых $\Phi_1(t, x)$ и $\Phi_2(t, x)$ на левой и правой границах отрезка соответственно. Тогда получается следующая линеаризованная задача для малых по модулю возмущений

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^1}{\partial x} = \frac{2}{\varepsilon} [f_2 \Phi_2 - f_1 \Phi_1], \quad x \in (0, 1), t > 0 \quad (0.4)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{2}{\varepsilon} [f_1 \Phi_1 - f_2 \Phi_2], \quad x \in (0, 1), t > 0 \quad (0.5)$$

$$\Phi_1(t, x)|_{x=0} = 0, \quad \Phi_2(t, x)|_{x=1} = 0. \quad (0.6)$$

В диссертационной работе показано, что справедливо следующее утверждение. **Теорема.** *Для любого $c > 0$ существуют такие $A < 0, \varepsilon > 0$, что при $|\alpha| \equiv |A/c| > 1/2$ стационарные решения (0.3) задачи (0.1), (0.2) являются неустойчивыми в линейном приближении.*

Во **второй главе** система Карлемана исследовалась численно. Рассматривалась следующая задача на единичном отрезке для системы Карлемана²¹:

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial u^1}{\partial x} = \varepsilon^{-1} [(u^2)^2 - (u^1)^2], \quad x \in (0, 1), \quad (0.7)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} - \frac{\partial u^2}{\partial x} = \varepsilon^{-1} [(u^1)^2 - (u^2)^2], \quad x \in (0, 1), \quad (0.8)$$

²¹Aristov V., Ilyin O., Kinetic model of the spatio-temporal turbulence.// Phys. Lett. A, 2010, 374, P. 4381–4384.

$$u^1(0, x) = U^1(x), \quad u^2(0, x) = U^2(x), \quad (0.9)$$

$$u^1(t, 0) = u_0^1, \quad u^2(t, 1) = u_0^2. \quad (0.10)$$

Для данных Коши и граничных условий потребуем условия согласования

$$U^1(0) = u_0^1, \quad U^2(1) = u_0^2.$$

В качестве данных Коши $U^1(x), U^2(x)$ рассмотрим стационарные решения системы Карлемана, удовлетворяющие граничным условиям (0.10). Если выбранные стационарные решения неустойчивы, то моделирование задачи (0.7)-(0.10) разностной схемой приводит к тому, что малые ошибки схемы и компьютерные ошибки округления разрушат стационарные решения. Решения задачи (0.7)-(0.10) будут совершать случайные блуждания в некотором фазовом пространстве. Если в качестве данных Коши выбрать устойчивые стационарные решения системы Карлемана, то решения задачи (0.7)-(0.10) будут всегда находиться в окрестности стационарного решения.

Для моделирования применяется разностная схема с пересчетом второго порядка точности по времени и пространству. В качестве меры удаленности от стационарного решения выберем среднеквадратичное отклонение

$$|u^1|(t_n) \equiv \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left((u^1)_m^n - (U^1)_m \right)^2}, \quad |u^2|(t_n) \equiv \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left((u^2)_m^n - (U^2)_m \right)^2},$$

где

$$(U^1)_m = U^1(x_m), \quad (U^2)_m = U^2(x_m).$$

Величины $x_m, m = 1 \dots M; t_n, n = 1 \dots T$ есть узлы разностной сетки.

При числах Кнудсена порядка 0.75 начинают наблюдаться значительные отклонения (на порядки превышающие погрешности схемы) от стационарного состояния. Отклоняясь от стационарного решения, траектории стремятся в некоторую точку на фазовой плоскости $(|u^1|, |u^2|)$, которая является в данном случае аттрактором. Амплитуда колебаний возрастает при

