

На правах рукописи

Мулкиджан Алексей Сергеевич

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ЦИКЛИЧЕСКОГО
ПОВЕДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ,
управление и обработка информации
(промышленность)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет путей сообщения» (МИИТ)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор О.В. Дружинина

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Е.А. Гребеников

кандидат технических наук,
доцент Е.Г. Андрианова

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Московский государственный
технический университет гражданской
авиации» (МГТУ ГА)

Защита диссертации состоится « 29 » марта 2012 г. в 16 часов на заседании совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 002.017.03 при ФГБУН Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан « ____ » февраля 2012 г.

Ученый секретарь
совета по защите докторских
и кандидатских диссертаций Д 002.017.03
кандидат физико-математических наук

А.В. Мухин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Развитие методов системного анализа управляемых процессов обусловлено как обширным кругом прикладных задач, так и интенсивным внедрением компьютерной техники. В условиях значительного усложнения структуры проектируемых промышленных систем и управляемых технических процессов перед фундаментальной наукой ставится проблема системного анализа сложных управляемых динамических систем, позволяющего находить условия безопасного их функционирования с учетом влияния параметров системы на ее устойчивость.

Во многих задачах технического характера структура управляемых динамических систем и их параметры известны с некоторой погрешностью, и к числу необходимых требований, предъявляемых к управляемым системам, относится их устойчивость (в том или ином смысле) по отношению к структурным и внешним возмущениям. К таким задачам относятся задачи проектирования и отработки сложных технических систем, например, роботов-манипуляторов и летательных аппаратов.

Для решения задач стабилизации сложных управляемых динамических систем используют упрощение (преобразование) их структурных схем. Наиболее распространенными упрощениями являются декомпозиция, децентрализация и агрегирование. Известно, что подбором обратных связей сложную управляемую динамическую систему можно представить в виде отдельных подсистем. В приложениях встречаются управляемые динамические системы, которые расчленяются на локализованные подсистемы, обладающие определенной степенью автономности в том смысле, что управление может осуществляться на уровне подсистем (на локальном уровне) и на уровне исходной системы (на глобальном уровне). К таким системам относятся математические динамические модели объединенных энергосистем, манипуляционных управляемых динамических систем и других систем.

Для анализа динамических процессов управления техническими системами эффективным является использование теоретического аппарата теории устойчивости и качественной теории динамических систем. Методы, разработанные в трудах А.М. Ляпунова, Н.Е. Жуковского, Н.Г. Четаева, И.Г. Малкина, Н.Н. Красовского, Е.А. Барбашина, В.И. Зубова, А.А. Шестакова и других ученых, позволяют исследовать устойчивость состояний равновесия и предельных циклов в динамических управляемых системах.

Важным методом исследования устойчивости неавтономных управляемых динамических систем является метод предельных уравнений в сочетании с методом функций Ляпунова. Метод предельных уравнений дает возможность использовать для анализа изучаемой системы свойства ее предель-

ной системы и исследовать предельную систему с помощью приемов топологической динамики. Предельные свойства динамических систем изучались, начиная с работ А.М. Ляпунова, А. Пуанкаре, в работах Дж. Селла, З. Артштейна, Дж. Като, А.С. Андреева, А.А. Мартынюка, А.А. Шестакова, И.Г. Башмакова, А.М. Матвиенко и других ученых.

Метод предельных уравнений в сочетании с методом функций Ляпунова применяется также для решения задач оптимальной стабилизации управляемых динамических систем. Способы оптимальной стабилизации управляемых систем различных типов разработаны в трудах Н.Н. Красовского, В.В. Румянцева, А.С. Андреева, В.Н. Щенникова и других ученых. В настоящее время исследования по оптимальной стабилизации направлены на обобщения имеющихся результатов при ослаблении условий, налагаемых на оптимальную функцию Ляпунова. Кроме того, актуальными являются вопросы оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем, используемых в различных областях техники.

Важное значение в задачах анализа динамических систем имеют вопросы существования предельных циклов и автоколебаний. Для двумерной динамической системы циклическое поведение решений рассматривалось, начиная с работ А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, И. Бендиксона, Г. Дюлака, в многочисленных работах отечественных и зарубежных исследователей. В многомерном случае для решения задачи нахождения условий наличия или отсутствия автоколебаний не существует общего метода, хотя ряд частных случаев изучен достаточно детально. Изучение циклического поведения динамических систем представляет интерес в задачах управления техническими процессами и промышленными предприятиями.

