

На правах рукописи

Шомполова Ольга Игоревна

Оптимальное управление линейными системами с нерегулярными
смешанными ограничениями и определение геометрии оптимальной
траектории

Специальность 05.13.01 – Системный анализ,
управление и обработка информации (промышленность)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2012

**РАБОТА ВЫПОЛНЕНА В ФЕДЕРАЛЬНОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ БЮДЖЕТНОМ
УЧРЕЖДЕНИИ НАУКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
В ОТДЕЛЕ ПРИКЛАДНЫХ ПРОБЛЕМ ОПТИМИЗАЦИИ**

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
профессор В.В. Дикусар

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор

Гурченков А.А.

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Бирюков А.Г.

Ведущая организация:

Федеральное Государственное Бюджетное
Учреждение Науки ЦЭМИ Российской
Академии Наук

Защита состоится « 01 » марта 2012 г. в 15 часов на заседании совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 002.017.03 при Федеральном Государственном Бюджетном Учреждении Науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН.

Автореферат разослан « » 2012 г.

Ученый секретарь совета по защите докторских
и кандидатских диссертаций Д 002.017.03
кандидат физико-математических наук



А.В. Мухин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Предложен двухэтапный метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями. На первом этапе решается дискретная задача (системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и несобственные задачи линейного программирования (ЛП)), на основе методов факторного анализа. Далее формулируется гипотеза о геометрии оптимальной траектории, то есть выделяются промежутки времени постоянства множества номеров активных ограничений. На втором этапе сформулированная гипотеза проверяется аналитически с использованием принципа максимума Понтрягина и формализма Дубовицкого-Милютина. Приведен пример использования данной схемы для решения модельной задачи оптимального управления долгом промышленного предприятия. Показана процедура формирования и проверки гипотезы о геометрии оптимальной траектории. Приведены оценки погрешностей численного решения, полученного на первом этапе.

Актуальность темы

Исследуемые в диссертации СЛАУ являются несовместными, а задачи ЛП – несобственными. Хорошо известно, что совместность или несовместность линейных моделей, заданных системами уравнений, неравенств или смешанными системами уравнений и неравенств представляют собой фундаментальные свойства, связанные так называемыми теоремами об альтернативах – классической основой теорем существования решений задач оптимизации и возможным инструментом их эффективного численного решения, развитым в работах Бирюкова А.Г., А.И. Голикова, Дикусара В.В., Ю.Г.Евтушенко, Жадана В.Г., Капорина И.Е., Посыпкина М.А., Чекарева Д.А., Умнова Е.А., Умнова Е.Е. и др. Метод штрафных функций и функций Лагранжа является универсальным средством решения экстремальных задач различной природы.

Актуальность исследования несобственных математических объектов была хорошо обозначена И. И. Ереминым, в частности, он указал, что в теории математических моделей и классов задач прослеживается эволюция в сторону ослабления требований, накладываемых на исследуемый математический объект. Возникает последовательность постановок задач: единственность решения и устойчивость; единственность, неустойчивость (некорректность); неединственность и неустойчивость; несобственность; несобственность и плохая формализуемость; гибкое моделирование и т.д.

Несовместная (несобственная) модель не позволяет получить содержательную информацию об исследуемом процессе или явлении непосредственно. Для этой цели требуется исправление модели и ее коррекция. Виды и способы коррекции могут быть различными. Наиболее общая форма коррекции заключается в изменении коэффициентов левых и правых частей соответствующих уравнений и неравенств. Соответствующую коррекцию называют матричной. Систематическое исследование несобственных задач линейного и выпуклого программирования было начато в 70-х гг. прошлого столетия И. И. Ереминым и его учениками. В работах Н.Н. Астафьева, А.А. Ватолина, В.Д. Мазурова, Л. Д. Попова, В.Д. Скарина, С.П. Трофимова, В.Н. Фролова и др. рассматривались несобственные задачи линейного и выпуклого программирования, проводилась классификация, строилась и исследовалась теория двойственности. При этом вводились и исследовались дискретные аппроксимации решений, т.н. комитетные конструкции. Отметим, что в большинстве исследований рассматривалась коррекция по вектору правой части ограничений и коэффициентом вектора целевой функции.

Матричная коррекция впервые была рассмотрена в работах А.А. Ватолина. Исследования А.А. Ватолина были продолжены в ВЦ им. А.А. Дородницына РАН и МПГУ В.А. Гореликом и его учениками: В. А. Кондратьевым, О.В. Муравьевым, Р.Р.

Ибатулиным, Р.В. Печенкиным, В.И. Ерохиным и др. Указанными авторами были уточнены результаты А.А. Ватолина. В методах матричной коррекции остались нерешенными очень многие важные проблемы. Первая проблема связана с неединственностью решения задачи матричной коррекции. Естественно, что в прикладных задачах важна единственность и устойчивость решения скорректированной линейной модели. Следует признать, что систематизированное исследование указанной проблемы и методов их решения в настоящее время не существует. Другой аспект связан с выбором показателя качества матричной коррекции, который диктуется прикладной задачей. Он, например, связан с некоторой статистической гипотезой (Евклидова норма – нормальное распределение ошибок, чебышевская норма – равномерное распределение, октаэдрическое – наличие случайных выбросов). Указанные обстоятельства влияют на методы исследования и решения задач матричной коррекции.

