На правах рукописи

Мулкиджан Алексей Сергеевич

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ЦИКЛИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.01 – Системный анализ,
управление и обработка информации
(промышленность)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2011

Работа выполнена в Московском государственном университете путей сообщения (МИИТ)

Научный руководитель: доктор технических наук, заслуженный машиностроитель А.Г. Леонов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Е.А. Гребеников

кандидат технических наук, доцент Е.Г. Андрианова

Ведущая организация: Московский государственный технический университет гражданской авиации

Защита диссертации состоится «29» декабря 2011 г. в _____ часов на заседании совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 002.017.03 при Учреждении Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН.

Автореферат разослан «29» ноября 2011 г.

Ученый секретарь
совета по защите докторских
и кандидатских диссертаций Д 002.017.03
кандидат физико-математических наук А.В. Мухин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Развитие методов системного анализа управляемых процессов обусловлено как обширным кругом прикладных задач, так и интенсивным внедрением компьютерной техники. В условиях значительного усложнения структуры проектируемых промышленных систем и управляемых технических процессов перед фундаментальной наукой ставится проблема системного анализа сложных управляемых динамических систем, позволяющего находить условия безопасного их функционирования с учетом влияния параметров системы на ее устойчивость.

Во многих задачах технического характера структура управляемых динамических систем и их параметры известны с некоторой погрешностью, и к числу необходимых требований, предъявляемых к управляемым системам, относится их устойчивость (в том или ином смысле) по отношению к структурным и внешним возмущениям. К таким задачам относятся задачи проектирования и отработки сложных технических систем, например, летательных аппаратов.

Для анализа динамических процессов управления техническими системами эффективным является использование теоретического аппарата теории устойчивости и качественной теории динамических систем. Методы, разработанные в трудах А.М. Ляпунова, Н.Е. Жуковского, Н.Г. Четаева, И.Г. Малкина, Н.Н. Красовского, Е.А. Барбашина, В.И. Зубова, А.А. Шестакова и других ученых, позволяют исследовать устойчивость состояний равновесия и предельных циклов в динамических управляемых системах.

Важным методом исследования устойчивости неавтономных управляемых динамических систем является метод предельных уравнений в сочетании с методом функций Ляпунова. Метод предельных уравнений дает возможность использовать для анализа изучаемой системы свойства ее предельной системы и исследовать предельную систему с помощью приемов топологической динамики. Предельные свойства динамических систем изучались, начиная с работ А.М. Ляпунова, А. Пуанкаре, в работах Дж. Селла, З. Артштейна, Дж. Като, А.С. Андреева, А.А. Мартынюка, А.А. Шестакова, И.Г. Башмакова, А.М. Матвиенко и других ученых.

Метод предельных уравнений в сочетании с методом функций Ляпунова применяется также для решения задач оптимальной стабилизации управляемых динамических систем. Способы оптимальной стабилизации управляемых систем различных типов разработаны в трудах Н.Н. Красовского, В.В. Румянцева, А.С. Андреева, В.Н. Щенникова и других ученых. В настоящее время исследования по оптимальной стабилизации направлены на обобщения имеющихся результатов при ослаблении условий, налагаемых на оптимальную функцию Ляпунова. Кроме того, актуальными являются вопросы оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем, используемых в различных областях техники.

Важное значение в задачах анализа динамических систем имеют вопросы существования предельных циклов и автоколебаний. Для двумерной динамической системы циклическое поведение решений рассматривалось, начиная с работ А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, И. Бендиксона, Г. Дюлака, в многочисленных работах отечественных и зарубежных исследователей. В многомерном случае для решения задачи нахождения условий наличия или отсутствия автоколебаний не существует общего метода, хотя ряд частных случаев изучен достаточно детально. Изучение циклического поведения динамических систем представляет интерес в задачах управления техническими процессами и промышленными предприятиями.