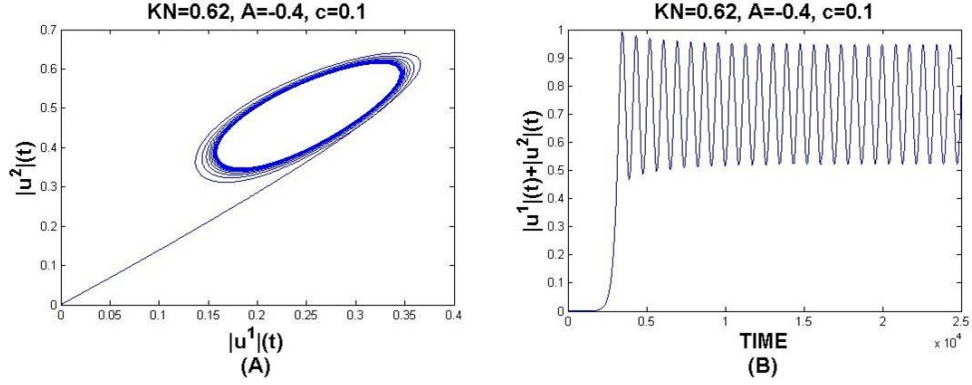


Рис. 1: Эволюция среднеквадратичных отклонений $|u^1|(t)$, $|u^2|(t)$ и суммы отклонений $|u^1|(t) + |u^2|(t)$

уменьшении числа Кнудсена до тех пор, пока при числе Кнудсена равном 0.63, не рождается предельный цикл (см. Рис. 1). Радиус предельного цикла также растет при уменьшении числа Кнудсена. При числах Кнудсена близких к 0.57 наблюдается первая бифуркация удвоения периода. Следующая бифуркация удвоения периода происходит при числах Кнудсена порядка 0.562. Наиболее явно цикл периода 4 виден при числе Кнудсена 0.561, см. Рис. 2. В дальнейшем последовательность бифуркаций удовлетворяет сценарию Фейгенбаума. При числе Кнудсена близком к 0.5605 происходит следующая бифуркация удвоения периода – рождается цикл периода 8. Можно заметить, что длины интервалов по числу Кнудсена, в промежутках между которыми происходят удвоения периода, убывают примерно в пять раз, что близко к постоянной Фейгенбаума δ , равной 4.669. Следующие бифуркации отследить достаточно трудно, но можно утверждать, что при числе Кнудсена равном 0.557, наблюдается хаос, см. Рис. 3. Это можно показать, вычислив экспоненты Ляпунова.

В **третьей главе** построены новые точные решения четырехскорост-

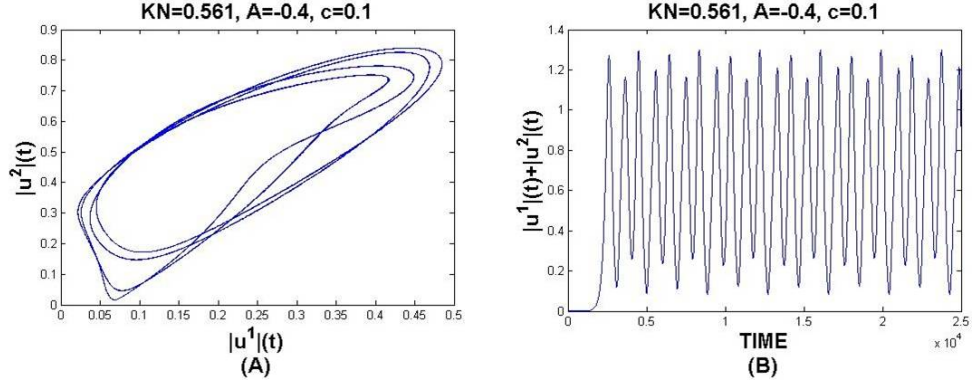


Рис. 2: Эволюция среднеквадратичных отклонений $|u^1|(t)$, $|u^2|(t)$ и суммы отклонений $|u^1|(t) + |u^2|(t)$

ной стационарной системы Бродуэлла²², а также для нахождения решений используется метод усеченного ряда Пенлеве²³. Модель Бродуэлла имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_4}{\partial y} = I(f), \quad I(f) = (f_3 f_4 - f_1 f_2), \quad (0.11)$$

где $f_i(x, y)$, $i = 1 \dots 4$ есть плотности частиц, движущиеся в $\pm x, \pm y$ направлениях. Из уравнений (0.11) получаем, что выполняются равенства:

$$f_2 = -f_1 + Q(y), \quad f_4 = -f_3 + S(x),$$

где $Q(y), S(x)$ неизвестные гладкие функции. С помощью последних равенств система (0.11) записывается в виде:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_3}{\partial y} = f_1^2 - f_3^2 - Q(y)f_1 + S(x)f_3. \quad (0.12)$$

²²Ильин О., Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла.// ТМФ, 2012, 170, 3, С. 481–488.