Объектом исследования являются нелинейные управляемые динамические системы, моделирующие поведение сложных технических систем и описываемые многомерными дифференциальными уравнениями.

Целью работы является построение алгоритмов стабилизации и разработка теоретических основ методики управления и анализа устойчивости сложных технических систем, включая манипуляционные робототехнические системы, а также анализ циклического поведения и выяснение условий возникновения предельных циклов в динамических системах.

Методы исследования. В диссертации использованы методы системного анализа, теории управления, качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости динамических систем.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые, а также обобщены, дополнены и уточнены известные результаты в теории управления и устойчивости управляемых динамических процессов. Получены условия асимптотической устойчивости экспоненциального и неэкспоненциального типов для состояний равновесия нелинейной автономной динамической

системы, и на основе этих условий предложены алгоритмы анализа устойчивости. Дано развитие комбинированного (на основе сочетания свойств функций Ляпунова и предельных уравнений) метода анализа устойчивости управляемых систем. Предложены алгоритмы оптимальной стабилизации нелинейной управляемой системы. Дано применение алгоритма оптимальной стабилизации к изучению поведения робототехнических систем. Для динамической модели робота-манипулятора на уровне подсистем синтезировано стабилизирующее управление и на уровне исходной системы синтезировано оптимальное управление. Получены новые условия наличия предельных циклов в нелинейных динамических системах.

Практическая значимость. Полученные в диссертации результаты могут найти применение в задачах исследования устойчивости манипуляционных робототехнических и ракетно-космических систем управления, в задачах стабилизации программного движения, в задачах качественного исследования динамики промышленных систем, а также при проектировании, совершенствовании и отработке сложных технических систем, например, ракетно-космических и летательных аппаратов и т.д.

Ряд результатов диссертации получен в рамках работы по гранту РФФИ (проект № 10-08-00826-а) и в рамках госбюджетной научно-исследовательской работы Российской открытой академии транспорта Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).

Достоверность и обоснованность. Достоверность результатов, сформулированных в диссертации, обеспечивается корректностью принятых допущений и строгостью аналитических и качественных методов. Все утверждения диссертации обоснованы, приведены полные обоснования выводов.

Личный вклад автора в проведенное исследование. Представленные на защиту результаты диссертации получены автором самостоятельно. Результаты, опубликованные совместно с другими авторами, принадлежат соавторам в равных долях. Результаты других авторов, которые использованы при изложении, содержат ссылки на соответствующие источники.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на XX межвузовской студенческой конференции «Актуальные проблемы естествознания» Российского государственного открытого технического университета путей сообщения (Москва, 2008 г.); на Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии Российского университета дружбы народов (Москва, 2008–2010 гг.); на XXI Международной студенческой конференции «Актуальные проблемы естествознания. Фундаментальная наука и транспорт» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ) (Москва, 2009); конференции «Управление в технических системах УТС–2010» (Санкт-Петербург, ОАО «Концерн

«ЦНИИ «Электроприбор», 2010 г.); Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» Российского университета дружбы народов (Москва, 2011); III Международной научной конференции «Фундаментальные проблемы системной безопасности и устойчивости», посвященной 50-летию полета первого в мире космонавта Ю.А. Гагарина (ЗАТО ГО «Звездный городок», 2011 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ общим объемом 1,8 п.л., в том числе 5 работ в журналах и изданиях из перечня, рекомендованного ВАК РФ, объемом 1,3 п.л., 3 публикации в сборниках научных трудов и в сборниках тезисов и трудов конференций.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 130 страниц текста и состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего 164 наименования работ отечественных и зарубежных авторов. Работа содержит 3 рисунка. При ссылках на формулы, не входящие в текущий раздел, даются указания на соответствующие главы и разделы.

Краткое содержание работы

Введение содержит обоснование актуальности темы. Дан обзор результатов исследований по теме диссертации, сформулирована цель исследования, охарактеризованы методы исследования, научная новизна и практическая значимость, приведены основные результаты работы. Кроме того, во введении проведен обзорно-сравнительный анализ и дано описание некоторых моделей технических систем, исследование которых можно осуществить разработанными в диссертации методами. В частности, рассмотрена модель функционирования робота-манипулятора, содержащего n звеньев, связанных вращательными либо поступательными сочленениями. Динамическая модель и схема манипуляционного механизма представлена в соответствии с описанием М. Вукобратовича. Описан подход к решению задачи управления, базирующийся на применении децентрализованного управления, когда происходит разделение робототехнической системы на несколько независимых подсистем более низкого порядка, которыми можно управлять в отдельности.

