*На правах рукописи*

Жукова Александра Александровна

**Применение достаточных условий оптимальности при исследовании стохастических моделей рынков не вполне ликвидных товаров**

Специальность 05.13.18 –

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2012 г.

Работа выполнена на кафедре математического моделирования сложных процессов и систем в Московском физико-техническом институте (государственном университете)

Научный руководитель: Поспелов Игорь Гермогенович

доктор физико-математических наук,

член-корр. РАН, зав. отделом Федерального государственного бюджетного учреждения науки Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН.

Официальные оппоненты: Евстигнеев Игорь Вячеславович

доктор физико-математических наук,

профессор, ЦЭМИ РАН г.н.с.

Гасников Александр Владимирович

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры Математических основ управления ФУПМ МФТИ (ГУ), заместитель декана ФУПМ МФТИ (ГУ).

Ведущая организация: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 29 марта 2012 года на заседании диссертационного совета Д 002.017.04 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Вычислительном центре им. А.А. Дородницына Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, дом 40, конференц-зал. 14.00.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук.

Автореферат разослан « \_\_\_ » февраля 2012 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

д.ф.-м. н. Новикова Н. М.

**1. Общая характеристика работы.**

**Актуальность темы исследования.** Наиболее фундаментальным подходом моделированию экономических процессов в настоящее время считается на описание динамики экономической системы как результата взаимодействия рационально действующих экономических агентов. Таким способом строятся, как модели целостных экономических систем, так и модели отдельных рынков. Наиболее естественно строить такие модели, рассматривая рациональное поведение агентов в случайной внешней среде, что, в частности, предполагается принципом рациональных ожиданий. Подобных моделей существует довольно много. Однако, такие модели обычно рассматриваются либо в дискретном времени, либо для диффузионных процессов, предполагают совершенства рынка и простые условия информированности агентов, а также далеко не всегда исследуются достаточно корректно и последовательно. Поэтому с точки зрения дальнейшего использования в прикладных моделях экономики актуальной задачей остается создание набора достаточно полно и строго исследованных стохастических моделей рынков, учитывающих разного рода «трения», присущие реальным экономическим отношениями, и таких, в которых условия информированности агентов согласованы с описанием всей системы. Также с точки зрения будущих приложений и содержательной интерпретации представляется целесообразным рассмотреть редко исследуемый случай, когда взаимодействие агентов описывается как последовательность дискретных сделок, происходящих в случайные моменты времени. Наконец, поскольку указанные типовые модели должны быть в каком-то смысле исследованы до конца, имеет смысл особое внимание уделить достаточным условиям оптимальности, поскольку их формулировать часто гораздо проще, чем необходимые.

**Степень разработанности проблемы в литературе.**

Было предпринято немало попыток описать рынок не вполне ликвидных товаров или недвижимости в виде математических моделей. Как правило, не вполне ликвидным считают товар, для которого поиск контрагента для совершения сделки затруднен (S. J. Grossman и G. Laroque; A. Ang, D. Papanikolaou и M. Westeroeld). Но существуют и возможны и другие трактовки не полной ликвидности. В моделях с асимметричной информацией (например, J. Scheinkman и W. Xiong) обращают внимание на координацию действий более информированных торговцев на рынке. Также, исследуется влияние ограничений капитала торговцев на рыночную ликвидность и интенсивность торговли (M. K. Brunnermeier и L. H. Pedersen). Наличие транзакционных издержек может препятствовать свободному движению запасов, заставляя агентов откладывать сделку на некоторое время. В последнем случае предполагается или получается как результат (как в модели S. J. Grossman и G. Laroque) то, что агент совершает сделки, требующие транзакционных издержек, реже, чем в отсутствие транзакционных издержек. Как следствие, агенты не присутствуют на рынке неликвидного товара непрерывно, а появляются на нем время от времени.

Наиболее близкой к нашему исследованию являются работы по ценообразованию активов (CAPM) с товарами длительного пользования и, возможно, транзакционными издержками (R. Merton; S. J. Grossman и G. Laroque; D. Cuoco и H. Liu). В таких моделях цена товара меняется случайным образом и описывается диффузионным процессом. Помимо товара длительного пользования, агент вкладывает средства в безрисковый актив и рискованные активы, цена которых также описана диффузионным процессом. Формально задача агента заключается в максимизации ожидаемого значения интеграла от дисконтированной полезности от будущего потребления товара длительного пользования при ограничениях в виде стохастических дифференциальных уравнений. При этом моменты торговли товаром агент может выбирать сам. Применяя метод динамического программирования, авторы показывают, что оптимальное управление моментами изменения запаса товара подразумевает откладывание сделки до момента, когда фазовые переменные покидают область, называемую «безтранзакционной».