Объектом исследования являются нелинейные управляемые динамические системы, моделирующие поведение сложных технических систем и описываемые многомерными дифференциальными уравнениями.

Целью работы является разработка эффективных условий устойчивости и алгоритмов стабилизации поведения сложных технических систем, описываемых многомерными дифференциальными уравнениями, а также анализ циклического поведения и выяснение условий возникновения предельных циклов в динамических системах.

Методы исследования. В диссертации использованы методы системного анализа, теории управления, качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости динамических систем.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые, а также обобщены, дополнены и уточнены известные результаты в теории устойчивости управляемых динамических процессов. Получены условия асимптотической устойчивости экспоненциального и неэкспоненциального типов для состояний равновесия нелинейной автономной динамической системы, и на основе этих условий предложены алгоритмы анализа устойчивости. Дано развитие комбинированного (на основе сочетания свойств функций Ляпунова и предельных уравнений) метода анализа устойчивости управляемых систем. Предложены алгоритмы оптимальной стабилизации нелинейной управляемой системы. Получены новые условия наличия предельных циклов в нелинейных динамических системах.

Практическая значимость. Полученные в диссертации результаты могут найти применение в задачах исследования устойчивости технических систем управления, в задачах стабилизации программного движения, а также при проектировании, совершенствовании и отработке сложных технических систем, например, летательных аппаратов, электростанций и т.д. Результаты качественного исследования моделей процессов с циклическим поведением могут найти применение при разработке методов и технологий управления промышленными предприятиями.

Ряд результатов диссертации получен в рамках работы по гранту РФФИ (проект № 10-08-00826-а) и в рамках госбюджетной научно-исследовательской работы Российской открытой академии транспорта Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).

Достоверность и обоснованность. Достоверность результатов, сформулированных в диссертации, обеспечивается корректностью принятых допущений и строгостью аналитических и качественных методов. Все утверждения диссертации обоснованы, приведены полные обоснования выводов.

Личный вклад автора в проведенное исследование. Представленные на защиту результаты диссертации получены автором самостоятельно. Результаты, опубликованные совместно с другими авторами, принадлежат соавторам в равных долях. Результаты других авторов, которые использованы при изложении, содержат ссылки на соответствующие источники.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на XX межвузовской студенческой конференции «Актуальные проблемы естествознания» Российского государственного открытого технического университета путей сообщения (Москва, 2008 г.); на Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии Российского университета дружбы народов (Москва, 2008−2010 гг.); на XXI Международной студенческой конференции «Актуальные проблемы естествознания. Фундаментальная наука и транспорт» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ) (Москва, 2009); конференции «Управление в технических системах УТС−2010» (Санкт-Петербург, ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2010 г.); Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» Российского университета дружбы народов (Москва, 2011); II Международной конференции «Моделирование нелинейных процессов и систем» (Москва, МГТУ «Станкин», 2011 г.); III Международной научной конференции «Фундаментальные проблемы системной безопасности и устойчивости», посвященной 50-летию полета первого в мире космонавта Ю.А. Гагарина (ЗАТО ГО «Звездный городок», 2011 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ общим объемом 3 п.л., в том числе 5 работ в журналах и изданиях из перечня, рекомендованного ВАК РФ, объемом 1,5 п.л., 4 публикации в сборниках научных трудов и в сборниках тезисов и трудов конференций.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 112 страниц текста и состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 164 наименования работ отечественных и зарубежных авторов. Работа содержит 14 рисунков. При ссылках на формулы, не входящие в текущий раздел, даются указания на соответствующие главы и разделы.

Краткое содержание работы

Введение содержит обоснование актуальности темы. Дан обзор результатов исследований по теме диссертации, сформулирована цель исследования, охарактеризованы методы исследования, научная новизна и практическая значимость, приведены основные результаты работы.

В первой главе «Анализ устойчивости и стабилизация управляемых динамических систем на основе сочетания функций Ляпунова и предельных уравнений» рассмотрены вопросы устойчивости и стабилизации управляемых динамических систем на основе сочетания функций Ляпунова и предельных уравнений.

