

На правах рукописи

Афанасьева Валентина Ивановна

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ
МОДИФИКАЦИИ МЕТОДОВ ЛЯПУНОВА
С ПРИМЕНЕНИЕМ ДВУХ МЕР**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ,
управление и обработка информации
(промышленность)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена в отделе нелинейного анализа и проблем безопасности Учреждения Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор О.В. Дружинина

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Дикусар

доктор физико-математических наук,
доцент О.А. Казаков

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Центральный экономико-математический
институт РАН

Защита диссертации состоится « 29 » декабря 2011 г. в часов
на заседании совета по защите докторских и кандидатских диссертаций
Д.002.017.03 при Учреждении Российской академии наук
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН по адресу:
119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40 в конференц-зале.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН

Автореферат разослан « » 2011 г.

Ученый секретарь совета по защите
докторских и кандидатских диссертаций
кандидат физико-математических наук



А.В. Мухин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В современных условиях в результате развития техники, новых коммуникационных технологий, программного обеспечения, систем сбора и обработки информации существенно усложняется структура технических систем и предъявляются повышенные требования к проектированию, эксплуатации и управлению ими. В процессе исследования динамики управляемых процессов необходимо также учитывать множество факторов, влияющих на поведение системы. Кроме этого, в настоящее время появились новые прикладные задачи, для решения которых необходимо развивать существующие и разрабатывать новые методы системного анализа динамики управляемых и неуправляемых нелинейных систем.

Рассмотренные в настоящей работе системы управления с логическими регуляторами находят применение в промышленности, робототехнике, управлении технологическими процессами, инженерной практике. Указанные системы применяются при решении задач управления механическими транспортными средствами, управления подъемными и мостовыми кранами, управления движением транспорта, управления многозвенным роботом-манипулятором на технологической операции запуска-выпуска изделия, при решении задач на балансировку перевернутого маятника на тележке.

К необходимости развивать математический аппарат, разрабатывать новые, направленные на практическое использование качественные и приближенно-аналитические методы нелинейных управляемых систем приводит также развитие компьютерной техники, систем сбора и обработки данных на базе микропроцессорных систем. В конечном счете указанные методы служат целям обеспечения оптимальных условий работы и повышения безопасности функционирования сложных технических систем, а построение алгоритмов исследования их устойчивости позволяет провести анализ влияния различных параметров на качество функционирования того или иного сложного технического объекта.

Для управления динамическими системами и описания процессов динамики необходим математический аппарат, связанный с нелинейными системами дифференциальных уравнений. Поэтому появляется необходимость в развитии методов исследования управляемых динамических систем и создании новых эффективных методов анализа и методов управления различными техническими объектами и промышленными комплексами. В связи с этим возникает задача системного анализа сложных управляемых систем, позволяющего определять условия безопасного и устойчивого их функционирования с обеспечением заданного режима работы, влияние параметров системы на ее устойчивость. Важную роль в решении этой задачи играет разработка

математических методов построения управляемых систем с учетом различных особенностей, таких как структура, неопределенности, неполнота информации о состоянии окружающей среды и параметрах системы. Одним из распространенных методов исследования устойчивости движений нелинейных управляемых динамических систем является метод функций Ляпунова, позволяющий получить строгое математическое обоснование устойчивости. Другим преимуществом метода функций Ляпунова для анализа устойчивости однородных непрерывных и дискретных нечетких систем является то, что полученные с его помощью условия устойчивости могут быть преобразованы в задачу, решаемую с использованием метода линейных матричных неравенств. Удобство метода линейных матричных неравенств в свою очередь связано с возможностями его численной реализации с помощью пакетов прикладных программ.

Основной трудностью при применении метода функций Ляпунова к конкретным задачам устойчивости является трудность построения функции Ляпунова, удовлетворяющей тем или иным требуемым условиям. В этой ситуации имеют большое значение модификации методов Ляпунова, развитие метода функций Ляпунова в направлении ослабления требований к функциям Ляпунова и расширения класса используемых функций. Повышение общности и эффективности метода функций Ляпунова достигается использованием обобщенных функций Ляпунова или же вспомогательных функций, значительно отличающихся от функций Ляпунова и которые не обладают свойством невозрастания вдоль движений динамического потока. Исследованиями задач устойчивости различных динамических систем на базе показателей и функций Ляпунова занимались В.В. Румянцев, Е.А. Барбашин, А.А. Мовчан, М.А. Айзерман, Н.Н. Красовский, Ж. Ла-Салль, С. Лефшец, А.И. Лурье, И.Г. Малкин, В.М. Матросов, Т.К. Сиразетдинов, А.А. Шестаков и другие исследователи.