Очень часто процессы типа пуассоновского рассматриваются в качестве частного случая задачи оптимального управления диффузионными процессами со скачками или обобщенными марковскими процессами (B. Oksendal, A. Sulem, N. Framstad, K. Sennewald, K. Walde). Наиболее распространенным методом поиска оптимального управления в таких задачах является использование уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана. В некоторых случаях, при дополнительных предположениях относительно функции Беллмана и оптимального управления, с помощью леммы Ито это уравнение удается свести к дифференциально-разностному и найти решение. Несмотря на широкий опыт применения техники динамического программирования при исследовании стохастических моделей, не всегда представляется возможным решить уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана или исследовать с его помощью вопрос о существовании оптимальной стратегии. В качестве альтернативного подхода предлагают метод множителей Лагранжа. Выражения, определяющие достаточные условия максимума функционала Лагранжа могут иметь более удобную для исследования форму. Грегори Чоу показывает это в цикле работ о применении метода множителей Лагранжа в экономическом моделировании.

Изложенные выше модели объединяет однородность агентов. Существуют работы, в которых неоднородность оценок будущего значения цены может привести к спекулятивному поведению и, как результат, к «пузырям» (J. Scheinkman и W. Xiong; D. Abreu и M. K. Brunnermeier). Основная идея их работы заключается в том, что инвестор может покупать товар не ради получения выгоды от его обладания, а для того, чтобы впоследствии перепродать его агенту, настроенному более оптимистично (придающему активу большую ценность) по высокой цене. Это показывает, что существенные различия в ожиданиях агентов могут приводить к формированию финансовых «пузырей».

Модели динамики цен на актив, напоминающих «пузырь» в основном опираются на случайный характер динамики самих цен или фундаментальных показателей таких, как дивиденды. Представляет интерес смоделировать ситуацию с нетривиальной динамикой ценового «пузыря» в системе с рациональными агентами, умеющими точно предсказывать цену.

Мы разделяем и моделируем две функции агентов – оптимальный выбор объема покупки собственником и поиск контрагента в роли брокера. В последнее время часто используемой конструкцией для описания роли торговца выступают динамические модели поиска (P.Diamond, D. Mortensen, N. Kiyotaki, R. Wright). В соответствии с этим, модель в третьей части диссертации построена в рамках экономической теории поиска, ведущей начало от работы П. Даймонда.

Процесс обмена в модели описывается как случайный. При этом, как правило, в таких моделях предлагается рассматривать континуум агентов (N. Kiyotaki, R. Wright), что делает корректное описание случайного процесса обменов чрезвычайно затруднительным. Модель поиска широко применяется к моделированию рынка недвижимости. Важным нововведением является моделирование и анализ роли посредника в динамической модели поиска на рынке недвижимости (A. Rubinstein и A.Wolinsky).

**Объектом исследования** является рынок не вполне ликвидного товара, а также процесс поиска контрагентов на рынке неликвидного товара.

**Предметом исследования** является рациональное поведение агентов в условиях различной степени информированности и возникающие в результате равновесия.

**Цель и задачи исследования** данной работы состоят в построении и изучении двух моделей рыночного обмена, общей чертой которых является то, что агентам приходится ждать возможности сделки неизвестное им заранее случайное время. Именно в этом смысле мы здесь говорим о не вполне ликвидных товарах. В первой модели агент делит свое богатство между доходным и полезным активами, второй из которых может покупаться и продаваться на рынке и не вполне ликвиден. Во второй модели сравнивается бартерный и денежный обмен на рынке, где все товары являются совершенно новыми. Для обеих моделей ставилась задача описания самосогласованных условий информированности агентов, нахождения их оптимальной стратегии в этих условиях и исследования динамики рынка, возникающей в результате применения множеством агентов своих оптимальных стратегий.

**Методологической основой исследования**  явилась теория управляемых скачкообразных марковских процессов, концепция рыночного равновесия рациональных ожиданий и методы асимптотических разложений.

**Научная новизна диссертационного исследования.**

* Постановка задачи оптимального распределения богатства между доходным и полезным активом со случайными моментами сделок.
* Формулировка достаточных условий оптимальности в форме Лагранжа для рассматриваемого скачкообразного процесса.
* Доказательство выполнения условий оптимальности для поставленной задачи и нахождение оптимальной стратегии.
* Асимптотическое выражение для оптимальной стратегии при большой частоте сделок и логарифмической функции полезности. Разделение агентов на сберегателей и спекулянтов.
* Построение модели рынка недвижимости, показывающей возможность динамики цены, аналогичной динамике «пузыря» в условиях полного предвидения.
* Формулировка модели бартерного и денежного обмена в модели Киотаки с конечным числом агентов. Исследование стохастической динамики и информационных ограничений.
* Исследование равновесия в модели экономики с деньгами.