Цель и задачи исследования

Основная цель исследования состоит в разработке и обосновании методики решения линейных (параметрических) задач оптимального управления со смешанными ограничениями, в получении достаточных условий оптимальности, а также в получении условий устойчивости и сходимости численного решения задач, полученных с помощью метода дискретной аппроксимации в исходной задаче. Алгоритм состоит в сведении линейных задач ОУ к задачам ЛП в конечномерных пространствах. Одной из причин, нарушающих получение решения, может являться недостаточная точность компьютерных вычислений, так как размерность получаемой задачи ЛП исчисляется тысячами переменных, и алгоритм решаемой задачи может быть неустойчивым. Кроме того, в работе преследуется цель показать эффективность в вычислительном плане предложенной методики решения. Для исследования свойств задач ОУ наряду с исходной задачей рассматривается также и связанная с ней специальная задача ОУ. Эта пара задач ОУ сводится к двойственным задачам ЛП в банаховых пространствах.

В соответствии с целью исследования поставлены следующие задачи:

1. разработка численно-аналитических схем решения линейных задач оптимального управления со смешанными ограничениями, основанных на совместном решении пары задач ОУ, сводимых к двойственным задачам ЛП в банаховых пространствах;
2. анализ и приведение к виду, удобному для использования, достаточных условий экстремума в рассматриваемых задачах;
3. обоснование двухуровневого алгоритма решения исходной линейной (параметрической) задачи оптимального управления, на первом уровне которого строится гипотеза о геометрии оптимальных траекторий, а на втором гипотеза проверяется с использованием принципа максимума;
4. компьютерная реализация предлагаемых подходов и исследование их эффективности при решении задач оптимального управления;
5. исследование способов повышения точности приближенных численных решений задачи ОУ, анализ сходимости и устойчивости дискретной аппроксимации исходной задачи;

Объект исследования

Объектом исследования является линейная математическая модель обслуживания долга промышленного предприятия в условиях двухсекторной экономики.

Теоретические и методологические основы исследования

Теоретическую и методологическую основу диссертации составляют труды российских ученых-математиков по методам решения задач ОУ, задач ЛП, методам оптимизации, теории и методов факторного анализа.

Научная новизна исследования

Модифицированы достаточные условия оптимальности линейной задачи ОУ со смешанными ограничениями типа равенства и неравенства в случае исключения ограничений типа равенства уменьшением размерности вектора управлений. Разработана методика на базе факторного анализа, позволяющая решать линейные задачи ОУ со смешанными нерегулярными ограничениями. Основа данной методики заключается в использовании дискретной аппроксимации пары задач ОУ с фазовыми и смешанными ограничениями, после которой получается и решается пара конечномерных задач ЛП с использованием методов факторного анализа. Кроме того, на основе разработанной схемы предложено расширить линейную задачу ОУ со смешанными ограничениями введением в коэффициенты задачи параметров. Дано обоснование сходимости численного решения задачи ОУ со смешанными ограничениями к оптимальному.

Практическая значимость

Модели, методы и алгоритмы, разработанные в исследовании, применялись для решения практических задач оптимального управления в Московском Физико-Техническом институте и в Вычислительном Центре РАН.

Публикации

Основные результаты исследования отражены в 14 публикациях автора общим объемом 6.3 п.л. и 5-и статьях в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, объемом 3.9 п.л. Результаты в совместных работах принадлежат авторам в равных долях.

Апробация работ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проекта 10-08-00624,11-07-00201)

Основные положения исследования докладывались и обсуждались на научных конференциях МФТИ., на международной конференции Computer Algebra Systems in Teaching and Research, 4 International Workshop, CASTR 2007. Siedlce(ПОЛЬША), на научных семинарах в ИСА РАН, ЦЭМИ РАН, ИПУ РАН, ИПМ РАН, ВЦ РАН

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения четырех глав, приложения и заключения. Основное содержание диссертации изложено на 110 страницах печатного текста. Список использованной литературы составляет 60 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во «Введении» изложены обоснование предмета и цели исследования, обзор литературы по данному вопросу и основные результаты, выносимые на защиту, характеристика их научной новизны, практической значимости и апробации полученных

результатов, дается краткое описание моделируемой системы оптимального управления долгом предприятия.

В первой главе «Применение факторного анализа для решения задач линейного программирования» излагаются методы решения некорректных линейных алгебраических систем и несобственных задач линейного программирования с применением факторного анализа.

Основная модель факторного анализа имеет вид:

$$X = Lf + e, \quad X = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad f = (f_1, \dots, f_k)^T, \quad e = (e_1, \dots, e_n)^T \quad (1)$$

Здесь X – вектор-столбец наблюдаемых переменных, f – вектор – столбец общих факторов, e – вектор-столбец специфических факторов, влияющих только на данную переменную. Предполагается, что они не коррелированы как между собой, так и с общими факторами; L – матрица факторных нагрузок.

Неизвестными параметрами факторной модели являются факторные нагрузки и дисперсии специфических факторов. Легко видеть, что число неизвестных значительно превышает число уравнений в (1). По этой причине для их оценки используют информацию, содержащуюся в корреляционной (или ковариационной) матрице. Из (1) следует:

$$R = L\Phi L^* + V, \quad (2)$$

где R – ковариационная (корреляционная) матрица наблюдаемых переменных; Φ – корреляционная матрица общих факторов. Учитывая безразмерный характер общих факторов, дисперсии их без ограничения общности могут быть приняты равными единице; V – ковариационная матрица специфических факторов, являющаяся диагональной. Если сделать предположение о некоррелированности общих факторов между собой, матрица Φ становится единичной, в этом случае получаем классическую модель факторного анализа.

Любой метод факторного анализа требует вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы корреляции, которая является симметричной.