Согласно основным теоремам метода предельных уравнений, динамической системе вида $\dot{x} = f(t,x)$, $(t,x) \in R^{+} \times R^{n}$, ставится в соответствие система вида $\dot{x} = g(t,x)$, $(t,x) \in R^{+} \times R^{n}$, называемая предельной, и целью является по качественным свойствам предельной системы получить заключение о качественных свойствах исходной системы.

Рассмотрена динамическая система, описываемая уравнением вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f \in C(R^{+} \times W, R^{n}), \tag{1}$$

правая часть $f(t,x)$ которого удовлетворяет условиям существования и единственности решения, проходящего через точку (t_0, x_0) и определенного в целом; в (1) через W обозначено открытое множество в R^n.

Наряду с системой (1) рассмотрена система

$$\dot{x} = g(t,x) \tag{2}$$

где $g \in \Omega(f)$, $\Omega(f) ::= \{g \in C(R^{+} \times W, R^{n}) : \exists\{\tau_n\} \subset R^{+}\}$. Система (2) является предельной в смысле Селла для системы (1). Для решения системы (1) даны условия равномерной асимптотической устойчивости с помощью свойств системы (2), обобщающие условия Дж. Селла и А.А. Шестакова. Изучен вопрос сходимости решений уравнения (1) к множеству $E = \{x : w(x) = 0\}$ при $t \to \infty$, где $D^{+}V(t,x) \le w(x) \le 0$, V – обобщенная функция Ляпунова, w – непрерывная функция. Получены условия равномерной асимптотической устойчивости неэкспоненциального и экспоненциального типов состояний равновесия системы (1).

Исследована равномерная асимптотическая устойчивость состояния равновесия x=0 системы (1) при следующих условиях: 1) для системы (1) множество $\Omega(f)$ компактно, где $\Omega(f)::=\{g\in C(R^{+}\times W,R^{n}):\exists\{\tau_n\}\subset R^{+}\}$, $\tau_n\to\infty$, $\{f_{\tau_n}\}\to g$ в компактно открытой топологии; 2) существуют обобщенная функция Ляпунова $V(x)$ и окрестность W состояния равновесия x=0 системы (1) такие, что $V(0)=0$, $V(x)>0\ \ \forall(x\neq 0)\in W$; 3) для любого $x\in W$ существует выпуклое компактное множество $K(x)\subset R^{n}$ такое, что а) $f(t,x)\in K(x)\ \ \forall t\geq t_0\geq 0$, б) из включения $y\in K(x)$ следует одно из двух условий: $(D^{+}V(x)^{T})\ y<$ или y=0, где $D^{+}V$ – правая верхняя производная Дини; 4) для любого $\delta>0$ существуют числа a>0 и b такие, что $\int\limits_{t_0}^{t}\|f(s,x)\|ds\geq a(t-t_0)+b$ для любого $x\in W$ при $\|x\|\geq\delta$.

Кроме того, получено, что если выполнены вышеуказанные условия 1)–3) и условие: для любого $\delta>0$ существуют числа $a>0$ и c такие, что выполнено неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t}\|f(s,x)\|ds\geq c\exp\{a(t-t_0)+b\}$$

для любого $x\in W$ при $\|x\|\geq\delta$, то состояние равновесия $x=0$ системы (1) равномерно экспоненциально устойчиво.

Далее в первой главе рассмотрена управляемая система, описываемая системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=g(t,x,u),\quad g(t,0,0)\equiv 0,\quad x=(x_1,x_2,\ldots x_p),\quad u=(u_1,u_2,\ldots u_r)\tag{3}$$

правая часть которой $g(t,x,u)$ для класса $u=\{u(t,x):u(t,0)\equiv 0\}$ управляющих воздействий $u(t,x)$, непрерывных в области $K=J\times M$ ($J=[0,+\infty]$, $M=\{\|x\|<H\}$), удовлетворяет в K условиям существования и единственности решений.