**Теоретическая значимость** результатов исследования состоит в построении моделей рынков не вполне ликвидных товаров, разработке метода их анализа и объяснении на основе результатов их исследования возможности образования «пузыря» на рынке недвижимости даже в условиях полного предвидения, а также в выявлении полезности денег как средства обмена даже в условиях полного обновления номенклатуры товаров и интересов агентов.

**Структура диссертации**. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, и списка литературы из 53 наименований. Общий объем работы – 82 страницы, включая 7 рисунков.

**Апробация результатов исследования.** Результаты диссертационного исследования были апробированы на следующих конференциях и научных семинарах.

* 49-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2006 года.  «Монетарное и бартерное равновесия в стохастической модели обмена товарами между несколькими агентами».
* AESCS’07 workshop, Waseda University, Japan 2007. “Agent-based stochastic model of monetary and barter exchange”.
* 51-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2008 года. «Математическая модель финансового пузыря».
* Всероссийская конференция «Физика и Прогресс 2008”, С-Пб ГУ, «Модель случайного обмена товарами в системе с большим числом агентов».
* IV Всероссийская научная конференция «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» ЭКОМОД-2009, г. Киров, июль 2009 года. «Модель финансового пузыря».
* VI Московская международная конференция по Исследованию Операций (ORM2010), г. Москва, октябрь 2010 года. «Модель оптимального потребления и сбережений при наличии сделок с недвижимостью» (совместно с Поспеловым И.Г.).
* V Meeting on Dynamics of Social and Economic Systems, September 2010, Sannio University, Benevento, Italy. “Modeling financial bubble with Poisson uncertainty”.
* Научные семинары ВЦ РАН под руководством академика А.А.Петрова, ЦЭМИ под руководством В.И. Аркина и Э.Л. Пресмана, ВЦ РАН под руководством И.Г. Поспелова.

**2. Основные положения диссертации.**

**Первая глава** диссертации посвящена обзору различных моделей поведения потребителя и инвестора на рынке неликвидного товара и моделей поиска контрагентов на рынке. В разделе 1.1 показано, что задача оптимального управления инвестициями и потреблением широко представлена в макроэкономических и финансовых исследованиях. При этом большинство современных моделей построено на основе стохастического описания того или иного параметра системы. Для анализа рынков неликвидного товара в качестве случайного процесса часто выступает пуассоновский процесс. Приведены примеры исследований, обосновывающих выбор в пользу такого процесса. С одной стороны, транзакционные издержки могут делать невыгодной непрерывную торговлю этим товаром и сделки откладываются на некоторое время. С другой стороны, периоды ожидания сделок могут возникать в процессе поиска подходящих контрагентов. Подробнее о моделях поиска и их применении к моделированию рынков недвижимости рассказано в разделе 1.3. В разделе 1.1 также показано, что подавляющее большинство стохастических оптимизационных моделей исследуется методом динамического программирования, который часто требует сильных предположений относительно целевого функционала агента. Поэтому применение достаточных условий в форме Лагранжа может быть использовано в случае, когда динамическое программирование оказывается трудно применимым.

Так как задача агента на рынке неликвидного товара применяется нами к моделированию финансового «пузыря», в разделе 1.2. мы излагаем основные способы моделирования этого эффекта. Основными направлениями являются модели с асимметричной информацией, вероятностные модели с гетерогенными ожиданиями, модели гиперинфляции Ф. Кагана и М. Сидравского, модель с перекрывающимися поколениями с деньгами.

Раздел 1.3 посвящен обзору моделей поиска контрагентов и их применение в моделировании рынка недвижимости, обращения денег и посредничества в финансовых сделках.

Во **второй главе** исследуется задача оптимального инвестирования в доходный и бесполезный актив и полезный актив, требующий расходов на его содержание. Рассматривается стохастическая постановка этой задачи в предположении случайного процесса сделок.

Предполагается, что потребитель получает доход в виде процента по сбережениям и от продажи недвижимости, а расходует его на покупку новой недвижимости и обслуживание имеющейся. Особенность описания рынка недвижимости в модели состоит в предположении о его неполной ликвидности. Агент не всегда может сразу продать то, что он имеет или найти подходящую покупку. Ему приходится ждать момента, когда он может осуществить сделку. Пусть  – величина покупки (при ) или продажи (при ) недвижимости, если сделка происходит в момент . В этот момент объем недвижимости агента  скачком меняется на величину , а сбережения  опять-таки скачком изменяются на величину . Здесь  – текущая цена недвижимости. Функция  предполагается неслучайной, настолько гладкой, насколько потребуется, отделенной от 0 и не слишком быстро растущей при . Самосогласованность предположения о неслучайном характере цены обосновывается в гл. 3.

Согласно принципу рациональных ожиданий считается, что агент знает правильный прогноз этой цены на все будущее время. Остальные цены, которые появятся в модели, считаются постоянным.

