

На правах рукописи

Черноглазов Дмитрий Григорьевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙ-
НЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Специальность 05.13.01 – системный анализ,
управление и обработка информации
(промышленность)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2011

**Работа выполнена в Морской Государственной Академии
имени адмирала Ф.Ф. Ушакова, на кафедре системного анализа,
управления и обработки информации, г. Новороссийск**

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Зеленков Г.А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Дикусар В.В.**,
доктор технических наук,
профессор **Косяченко С.А.**

Ведущая организация: **Московский государственный
технический университет
гражданской авиации**

Защита состоится « 12 » мая 2011 г. в 15.00 на заседании совета
по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 002.017.03 при Учрежде-
нии Российской академии наук Вычислительный центр
им. А.А. Дородницына РАН по адресу: 119333, Москва, улица Вавилова,
дом 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Вычислительного цен-
тра им. А.А. Дородницына РАН.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2011г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук



Мухин А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Важной проблемой современного промышленного производства является развитие научных исследований в области обеспечения безопасности функционирования сложных технических систем (СТС). В первую очередь, это касается использования в качестве объекта исследования адекватных динамических моделей и создания математических методов исследования безопасности СТС.

Одним из важнейших факторов математической модели динамической системы, напрямую связанных с безопасностью эксплуатации реальных технических систем, является устойчивость.

Проблемы устойчивости рассматривались в механике еще в древности. Принципы отбора устойчивых положений равновесия пытались установить Аристотель и Архимед в III и II столетиях до н.э. Однако, первые достаточно общие результаты удалось сформулировать только в XVII и XVIII столетиях: критерий Торричелли (1644г.) устойчивости равновесия системы тел, находящихся под действием сил тяжести; достаточные условия Лагранжа (1788г.) устойчивости положения равновесия консервативных систем.

Начиная с середины XIX века теорию устойчивости начали успешно применять для решения проблем безопасности эксплуатации технических систем. Главным объектом исследования в это время были автоматические регуляторы производственных процессов, такие как регулятор Уатта для паровой машины. С ростом мощности и быстроходности паровых машин эти машины были склонны к неустойчивости и самораскачиванию, что часто приводило к авариям.

В конце 1950-х годов выяснилось, что существующая теория адекватно описывает лишь сравнительно узкий круг практических задач, таких как управление полётом и наведением ракет. В других областях имеется масса причин, мешающих применять математическую теорию управления. В каждой задаче имеется неизбежная неопределённость, связанная либо с наличием внешних возмущений, либо с невозможностью точно определить параметры модели. Таким образом, с 1950-х годов начала формироваться теория, позволяющая исследовать системы с неопределенностью (робастное управление, робастная устойчивость).

Исследование устойчивости семейств полиномов с интервальной неопределенностью впервые подробно рассмотрел S. Faedo (1953). Однако, он получил только достаточные условия робастной устойчивости, основанные на интервальном аналоге алгоритма Рауса. Более ранний результат по робастной устойчивости получили Л. Заде и Ч. Дезоер. Затем В.Л. Харитонов разработал критерий устойчивости интервального семейства полиномов, что явилось заметным продвижением в этой области (1978). Далее в этом направлении, в качестве наиболее известных результатов, можно отметить реберную теорему,

полученную в 1988г. (А.С. Bartlett, С.У. Hollot, Н. Lin), и графический критерий робастной устойчивости интервальных полиномов, доказанный в 1990г. (Б.Т. Поляк, Я.З. Цыпкин).

К задачам робастной устойчивости относятся определение границ устойчивости в пространстве параметров системы первого приближения (И.А. Вышнеградский), и получение оценок области асимптотической устойчивости расчетных режимов исходных систем.

Основными подходами к исследованию робастной устойчивости систем управления являются теория возмущений, μ -анализ (J.C. Doyle, А. Packard, Б.Т. Поляк), вероятностный подход (R.F. Stengel, L.R. Ray и др.). Исследованию задач робастной устойчивости посвящено множество работ, принадлежащих как отечественным, так и зарубежным ученым, таким как И.А. Вышнеградский, Я.З. Цыпкин, Б.Т. Поляк, В.Л. Харитонов, П.С. Щербаков, А.С. Немировский, Ю.П. Петров, М.Г. Сафонов, А.Б. Куржанский, В.Н. Афонасьев, Н.В. Зубов, В.В. Barmish, J. Ackermann, V. Blondel, J. Kogan, R. Tempo, D.D. Siljak и др.