Рассматривается произвольная линейная система

$$AX = B, \quad (3)$$

где A – действительная матрица размером $m \times n$.

Система (3) является совместной, если она имеет, по крайней мере, одно решение, в противном случае – несовместна.

Применение метода регуляризации Тихонова к системе (3) сводится к решению уравнения

$$(A_0 + \delta I)Z = B_0, \quad \delta > 0, \quad A^T A = A_0, \quad A^T B = B_0, \quad A_1 = A_0 + \delta I, \quad (4)$$

где δ – параметр регуляризации, I – единичная матрица.

Вводится множество арифметических векторов размерности n

$$Z_1 = \{10\dots 1\}^T, \quad Z_2 = \{010\dots 0\}^T, \quad \dots, \quad Z_n = \{000\dots 1\}^T. \quad (5)$$

В результате применения оператора A_1 к системе (5) получаем систему, которая представляет собой матрицу наблюдений A_1

$$A_1 = (B_1 B_2 \dots B_n),$$

которая действительна и симметрична, причем ранг A_1 равен n для $\delta > 0$.

Применение факторного анализа (метод главных компонент) дает следующее решение

$$B_j = \sum_{i=1}^p a_{ji} f_i, \quad p \leq n, \quad f_k = \sum_{i=1}^n \beta_{ki} B_i, \quad k = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Здесь f_k является факторами, a_{ij} и β_{ki} коэффициентами факторного решения. Теоретически $p = n$. Любой вектор B_0 представляется в виде линейной комбинации базисных векторов f_k , которые ортогональны с единичной нормой

$$B_0 = \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \dots + \gamma_n f_n, \quad \gamma_k = (B_0, f_k). \quad (7)$$

Подставляя f_k из формулы (6) в выражение (7), получим

$$B_0 = b_1 B_1 + b_2 B_2 + \dots + b_n B_n.$$

Утверждение. Решение системы (4) является линейной комбинацией (5)

$$Z = b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \dots + b_n Z_n. \quad (8)$$

В случае сингулярной матрицы $p < n$ при $\delta = 0$, так как коэффициенты a_{ji} вычисляются по формуле

$$a_{ji} = b_{ji} \sqrt{\lambda_i / \sqrt{b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + \dots + b_{ni}^2}},$$

где λ_i является собственным числом матрицы A_1 и b_{ji} – координаты соответствующего собственного вектора. При фиксированной точности вычисления $p < n$.

Теорема 1. Решение (8) является непрерывной функцией параметра δ . Если система (3) имеет единственное решение, то $p = n$. В противном случае мы имеем нормальное решение (8).

В работе предложен приближенный метод решения некорректных задач ЛП.

Рассматривается задача

$$\begin{aligned} \max(C, X), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad C > 0, \quad C \in \mathbb{R}^n, \quad A_1 X = B_1, \\ X \geq 0, \quad A_1 > 0, \quad B_1 \geq 0, \quad A_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad B_1 \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь B_1 и C – положительные вектора, A_1 – положительная матрица (положительны ее компоненты).

Задача (9) записывается в форме, зависящей от скалярного параметра t

$$\begin{aligned} \max t, \quad A_2 X = B_2, \quad (C, X) = t, \\ A_2 = \begin{pmatrix} C \\ A_1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} t \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad X \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Задача (10), вообще говоря, может не иметь решения. В этом случае рассматривается обобщенная задача ЛП

$$\max(t), \quad A_2^* A_2 Y = A_2^* B_2, \quad Y \geq 0, \quad (11)$$

где символ * означает транспонирование. Система (11) всегда совместна.

Вместо задачи (11) рассматривается следующая задача

$$\begin{aligned} \max(t), \quad A_\delta Z_\delta = B, \quad Z_\delta \geq 0, \\ A_\delta = A + \delta E, \quad A_2^* A_2 = A, \quad B = A_2^* B_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Известно, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} Z_\delta = Z_0 \in \{Y\}$, где $\{Y\}$ – множество решений задачи (11).

Решение линейной системы (12) является линейной функцией параметра t

$$Z_\delta = C_1 + t C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (13)$$

Условие $Z_\delta \geq 0$ выполняет неравенство

$$t_1 \leq t \leq t_2. \quad (14)$$

Если решение неограниченно сверху, то $t_2 = \infty$.

Таким образом, оценка решений сводится к решению некорректной линейной системы.

Оценка решения (14) близка к точному решению, когда число свободных параметров задачи (13) невелико.

На базе факторного анализа можно оценить решение задачи ЛП.

Пусть нам дана задача ЛП

$$(C, X) \rightarrow \max, \quad C \in \mathbb{R}^n, \quad (15)$$

$$AX=B, \quad X \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m < n. \quad (16)$$

Предположим, что система (16) совместна, и функционал задачи (15) ограничен на допустимых решениях системы (16).

Рассмотрим строки матрицы A в качестве векторов

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Вообще говоря, векторы $a_i, i = 1, \dots, m$, могут быть линейно зависимы.

Считая теперь векторы $a_i, i=1, \dots, m$, в качестве наблюдаемых величин, мы можем рассматривать матрицу A как матрицу наблюдений в факторном анализе. Для целей нашего анализа вначале достаточно ограничиться методом главных компонент, который дает единственное факторное решение.

В результате применения метода главных компонент факторного анализа к матрице наблюдения A получим следующую зависимость

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1m}a_m, \\ P_2 &= \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{2m}a_m, \\ &\vdots \\ P_k &= \alpha_{k1}a_1 + \alpha_{k2}a_2 + \dots + \alpha_{km}a_m, \quad k \leq m. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $\alpha_{ij}, i=1,...,k, j=1,...,m$ – коэффициенты факторного решения. $P_i, i=1,...,k$ – факторы (обобщенные переменные).