В промежутках между сделками недвижимость не изменяется, а сбережения растут за счет непрерывного начисления процента по фиксированной ставке . Кроме того, считаем, содержание недвижимости требует непрерывных расходов ,

В рамках модели агент выбирает только величину  – величину покупки / продажи если  – возможный момент сделки. Если считать, что время ожидания следующей сделки не зависит от  и  и того, сколько эту сделку уже ждали, то можно считать, что моменты сделок образуют пуассоновский поток  с частотой . Этот процесс имеет кусочно-постоянные реализации, которые мы будем считать непрерывными слева. Ассоциированный с процессом  поток σ-алгебр обозначаем через , а естественную меру на – через . Все встречающиеся ниже ожидания являются интегралами именно по этой мере.

Назовем неупреждающим управлением  процесс, измеримый относительно с непрерывными слева реализациями, ограниченными на каждом конечном интервале и измеримый относительно 


Теперь динамику состояния агента ,  можно описать стохастическими дифференциальными уравнениями

,
,
,   , .

В качестве решений - мы снова рассматриваем непрерывные слева случайные функции  и 

 , .
Процесс, описываемый уравнениями - можно реализовать и непрерывными справа функциями. Все зависит от того, как определить значения на разрыве для исходного «генератора случайности» – кусочно-постоянной функции . Содержательно эти процессы отвечают разным условиям информированности агента: Процесс, непрерывный слева, который мы и будем изучать, соответствует ситуации, когда агент выставляет объявлении о продаже или покупке недвижимости (возможно, меняя условия каждый день), но когда появляется контрагент, сделка заключается согласно объявлению. Так происходят, например, сделки на бирже, работающей по правилу двойного аукциона. В случае процесса, непрерывного справа объявление играет роль рекламы, а определение объема сделки происходит по факту появления контрагента.

Процесс непрерывный справа (с торгом по факту сделки) содержательно может показаться более реалистичным, и такой подход широко распространен в моделировании скачкообразных процессов. Однако при увеличении частоты продаж модель с торгом по факту сделки приводит к тривиальной и нереалистичной динамике детерминированной задачи. В то же время процесс непрерывный слева при увеличении частоты продаж имеет нетривиальный предел, который мы и предлагаем рассматривать как модель рынка недвижимости в гл 3.

На выбор неупреждающего управления  наложены еще два естественных ограничения. Первое состоит в том, чтобы недвижимость оставалась неотрицательной, причем, очевидно, достаточно требовать этого только в начале процесса и после каждой сделки

,
где  начало процесса или момент сделки.

Второе связано с ограничением на . Мы, предполагаем, что агент ведет себя достаточно осторожно, чтобы не допустить неограниченного роста задолженности. Предположим, что задан сколь угодно большой, но конечный, лимит кредитования 

**Утверждение****1.** Если неупреждающее управление  обеспечивает неотрицательность недвижимости , то превышение лимита кредитования, т.е. событие


при некотором , имеет нулевую вероятность тогда и только тогда, когда

,
где  начало процесса или момент сделки.

В отличие от сбережений величина богатства потребителя


не изменяется в результате сделки, поэтому ее удобно использовать в качестве фазовой переменной вместо . Выразив сбережения  через , и подставив в , получим уравнение динамики богатства

, ,
которое представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение при каждой реализации скачкообразного случайного процесса .

**Утверждение****2.** При выполнении условий кредитоспособности

,  .

Условие кредитоспособности в новых переменных , дает вместе с требование на начальные условия

 
и

.

Формально для потребителя вопрос сводится к выбору трех неупреждающих процессов , удовлетворяющих условиям , , , реализации которых принадлежат


При этом начальные условия  фиксированы и удовлетворяют ограничению кредитоспособности.

Считаем, что интересы потребителя заключается в максимизации ожидаемой полезности от обладания недвижимостью  Мы рассматриваем случай полезности с постоянным относительным отвращением к риску (CRRA)

,  .
Такая функция полезности часто встречается в анализе финансовых рынков и формирования оптимального портфеля. Из следует, что при  функционал


определен для любого неотрицательного , .

В разделе 2.3 формулируются достаточные условия оптимальности. Для этого определяется функционал Лагранжа и входящие в него интегралы.

Обозначим через ,  знаконеопределенные множители Лагранжа к ограничениям-равенствам , , а через , – неотрицательный множитель Лагранжа к левому ограничению-неравенству в . Функционал Лагранжа для задачи потребителя тогда формально имеет вид

.
 Мы здесь не «снимаем» множителем Лагранжа правое ограничение в . Оно должно выполняться автоматически в силу того, что . Р.Т. Рокафеллар и Р. Ж. – Б. Веттс предложили включать в функционал Лагранжа ограничения неупреждения типа второго равенства в . Мы этого не делаем, поскольку при использовании достаточных условий надо обязательно искать двойственные к этим ограничениям.