Актуальность исследований робастной устойчивости и неустойчивости обусловлена повышающимися требованиями к эффективности, точности и качеству управления процессами в условиях неопределенности. Это ставит высокие требования к методам анализа и синтеза систем управления, функционирующих в условиях неопределенности. Как правило, необходимо обеспечить устойчивость проектируемой системы к изменению неопределенных параметров в широких пределах. Для этого необходимы методы, позволяющие определять максимальный размах неопределенности, при котором система остается устойчивой или неустойчивой.

Наличие неустойчивости в управляемой системе, как правило, означает наличие немонотонных зависимостей от параметров системы. Неустойчивость в поведении системы может быть связана как с переходными состояниями системы, так и с неопределенностью входных данных. Неустойчивость может оказывать влияние, как на скорость протекания процессов, так и на появление шумов. Исследование робастно неустойчивых режимов позволяет проектировать новые быстродействующие и экономичные регуляторы и дают эффективные решения нерешенных инженерных задач.

Диссертационная работа посвящена развитию аналитических и графических методов и алгоритмов анализа робастной устойчивости и неустойчивости линейных систем управления в пространстве коэффициентов их характеристических полиномов и матриц. Рассмотрено применение теоретических результатов к известным математическим моделям систем управления.

Целью диссертационного исследования является разработка методики комплексного анализа робастной устойчивости и неустойчивости линейных систем управления СТС с различными видами описаний неопределенности и адаптации этих методов к инженерной практике.

Объектом исследования является функционирование сложных технических объектов, описываемых линейными управляемыми динамическими системами.

Методы исследований. В диссертационном исследовании использованы классические методы теории устойчивости и методы робастной теории устойчивости (при наличии неопределенности в описании систем). Также применены методы математического анализа, математического программирования, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, алгебры и прикладной математики.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в диссертации, основаны на классических достижениях в теории устойчивости, робастной теории и новейших результатов по неустойчивости, корректности поставленных задач. Все доказательства утверждений являются строгими и основаны на выводах фундаментальных наук, таких как математический анализ, теория функций, алгебра, выпуклый анализ, теория матриц, функциональный анализ, дифференциальные уравнения.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов заключается в комплексном исследовании робастной устойчивости и неустойчивости линейных систем управления СТС с различными описаниями неопределенности, детерминированными и стохастическими методами. Получили развитие известные критерии робастного поведения непрерывных и дискретных систем. Разработаны критерии и процедуры, расширяющие область неопределенности исходного семейства при сохранении принадлежности определенному классу неустойчивости. Применение методики анализа динамики поведения СТС рассмотрено на примере быстроходного катера.

Практическая значимость. Созданы новые модификации и обобщения критериев исследования робастной устойчивости и неустойчивости линейных систем, позволяющие проводить анализ робастного поведения динамических систем для интервальных и неинтервальных типов неопределенности. Критерии дают возможность выполнять исследования как в пространстве коэффициентов характеристических полиномов, так и в пространстве коэффициентов матриц. Причем, эти результаты обобщены и на комплексный случай, а разработанные на их основе алгоритмы с динамической визуализацией позволяют исследовать не только границы изменения параметров сохраняющих устойчивость, но и совокупность параметров оставляющих систему неустойчивой. Полученные результаты можно использовать для разработки более эффективных систем управления, что даст возможность снизить затраты ресурсов, средств и времени на разработку современных систем. Исследование классов неустойчивости дает информацию при синтезе систем управления, а также решает задачу определения близости устойчивых и неустойчивых режимов. Учитывая, что не-

устойчивые состояния зачастую влияют на скорость протекания процессов, обеспечивают переход к другому устойчивому состоянию при минимальных затратах энергии и обладают рядом других уникальных качеств, это явление может стать основой новых технических решений в управлении динамикой СТС.

Реализация результатов. Результаты диссертации использованы в научно-исследовательской работе, проводящейся в КубГУ и МГА им. адмирала Ф.Ф. Ушакова, а также при чтении спецкурса «Методы исследования устойчивости динамических систем» на факультете прикладной математики КубГУ. По результатам диссертации опубликованы учебные пособия.

Личный вклад автора в проведенные исследования. В диссертацию вошли результаты, которые получены лично автором, а также разработанные в соавторстве, что отражено в ссылках. Все результаты других авторов, упомянутые в диссертации, носят справочный характер и имеют соответствующие обозначения.