Заметим, что факторы P_i некоррелированы между собой и удовлетворяют условию нормировки

$$(P_i P_j) = 0, \quad i \neq j; \quad (P_i P_j) = 1, \quad i = j. \quad (19)$$

Теперь мы постулируем линейную зависимость вектора C от выделенных факторов. Другими словами, разложим вектор C по базису $P_i, i=1,...,k$

$$C = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \dots + \beta_k P_k. \quad (20)$$

Условие (19) позволяет легко определить коэффициенты разложения по формуле

$$\beta_i = \frac{(C_i P_i)}{(P_i P_i)} = (C_i P_i), \quad i = 1, \dots, k. \quad (21)$$

где P_i вычисляется по формулам (18).

В силу единственности факторного решения коэффициенты β_i , $i=1,...,k$, определяются единственным образом.

Умножим теперь скалярно левую и правую части уравнения (20) на вектор X

$$(C, X) = \beta_1(P_1, X) + \beta_2(P_2, X) + \dots + \beta_k(P_k, X). \quad (21)$$

Скалярное произведение (P_i, X) , $i=1, \dots, k$, можно вычислить из системы (18). Действительно,

$$(P_i, X) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(a_j, X) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} b_j, \quad i = 1, \dots, k. \quad (22)$$

В результате получаем оценку

$$(C, X) = \beta_1 \sum_{j=1}^m \alpha_{1j} b_j + \beta_2 \sum_{j=1}^m \alpha_{2j} b_j + \dots + \beta_k \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} b_j. \quad (23)$$

Здесь b_i – компоненты вектора B (16).

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. Если в системе (16) матрицу A трактовать как матрицу наблюдений в методе главных компонент факторного анализа, то в результате получаем оценку вида (23).

Вторая глава «Принцип максимума для линейных систем со смешанными ограничениями» посвящена постановке задачи ОУ со смешанными ограничениями, для которой формулируются необходимые условия оптимальности с использованием принципа максимума Понтрягина и формализма Дубовицкого–Милютина. Рассматриваются линейные задачи ОУ со смешанными ограничениями как частный случай задачи ОУ [8-10]. В работе [10] принцип максимума был доказан для нерегулярных смешанных ограничений. Это означает, что сопряженные переменные содержат меру сосредоточенную на множестве фазовых точек. Здесь в целях простоты изложения выписан только регулярный принцип максимума [9].

$$\int_0^T (d^T(t)x(t) + e^T(t)u(t))dt + \chi^T x(T) \rightarrow \min_{u \in V(x,t)},$$

при условиях

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t); \quad x(0) = x_0; \quad x(T) \in S,$$

$$S = \{x \in R^n \mid \Pi x + \rho = 0\};$$

$$V(x,t) = \{u \in R^r \mid G(t)x(t) + K(t)u(t) + w(t) \leq 0\},$$

необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$\lambda_j(t)(G(t)\bar{x}(t) + K(t)\bar{u}(t) + w(t))_j = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\psi_0 e^T(t) + \psi^T(t)B(t) + \lambda^T(t)K(t) = 0,$$

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{v \in V(x,t)} (\psi_0 (d^T(t)\bar{x}(t) + e^T(t)v(t)) + \bar{\psi}^T(t)(A(t)x^*(t) + B(t)v(t) + c(t))),$$

где вектор $\psi(t)$ является решением системы уравнений

$$\dot{\psi}^T = -\psi_0 d^T(t) - \psi^T(t)A(t) + \lambda^T(t)G(t)$$

с условиями

$$\psi^T(T) - \psi_0 \chi^T = C^{1T} \Pi.$$

Далее рассматриваются достаточные условия оптимального управления, основанные на методике сведения линейной задачи ОУ со смешанными ограничениями к задаче ЛП в банаховых пространствах. Эти условия приводятся ниже (теорема 1) в терминах пары задач А и Б [8-10].

Рассматриваются две задачи:

Задача А.

Найти управления $u^*(t) \in L_m^\infty[0, T]$, дающие максимум линейному функционалу

$$J(u^*) = x^*(T)\alpha + \int_0^T [x^*(t)a(t) + u^*(t)b(t)]dt \rightarrow \max \quad (24)$$

при следующих ограничениях:

$$\dot{x}^* = x^*A(t) + u^*B(t) + a^*(t), \quad (25)$$

$$x^*(0) = \alpha^*, \quad x^*(T)Q \geq c^*, \quad (26)$$

$$-x^*C(t) + u^*D(t) \leq b^*(t), \quad u^* \geq 0. \quad (27)$$

Матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$ и векторы $a^*(t)$, $b^*(t)$ имеют ограниченные измеримые компоненты. Соответствующие матрицы и векторы имеют следующие размеры: $A[n \times n]$, $B[m \times n]$, $C[n \times r]$, $D[m \times r]$, $Q[n \times q]$, $a^*[n]$, $b^*[r]$, $\alpha[n]$, $c^*[q]$. Векторы с символом * являются строками, без – столбцами.

Задача Б.