В качестве критерия качества управления рассмотрено условие минимума интеграла

$$I=\int\limits_{t_0}^{\infty}W\left(t,x[t],u[t]\right)dt,\quad W\geq 0,\tag{4}$$

среди всех $u(t,x)\in U$. Решение задачи об оптимальной стабилизации состоит в нахождении управляющего воздействия $u=u^{0}(t,x)\in U$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x=0$ системы (3), такого, что для любого другого управления $u=u^{*}(t,x)\in U$ выполняется неравенство

$$I=\int\limits_{t_0}^{\infty}W\left(t,x^{0}[t],u^{0}[t]\right)dt\leq\int\limits_{t_0}^{\infty}W\left(t,x^{*}[t],u^{*}[t]\right)dt$$

при $t_0 \geq 0$; $x^0[t_0] = x^*[t_0] = x_0$; $x_0 \in M_0$; $\bar{M}_0 \subset M$.

Предполагается, что правая часть $g^0(t,x) = g(t,x,u^0(t,x))$ системы (3) для некоторой функции $u = u^0(t, x) \in U$ удовлетворяет условиям прекомпактности. Наряду с системой уравнений

$$\dot{x} = g^0[t,x] \tag{5}$$

рассматривается семейство предельных систем $\{\dot{x} = G(t,x)\}$.

Аналогично функции $W[t, x] = W(t, x, u^0(t, x))$, соответствующей системе (3), сопоставляется семейство предельных к ней функций $\{\lambda(t, x)\}$.

Для решения задачи оптимальной стабилизации используется функция Красовского–Беллмана вида

$$B[V, t, x, u] = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V)^T F(t, x, u) + W(t, x, u).$$

Согласно этапам алгоритма оптимальной стабилизации, для того чтобы управляющее воздействие $u = u^0(t,x)$ решало задачу об оптимальной стабилизации, необходимо: 1) проверить наличие функции $V(t, x) \in C^1(E)$, функций Хана h_1, h_2, таких что $h_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq h_2(\|x\|)$; 2) для функции Красовского–Беллмана проверить выполнение свойств: $B[V, t, x, u^0(t, x)] = 0$ для управляющего воздействия $u^0(t, x)$ и $B[V(t, x), t, x, u^*(t, x)] \geq 0$ для любого другого $u = u^*(t, x) \in U$; 3) хотя бы одной предельной пары (G_0, λ_0) к (g_0, W_0) установить, что множество $\{\lambda_0(t, x)\}$ не содержит решений системы $\dot{x} = G_0(t, x)$, кроме $x = 0$.

Далее рассмотрен случай, когда для системы (3) существует неотрицательная функция $V(t, x)$, $V(t, 0) \equiv 0$, с производной в силу (3) $\dot{V}(t, x) \leq -S(t, x) \leq 0$, и когда в системе (3) приложены дополнительные управляющие силы

$$g_1(t,x,u) = A(t,x)u; \quad u^T = (u_1, u_2, ..., u_r), \tag{6}$$

где $m(t, x)$ – $(p \times r)$-матрица. Критерием оптимальности рассматриваемой управляемой системы

$$\dot{x} = g(t,x) + g_1(t,x,u) \tag{7}$$

является функционал (4) с подынтегральной функцией

$$W(t, x, u) = \alpha(t, x) + u^T R(t, x)\, u, \tag{8}$$

где $\alpha(t,x)$ – функция, которую необходимо определить, а $R(t, x)$ – определенно-положительная $(r \times r)$-матрица.

Минимум выражения $B[V, t, x, u]$, составленного для системы (7) с заданной функцией $V = V(t, x)$ и критерием качества (4) и (8), доставляется управляющим воздействием

$$u = u^0(t,x) = -\frac{1}{2}R^{-1}(t,x)A^T(t,x)\nabla V(t,x), \qquad (9)$$

при этом функция $\alpha(t,x)$ определяется из соотношения $B[V, t, x, u^0(t, x)] \equiv 0$.