Апробация работы. По результатам работы автором были сделаны доклады на 5-ти международных и 1-й региональной конференциях, проходивших в Дубне, Новороссийске, Пущино, Ростове-на-Дону, Саратове, Суздале. Результаты также обсуждались на научных семинарах в Вычислительном центре имени А.А. Дородницына РАН, а так же на научных семинарах КубГУ и МГА им. адмирала Ф.Ф. Ушакова.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, общий объем вклада автора составляет 2,08 п.л. Из них 5 в изданиях, рекомендованных ВАК, общий объем вклада автора в них составляет 1,3 п.л. В совместных работах результаты принадлежат соавторам в равных долях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и приложения. Главы состоят из параграфов. В каждой главе используется своя автономная нумерация формул, теорем и определений. Объем диссертации 148 страниц. Список литературы содержит 113 наименований. Приложение содержит 10 рисунков. Объем приложения 35 страниц.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- Модификация классических и новых методов исследования робастной устойчивости и неустойчивости интервальных и неинтервальных систем управления для решения практической задачи управления работой робота сварщика.

- Исследование новых геометрических свойств допустимых линейных преобразований коэффициентов интервальных систем управления с сохранением инварианта принадлежности одному классу неустойчивости.
- Исследование робастной устойчивости и неустойчивости матричных семейств для отдельных классов таких семейств (матрицы, устойчивые по Важевскому, k -диагональные матрицы).
- Методика анализа робастных характеристик математических моделей морских подвижных объектов (МПО) (судно, катер).
- Алгоритмы, программы и приемы визуализации для применения современных подходов к исследованию робастного поведения систем управления СТС.

Краткое содержание диссертационной работы.

Во введении приведена общая характеристика диссертации, обоснованы актуальность темы исследования, достоверность, научная новизна и практическая значимость результатов, полученных в работе.

Рассмотрим основные описания линейных систем управления используемые в диссертации.

Линейная стационарная непрерывная управляемая система в пространстве состояний описывается векторным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = Ax + Bu + D_1 w, \quad y = Cx + D_2 w,$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор называемый состоянием системы, $u(t) \in R^m$ – управление, $y(t) \in R^l$ – выход системы, $w(t) \in R^p$ – входные сигналы (внешние возмущения)

или задающие воздействия. A, B, C, D_1, D_2 – матрицы. $n \times n, n \times m, l \times n, n \times p, l \times p$

Дискретные системы описываются разностными уравнениями:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + D_1 w_{k-1}, \quad y_k = Cx_k + D_2 w_k,$$

k играет роль времени, и может обозначать номер итерации в итерационном процессе или время, в процессах связанных с цифровым управлением. Характеристический полином матрицы A имеет вид $f(s) = \det(sE - A)$, где E – единичная матрица.

В непрерывном одномерном случае система может быть записана в виде:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = r_m u^{(m)} + \dots + r_1\dot{u} + r_0u, n \geq m.$$

В этом случае характеристический полином имеет вид:

$$f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Система управления с интервальной и эллиптической неопределенностью в коэффициентах соответственно имеет вид:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u, \quad \underline{a_i} \leq a_i \leq \overline{a_i}, i = \overline{0, n}$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{(a_i - a_i^0)^2}{a_i^2} \leq \gamma^2$$

Матричная неопределенность в системах управления может быть задана следующим образом:

$$\dot{X} = AX + BU, \quad A = A + \Delta, \quad \|\Delta\| \leq \gamma, \quad Y = CX$$

Многомерная система может быть описана с помощью передаточных функций:

$$H_{uy}(s) = C(sE - A)^{-1}B, \quad H_{uw}(s) = C(sE - A)^{-1}D_1 + D_2,$$

где матричная функция $H_{uy}(s)$ комплексной переменной s называется передаточной функцией от управления u к выходу y , а аналогичная функция $H_{uw}(s)$ называется передаточной функцией от возмущения w к выходу y . Элементами матриц $H(s)$ являются дробно-рациональные функции, имеющие общий знаменатель $f(s) = \det(sE - A)$ – характеристический полином матрицы A . Исследование устойчивости и неустойчивости системы можно свести к исследованию устойчивости и неустойчивости характеристического полинома $f(s)$.