В первой главе «Анализ устойчивости и стабилизация управляемых динамических систем на основе сочетания функций Ляпунова и предельных уравнений» рассмотрены вопросы устойчивости и стабилизации управляемых динамических систем на основе сочетания функций Ляпунова и предельных уравнений.

Согласно основным теоремам метода предельных уравнений, динамической системе вида $\dot{x} = f(t, x)$, $(t, x) \in R^+ \times R^n$, ставится в соответствие сис-

тема вида $\dot{x} = g(t, x)$, $(t, x) \in R^+ \times R^n$, называемая предельной, и целью является по качественным свойствам предельной системы получить заключение о качественных свойствах исходной системы.

Рассмотрена динамическая система, описываемая уравнением вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f \in C(R^+ \times W, R^n), \quad (1)$$

правая часть $f(t, x)$ которого удовлетворяет условиям существования и единственности решения, проходящего через точку (t_0, x_0) и определенного в целом; в (1) через W обозначено открытое множество в R^n .

Наряду с системой (1) рассмотрена система

$$\dot{x} = g(t, x), \quad (2)$$

где $g \in \Omega(f)$, $\Omega(f) ::= \{g \in C(R^+ \times W, R^n) : \exists \{\tau_n\} \subset R^+, \tau_n \rightarrow \infty, \{f_{\tau_n}\} \rightarrow g \text{ в компактно открытой топологии}\}$. Система (2) является предельной в смысле Селла для системы (1). Для решения системы (1) даны условия равномерной асимптотической устойчивости с помощью свойств системы (2), обобщающие условия Дж. Селла и А.А. Шестакова. Изучен вопрос сходимости решений уравнения (1) к множеству $E = \{x : w(x) = 0\}$ при $t \rightarrow \infty$, где $D^+V(t, x) \leq w(x) \leq 0$, V – обобщенная функция Ляпунова, w – непрерывная функция. Получены условия равномерной асимптотической устойчивости неэкспоненциального и экспоненциального типов состояний равновесия системы (1).

Далее в первой главе рассмотрена управляемая система, описываемая системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad g(t, 0, 0) \equiv 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p), \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (3)$$

правая часть которой $g(t, x, u)$ для класса $u = \{u(t, x) : u(t, 0) \equiv 0\}$ управляющих воздействий $u(t, x)$, непрерывных в области $K = J \times M$ ($J = [0, +\infty]$, $M = \{\|x\| < H\}$), удовлетворяет в K условиям существования и единственности решений.

В качестве критерия качества управления рассмотрено условие минимума интеграла

$$I = \int_{t_0}^{\infty} W(t, x[t], u[t]) dt, \quad W \geq 0 \quad (4)$$

среди всех $u(t, x) \in U$. Решение задачи об оптимальной стабилизации состоит в нахождении управляющего воздействия $u = u^0(t, x) \in U$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ системы (3), такого, что для любого другого управления $u = u^*(t, x) \in U$ выполняется неравенство

$$I = \int_{t_0}^{\infty} W(t, x^0[t], u^0[t]) dt \leq \int_{t_0}^{\infty} W(t, x^*[t], u^*[t]) dt$$

при $t_0 \geq 0$; $x^0[t_0] = x^*[t_0] = x_0$; $x_0 \in M_0$; $\bar{M}_0 \subset M$.

Предполагается, что правая часть $g^0(t, x) = g(t, x, u^0(t, x))$ системы (3) для некоторой функции $u = u^0(t, x) \in U$ удовлетворяет условиям прекомпактности. Наряду с системой уравнений

$$\dot{x} = g^0[t, x] \quad (5)$$

рассматривается семейство предельных систем $\{\dot{x} = G(t, x)\}$.

Аналогично функции $W[t, x] = W(t, x, u^0(t, x))$, соответствующей системе (3), сопоставляется семейство предельных к ней функций $\{\lambda(t, x)\}$.