Условия оптимальности функции Ляпунова формулируются следующим образом: если функция $V = V(t, x)$ определенно-положительна и существует хотя бы одна предельная к $(g(t, x) + g_1^0[t, x], W[t, x])$ пара (G, λ), такая, что множество $\{\lambda(t, x) = 0\}$ не содержит решений системы $x = G(t, x)$, кроме $x = 0$, то функция $V = V(t, x)$ будет оптимальной функцией Ляпунова для системы (7) с критерием качества

$$I = \int_{t_0}^{\infty}(S + \frac{1}{4}(\nabla V)^T AR^{-1}A^T\nabla V + u^T Ru)dt \qquad (10)$$

и оптимальным воздействием (9). С помощью (6)–(10) в первой главе разработан алгоритм оптимальной стабилизации нелинейной управляемой системы.

Таким образом, в первой главе на основе учета свойств изучаемых систем и соответствующих предельных систем даны условия равномерной асимптотической устойчивости. Рассмотрен важный для технических приложений вопрос о стабилизации управляемых систем с применением функций Ляпунова и предельных уравнений. Исследование обобщает и алгоритмизирует известные результаты при ослаблении ограничений, накладываемых на оптимальную функцию Ляпунова. Предложены алгоритмы оптимальной стабилизации, которые могут служить основой методики анализа устойчивости сложных технических систем и могут найти применение в задачах проектирования таких технических объектов, как летательные аппараты, подвижной состав автомобильного и железнодорожного транспорта и др.

Во второй главе «Алгоритмы оптимальной стабилизации управляемых систем» рассмотрены вопросы оптимальной стабилизации нелинейных многосвязных управляемых систем и разработаны алгоритмы оптимальной стабилизации указанных систем. В главе сформулированы условия оптимальной стабилизации нелинейной управляемой системы общего вида и построен применительно к указанной системе алгоритм оптимальной стабилизации. Далее в главе изучена нелинейная многосвязная управляемая динамическая система вида

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t,x_s) + F_s(t,x) + B_s(t,x_s)u_s \equiv \Phi_s(t,x,u), \quad s = \overline{1,q}, \qquad (11)$$

где $x_s \in R^{n_s}$, $u_s \in R^{r_s}$ – управляющие воздействия. Векторные функции $f_s(t,x_s)$, $F_s(t,x)$ и матрицы $B_s(t,x_s)$ размерности $n_s \times r_s$ заданы в области

$$\Omega = \{t, x: t \geq t_0,\ \|x\| < h,\ 0 < h = \text{const}\}. \qquad (12)$$

Для многосвязной системы (11) предполагаем, что

$$x=\left(x_1^T,\dots,x_q^T\right)^T,\ \ R^{n_1}\oplus\dots\oplus R^{n_q}=R^n,\ \Phi_s(t,0,0)\equiv 0,$$

$$R^{r_1}\oplus\dots\oplus R^{r_q}=R^r,\quad s=\overline{1,q},$$

и выполнены условия существования и единственности решения.

Кроме того, принято, что для систем

$$\frac{dx_s}{dt}=f_s\left(t,x_s\right),\ s=\overline{1,q}, \tag{13}$$

в области (12) существуют непрерывно дифференцируемые функции Ляпунова $v_s(t,x_s)$, $s=\overline{1,q}$, удовлетворяющие теореме Ляпунова о равномерной асимптотической устойчивости. Управляющее воздействие, по аналогии со стабилизацией в критических случаях, представлено в виде