Найти управления $v(t) \in L_r^1[0, T]$, $\eta \in R^q$, дающие минимум линейному функционалу

$$J(v) = \alpha^* x(0) - c^* \eta + \int_0^T [b^*(t)v + a^*(t)x] dt \rightarrow \min \quad (28)$$

при следующих ограничениях:

$$-\dot{x} = A(t)x + C(t)v + a(t), \quad (29)$$

$$x(T) = \alpha + Q\eta, \quad (30)$$

$$-B(t)x + D(t)v \geq b(t), \quad v \geq 0. \quad (31)$$

Достаточные условия оптимальности задач А и Б даются следующей теоремой:

Теорема 1. Пусть для некоторых допустимых управлений $\bar{u}^*(t)$ и $\bar{v}(t)$, $\bar{\eta}$ задач А и Б выполнены условия

$$\bar{u}_i^* [-B(t)\bar{x} + D(t)\bar{v} - b(t)]_i = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (32)$$

$$[-\bar{x}^* C(t) + \bar{u}^* D(t) - b^*(t)]_j \bar{v}_j = 0, \quad j = \overline{1, r}; \quad (33)$$

$$[\bar{x}^*(T)Q - c^*]_k \bar{\eta}_k = 0, \quad k = \overline{1, q}, \quad (34)$$

причем первые два равенства выполняются почти при всех t . Тогда $\bar{u}^*(t)$, $\bar{x}^*(t)$ будет оптимальным решением задачи А, а $\bar{v}(t)$, $\bar{\eta}$, $\bar{x}(t)$ будет оптимальным решением задачи Б.

Необходимые условия оптимальности для задачи А можно сформулировать в терминах принципа максимума Понтрягина с использованием сопряженных переменных $\psi(t)$. Связь сопряженных переменных $\psi(t)$ и переменных задачи Б дается утверждениями:

Утверждение 1. Если при допустимом управлении задачи А существует вектор сопряженных переменных $\psi(t)$, константа $\psi_0 < 0$ и векторы множителей Лагранжа $\lambda(t)$, $\mu(t)$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям и краевым условиям для $\psi(t)$, условиям Бласса и условиям дополняющей нежесткости для $\lambda(t)$, $\mu(t)$, то $\lambda(t)$ и $\psi(t)$ являются допустимыми управлением и фазовым вектором задачи Б.

Утверждение 2. Если существуют допустимые управления $u^*(t)$, $v(t)$, η задач А и Б, и они удовлетворяют условиям (32)-(34), то вектор траектории $x(t)$ задачи (28)-(31), соответствующей управлению $v(t)$, является вектором сопряженных переменных $\psi(t)$ задачи (24)-(27) при $\psi_0 = -1$.

На основании утверждений 1 и 2 теорема 1 имеет следующую формулировку:

Теорема 2. Если при данном допустимом управлении $\bar{u}^*(t)$ задачи А существуют число $\psi_0 = -1$, кусочно-гладкая вектор-функция $\psi(t)$, измеримые вектор-функции $\lambda(t) \geq 0$, $\mu(t) \geq 0$ и вектор $\beta \geq 0$ такие, что выполняются условия утверждения 1 и теоремы 1, то $\bar{u}^*(t)$ – оптимальное управление задачи А.

Таким образом, теорема 2 дает возможность использовать сопряженные переменные $\psi(t)$ для доказательства оптимальности полученного решения в задаче ОУ.

В третьей главе «Дискретная аппроксимация линейных задач оптимального управления со смешанными ограничениями» описывается построение конечно-

разностных аппроксимаций для задачи ОУ, приводится двухэтапная схема решения линейной задачи ОУ со смешанными ограничениями и описывается каждый этап схемы. Дискретное решение позволяет сформировать гипотезу о промежутках постоянства по времени множеств активных ограничений. По данной гипотезе строится аналитическое решение прямой и сопряженной задач, находятся времена переключений управлений и проверяются необходимые условия экстремума. Для оценки погрешности, как по функционалу, так и по фазовым переменным, численного решения для метода дискретной аппроксимации рассматриваются задача ОУ:

$$J(u(t)) = \alpha^* x(T) \rightarrow \min, \quad (35)$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (36)$$

$$x(0) = \beta, \quad Qx(T) \geq c, \quad (37)$$

$$C_1(t)x(t) + D_1(t)u(t) \leq b_1(t), \quad (38)$$

задача ЛП, получаемая из задачи ОУ дискретизацией по схеме Эйлера первого порядка точности:

$$J(u) = \alpha^* x^N \rightarrow \min, \quad u = u^0, \dots, u^N, \quad (35a)$$

$$x^{i+1} = x^i + h(A(ih)x^i + B(ih)u^i + f(ih)), \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (36a)$$

$$x^0 = \beta, \quad Qx^N \geq c, \quad (37a)$$

$$u \in U_N = \{u \in R^{r(N+1)} \mid C_1(ih)x^i + D_1(ih)u^i \leq b_1(ih), \quad i = \overline{0, N}\}, \quad (38a)$$

и доказывается следующая теорема:

Теорема 1. Пусть все матрицы и столбцы в условии задачи (35)-(38) кусочно-непрерывны на отрезке $[0, T]$, а функция $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_f на $[0, T]$: $\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq L_f |t_1 - t_2|$. Пусть $u(t) \in U$, $\forall t \in [0, T]$, где U – ограниченное множество. Пусть существует такое допустимое управление $\bar{u}(t)$ задачи, что набор управляющих и фазовых переменных $\bar{u}(t)$, $\bar{x}(t)$ принадлежит ε -сужению $G^{-\varepsilon}(t)$ допустимого множества $G(t)$ с непустой внутренностью при некотором малом $\varepsilon > 0$. Тогда существует решение дискретной задачи ЛП (35a)-(38a) при всех достаточно больших N , и $\lim_{N \rightarrow \infty} g(w_*) = J_*$.