Для решения задачи оптимальной стабилизации используется функция Красовского–Беллмана вида

$$B[V, t, x, u] = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V)^T F(t, x, u) + W(t, x, u).$$

Согласно этапам алгоритма оптимальной стабилизации, для того чтобы управляющее воздействие $u = u^0(t, x)$ решало задачу об оптимальной стабилизации, необходимо: 1) проверить наличие функции $V(t, x) \in C^1(E)$, функций Хана h_1, h_2 , таких что $h_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq h_2(\|x\|)$; 2) для функции Красовского–Беллмана проверить выполнение свойств: $B[V, t, x, u^0(t, x)] = 0$ для управляющего воздействия $u^0(t, x)$ и $B[V(t, x), t, x, u^*(t, x)] \geq 0$ для любого другого $u = u^*(t, x) \in U$; 3) хотя бы для одной предельной пары (G_0, λ_0) к (g_0, W_0) установить, что множество $\{\lambda_0(t, x)\}$ не содержит решений системы $\dot{x} = G_0(t, x)$, кроме $x = 0$.

Далее рассмотрен случай, когда для системы (3) существует неотрицательная функция $V(t, x)$, такая, что $V(t, 0) \equiv 0$, с производной в силу (3) $\dot{V}(t, x) \leq -S(t, x) \leq 0$, и когда в системе (3) приложены дополнительные управляющие силы

$$g_1(t, x, u) = A(t, x)u, \quad u^T = (u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (6)$$

где $m(t, x)$ – $(p \times r)$ -матрица. Критерием оптимальности рассматриваемой управляемой системы

$$\dot{x} = g(t, x) + g_1(t, x, u) \quad (7)$$

является функционал (4) с подынтегральной функцией

$$W(t, x, u) = \alpha(t, x) + u^T R(t, x) u, \quad (8)$$

где $\alpha(t, x)$ – функция, которую необходимо определить, а $R(t, x)$ – определенно-положительная $(r \times r)$ -матрица.

Минимум выражения $B[V, t, x, u]$, составленного для системы (7) с заданной функцией $V = V(t, x)$ и критерием качества (4) и (8), доставляется управляющим воздействием

$$u = u^0(t, x) = -\frac{1}{2}R^{-1}(t, x)A^T(t, x)\nabla V(t, x), \quad (9)$$

при этом функция $\alpha(t, x)$ определяется из соотношения $B[V, t, x, u^0(t, x)] \equiv 0$.

Условия оптимальности функции Ляпунова формулируются следующим образом: если функция $V = V(t, x)$ определенно-положительна и существует хотя бы одна предельная к $(g(t, x) + g_1^0[t, x], W[t, x])$ пара (G, λ) , такая, что множество $\{\lambda(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы $\dot{x} = G(t, x)$, кроме $x = 0$, то функция $V = V(t, x)$ будет оптимальной функцией Ляпунова для системы (7) с критерием качества

$$I = \int_{t_0}^{\infty} (S + \frac{1}{4}(\nabla V)^T AR^{-1}A^T \nabla V + u^T Ru) dt \quad (10)$$

и оптимальным воздействием (9). С помощью (6)–(10) в первой главе разработан алгоритм оптимальной стабилизации нелинейной управляемой системы.

Таким образом, в первой главе на основе учета свойств изучаемых систем и соответствующих предельных систем даны условия равномерной асимптотической устойчивости. Рассмотрен важный для технических приложений вопрос о стабилизации управляемых систем с применением функций Ляпунова и предельных уравнений. Исследование обобщает и алгоритмизирует известные результаты при ослаблении ограничений, накладываемых на оптимальную функцию Ляпунова. Предложены алгоритмы оптимальной стабилизации, которые могут служить основой методики анализа устойчивости сложных технических систем и могут найти применение в задачах проектирования таких технических объектов, как летательные аппараты, роботы-манипуляторы, подвижной состав автомобильного и железнодорожного транспорта и др.

Во второй главе «Алгоритмы оптимальной стабилизации управляемых систем» рассмотрены вопросы оптимальной стабилизации нелинейных многосвязных управляемых систем и разработаны алгоритмы оптимальной стабилизации указанных систем. В главе сформулированы условия оптимальной стабилизации нелинейной управляемой системы общего вида и построен применительно к указанной системе алгоритм оптимальной стабилизации. Далее в главе изучена нелинейная многосвязная управляемая динамическая система вида

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_s) + F_s(t, x) + B_s(t, x_s)u_s \equiv \Phi_s(t, x, u), \quad s = \overline{1, q}, \quad (11)$$