$$u_s(t,x)=u_s^{\mathrm{loc}}\left(t,x_s\right)+u_s^{\mathrm{glob}}(t,x),$$

где $u_s^{\mathrm{loc}}\left(t,x_s\right)$ – управляющее воздействие на уровне подсистем, а $u_s^{\mathrm{glob}}(t,x)$ – управляющее воздействие на уровне исходной системы. Для системы первого приближения (13) по отношению к системе (11) существует функция Ляпунова $v(t,x)=\sum_{s=1}^{q}v_s(t,x_s)$, где $v_s(t,x_s)$ – определенно-положительные функции Ляпунова для отдельных подсистем, допускающие бесконечно малый высший предел, полные производные по времени которых вдоль решений соответствующих подсистем (13) суть определенно-отрицательные функции. При данных предположениях оптимальная стабилизация применительно к системе (11) осуществляется на основе подхода, разработанного в трудах Н.Н. Красовского и В.В. Румянцева для нелинейных управляемых систем.

С целью решения задачи оптимальной стабилизации на основе функции Ляпунова $v(t,x)=\sum_{s=1}^{q}v_s(t,x_s)$ введена функция Красовского–Беллмана вида

$$B[v;t,x,u]=\sum_{s=1}^{q}\left[\frac{\partial v_s(t,x_s)}{\partial t}+\left(\nabla v_s(t,x_s)\right)^T\times\right.$$

$$\left.\times\left(f_s(t,x_s)+F_s(t,x)+B_s(t,x_s)u_s+u_s^T\beta_s(x_s)u\right)\right]+\Psi(t,x), \tag{14}$$

где $\nabla v_s\left(t,x_s\right)=\mathrm{col}\left(\frac{\partial v_s}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial v_s}{\partial x_{q_s}}\right)$, $\beta_s(x_s)$ – определенно-положительные симметричные матрицы. При оптимальном управлении и оптимальной функции Ляпунова имеем $B\left[v^0;t,x,u^0\right]=0$, а при всех других управлениях имеем

$$B\left[v^0;t,x,u\right]\geq 0.$$

Оптимальное управление следует искать из системы

$$\frac{\partial B}{\partial u_s} = (\nabla v_s(t, x_s))^T B_s(t, x_s) + \frac{1}{2}\beta_s(x_s) u_s, \quad s = \overline{1, q},$$

откуда

$$u_s^0(t, x_s) = -\beta_s^{-1}(x_s) \nabla v_s(t, x_s)^T B_s(t, x_s), \quad s = \overline{1, q}.$$

Введена функция

$$\Psi(t, x) = \sum_{s=1}^{q} (-w_s(t, x_s) + u_s^{0^T} \beta_s(t, x_s) u_s^0 - (\nabla v_s(t, x_s))^T F_s(t, x)),$$

где функции $w_s(t, x_s) = \left.\frac{dv_s}{dt}\right|_{(13)}$ являются определенно-отрицательными. Если функция $\Psi(t, x)$ определенно-положительная, то функционал качества управления примет вид

$$J(u^0) = \int_{t_0}^{\infty} (\sum_{s=1}^{q} (-w_s(t, x_s) + u_s^{0^T} \beta_s(t, x_s) u_s^0 - (\mathrm{grad}_{x_s} v_s(t, x_s), F_s(t, x)) +$$
$$+ u_s^T \beta_s(t, x_s) u_s)\, dt.$$

Алгоритм оптимальной стабилизации применительно к многосвязным управляемым системам вида (11) состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Определить структуру вектора дополнительных сил. В системе (11) это вектор $B_s(t, x_s) u_s$ $(s = \overline{1, q})$. При решении конкретной задачи оптимальной стабилизации вектор дополнительных сил может уточняться.

Для каждой подсистемы

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_s), \quad s = \overline{1, q},$$

известна непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $v_s(t, x_s)$, которая является определенно-положительной, допускающей бесконечно малый высший предел, полная производная которой по времени есть либо определенно отрицательна, либо знакопостоянна, либо равна нулю.