Для задач, в которых смешанные ограничения присутствуют также в виде равенств:

$$x^* C_2(t) + u^* D_2(t) = b_2^*(t), \quad (39)$$

данная теорема оказывается справедливой при выполнении условий теоремы:

Теорема 2. Пусть рассматривается линейная задача ОУ со смешанными ограничениями типа равенства и неравенства (35)-(39). Пусть в любой момент времени можно разрешить все r_2 ограничений типа равенства относительно r_2 из m управлений ($r_2 \leq m$)

$$u_{k_j} = u_{k_j}(x, u, t), \quad j = \overline{1, r_2}. \quad (40)$$

Далее, пусть при подстановке выраженных таким образом u_k в ограничения типа неравенства (4) получаются неравенства относительно $n + m - r_2$ переменных (n переменных x и $m - r_2$ переменных u), причем на оставшиеся управления накладываются условия неотрицательности

$$u_i \geq 0, \quad i \neq k_j, \quad \forall j = \overline{1, r_2}. \quad (41)$$

Получившаяся таким образом задача имеет форму задачи А, следовательно для нее можно сформулировать задачу Б. Пусть для некоторых допустимых управлений

задач A и B выполнены условия теоремы 1, то есть получены оптимальные управления и фазовые переменные задачи A . Тогда подстановкой их в выражения (40) получаются оптимальные управления и фазовые переменные исходной задачи.

В четвертой главе «Минимизация долга промышленного предприятия» дается постановка задачи ОУ долгом предприятия.

Модель описывает двухсекторную экономическую систему, первый сектор которой добывает ресурсы, а второй производит продукцию конечного потребления (фондообразующую). Погашение долга происходит за счет продажи продукции первого сектора. Минимизируемый функционал (долг) $J(x, u) = x_3(100)$, $0 \leq t \leq T = 100$.

Обозначения для количественных характеристик системы

- $x_1(t), x_2(t)$ – суммарный объем инвестиций в секторы 1 и 2 за время $[0, t]$;
- $x_3(t)$ – долг в момент времени t .
- $x_4(t), x_5(t)$ – суммарная амортизация фондов в первом и во втором секторах за время $[0, t]$;
- $\alpha_i, i = 1, 2$ – коэффициент производительности труда в i -том секторе;
- $\beta_i, i = 1, 2$ – коэффициент амортизации фондов в i -том секторе при производстве единицы продукции;
- $u_1(t)$ – поток инвестиций в первый сектор;
- $u_2(t)$ – поток фондообразующей продукции из второго сектора в первый;
- $u_3(t)$ – поток инвестиций во второй сектор;
- $u_4(t)$ – поток фондообразующей продукции второго сектора, направленный на собственное развитие;
- $u_5(t)$ – поток импорта потребительских товаров;
- $u_6(t)$ – объем продукции, производимой первым сектором (на экспорт);
- $u_7(t)$ – объем продукции, производимой вторым сектором (на фондовооруженность секторов и на потребление);
- c_2 – минимальный объем непроемственного потребления;
- κ – коэффициент, служащий для сопоставления внутренних и внешних цен;
- μ_2 – коэффициент, учитывающий необходимость обслуживания долга;

Система дифференциальных уравнений и ограничения задачи

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= u_1 + u_2, & u_{i \min} &\leq u_i \leq u_{i \max}, \quad i = \overline{1, 7}, \\
 \dot{x}_2 &= u_3 + u_4, & u_6 &\leq \alpha_1(x_1 - x_4), \\
 \dot{x}_3 &= \mu_2 x_3 + u_1 + u_3 + u_5 - \kappa u_6, & u_7 &\leq \alpha_2(x_2 - x_5), \\
 \dot{x}_4 &= \beta_1 u_6, & u_2 + u_4 &\leq u_7, \\
 \dot{x}_5 &= \beta_2 u_7, & u_2 + u_4 + c &\leq u_7 + u_5.
 \end{aligned}$$

Значения коэффициентов задачи, начальных и конечных условий

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 = 0.03, & x_1(0) = 25, & u_{i \min} = 0, \quad i = \overline{1,7}, \\
\alpha_2 = 0.03, & x_2(0) = 15, & u_{1 \max} = u_{3 \max} = 0.1, \\
\beta_1 = 0.18, & x_3(0) = 400, & u_{2 \max} = 0.5, \\
\beta_2 = 0.18, & x_4(0) = 0, & u_{4 \max} = u_{5 \max} = 0.3, \\
\kappa_1 = 0.9, & x_5(0) = 0, & u_{6 \max} = u_{7 \max} = 2.0, \\
\mu_3 = 0.002, & x_1(T) - x_4(T) = 25, & c = 0.2. \\
T = 100, & x_2(T) - x_5(T) = 15, &
\end{array}$$

При решении этой задачи проводилась дискретизация как с использованием явных и неявных схем первого порядка точности. Получающиеся задачи ЛП решались с помощью программы "FACTOR"

Программа факторного анализа состоит из основной программы, специальной программы ввода DATA и пяти подпрограмм: CORRE, EIGEN, TRACE, LOAD и VARMX. модифицированной автором для работы под платформой Win32 и позволяющей работать с задачами ЛП с большим числом переменных. Данная программа позволяет удобно описывать и решать дискретные аппроксимации задач ОУ при большом числе точек дискретизации. Решение задачи ЛП показано на рис. 1-4:

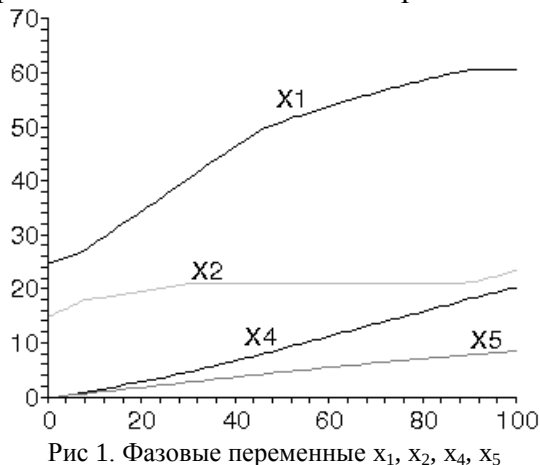


Рис 1. Фазовые переменные x_1, x_2, x_4, x_5

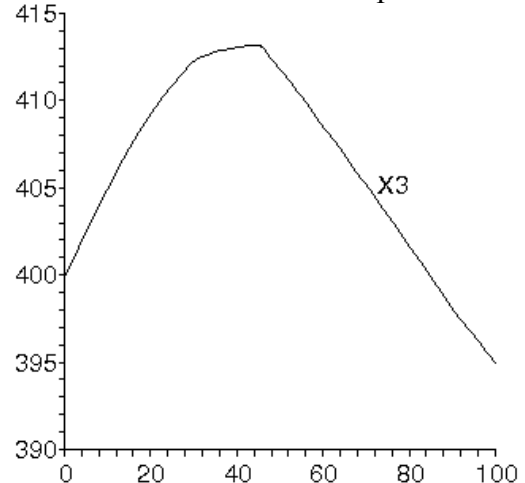


Рис 2. Фазовая переменная x_3

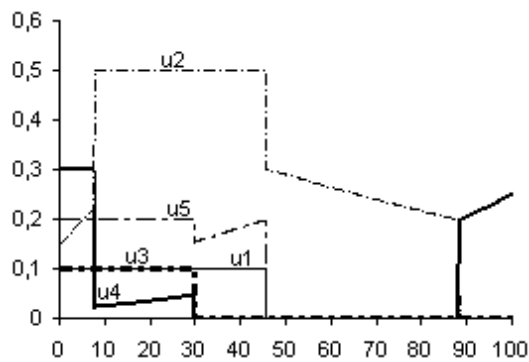


Рис 3. Управления u_1-u_5

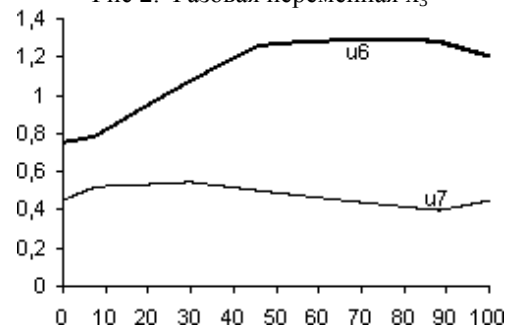


Рис 4. Управления u_6, u_7

Аналитическое решение для данной модели построено на основе принципа максимума Понтрягина. Высказана гипотеза о том, что траектория системы состоит из пяти промежутков постоянства индексов активных ограничений. На каждом промежутке из активных ограничений определялись управления и аналитически решалась задача Коши, при этом момент времени переключения полагался параметром. Сопряженная система интегрировалась справа налево, с параметрами, являющимися моментами времен переключений. Значения времен переключений определялись из решения трансцендентных уравнений, связывающих фазовые переменные и сопряженные

переменные задачи. Вычисления проводились в пакете Maple 9. Полное решение задачи приведено в диссертации. Сопряженные переменные задачи и функция Понтрягина приведены на рис. 5-6:

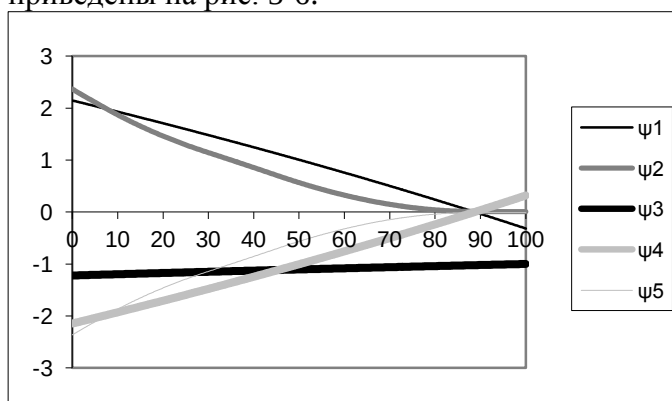


Рис 5. Сопряженные переменные $\psi_1(t)$ - $\psi_5(t)$

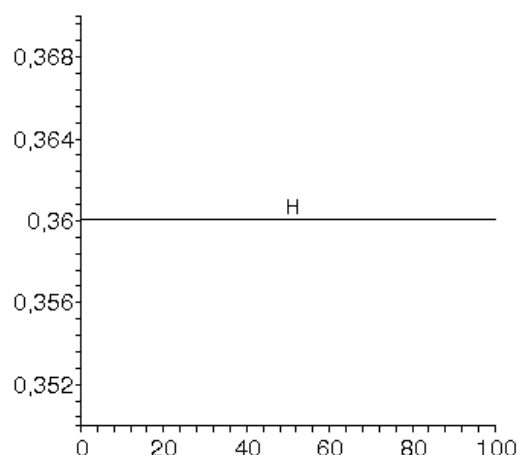


Рис 6. Функция Понтрягина $H(t)$

В приложении приведены примеры обработки матрицы наблюдений по методу факторного анализа.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные результаты проведенного диссертационного исследования следующие:

Разработана методика решения линейных задач оптимального управления с нерегулярными смешанными ограничениями. Данная методика позволяет получить численное решение с применением методов факторного анализа, и, при необходимости, проверить его аналитически.