где $x_s \in R^{n_s}$, $u_s \in R^{r_s}$ – управляющие воздействия. Векторные функции $f_s(t, x_s)$, $F_s(t, x)$ и матрицы $B_s(t, x_s)$ размерности $n_s \times r_s$ заданы в области

$$\Omega = \{t, x: t \geq t_0, \|x\| < h, 0 < h = \text{const}\}. \quad (12)$$

Для многосвязной системы (11) предполагается, что

$$x = (x_1^T, \dots, x_q^T)^T, \quad R^{n_1} \oplus \dots \oplus R^{n_q} = R^n, \quad \Phi_s(t, 0, 0) \equiv 0, \\ R^{r_1} \oplus \dots \oplus R^{r_q} = R^r, \quad s = \overline{1, q},$$

и выполнены условия существования и единственности решения.

Кроме того, принято, что для систем

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_s), \quad s = \overline{1, q}, \quad (13)$$

в области (12) существуют непрерывно дифференцируемые функции Ляпунова $v_s(t, x_s)$, $s = \overline{1, q}$, удовлетворяющие теореме Ляпунова о равномерной асимптотической устойчивости. Управляющее воздействие, по аналогии со стабилизацией в критических случаях, представлено в виде

$$u_s(t, x) = u_s^{\text{loc}}(t, x_s) + u_s^{\text{glob}}(t, x),$$

где $u_s^{\text{loc}}(t, x_s)$ – управляющее воздействие на уровне подсистем, а $u_s^{\text{glob}}(t, x)$ – управляющее воздействие на уровне исходной системы. Для системы первого приближения (13) по отношению к системе (11) существует функция Ляпунова $v(t, x) = \sum_{s=1}^q v_s(t, x_s)$, где $v_s(t, x_s)$ – определено-положительные функции

Ляпунова для отдельных подсистем, допускающие бесконечно малый высший предел, полные производные по времени которых вдоль решений соответствующих подсистем (13) суть определено-отрицательные функции. При данных предположениях оптимальная стабилизация применительно к системе (11) осуществляется на основе подхода, разработанного в трудах Н.Н. Красовского и В.В. Румянцева для нелинейных управляемых систем.

С целью решения задачи оптимальной стабилизации на основе функции Ляпунова $v(t, x) = \sum_{s=1}^q v_s(t, x_s)$ введена функция Красовского–Беллмана вида

$$B[v; t, x, u] = \sum_{s=1}^q \left[\frac{\partial v_s(t, x_s)}{\partial t} + (\nabla v_s(t, x_s))^T \times \right. \\ \left. \times (f_s(t, x_s) + F_s(t, x) + B_s(t, x_s)u_s + u_s^T \beta_s(x_s)u) \right] + \Psi(t, x), \quad (14)$$

где $\nabla v_s(t, x_s) = \text{col}\left(\frac{\partial v_s}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v_s}{\partial x_{q_s}}\right)$, $\beta_s(x_s)$ – определенно-положительные симметричные матрицы. При оптимальном управлении и оптимальной функции Ляпунова имеем $B[v^0; t, x, u^0] = 0$, а при всех других управлениях имеем

$$B[v^0; t, x, u] \geq 0.$$

Оптимальное управление следует искать из системы

$$\frac{\partial B}{\partial u_s} = (\nabla v_s(t, x_s))^T B_s(t, x_s) + \frac{1}{2} \beta_s(x_s) u_s, \quad s = \overline{1, q},$$

откуда

$$u_s^0(t, x_s) = -\beta_s^{-1}(x_s) \nabla v_s(t, x_s)^T B_s(t, x_s), \quad s = \overline{1, q}.$$

Введена функция

$$\Psi(t, x) = \sum_{s=1}^q (-w_s(t, x_s) + u_s^{0T} \beta_s(t, x_s) u_s^0 - (\nabla v_s(t, x_s))^T F_s(t, x)),$$

где функции $w_s(t, x_s) = \frac{dv_s}{dt} \Big|_{(13)}$ являются определенно-отрицательными. Если

функция $\Psi(t, x)$ определенно-положительная, то функционал качества управления примет вид

$$J(u^0) = \int_{t_0}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^q (-w_s(t, x_s) + u_s^{0T} \beta_s(t, x_s) u_s^0 - (\text{grad}_{x_s} v_s(t, x_s), F_s(t, x)) + u_s^T \beta_s(t, x_s) u_s) \right) dt.$$

Рассмотрен пример применения метода оптимальной стабилизации для системы вида:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)x_1 + x_1^3 + 2x_1 u, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2\left(1 + \frac{1}{t^3}\right)x_2 + x_2^2, \quad (15)$$

где $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = x_{20}$, $t_0 = 1$. Для подсистем

$$\frac{dx_1}{dt} = -\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\left(1 + \frac{1}{t^3}\right)x_2$$

системы (15) функции Ляпунова выбраны в виде $v_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$, $v_2(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$.