Шаг 2. Выбрать функцию Ляпунова для исходной системы (11) в виде

$$v(t, x) = \sum_{s=1}^{q} v_s(t, x_s).$$

Шаг 3. Выписать функцию Красовского–Беллмана вида (14). При оптимальном управлении и оптимальной функции Ляпунова получим $B[V^0; t, x, u^0] = 0$, а при всех других управлениях имеем $B[V^0; t, x, u] \geq 0$.

Шаг 4. Исходя из свойств функции Красовского–Беллмана, составить систему

$$\left.\frac{\partial B}{\partial u_s}\right|_{u_s=u_s(t,x)}=0,\ \ s=\overline{1,q},$$

для нахождения оптимального управления $u_s^0(t,x_s)$, $s=\overline{1,q}$.

Шаг 5. Подставить оптимальное управление $u_s^0(t,x_s)$, $s=\overline{1,q}$, в функцию Красовского–Беллмана и найти функцию $\Psi(t,x)$. Если $\Psi(t,x)$ окажется определенно-положительной, то задача оптимальной стабилизации для системы (11) решена. В противном случае задача не имеет решения. Это означает, что вектор дополнительных сил следует уточнить.

Таким образом, во второй главе рассмотрены условия оптимальной стабилизации нелинейных многосвязных управляемых систем, задаваемых многомерными дифференциальными уравнениями. Многосвязные управляемые системы имеют важное прикладное значение в задачах проектирования, отработки и совершенствования сложных технических систем, в частности летательных аппаратов. С прикладной точки зрения представляют значительный интерес построенные во второй главе алгоритмы стабилизации движения системы дополнительными силами при условии минимизации функционала, характеризующего качество управления. При этом функционал качества управления найден не только исходя из технической потребности, но и возможности решения задачи оптимальной стабилизации в замкнутом и достаточно простом виде.

В **третьей главе** «Анализ циклического поведения нелинейных динамических систем» рассмотрены вопросы существования и устойчивости предельных циклов нелинейных динамических систем и рассмотрены примеры динамических систем, в которых выяснены условия возникновения предельных циклов. В главе установлены условия наличия и устойчивости предельных циклов нелинейных динамических систем, описываемых многомерными дифференциальными уравнениями в пространстве R^n. Полученные результаты базируются на ослаблении требований об асимптотической устойчивости по Ляпунову и замене этого требования менее жестким требованием о строгой орбитальной устойчивости, использующим репараметризацию движения по траектории. Для периодических траекторий использовано понятие асимптотической фазы.

Рассмотрена динамическая система, описываемая нелинейным многомерным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in G \subset R^n. \qquad (15)$$

Будем считать, что уравнение (15) определяет в пространстве R^n динамическую систему в смысле Биркгофа:

$$\varphi_t : G \to G, \ \ G \subset R^n, \ \ \varphi_t(x) ::= \varphi(t, x), \ \ t \in R ::= (-\infty, +\infty),$$

где а) $\varphi(0, x) = x$, $x \in G$; б) $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, $t, s \in R$, $x \in G$; в) отображение $(t, p) \to \varphi(t, p)$ непрерывно по (t, p). Отдельно рассматриваются случай произвольной конечномерной динамической системы (15) и случай двумерной динамической системы (15), т.е. случаи $n > 2$ и $n = 2$.

Положительное предельное множество $L^+(x)$ точки x определяется равенством

$$L^+(x) = \{ y \in R^n : \exists \{t_n\} \subset R^+, t_n \to +\infty, \varphi(t_n, x) \to y \}, \quad R^+ ::= [0, +\infty).$$

Для системы (15) в третьей главе установлены условия существования фазовопритягивающих предельных циклов. Для случая $n = 2$ установлено, что для того чтобы положительно компактная незамкнутая траектория непрерывной динамической системы (15) была строго орбитально устойчива, необходимо и достаточно, чтобы ее положительное предельное множество $L^+(p_0)$ было притягивающим предельным циклом.