В современной технике часто встречаются системы с распределенными параметрами, к которым относятся упругие и аэроупругие системы, процессы тепло- и массопереноса, процессы, протекающие в химических и ядерных реакторах, многие производственные процессы, такие как сушка, нагрев и охлаждение тел и многие другие. Как известно, понятие устойчивости в рамках изучаемой математической модели существенно зависит от метрики фазового пространства. В бесконечномерном фазовом пространстве неэквивалентные метрики приводят к различным понятиям устойчивости. Вопросы устойчивости по двум метрикам разрабатывали А.А. Мовчан, В.В. Румянцев, Д.М. Волков, Ю.П. Рыбаков, В. Хан и другие исследователи. А.А. Шестаков и Ю.Н. Меренков распространили метод функций Ляпунова на случай двух мер в динамических процессах с

запаздыванием. А.А. Шестаков обобщил метод функций Ляпунова для систем с распределенными параметрами.

Однако, несмотря на возросшее число применений, методы изучения устойчивости управляемых систем с неполной информацией остаются недостаточно развитыми, и дополнительный математический аппарат требует дальнейшей разработки. Эффективный метод исследования динамических процессов систем с неполной информацией представляет собой основанный на модификации метода функций Ляпунова подход и является, таким образом, актуальным направлением в теории управляемых систем.

Объектами исследования являются управляемые непрерывные системы, системы с логическими регуляторами, а также дескрипторные системы и распределенные системы.

Целью работы является получение достаточных условий устойчивости управляемых систем и повышение эффективности метода функций Ляпунова в сочетании с другими методами для системного анализа управляемых объектов с неполной информацией, а также получение условий устойчивости состояний равновесия, построение алгоритмов стабилизации управляемых систем с неполной информацией, обеспечение на основе модификации методов Ляпунова высоких эксплуатационных показателей проектируемых технических систем.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории управления, методы теории устойчивости, методы функционального анализа, математической логики, теории дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Диссертация является теоретической научно-квалификационной работой, в которой получены следующие новые результаты: условия устойчивости распределенных систем относительно двух метрик; условия устойчивости состояний равновесия управляемых систем с неопределенностями; условия устойчивости дескрипторных систем с использованием свойств линейных матричных неравенств. Установленные условия устойчивости обобщают, развивают и уточняют ряд результатов об устойчивости динамических систем с неполной информацией, полученных в работах А.А. Шестакова, Ю.Н. Меренкова, В.Н. Афанасьева, А. Пегата, Н.О. Wang, J. Li, K. Tanaka, T. Takagi, M. Sugeno, P.K.C. Wang, G.-R. Duan, В. Marx и других исследователей. Доказаны теоремы об устойчивости состояний равновесия систем с неполной информацией на основе модификации метода функций Ляпунова. В диссертационной работе разработаны алгоритмы стабилизации систем с неполной информацией.

Практическая значимость. Полученные в работе научные результаты могут служить теоретической основой анализа устойчивости управляемых объектов с неполной информацией и неопределенностями, включая многосвязные системы, возникающие в прикладных задачах, а также могут быть использованы в задачах совершенствования и безопасности функционирования промышленных объектов

и технических систем управления с неполной информацией. Разработанные методы исследования устойчивости значительно расширяют возможности практического использования метода функций Ляпунова для исследования устойчивости инженерных объектов с распределенными параметрами. Так как методы исследования устойчивости разработаны для достаточно широкого класса систем, то они могут быть использованы при проектировании и совершенствовании систем в таких отраслях, как машиностроение, автомобилестроение, авиастроение и др.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгими доказательствами, опирающимися на методы системного анализа, теории управления, функционального анализа, математической логики, теории устойчивости динамических систем.