Чтобы придать функционалу  строгий смысл, надо определиться с классом, в котором ищутся двойственные переменные. Будем искать их как достаточно гладкие функции от, . Поэтому считаем, что

, .
При таком определении множители Лагранжа, как функции времени оказываются непрерывными справа, причем эти функции могут иметь разрывы только в точках скачка процесса . Что же касается , то указанное ниже условие дополняющей нежесткости можно трактовать как конечное уравнение выражающее  через , поэтому для него естественно ожидать непрерывности слева. В любом случае, все функции в считаются однозначными, кусочно-непрерывными и ограниченными. Тогда интегралы по ,  и  можно понимать в следующем смысле:

 ,
 где  – кусочно-непрерывные функции, которые имеют на отрезке  конечное число разрывов первого рода в точках , , , , причем  – дифференцируема между разрывами.

Хотя формула интегрирования по частям для , вообще говоря не верна, в том специальном случае, который нам понадобится она имеет место.

**Утверждение** **3.** Если  – непрерывна слева, а  – непрерывна справа, а между разрывами обе функции гладкие, и  не являются точками их разрыва то для выполняется соотношение

.

**Утверждение** **4.** Пусть  – измеримые относительно меры  процессы (неважно неупреждающие или нет) с кусочно-непрерывными (неважно справа или слева) экспоненциально ограниченными реализациями, причем реализации  могут иметь разрывы только в моменты  скачков процесса , а в промежутках  имеет производную . Тогда

,
где  ожидание при условии, что в момент  происходит событие пуассоновского потока . Оно определено корректно, поскольку  – марковский момент.

С учетом этих утверждений формулируются утверждения относительно седловой точки функционала Лагранжа.

**Утверждение** **5.** Пусть для некоторых непрерывных справа (не обязательно неупреждающих) процессов , , , таких что интеграл в с учетом определения сходится при всех , найдется тройка неупреждающих процессов , удовлетворяющих заданным начальным условиям на , которые

а) доставляют максимум функционалу Лагранжа

,
по множеству неупреждающих процессов  с реализациями из  с заданными начальными условиями 

b) почти наверное при всех  удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости

,
,
, , .
Тогда  – решение задачи поставленной в разделе 2.2.

Как обычно, при поиске максимума функционала Лагранжа приходится интегрировать по частям, чтобы исключить дифференциалы фазовых переменных. Возможность выполнить эту операцию на бесконечном интервале накладывает дополнительные требования на рост двойственных переменных, заменяющие обычные условия трансверсальности на конечном интервале.

**Утверждение** **6.** Если с вероятностью 1 процессы ,  гладкие между скачками процесса ,  и при некотором  и 

,
где под производными понимаются производные гладких составляющих, то для достаточно выполнения с вероятностью 1 следующих соотношений

,
 ,
 .
 Ниже рассматриваются только оптимальные процессы  поэтому индекс  и «шляпку» в их обозначении опускаем.

В соотношениях - остается учесть выражения

,  ,

.
Между скачками согласно ,

,     ,
поэтому из

,
 .

Заметим, наконец, что как уже отмечалось выше исходя из естественно искать  как неупреждающий непрерывный слева процесс. Правые части всех равенств - являются неупреждающими процессами поэтому знак ожидания по будущему  в - можно опустить. Из , тогда получится, что

.
 Раздел 2.4 посвящен описанию двойственных переменных как функции времени и поиску их в явном виде. Достаточные условия оптимальности формулируются в терминах неслучайных функций состояния.

Поскольку реализации процесса  блуждают по всему фазовому пространству, выполнения достаточных условий оптимальности естественно требовать не вдоль траектории, а тождественно по всему пространству состояний. Тогда, считая  функцией состояния,  получаем уравнения для определения двойственных переменных.



,
 ,
 ,

а из ,

, , .
Выражения для двойственных переменных мы ищем в виде производных от некоторой функции (функция Кротова)

 ,  
После подстановки и интегрирования функция трех переменных  выражается через новые неизвестные функции двух переменных  и  в виде


Ограниченное по времени решение уравнения  представлено первыми двумя слагаемыми в , поэтому полагаем . Что же касается оставшейся неизвестной функции , исходя из вида функции полезности, ищем их в виде

, ,   
Отсюда следует, что

 ,   .
В предположении соотношения - принимают вид

 
 
В разделе 2.5 показано существование быстро убывающих двойственных переменных. Соотношения , должны определить две функции времени  и . Эти соотношения можно свести к одному уравнению


где

.

**Утверждение** **7.** Если измеримая  ограничена, то при достаточно большом Λ функция  строго вогнута, дифференцируема по  при 

,
причем

.
Уравнение и выражение показывают, что функция  является неподвижной точкой оператора

,
действующего на пространстве  неотрицательных непрерывных функций  с нормой .