Для многомерных систем вида (15) изучены также свойства предельных движений строго орбитально устойчивых траекторий. Показано, что предельные движения строго орбитально устойчивых траекторий, являющихся почти периодическими, также обладают свойствами строгой орбитальной устойчивости и почти периодичности.

В третьей главе рассмотрены примеры динамических систем, для которых выяснены условия возникновения предельных циклов. Для двумерной и трехмерной систем, моделирующих развитие промышленного предприятия, проанализировано циклическое поведение решений. Для анализа циклического поведения использован пакет прикладных программ MathCad и приемы исследования устойчивости и построения фазовых портретов.

Для двумерной модели, когда деятельность предприятия описывается системой уравнений с переменными – капиталом и числом сотрудников, показано существование аттрактора, соответствующего колебаниям величины капитала и количества сотрудников вокруг оптимального значения. Для трехмерной модели, в которой добавлена переменная «кредит», показано появление новых устойчивых предельных циклов. Полученные результаты могут использоваться при разработке методик оценки деятельности промышленных предприятий.

В заключении диссертации сформулированы основные результаты, выносимые на защиту:

1. Дано развитие комбинированного метода исследования устойчивости нелинейных управляемых технических систем, базирующихся на сочетании свойств функций Ляпунова и предельных уравнений.
2. Получены условия асимптотической устойчивости состояний равновесия нелинейной неавтономной динамической системы. На основе указанных условий разработаны алгоритмы исследования устойчивости.
3. Разработаны алгоритмы оптимальной стабилизации нелинейных управляемых систем, в том числе многосвязной системы управления.
4. Получены условия наличия предельных циклов в нелинейных динамических системах общего вида. Установлен необходимый и достаточный признак существования притягивающего предельного цикла для двумерной автономной динамической системы. Дан анализ циклического поведения решений двух типов систем, моделирующих развитие промышленного предприятия.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

а) *публикации в рецензируемых журналах и изданиях*:

1. *Леонов А.Г., Мулкиджан А.С.* Анализ устойчивости управляемых систем на основе обобщенных уравнений в вариациях // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С. 69–74.
2. *Мулкиджан А.С.* Применение моделей с флуктуациями при разработке методов и технологий управления промышленными предприятиями // Наукоемкие технологии. 2010. Т. 11. №2. С. 53–58.
3. *Мулкиджан А.С.* О циклических свойствах траекторий нелинейных динамических систем // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С. 154–158.
4. *Шестаков А.А., Мулкиджан А.С.* Исследование устойчивости и стабилизация нелинейных управляемых систем на основе функций Ляпунова и предельных уравнений // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С. 88–98.
5. *Щенникова Е. В., Дружинина О.В., Мулкиджан А.С.* Об оптимальной стабилизации многосвязных управляемых систем // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. 2010. Т. 53(3). С. 99–102.

б) *прочие публикации в научных периодических изданиях и в трудах научных конференций*:

6. *Климачкова Т.С., Мулкиджан А.С.* Об управлении технической устойчивостью и стабилизация динамических систем на конечном интервале времени // Фундаментальные проблемы системной безопасности: Сб. статей. Вып. 2 / Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН. М.: Вузовская книга, 2009. С. 264−268.

7. *Мулкиджан А.С.* Устойчивость предельных циклов в динамических моделях промышленных и технических процессов управления // Тез. докладов XLVI Всероссийской конф. по проблемам математики, информатики, физики и химии. М.: Российский университет дружбы народов, 2010. С. 84−85.

8. *Мулкиджан А.С., Дружинина О.В.* Устойчивость динамических моделей промышленных и технических процессов управления // Материалы конференции «Управление в технических системах» (УТС-2010). СПб.: ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор". 2010. С. 171−174.

9. *Мулкиджан А.С.* Исследование математических моделей, описывающих циклические процессы промышленного производства // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» М.: Российский университет дружбы народов, 2011. С. 268−270.