Личный вклад автора в проведение исследования. Представленные на защиту результаты диссертации получены автором самостоятельно. Результаты, опубликованные совместно с другими авторами, принадлежат соавторам в равных долях.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на Международных и Всероссийских научных конференциях и семинарах, среди которых Международная конференция «Управление в технических системах» (Санкт-Петербург, 2010), научный семинар по нелинейному анализу и проблемам безопасности в Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН (Москва, 2011 г.), XIII научная конференция МГТУ «Станкин» и «Учебно-научного центра математического моделирования МГТУ «Станкин» – ИММ РАН» по математическому моделированию и информатике (Москва, 2010), Международная конференция «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (Москва, 2011), Международная конференция «Моделирование нелинейных процессов и систем» (Москва, 2011).

Публикации. По теме диссертации имеется 9 публикаций общим объемом 3,5 п.л., в том числе три статьи в журналах и изданиях из перечня, рекомендованного ВАК РФ, объемом 1,6 п.л. В статьях, опубликованных совместно с другими авторами, материалы принадлежат соавторам в равных частях.

Структура и объем работы. Диссертация содержит 99 страниц текста и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 109 наименований работ отечественных и зарубежных авторов. Работа содержит 2 рисунка. Главы состоят из параграфов, в каждом параграфе используется самостоятельная нумерация определений, теорем и формул. При ссылках на формулы и теоремы, не входящие в текущий раздел, даются указания на соответствующие главы и параграфы. Первый раздел каждой главы является вводным.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулирована цель работы, отмечены ее научная новизна и практическая значимость. Во введении также дан обзор литературы по теме диссертации и кратко изложено содержание работы по главам.

Первая глава **«Аспекты системного анализа управляемых динамических процессов и устойчивость по двум метрикам»** посвящена системному анализу качественных свойств управляемых динамических процессов. Абстрактные управляемые системы рассмотрены на основе метода сравнения В.М. Матросова, Л.Ю. Анапольского, С.Н. Васильева. Для описания таких систем в этом методе вводятся основные переменные: время, начальные данные, возмущения, управления, выходы и процессы. В этой главе представлена иерархия систем с сосредоточенными параметрами, с распределенными параметрами, а также сосредоточенно-распределенных систем.

Важное место в иерархии управляемых систем занимают интеллектуальные системы управления. Для анализа интеллектуальных систем использован метод параллельного исследования, аналогичный методу В.М. Матросова, Л.Ю. Анапольского, С.Н. Васильева. На стыке современной теории управления и искусственного интеллекта находится интеллектуальное управление. Интеллектуальными компонентами систем управления для реализации высокоинтеллектуальных функций являются системы, основанные на знаниях, которые представлены в форме логических правил. Управление на базе логических правил реализовано специальными логическими регуляторами.

В настоящей главе обоснована практическая значимость устойчивости по двум метрикам для проектирования и совершенствования технических и промышленных систем. Даны определения устойчивости по двум метрикам, изучен вопрос об изменении характера устойчивости по двум нормам, если одна из норм фиксирована, а другая изменяется. Для исследования устойчивости по двум метрикам неавтономных динамических систем общего вида применены модификации методов Ляпунова. Показано, что свойство устойчивости по двум нормам улучшается при усилении одной и ослаблении второй. Доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости состояния равновесия системы линейных уравнений с частными производными.

В данной главе рассмотрена система

$$Lz ::= \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{k=1}^n A_k(t, x) \frac{\partial z}{\partial x_k} + B(t, x) z = 0 \quad (1)$$

при наличии условия

$$\lim_{t \rightarrow s^+} z(t, x) = \varphi(x) \in X_1. \quad (2)$$

В (1), (2) использованы следующие обозначения: $z = (z_1, \dots, z_m)$ – функция пространственных координат $x = (x_1, \dots, x_n)$ и времени t ; A_k ($k = 1, \dots, n$), B – матрицы размеров $m \times n$ с вещественными коэффициентами, зависящими от t и x . Матрицы $A_k(t, x)$ являются симметричными. Предполагается, что коэффициенты удовлетворяют следующим условиям: функции

$$t \rightarrow A_k(t, x), \quad t \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} A_k(t, x), \quad t \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} A_k(t, x)$$

непрерывны и ограничены на множестве $\{t \geq s\} \times G$, где G – некоторое фиксированное открытое множество пространства R^n , которое может быть неограниченным, $t, s \in R$. Компоненты матриц и соответствующие частные

производные $a_{ij}^{(k)}(t, x)$, $\frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}^{(k)}(t, x)$, $\frac{\partial}{\partial t} a_{ij}^{(k)}(t, x)$ ограничены,

непрерывны и величины $|a_{ij}^{(k)}(t, x) - a_{ij}^{(k)}(t', x)|$ стремятся к нулю равномерно при $t' \rightarrow t$. Те же предположения выполнены и для других функций. На основе модификации метода показателей Ляпунова доказаны следующие теоремы.