²³Ilyin O., The analytical solutions of 2D stationary Broadwell kinetic model.// J.Stat. Phys., 2012, 146, P. 67–72.

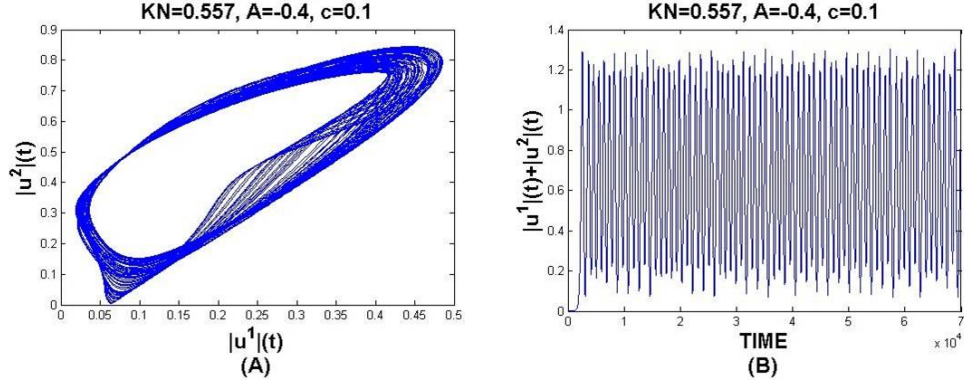


Рис. 3: Эволюция среднеквадратичных отклонений $|u^1|(t)$, $|u^2|(t)$ и суммы отклонений $|u^1|(t) + |u^2|(t)$

Будем искать решения системы (0.12) в следующем виде (усеченный ряд Пенлеве):

$$f_1(x, y) = \frac{f_{1,0}(x, y)}{\phi(x, y)}, \quad f_3(x, y) = \frac{f_{3,0}(x, y)}{\phi(x, y)}, \quad (0.13)$$

где $\phi(x, y)$, $f_{1,0}(x, y)$, $f_{3,0}(x, y)$ – гладкие функции и $f_{1,0}(x, y)$, $f_{3,0}(x, y)$ не равны тождественно нулю. Идея построения решения проста: равенства (0.13) подставляются в уравнения (0.12). В результате каждое из уравнений принимает вид:

$$A_j \phi^{-2} + B_j \phi^{-1} = 0, \quad j = 1, 3,$$

где функции A_j, B_j зависят от $f_{1,0}(x, y)$, $f_{3,0}(x, y)$ и производных от функции ϕ (но не от ϕ). Теперь, считая, что $\phi \neq 0$ решаем дифференциальные уравнения $A_j = 0, B_j = 0$ и находим функции $\phi(x, y)$, $f_{1,0}(x, y)$, $f_{3,0}(x, y)$. В итоге получается следующее решение:

$$f_1 = -\frac{c_1 x}{Lxy + (x + c_1 y)(c_1 x + y)}, \quad f_2 = -f_1 + ay, \quad (0.14)$$

$$f_3 = -\frac{c_1 y}{Lxy + (x + c_1 y)(c_1 x + y)}, \quad f_4 = -f_3 + ax, \quad (0.15)$$

где $a, L, c_1 \neq \pm 1$ произвольные постоянные.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Рассмотрена задача устойчивости для стационарного пространственно неоднородного решения системы Карлемана. С помощью осцилляционных теорем Штурма найдены достаточные условия возникновения неустойчивости.

2. Для краевой задачи на отрезке для системы Карлемана обнаружен сценарий развития неустойчивости через последовательность бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума).

3. Построены новые точные решения для стационарной четырех-скоростной модели Бродуэлла. Указаны краевые задачи, которым удовлетворяют решения.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИС-СЕРТАЦИИ

1. Ильин О.В., Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана. // ЖВМиМФ, 2007, Том 47, 12, С. 2076-2087.

2. Аристов В.В., Ильин О.В., Изучение устойчивости решений для кинетической модели. М.: Сообщения по прикладной математике. ВЦ РАН, 2006.

3. Aristov V., Ilyin O., Kinetic model of the spatio-temporal turbulence// Phys. Lett. A, 2010, 374, P. 4381–4384.

4. Ильин О., Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла// ТМФ, 2012, 170, 3, С. 481–488.

5. Ilyin O., The analytical solutions of 2D stationary Broadwell kinetic model// J.Stat. Phys., 2012, 146, P. 67–72.