Для исходной системы (15) оптимальная функция Ляпунова имеет вид $v^0(x) = v_1(x_1) + v_2(x_2)$. Функция Красовского–Беллмана записана в виде

$$B[v; t, x_1, x_2, u] = -\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)x_1^2 - \left(1 + \frac{1}{t^3}\right)x_2^2 + x_1^4 + x_2^3 + 2x_1u + u^2 + \Psi(x_1, x_2).$$

Получено, что $u^0 = -x_1$, а $\Psi(t, x_1, x_2) = \left(2 + \frac{1}{t^3}\right)x_1^2 + \left(1 + \frac{1}{t^4}\right)x_2^2 - x_1^4 - x_2^3$. Функция $\Psi(t, x_1, x_2)$ при произвольных $t \geq t_0 \geq 1$, x_1 и x_2 является знакопеременной, а в области $\theta = \{t_0, x_1, x_2 : t \geq t_0 \geq 1, |x_s| < 0,1; s = 1, 2\}$ функция $\Psi(t, x_1, x_2)$ будет определено-положительной.

Алгоритм оптимальной стабилизации применительно к многосвязным управляемым системам вида (11) состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Определить структуру вектора дополнительных сил. В системе (11) это вектор $B_s(t, x_s)u_s$ ($s = \overline{1, q}$). При решении конкретной задачи оптимальной стабилизации вектор дополнительных сил может уточняться.

Для каждой подсистемы

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_s), \quad s = \overline{1, q},$$

известна непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $v_s(t, x_s)$, которая является определено-положительной, допускающей бесконечно малый высший предел, полная производная которой по времени есть либо определено отрицательна, либо знакопостоянна, либо равна нулю.

Шаг 2. Выбрать функцию Ляпунова для исходной системы (11) в виде

$$v(t, x) = \sum_{s=1}^q v_s(t, x_s).$$

Шаг 3. Выписать функцию Красовского–Беллмана вида (14). При оптимальном управлении и оптимальной функции Ляпунова получим $B[V^0; t, x, u^0] = 0$, а при всех других управлениях имеем $B[V^0; t, x, u] \geq 0$.

Шаг 4. Исходя из свойств функции Красовского–Беллмана, составить систему

$$\left. \frac{\partial B}{\partial u_s} \right|_{u_s = u_s^0(t, x)} = 0, \quad s = \overline{1, q},$$

для нахождения оптимального управления $u_s^0(t, x_s)$, $s = \overline{1, q}$.

Шаг 5. Подставить оптимальное управление $u_s^0(t, x_s)$, $s = \overline{1, q}$, в функцию Красовского–Беллмана и найти функцию $\Psi(t, x)$. Если $\Psi(t, x)$ окажется определено-положительной, то задача оптимальной стабилизации

для системы (11) решена. В противном случае задача не имеет решения. Это означает, что вектор дополнительных сил следует уточнить.

Таким образом, во второй главе рассмотрены условия оптимальной стабилизации нелинейных многосвязных управляемых систем, задаваемых многомерными дифференциальными уравнениями. Многосвязные управляемые системы имеют важное прикладное значение в задачах проектирования, отработки и совершенствования сложных технических систем, в частности, манипуляционных робототехнических систем и летательных аппаратов. С прикладной точки зрения представляют значительный интерес построенные во второй главе алгоритмы стабилизации движения системы дополнительными силами при условии минимизации функционала, характеризующего качество управления. При этом функционал качества управления найден не только исходя из технической потребности, но и возможности решения задачи оптимальной стабилизации в замкнутом и достаточно простом виде.

В третьей главе «Анализ циклического поведения нелинейных динамических систем» рассмотрены вопросы существования и устойчивости предельных циклов нелинейных динамических систем и проанализированы условия возникновения предельных циклов. В главе установлены условия наличия и устойчивости предельных циклов нелинейных динамических систем, описываемых многомерными дифференциальными уравнениями в пространстве R^n . Полученные результаты базируются на ослаблении требований об асимптотической устойчивости по Ляпунову и замене этого требования менее жестким требованием о строгой орбитальной устойчивости, использующим репараметризацию движения по траектории. Для периодических траекторий использовано понятие асимптотической фазы.