Доказано, что если все собственные значения матрицы

$$C = B + B^T - \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial x_k}$$

неотрицательны для каждой точки множества $\{t \geq s\} \times G$, то состояние равновесия $z = 0$ однородной системы (1) устойчиво по двум метрикам

$$d_1(0, \varphi(x)) ::= \left[\int_G (\varphi(x), \varphi^*(x)) dx_1, \dots, dx_n \right]^{1/2} \text{ и}$$

$$d_2(0, z(t, s, x)) ::= \left[\int_G (z(t, s, x), z^*(t, s, x)) dx_1, \dots, dx_n \right]^{1/2},$$

$$\text{т.е. } \forall \varepsilon > 0, \forall s \in R^+ \exists \delta = \delta(\varepsilon, s) > 0,$$

$$\varphi(x) \in X_1, d_1(0, \varphi(x)) < \delta \Rightarrow d_2(0, z(t, s, x)) < \varepsilon \quad \forall t \geq s.$$

Доказано также, что состояние равновесия $z = 0$ системы (1) неустойчиво по двум метрикам d_1 и d_2 , если существует число $\sigma > 0$ со следующим свойством: для любого $\delta > 0$ существует семейство решений вида $\hat{z} = r_1(t, x) \exp[i\lambda\theta(t, x)] + (i\lambda)^{-1} w(t, x, \lambda)$, где λ – вещественный параметр такой, что для некоторых чисел $t_1 \geq s > 0$ справедливы неравенства $d_1(0, r_1(s, x)) < \delta$, $d_2(0, r_1(t_1, x)) > \sigma$.

Также в первой главе с помощью модификации метода функций Ляпунова рассмотрены вопросы устойчивости по двум метрикам

автономных и неавтономных динамических систем общего вида. Даны достаточные условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости движения неавтономных динамических систем с запаздыванием.

Вторая глава «Устойчивость управляемых систем с неполной информацией при отсутствии и наличии наблюдателя» посвящена системам *Takagi–Sugeno* (*TS*-системам), представляющим собой системы, способные аппроксимировать широкий класс нелинейных систем с помощью правил вида ЕСЛИ ... ТО, устанавливающих локальные соответствия «вход-выход» для нелинейной системы. Основная особенность *TS*-систем состоит в описании локальной динамики на каждой нечеткой импликации посредством линейных систем. При помощи *TS*-систем с неполной информацией может быть описан широкий класс нелинейных динамических систем. Большим преимуществом *TS*-систем является также и то, что устойчивость представленных с их помощью систем может быть исследована с использованием метода функций Ляпунова. Исследование устойчивости *TS*-системы может быть сведено к нахождению общей для всех подсистем симметричной положительно определенной матрицы, удовлетворяющей некоторому множеству неравенств Ляпунова. Таким образом, условия устойчивости для таких систем получаются на основе модификации метода функций Ляпунова и, как правило, записываются в виде линейных матричных неравенств, допускающих численное решение.

Правило с i -м номером *TS*-системы имеет вид

Правило i : ЕСЛИ $z_1(t)$ есть M_{i1} и $z_p(t)$ есть M_{ip} ,

$$\begin{aligned} \text{ТО} \quad & \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ & y(t) = C_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Здесь r – число логических правил, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$ – фазовый вектор, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in R^m$ – вектор входных данных, $y(t) \in R^q$ – вектор выходных данных, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, $C_i \in R^{q \times n}$ – вещественные матрицы соответствующих размерностей, $z(t) = (z_1(t), \dots, z_p(t))$ – вектор известных переменных предпосылок, которые могут быть функциями фазовых переменных, внешних возмущений и времени, $M_{ij} \in [0; 1]$.

Пара $(x(t), u(t))$ как пара конечных выходных переменных системы может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)), \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$, $w_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$ для всех t .