На основе предложенного подхода:

1. На базе схемы Дубовицкого-Мипюткина и методов факторного анализа создана методика численного решения линейных параметрических задач ОУ со смешанными ограничениями.
2. Разработана система формирования и решения семейства несобственных задач ЛП с различными значениями коэффициентов, позволяющая отслеживать параметры получающихся решений и характеристики процессов решений.
3. Построена линейная модель оптимального управления долгом промышленного предприятия, в которой выполнено расширение посредством введения параметров, и на ее основе решена параметрическая задача ОУ.
4. Предложен модифицированный метод Якоби для вычисления собственных чисел матрицы наблюдений.
5. Проведено исследование устойчивости задач аппроксимации в зависимости от коэффициентов исходной задачи оптимального управления.

Список литературы:

1. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия экстремума в некоторых линейных задачах со смешанными ограничениями. В сб. "Вероятностные процессы и управление". М.: Наука, 1978. С. 42-74.
2. Хачай М.Ю. О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете системы линейных неравенств. Труды 13-й Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск 2005. ИСЭМ СО РАН, 2005, т.1 стр.147-153.
3. Горелик В.А., Ерохин В.И., Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2004. - С. 35-63.
4. Харман Г. Современный факторный анализ М.: Статистика, 1972.
5. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Моллаверди Н. Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности. ЖВМиМФ, 2004, том 44, № 9. С. 1564-1573.
6. Умнов А.Е., Умнов Е.А., Чекарев Д.А. Параметрический двухуровневый метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями. // Моделирование процессов управления: Сб.ст./Моск. физ.-тех. ин-т. – М., 2004. С. 68-73.
7. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование, М.: Факториал, 1998.
8. В.В. Дикусар, Д.А.Чекарев. Численно-аналитический метод решения задач оптимального управления. Препринт. ВЦ РАН, 2004.
9. Тер-Крикоров А.М. Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977.
10. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия экстремума в некоторых линейных задачах со смешанными ограничениями. В сборнике "Вероятностные процессы и управление". М., Наука, 1978.-С.42-74.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Трушин Ю.В., Шомполова О.И. Один итерационный метод решения задачи Коши с большим параметром для систем ОДУ. // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук / Труды XLVIII научной конференции МФТИ. Секция педагогики и информационных технологий - Москва-Долгопрудный, 2005.- С. 25-26.
2. Трушин Ю.В., Шомполова О.И. Некоторые явные схемы численного решения систем ОДУ в задачах с большим параметром. // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук / Труды XLVIII научной конференции МФТИ. Секция педагогики и информационных технологий - Москва-Долгопрудный, 2005.- С. 27-30.
3. Трушин Ю.В., Шомполова О.И. Некоторые явные схемы решения систем ОДУ с большим параметром. Труды Института системного анализа Российской Академии Наук. Динамика неоднородных систем. Выпуск 9(2).-М.: КомКнига, 2005.-С. 146-150.
4. Трушин В.Б., Трушин Ю.В., Шомполова О.И. Свойства одной функции штрафа // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук / Труды 49 научной конференции МФТИ. Ч. VII.- Москва-Долгопрудный, 2006.- С. 12.

- 5 Трушин В.Б., Трушин Ю.В., Шомполова О.И. Сведение задачи линейного программирования к вариационному неравенству // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук / Программа 49 научной конференции МФТИ. - Москва-Долгопрудный, 2006.- С. 152.
- 6 Трушин В.Б., Трушин Ю.В., Шомполова О.И. О монотонности и коэрцитивности одного отображения // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук / Программа 49 научной конференции МФТИ. - Москва-Долгопрудный, 2006.- С. 153.
- 7 Трушин В.Б., Трушин Ю.В., Шомполова О.И. Сведение систем линейных уравнений к вариационному неравенству // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук / Программа 49 научной конференции МФТИ. - Москва-Долгопрудный, 2006.- С. 154.
- 8 Трушин Ю.В., Шомполова О.И. О решении невырожденных систем линейных уравнений методом монотонного штрафа // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук / Труды 50 научной конференции МФТИ. Ч. VII. Управление и прикладная математика. Т.1 - М.: МФТИ, 2007- С. 35 - 38.
- 10 Trushin J.V., Dikusar V.V., Trushin V.B., Shompolova O.I. Solving of Linear Equations with Large Number of Conditions by Means of the Penalty Monotonous Operator // Computer Algebra Systems in Teaching and Research / 4 International Workshop, CASTR 2007. Siedlce, Poland, January 31 - February 3, 2007, Proceedings/ Wydawnictwo Akademii Podlaskiej. Siedlce 2007. P. 79 - 86.
- 11 Дикусар В.В., Шомполова О.И. Применение факторного анализа для решения задач линейного программирования // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 53(3). Вып. 14. Стр. 142 - 153.
- 12 Вуйтович М., Шомполова О.И. Факторный анализ // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 53(3). Вып. 14. Стр. 126 - 141.
- 13 Шомполова О.И. Минимизация долга промышленного предприятия // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 53(3). Вып. 14. Стр. 200 - 208.
- 14 Дикусар В.В., Шомполова О.И. Влияние ценовой неопределенности на спрос импортных товаров // Труды ИСА РАН. 2010. Т. 53. Вып. 14. Стр. 177 - 190.