Рассмотрена динамическая система, описываемая нелинейным многомерным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in G \subset R^n. \quad (16)$$

Предполагается, что уравнение (16) определяет в пространстве R^n динамическую систему, определяемую отображением

$$\varphi_t: G \rightarrow G, \quad G \subset R^n, \quad \varphi_t(x) ::= \varphi(t, x), \quad t \in R ::= (-\infty, +\infty),$$

где а) $\varphi(0, x) = x, \quad x \in G$; б) $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)), \quad t, s \in R, \quad x \in G$;
в) отображение $(t, p) \rightarrow \varphi(t, p)$ непрерывно по (t, p) . Отдельно рассматриваются случай произвольной конечномерной динамической системы (16) и случай двумерной динамической системы (16), т.е. случаи $n > 2$ и $n = 2$. По-

положительное предельное множество $L^+(x)$ точки x определяется равенством $L^+(x) = \{y \in R^n : \exists \{t_n\} \subset R^+, t_n \rightarrow +\infty, \varphi(t_n, x) \rightarrow y\}, R^+ ::= [0, +\infty)$.

Для системы (16) в третьей главе установлены условия существования фазовопритягивающих предельных циклов. Для случая $n=2$ установлено, что для того чтобы положительно компактная незамкнутая траектория непрерывной динамической системы (16) была строго орбитально устойчива, необходимо и достаточно, чтобы ее положительное предельное множество $L^+(p_0)$ было притягивающим предельным циклом.

Для многомерных систем вида (16) изучены также свойства предельных движений строго орбитально устойчивых траекторий. Показано, что предельные движения строго орбитально устойчивых траекторий, являющихся почти периодическими, также обладают свойствами строгой орбитальной устойчивости и почти периодичности.

В четвертой главе «Оптимальная стабилизация программного движения манипуляционной управляемой системы» даны приложения разработанного во второй главе алгоритма оптимальной стабилизации к анализу поведения манипуляционной робототехнической системы. Рассмотрена описанная во введении диссертации модель функционирования робота-манипулятора, содержащего n звеньев, связанных поступательными либо вращательными сочленениями. В манипуляционную систему S входит механическая часть S^m и система приводов S^i . Изучаемая система представлена в виде совокупности отдельных подсистем, связанных между собой. Предполагается, что ни одна из компонент вектора фазового состояния какой-либо подсистемы не выступает одновременно компонентой вектора фазового состояния любой другой подсистемы, т.е. подсистемы не перекрываются.

На первом этапе синтезируется программное управление $u^0(t)$, на втором – управление $\Delta u(t)$, стабилизирующее программный режим манипуляционной системы. Управление выбрано в виде $u(t) = u^0(t) + \Delta u(t)$. Программный режим, отвечающий $u^0(t)$, обозначается через $x^0(t) = x^0(t, x^0(0))$, где $x^0(0, x^0(0)) = x^0(0)$, $t \in T \subset R^+$.

Синтез управления в главе осуществлен с помощью динамической модели, описывающей отклонения состояния системы S от номинальной траектории $x^0(t)$. Такая модель определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} S : \Delta \dot{x} &= \bar{A}^0(\Delta x, t) + \bar{B}^0(\Delta x, t)N(t, \Delta u), \\ \Delta x(0) &::= x(0) - x^{(0)}(0), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta x \in R^N$ – вектор отклонений состояния системы от номинальной траектории, т.е. $\Delta x(t) ::= x(t) - x^0(t)$, $\Delta u \in R^n$ – вектор отклонения управления от программного входного сигнала, т.е. $\Delta u(t) ::= u(t) - u^{(0)}(t)$, $\bar{A}^0(\Delta x, t) ::= \hat{A}(x) - \hat{A}(x^0(t)) + [B(x) - B(x^0(t))]u^0(t)$, $\bar{B}^0(\Delta x, t): R^N \times R^+ \rightarrow R^{N \times n}$ – функциональная матрица размерности $N \times m$, определяемая как $\bar{B}^0(\Delta x, t) ::= \hat{B}(x) - \hat{B}(\Delta x + x^0(t))$. Нелинейность $N(t, \Delta u)$ является нелинейностью типа амплитудного насыщения. Задача стабилизации сведена к задаче синтеза управления $\Delta u(t)$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость положения равновесия системы (17).