Метод стабилизации TS -систем с помощью параллельно распределенной коррекции был разработан *К. Tanaka*. Основная идея при синтезе регулятора параллельно распределенной коррекции заключается в получении каждого правила управления для корректировки из соответствующего правила TS -системы. Получающийся общий логический регулятор, вообще говоря, нелинейный, является смещением отдельных линейных регуляторов. Такой логический регулятор использует те же самые M_{ij} , что и исходная система. В соответствии с методом *К. Tanaka* для управляемой системы (3) регулятор параллельно распределенной коррекции записан в следующем виде:

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t), \quad (4)$$

где F_i – матрицы усиления. Для системы (3) с управлением (4) доказаны теоремы об устойчивости на основе модификации метода функций Ляпунова и применении обобщенных линейных матричных неравенств.

Во второй главе изучен также вопрос об устойчивости TS -систем при наличии наблюдателя. При построении наблюдателя требуется, чтобы выполнялось соотношение $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, где $\hat{x}(t)$ – положение вектора, определенное наблюдателем. Это условие гарантирует стремление к нулю стационарной ошибки. Структура наблюдателя для непрерывной системы (3) задается с помощью правил следующего вида:

$$\begin{aligned} \text{ЕСЛИ } z_1(t) \text{ есть } M_{i1} \text{ и } \dots \text{ и } z_p(t) \text{ есть } M_{ip}, \\ \text{ТО } \hat{\dot{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (5)$$

где K_i – матрицы усиления относительно наблюдателя.

Рассмотрен случай, когда вектор $z(t)$ не зависит от состояния переменных, определенных наблюдателем. Тогда при наличии наблюдателя регулятор параллельно распределенной коррекции (4) принимает вид

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \hat{x}(t), \quad (6)$$

причем соответствующие правила управления записываются следующим образом:

$$\text{ЕСЛИ } z_1(t) \text{ есть } M_{i1} \text{ и } \dots \text{ и } z_p(t) \text{ есть } M_{ip},$$

$$\text{ТО } u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \hat{x}(t).$$

Наблюдатель для системы (3) задан следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))), \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t).\end{aligned}\tag{7}$$

С учетом (5)–(7) расширенная система записывается в виде

$$\dot{\beta}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} \beta(t),\tag{8}$$

где $\beta(t) = (x(t), \alpha(t))$, $G_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_i F_j & B_i F_j \\ 0 & A_i - K_i C_j \end{pmatrix}$, а $\alpha(t)$ определяется

соотношением

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i K_i - C_j) \alpha(t).$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если для системы (8) существует положительно определенная матрица P такая, что

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0,$$

$$\left(\frac{1}{2} (G_{ij} + G_{ji}) \right)^T P + P \left(\frac{1}{2} (G_{ij} + G_{ji}) \right) < 0, \quad i < j, h_i \cap h_j \neq \emptyset,$$

то состояние равновесия системы (8) асимптотически устойчиво в целом.

Далее рассмотрены системы, допускающие представление вида

$$\dot{x} = f(x) + G(x)(u + \theta(t, x)),\tag{9}$$

где $f: R^n \rightarrow R^n$, $G: R^n \rightarrow R^{n \times m}$, а вектор-функция $\theta(t, x)$ представляет неопределенности системы. Предполагается, что функция $\theta(t, x)$ по норме ограничена неотрицательной функцией $\eta = \eta(t, x)$, т.е. $\|\theta(t, x)\|_p \leq \eta(t, x)$.

Соответствующая системе (9) TS-система имеет вид

$$\dot{x} = A(h)x + B(h)(u + \theta(t, x)).\tag{10}$$

Для синтеза управления динамических систем с неопределенностью вида (9) использована модификация метода функций Ляпунова. Способ построения стабилизирующих регуляторов требует, чтобы все матрицы A_i , $i = 1, 2, \dots, r$, уже были асимптотически устойчивыми и чтобы существовала

симметричная положительно определенная матрица $P = P^T > 0$ такая, что при $i = 1, 2, \dots, r$ выполнялось $A_i^T P + P A_i < 0$.

Доказана также следующая теорема.

Теорема 2. Пусть заданное для системы (10) управление $u_1 = -\sum_{j=1}^r h_j(x(t)) F_j x$ таково, что существует общая для всех подсистем матрица P , удовлетворяющая условиям $(A_i - B_i F_i)^T P + P(A_i - B_i F_i) < 0$, $i = 1, \dots, r$ и пусть $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) B_i^T P x$. Тогда замкнутая система с управлением $u = u_1 + u_2$, где $u_2 = -\eta_q \nabla \|z\|_p$, $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, является асимптотически устойчивой в целом для любой неопределенности θ такой, что $\|\theta\|_q \leq \eta_q$.