**Утверждение** **8.** 

.
Из Утв. следует, что уравнение определяет единственную функцию 

 
а эта функция, в свою очередь, определяет  формулой в .

Зная функции  и , из - получаем искомые выражения двойственных переменных

,
 .
Одновременно мы находим и оптимальную стратегию управления (см. )

.
В разделе 2.5.3 дается оценка роста двойственных переменных вдоль траектории

, ,
где  и  – реализации процессов богатства и количества недвижимости, , при стратегии покупок / продаж недвижимости .

**Утверждение** **9**. Если  достаточно велико, то случайные функции удовлетворяют условиям Утв. .

В **третьей главе** полученное решение задачи отдельного экономического агента применяется к моделированию рынка недвижимости в целом. Раздел 3.1 посвящен выводу приближенного выражения для оптимальной стратегии агента в случае логарифмической полезности и большой частоты сделок. Она получена из соотношений , , определяющих оптимальную стратегию . В них можно выделить предельный случай, в котором стратегия очень просто выражается через состояние и допускает агрегирование для большого числа разнотипных независимых потребителей.

Во-первых, в , не возникает никакой особенности при . Поэтому полагая  мы получим соотношения


 
которые дают приближенное выражение для оптимальной стратегии агента, имеющего функцию полезности

.
Во-вторых, будем считать частоту сделок  много большей, чем остальные параметры модели – , имеющие размерность . В этом случае для оценки интегралов в , можно применить асимптотическое разложение Лапласа. В старшем порядке при  получается уравнение на : . Единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим , служит функция .

Отсюда в силу , получаем приближенное выражение для оптимальной стратегии потребителя в случае логарифмической полезности и большой частоты сделок, которое и будем использовать в дальнейшем

, 
На основе найденной оптимальной стратегии покупки в разделе 3.2 вводится описание групп однородных агентов. Предполагается, что имеется много агентов с одним и тем же предпочтением времени  (и одной и той же полезностью ), примерно одинаковыми начальными значениями сбережений и недвижимости и независимыми потоками моментов сделок с одной и той же частотой . Согласно оптимальной стратегии поведения все они будут действовать одинаково. Такую совокупность агентов называем макроагентом. Сбережения, недвижимость и покупки макроагента суть суммы соответствующих величин по отдельным (микро)агентам, составляющим макроагента. А поскольку это суммы независимых величин одного порядка, по закону больших чисел при достаточно большом числе (микро)агентов, их можно считать детерминированными величинами равными своим средним значениям. В дальнейшем мы будем использовать только средние значения, а не реализации, поэтому для средних значений используем обозначения ,  и . Тогда для динамики средних с учетом получаем

,
 

Наконец, поскольку уравнения - линейны, мы получаем для суммарных показателей макроагента уравнения того же вида. Итак, поведение макроагентов и изменение их состояния описывается детерминированными уравнениями и .

Раздел 3.3 распространяет анализ макроагентов на множество неоднородных торговцев. Теперь предполагается, что совокупность участников рынка распадается на группы, которые можно считать макроагентами. Далее будем говорить только о макроагентах, поэтому приставку «макро-» позволяем себе опускать. Считаем, что агентов (макро) на рынке тоже много. Они могут различаться величиной предпочтением времени  (при одной и той же полезности ). Из следует, что оптимальные стратегии агента существенно различаются в зависимости от соотношения между  и : в каждый момент времени агенты делятся на два класса – те, у кого  и те, у кого .

Агенты первого класса (с небольшими значениями  и ) ведут себя как стандартные **потребители**. Они диверсифицируют распределение своего богатства  между вложениями в полезный актив  и вложениями в доходный актив . Агенты второго класса (с большими значениями  и ) ведут себя как **спекулянты.** Они вкладывают все доступные средства в недвижимость.

В разделе 3.4 строится равновесие рынка полезного актива (недвижимости). Основное наше предположение относительно рынка состоит в том, что ценанедвижимости  в каждый момент времени выравнивает спрос и предложение на эту недвижимость.

 Спрос агентов на недвижимость складывается из суммы величин по всем агентам. Для агентов с малыми , то есть , обозначим сбережения через , недвижимость – через , а покупку недвижимости – через .
Для агентов с большими , то есть , обозначим сбережения через , недвижимость – через , покупку недвижимости – через . Граничным значением параметра δ является то, при котором . Эта граница, которая обозначается *,* выражается в виде


Совокупный спрос на недвижимость в единицу времени составит величину


Предложение недвижимости в модели складывается из двух частей: предложения продаваемой агентами уже имеющейся у них недвижимости (**вторичный рынок**) и предложения новой недвижимости производителями (**первичный рынок**), которое растет с постоянным темпом . Поскольку агенты, выходящие на рынок, продают там всю свою недвижимость, предложение на вторичном рынке в единицу времени составляет величину


 Для анализа рыночного равновесия удобно ввести переменную богатства



Из равенства спроса и предложения с учетом динамики сбережений и количества недвижимости получаем условие равновесия рынка в виде.