Для динамической модели манипуляционной робототехнической системы на локальном уровне стабилизирующее управление u^{loc} моделируется так, чтобы подсистемы были асимптотически устойчивыми. Согласно теореме обращения для системы первого приближения существует функция Ляпунова, удовлетворяющая теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости. В частности, этой функцией Ляпунова может служить функция, являющаяся суммой функций Ляпунова для подсистем. Взаимосвязи исходной системы, куда входит и глобальное управление u^{glob} , трактуются как дополнительные силы. При этом подынтегральная функция функционала и оптимальное управление на глобальном уровне определяются так, чтобы известная функция Ляпунова для системы первого приближения была оптимальной функцией Ляпунова на глобальном уровне.

Разработанный алгоритм оптимальной стабилизации многосвязных систем позволяет осуществить оптимальную стабилизацию (в отличие от применявшейся ранее субоптимальной стабилизации) конкретных классов манипуляционных робототехнических систем.

В главе осуществлен синтез управления для манипулятора с помощью децентрализованного управления на базе декомпозиции исходной системы. Синтезировано управление на локальном уровне и выяснено, какой вид должна иметь подынтегральная функция в критерии качества с учетом того, что соответствующие подсистемы асимптотически устойчивы. Рассмотрен иллюстрирующий пример.

Полученные условия устойчивости и построенные алгоритмы оптимальной стабилизации могут служить теоретической основой методики анализа устойчивости и оптимальной стабилизации при проектировании и совершенствовании управляемых технических систем.

В заключении диссертации сформулированы основные результаты, выносимые на защиту:

1. Получены условия асимптотической устойчивости и разработаны алгоритмы оптимальной стабилизации нелинейных управляемых систем. Разработан комбинированный метод исследования устойчивости и стабилизации нелинейных управляемых динамических систем, базирующийся на сочетании свойств функций Ляпунова и предельных уравнений.

2. Дана модификация метода оптимальной стабилизации для случая многосвязных управляемых систем. Построен алгоритм оптимальной стабилизации многосвязной системы управления. Разработаны теоретические основы методики анализа устойчивости и оптимальной стабилизации в моделях, описывающих функционирование манипуляционных робототехнических систем.

3. Дано применение модифицированного метода оптимальной стабилизации многосвязных систем к синтезу управления манипуляционной системой, для которой выяснен вид подынтегральной функции в критерии качества с учетом того, что соответствующие подсистемы асимптотически устойчивы.

4. Получены условия наличия предельных циклов в нелинейных динамических системах общего вида. Установлен необходимый и достаточный признак существования притягивающего предельного цикла для двумерной автономной динамической системы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

а) публикации в рецензируемых журналах и изданиях

1. Мулкиджан А.С. О циклических свойствах траекторий нелинейных динамических систем // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С. 154–158.

2. Мулкиджан А.С. Применение моделей с флуктуациями при разработке методов и технологий управления промышленными предприятиями // Наукоемкие технологии. 2010. Т. 11. №2. С. 53–58.

3. Шестаков А.А., Мулкиджан А.С. Исследование устойчивости и стабилизация нелинейных управляемых систем на основе функций Ляпунова и предельных уравнений // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С. 88–98.

4. Щенникова Е.В., Дружинина О.В., Мулкиджан А.С. Об оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С. 99–102.

5. *Леонов А.Г., Мулкиджан А.С.* Анализ устойчивости управляемых систем на основе обобщенных уравнений в вариациях // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С. 69–74.

б) прочие публикации в научных периодических изданиях и в трудах научных конференций

6. *Климачкова Т.С., Мулкиджан А.С.* Об управлении технической устойчивостью и стабилизация динамических систем на конечном интервале времени // Фундаментальные проблемы системной безопасности: Сб. статей. Вып. 2 / Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН. М.: Вузовская книга, 2009. С. 264–268.

7. *Мулкиджан А.С., Дружинина О.В.* Устойчивость динамических моделей промышленных и технических процессов управления // Материалы конференции «Управление в технических системах» (УТС-2010). СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон». 2010. С. 171–174.

8. *Мулкиджан А.С.* Исследование математических моделей, описывающих циклические процессы промышленного производства // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» М.: Российский университет дружбы народов, 2011. С. 268–270.