Для того, чтобы избавиться от неопределенности θ и получить условия асимптотической устойчивости системы, в данной главе на основе применения теоремы 2 разработан следующий алгоритм построения стабилизирующего управления. Синтез стабилизирующего управления u разделен на две части: $u = u_1 + u_2$. Сначала построена часть u_1 в виде

$$u_1 = -\sum_{j=1}^r h_j(x(t)) F_j x \quad (11)$$

так, что соответствующая замкнутая система

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (A_i - B_i F_j) x$$

является асимптотически устойчивой в целом и существует общая для всех подсистем матрица P , удовлетворяющая некоторым определенным условиям. Система (10) с учетом управления (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) A_i x - \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) B_i \left(\sum_{j=1}^r h_j(x(t)) F_j x \right) + \\ & + \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) B_i (u_2 + \theta) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (A_i - B_i F_j) x + \\ & + \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) B_i (u_2 + \theta). \end{aligned}$$

На втором шаге алгоритма построен регулятор u_2 для того, чтобы избавиться от неопределенности θ . Регулятор u_2 имеет вид $u_2 = -\eta_q \nabla \|z\|_p$,

где $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В результате система (10) с управлением $u = u_1 + u_2$

становится асимптотически устойчивой в целом.

Третья глава «Устойчивость и стабилизация дескрипторных систем с неполной информацией» посвящена дескрипторным системам,

являющимся обобщением TS -систем с неполной информацией, недостаточность которой вызвана неучтенной динамикой, возмущениями и ошибками приближений. Deskрипторные системы называют также имплицитными системами; они являются обобщенными системами пространства состояний. Проблема синтеза управления для дескрипторных систем представляет не только теоретический интерес, но и значимость для практического применения в задачах проектирования и эксплуатации технических систем. С помощью дескрипторного подхода может быть описан широкий класс систем, в том числе физические системы с нединамическими ограничениями или скачкообразным поведением. При отсутствии сингулярности дескрипторные системы включают в себя обычные системы и позволяют рассматривать одновременно как динамические, так и статические уравнения. Важной характеристикой дескрипторных систем является возможность импульсного поведения, которое опасно для физической системы и нежелательно для системы управления. Это создает дополнительные трудности для стабилизации синтеза управления и, особенно, для синтеза следящего управления. В данной главе доказаны теоремы об асимптотической устойчивости и разработан алгоритм исследования устойчивости дескрипторных систем с неполной информацией.

Дескрипторная система с неполной информацией определяется с помощью правил вида

Правило i : ЕСЛИ ξ_1 есть M_{i1} и ... и ξ_p есть M_{ip} ,

ТО $E\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t) + w(t)$,

$y(t) = C_i x(t) + v(t)$.

Здесь $i = 1, \dots, r$, где r – число ЕСЛИ–ТО правил, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ – исходные переменные, $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор, $u(t) \in R^m$ – вектор управления, $w(t) \in R^n$ – вектор внесистемного входа, $y(t)$ – вектор выхода, $v(t)$ – измеряемый шум, $M_{ij} \in [0; 1]$, $j = 1, \dots, p$; $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, $E \in R^{n \times n}$ – известные постоянные матрицы, причем $E = \text{diag}\{I_{n_1}, 0\}$, $\text{rang}(E) = n_1 \leq n$, а матрицы $\Delta A_i \in R^{n \times n}$ выражают зависящие от времени параметрические неопределенности и удовлетворяют условиям $\|\Delta A_i\| < \delta_i$ для заданных чисел $\delta_i > 0$.