 

Траектория равновесной цены зависит от границы предпочтений  по формуле , а сама граница определяется решением уравнения и начального распределения богатства между агентами. В некоторых случаях, траектория цены может иметь вид, изображенный на Рис. 1, характерный для рынка недвижимости, так называемый «пузырь».



*Рис. 1. Асимптотическая оценка динамики  на малом интервале времени – сплошная линия. Численный расчет изменения  - пунктирная линия.*

Важно подчеркнуть, что в рамках данной модели «пузырь» цены является разумным компромиссом (конкурентным рыночным равновесием) между рациональными агентами, предвидящими такую динамику.

В **главе 4** рассматривается модификация предложенной Н. Киотаки и Р. Райтом[[1]](#footnote-1) модели случайных парных обменов с бесконечной номенклатурой неделимых товаров. Модифицированная модель позволяет аккуратно построить управляемый марковский процесс для динамики количества продавцов на рынке и показать, что при фиксированных ценах существует оптимальное с точки зрения участников рынка количество обращающихся на рынке денег. Модель любопытна не только тем, что проливает свет на классический вопрос экономической теории о существовании денег, но еще и тем, что в ней, в отличие от большинства абстрактных моделей, продукты, которыми обмениваются агенты, все время разные. Тем самым, эта модель может рассматриваться как некий прообраз модели экономики с интенсивными инновациями.

В разделе 4.1 процесс обмена в описывается как случайный. При этом в модели Киотаки-Райта предлагается рассматривать континуум агентов, что делает корректное описание случайного процесса обменов чрезвычайно затруднительным. Более того, в модели Киотаки-Райта этот случайный процесс и не описывается, а вместо этого просто постулируются свойства стационарных состояний этого процесса. В данной работе рассматривается вариант модели с конечным числом участников. В этом варианте корректно построен марковский процесс изменения состояния системы и описаны информационные ограничения участников рынка. Исследование такой модели дает новый качественные результат – выявление оптимального количества денег на рынке с фиксированными ценами.

В предлагаемой модели предполагается, что агент в процессе производства изобретает новый продукт, которого еще не было на рынке и его оценка полезности продуктов при этом тоже изменяется.

В разделе 4.2 рассматривается формально сообщество из  идентичных агентов. Каждый агент последовательно производит, обменивает и потребляет единичный объем одного из континуума наименований продуктов. После потребления одного продукта начинается производство другого. Продукты нумеруются точками окружности  длины 2.

*Производство.* В случайный момент времени у агента рождается случайный проект производства единицы одного из продуктов . Полезность
  потребления продукта  зависит убывающим образом от расстояния по окружности  от  до некоторого "идеального" продукта .

Будем считать, что ***представление об***  ***рождается у агента в процессе производства случайно и независимо от*** ** и сохраняется вплоть до следующего акта производства.

*Обмен и потребление.* Агент, произведший продукт не может его просто потребить. Агент обязан выйти с этим продуктом на рынок, обменять его на другой продукт и уже последний потребить.

Обмен происходит между ***случайными парами агентов в случайные моменты времени с обоюдного согласия контрагентов***. Если случайно встретившиеся агенты на обмен не согласны, оба они остаются ждать следующей возможности обмена. Обмены однократные. После совершенного обмена агенты потребляют то, что выменяли и переходят в состояние ожидания следующего проекта производства.

 *Цель деятельности агента.* Обменяв свой продукт  на некий продукт , агент получает полезность  от потребления . Агент оценивает свои действия ***ожидаемой дисконтированной полезностью будущего потребления***.

.
Здесь суммирование ведется по моментам обменов , ожидаемых после текущего момента времени , а  обозначают, соответственно, полученный при обмене в момент  продукт и продукт, который в момент  служит для данного агента целевым. Предпочтения времени  и функции полезности  у всех агентов одинаковы.

Стандартный подход к построению управляемого марковского процесса состоит в том, чтобы задать стратегии агентов, (обменивать или не обменивать продукт) как функций от состояния всей системы и записать уравнение Колмогорова для значений функционалов процесса как функций состояния. Затем следует этап упрощения этого громоздкого описания до более удобного для анализа. Упрощения достигаются за счет рассмотрения частных случаев, соображений симметрии, а, главное, за счет наложения информационных ограничений на стратегии агентов (требований независимости их решений от тех или иных параметров состояния системы).

Здесь мы, в силу крайней громоздкости полного описания, предлагаем пройти этот путь в обратном направлении.