Дескрипторная система представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}
E\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t))(A_i + \Delta A_i)x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t))B_i u(t) + w(t), \\
y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t))C_i x(t) + v(t),
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\text{где } h_i(\xi(t)) = \frac{\beta_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^r \beta_i(\xi(t))} \geq 0, \quad \beta_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(\xi_j(t)),$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) = 1 \text{ для всех } t.$$

Если для некоторого комплексного числа s $\det(sE - A_i) \neq 0$, то пара (E, A_i) называется неособой. При $\bar{n} = \deg \det(sE - A_i) < \text{rang}(E)$ в соответствующей дескрипторной системе возникают импульсные колебания. Если пара (E, A_i) неособая и $\bar{n} = \deg \det(sE - A_i) = \text{rang}(E)$, то система свободна от импульсов и называется правильной. С учетом свойств пары (E, A_i) и посредством модификации метода функций Ляпунова показано, что система

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t))A_i x(t).$$

является асимптотически устойчивой, если существует матрица P такая, что

$$\begin{aligned}
P^T E &= E^T P \geq 0, \\
P^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(\xi(t))A_i \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(\xi(t))A_i \right)^T P &< 0, \quad i = 1, \dots, r.
\end{aligned}$$

Для анализа системы (12) осуществлен переход к базовой системе вида

$$E\dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t))A_{mi}x_m(t) + \rho(t), \tag{13}$$

где $x_m(t) \in R^n$ – фазовый вектор, A_{mi} – известные асимптотически устойчивые матрицы, $\rho(t)$ – вектор входа; величина $\tilde{w}(t) = (v^T(t), w^T(t), \rho^T(t))^T$ является показателем эффективности управления и ее изменение может привести к неустойчивости дескрипторной системы. При синтезе систем управления с неполной информацией необходимо варьировать величину $\tilde{w}(t)$ для обеспечения

эффективности следящего управления. Далее, H_∞ -эффективность, связанная с ошибкой $x(t) - x_m(t)$, оценена следующим образом:

$$\frac{\int_0^T (x(t) - x_m(t))^T Q (x(t) - x_m(t)) dt}{\int_0^T \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) dt} \leq \eta^2, \quad (14)$$

где T – время управления, Q – положительно определенная матрица, η^2 – значение уровня эффективности.

Далее для достижения оценки (14) рассмотрена система с линейным наблюдателем, заданная посредством логических правил следующего вида:

Правило наблюдателя i :

ЕСЛИ $\xi_1(t)$ есть M_{i1} и ... и $\xi_p(t)$ есть M_{ip} ,

ТО $E\dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))$,

$$\hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t), \quad (15)$$

где $i = 1, \dots, r$, а L_i – коэффициенты для i -го правила наблюдателя. С учетом (15) система с наблюдателем представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} E\dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) A_i \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) B_i u(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) L_i (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) C_i \hat{x}(t), \end{aligned}$$

Для логического регулятора системы (13) с учетом параллельно распределенной коррекции правила управления записаны следующим образом:

Правило управления i :

ЕСЛИ $\xi_1(t)$ есть M_{i1} и ... и $\xi_p(t)$ есть M_{ip} ,

ТО $u(t) = K_j (\hat{x}(t) - x_m(t))$,

где $j = 1, \dots, r$, K_j – коэффициенты усиления обратной связи для j -го правила управления. Тогда регулятор системы можно представить с помощью соотношения

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\xi(t)) K_j (\hat{x}(t) - x_m(t)). \quad (16)$$

С учетом обозначений $\tilde{x}(t) = (e^T(t), x^T(t), x_m^T(t))^T$ и $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ расширенная система записана в виде

$$E\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\xi(t))h_j(\xi(t)) \left((\tilde{A}_{ij} + \Delta\tilde{A}_i)\tilde{x}(t) + \tilde{\Omega}_i\tilde{w}(t) \right), \quad (17)$$

где

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - L_i C_i & 0 & 0 \\ -B_i K_j & A_i + B_i K_j & -B_i K_j \\ 0 & 0 & A_m \end{pmatrix}, \quad \Delta\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \Delta A_i & 0 \\ 0 & \Delta A_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega}_i = \begin{pmatrix} -L_i & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Если для системы (17) существует симметричная положительно определенная матрица $\tilde{P}$ такая, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}^T \tilde{E} &= \tilde{E}^T \tilde{P} \geq 0, \\ \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P}^T \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{\eta^2} \tilde{P}^T \tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_i^T \tilde{P} + \tilde{Q} + \tilde{P} \tilde{P}^T + \delta_i^2 I &< 0, \\ i < j, h_i \cap h_j &\neq \emptyset, \end{aligned} \quad (18)$$

то для заданного значения η^2 обеспечивается H_∞ -эффективность следящего управления.

Теорема 4. Если для системы

$$\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\xi(t))h_j(\xi(t)) (\tilde{A}_{ij} + \Delta\tilde{A}_i)\tilde{x}(t). \quad (19)$$

существует матрица $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ такая, что $\tilde{P}^T \tilde{E} = \tilde{E}^T \tilde{P} \geq 0$ и при выполнении условия (18) $\eta^2 \rightarrow \min_{\tilde{P} > 0}$, то система (19) устойчива.

Показано, что при выполнении условий теорем 3 и 4 обеспечивается асимптотическая устойчивость дескрипторной системы (12) при минимизации значения η^2 уровня эффективности.

Также в третьей главе доказана следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $B_i = B$, $i = 1, \dots, r$ и пусть существует положительно определенная матрица $\tilde{P}$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \tilde{P}^T E &= E^T \tilde{P} \geq 0, \\ \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P}^T \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{\eta^2} \tilde{P}^T \tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_i^T \tilde{P} + \tilde{Q} + \tilde{P} \tilde{P}^T + \delta_i^2 I &< 0, \quad i < j, h_i \cap h_j \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Тогда замкнутая дескрипторная система с неполной информацией (17) с наблюдателем (15) и правилами управления (16) является асимптотически устойчивой.

В третьей главе на основе полученных теорем разработан алгоритм построения стабилизирующего управления дескрипторных систем.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

1. Предложен системный подход на основе модификации методов Ляпунова применительно к автономным и неавтономным динамическим системам с использованием двух мер и к системам с неполной информацией при отсутствии и наличии наблюдателя.

2. Исследован характер устойчивости по двум метрикам, если одна из метрик фиксирована, а другая изменяется. Доказана теорема об устойчивости по двум метрикам состояния равновесия линейной распределенной системы. Исследована устойчивость по двум метрикам неавтономных динамических систем общего вида.

3. Доказаны теоремы об устойчивости управляемых систем с неполной информацией при отсутствии и наличии наблюдателя, а также в условиях неопределенности. Изучен вопрос о стабилизации дескрипторных систем с неполной информацией. Доказаны теоремы об асимптотической устойчивости замкнутой дескрипторной системы.

4. На основе полученных теорем и модификации методов Ляпунова разработаны алгоритмы стабилизации систем с неполной информацией.

Публикации автора по теме диссертации

I. Публикации в журналах и изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. *Афанасьева В.И., Дружинина О.В.* Исследование устойчивости некоторых классов распределенных систем // *Нелинейный мир*. 2010. Т.8. № 9. С. 554–562.
2. *Афанасьева В.И.* Синтез стабилизирующих регуляторов для динамических систем с неопределенностью // *Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем*. 2010. Т. 53(3). Вып. 14. С. 10–15.
3. *Масина О.Н., Дружинина О.В., Афанасьева В.И.* Анализ устойчивости дискретных систем управления на основе функций Ляпунова и свойств линейных матричных неравенств // *Информационно-измерительные и управляющие системы*. 2011. Т. 9. №7. С. 49–58.

II. Публикации в научных периодических изданиях
и трудах научных конференций

4. *Афанасьева В.И., Дружинина О.В.* Об устойчивости некоторых классов технических систем нечеткого управления // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2010. Вып. 12. С. 197–205.
5. *Афанасьева В.И.* Об асимптотической устойчивости некоторых классов систем с нечетким управлением // Материалы конференции «Управление в технических системах» (УТС-2010). – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2010. С. 267–270.
6. *Афанасьева В.И., Дружинина О.В.* Устойчивость состояния равновесия системы линейных уравнений с частными производными//Материалы XIII научной конференции МГТУ «Станкин» и «Учебно-научного центра математического моделирования МГТУ «Станкин» – ИММ РАН» по математическому моделированию и информатике. М.: ИЦ ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2010. С. 14–16.
7. *Афанасьева В.И.* Устойчивость математических моделей систем нечеткого управления с наблюдателем // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. М.: РУДН, 2011. С. 245–247.
8. *Афанасьева В.И.* Модели нечеткого управления с наблюдателем // Моделирование нелинейных процессов и систем. Сборник тезисов второй международной конференции. М.: Янус-К, 2011. С. 293–294.
9. *Афанасьева В.И., Дружинина О.В.* Устойчивость дескрипторных систем с неполной информацией // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2011. Вып. 13. С. 59–67.