Из общих соображений симметрии и простоты, строим упрощенное описание динамики системы. Это описание будет включать неизвестные заранее параметры, характеризующие поведение агентов.

Ставим задачу оптимального поведения отдельного агента «на фоне» выбранного упрощенного описания системы.

Подбираем информационные ограничения на стратегии агента так, чтобы его оптимальное поведение характеризовалось именно теми параметрами, которые используются в упрощенном описании.

В результате, мы предполагаем, во-первых, информационное ограничение для агента: он не может наблюдать число продавцов на трынке, но может оценить распределение числа продавцов. Для этого выводится уравнение для изменения производящей функции распределения числа агентов на рынке



и его стационарная версия

.

На основе распределения числа торговце на рынке агент выбирает оптимальным образом стратегии обмена товара на деньги и товара на товар. Они определяются из уравнений Беллмана, которые в конце раздела 4.2 и в разделе 4.3 сводятся к двум сравнительно простым уравнениям

,


Рассматривается содержательно наиболее интересный случай, когда агентов в экономике много. Применены асимптотические методы для нахождения приближенного решения уравнений Беллмана при больших . Число покупателей с деньгами  с ростом  растет пропорционально. Это позволяет найти приближенное выражение для производящей функции стационарного распределения числа агентов (раздел 4.4) и далее решать уравнения Беллмана относительно параметров  и , характеризующих выигрыши от бартера и обмена на деньги соответственно (раздел 4.5). Окончательные расчеты были проведены численными методами и показали, что существуют равновесия, в которых обмен на деньги дает больший ожидаемый выигрыш по сравнению с бартером.

**Основные результаты работы**

В результате выполненной работы построены и изучены две модели рыночного обмена, общей чертой которых является то, что агентам приходится ждать возможности сделки неизвестное им заранее случайное время.

1. Для первой модели применены достаточные условия оптимальности для поиска вида оптимальной стратегии поведения торговца не вполне ликвидным товаром.
2. С помощью анализа оптимального поведения агента построено приближенное описание рыночного равновесия, в котором даже в условиях полного предвидения может наблюдаться динамика цены, напоминающая рыночный пузырь.
3. Во второй модели корректно построен марковский процесс для динамики распределения торговцев на рынке. Решение задачи оптимального поведения торговцев на рынке позволяет описать возникающее рыночное равновесие и выяснить, что оно существенно зависит от количества торговцев с деньгами. Показано, что возможно равновесие, в котором деньги приносят большую полезность в сравнении с бартером.
4. **Список публикаций по теме диссертации**
5. **A. Zhukova “Agent-based stochastic model of monetary and barter exchange”, Post-Proceedings of AESCS’07 workshop, Springer, 2009, стр.274-290. (в соавторстве с Поспелов И.Г.).**
6. А.А.Жукова, Тезисы доклада «Модель случайного обмена товарами в системе с большим числом агентов». Материалы конференции “Физика и Прогресс 2008”, С-Пб ГУ, стр. 131.
7. Жукова А.А. «Математическая модель финансового пузыря», Труды 51-й научной конференции МФТИ, Часть VII, Том 1.
8. Жукова А.А., Поспелов И.Г. «Модель Финансового Пузыря». IV Всероссийская научная конференция с молодежной научной школой «Математическое моделирование развивающейся экономики» ЭКОМОД-2009 Сборник трудов. Стр. 143-153.
9. Жукова А.А., Поспелов И.Г. «Модель Финансового Пузыря». IV Всероссийская научная конференция с молодежной научной школой «Математическое моделирование развивающейся экономики», ЭКОМОД-2009 Сборник тезисов. Стр. 39.
10. Жукова А.А, И.Г. Поспелов, «Модель оптимального потребления и сбережений при наличии сделок с недвижимостью». VI Московская международная конференция по исследованию операций (ORM 2010), сборник трудов.
11. **Жукова А.А, «Стохастическая модель торговли неликвидным товаром», журнал «Труды МФТИ», том 4, 2012г. (в соавторстве с Поспелов И.Г.).**
12. **Жукова А.А, «Динамическая модель равновесия рациональных ожиданий на рынке не вполне ликвидного товара», журнал Управление Экономическими Системами, раздел «Математические и инструментальные методы экономики», №2, 2012.**
13. Жукова А.А., «Опыт Моделирования Экономической Динамики Республики Казахстан в Период Мирового Финансового Кризиса», 161 стр. (В соавторстве с Андреев М.Ю., Вржещ В.П., Здановская В.С., Петров А.А., Пильник Н.П., Поспелов И.Г., Хохлов М.А.).
1. Kiyotaki, N. and R. Wright (1993). A Search-Theoretic Approach to Monetary Economics. American Economic Review 83, 63–77. [↑](#footnote-ref-1)