В первой главе рассмотрены методы исследования устойчивости линейных систем управления, сделан их анализ и обобщение для исследования неустойчивости. Рассмотрен ряд теорем, дающих необходимые и достаточные условия принадлежности рассматриваемых систем определенному классу неустойчивости, причем аналогичные критерии для устойчивых систем, непосредственно следуют из приведенных теорем.

В п. 1.1. рассматриваются аналитические (метод понижения порядка Н.В. Зубова) и графические критерии (обобщения критериев Найквиста и Михайлова) принадлежности полиномов непрерывных систем классам (n, k) – эквивалентности.

Определение 1. Полином степени n с вещественными или комплексными коэффициентами, не имеющий нулевых и чисто мнимых корней

$$\varphi(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0,$$

принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, если k его корней, с учетом их кратности, лежат в правой полуплоскости. Такие полиномы при $k=0$ называют устойчивыми (полиномы Гурвица).

В п. 1.2. рассматриваются аналитические (например метод Шура-Кона) и графические критерии (аналог метода Михайлова) принадлежности полиномов дискретных систем классам (n, k) –эквивалентности.

П. 1.3. посвящен исследованию локализации и оценки спектров линейных операторов для исследования устойчивости и неустойчивости матриц линейных систем управления (теоремы Ляпунова, Таусски, Бендиксона-Гирша, Рорбаха-Фреше). Приведены методики анализа k -диагональных матриц.

Теорема 1. Пусть $A \in C^{n \times n}$ и k -диагональная по строке, точнее, выполняются неравенства для k её диагональных элементов:

$$\operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

а для $n - k$ её диагональных элементов

$$-\operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|.$$

Тогда матрица A принадлежит классу (n, k) - эквивалентности.

При $k = 0$ получим частный случай теоремы Рорбаха об устойчивости для вещественного случая. Такие матрицы (при $k = 0$) называют сверхустойчивыми или матрицами Адамара.

В п. 1.4. рассмотрены различные описания неопределенности для систем управления. Предложены варианты геометрии неопределенности в комплексном случае. Рассмотрены варианты неопределенности как для систем управления с полиномиальной, так и с матричной структурами.

Анализ основных критериев устойчивости показал:

1. Коэффициентные критерии типа Рауса – Гурвица, Лъенара – Шипара, Джури и им подобные, использующие характеристические полиномы матрицы для анализа ее на устойчивость, не удастся применить для анализа полинома на принадлежность классам (n, k) -эквивалентности при $1 < k < n$.
2. Метод локализации собственных чисел матрицы В.И. Зубова, хотя и не требует построения характеристического полинома, решает частную задачу – выяснение местоположения всех чисел спектра в заданной области.
3. Фактически, если не считать критерия Михайлова, удобного лишь при небольших порядках системы, для проверки неустойчивости полиномов, остается только метод Рауса понижения порядка полинома, модифицированный для этого случая Н.В. Зубовым, который однозначно решает вопрос о принадлежности полинома к одному из классов (n, k) -эквивалентности.

Во второй главе рассматриваются аналитические и графические критерии робастного поведения интервальных полиномов. Проводится системный анализ робастной устойчивости и неустойчивости линейных динамических систем с ин-

тервальной неопределенностью. Приведенные критерии и методы исследования робастной неустойчивости включают известные результаты по робастной устойчивости (такие как теорема Харитонов) как частный случай. Разработаны критерии анализа систем с комплексными коэффициентами.

В п. 2.1, 2.4 рассмотрены аналитические критерии робастной неустойчивости семейств непрерывных и дискретных полиномов с интервальными ограничениями на коэффициенты, т.е. принадлежности этих семейств классам (n, k) – эквивалентности полиномов для вещественного и комплексного случаев, полученных в последние годы. Проведен их анализ.

Определение 2. Семейство $\Phi(s)$ полиномов степени n с комплексными коэффициентами

$$\Phi(s) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(s) = A_0 + A_1 s + \dots + A_n s^n, \quad A_i = a_i + j b_i, \quad a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], \quad b_i \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \\ \max(\underline{a}_n \bar{a}_n, \underline{b}_n \bar{b}_n) > 0, \quad i = 0, n. \end{array} \right\}$$

называется комплексным интервальным полиномом.

Границы изменения всех годографов интервального полинома $\Phi(s)$:

Если $\omega \geq 0$, то:

$$\begin{cases} \underline{g}_1(\omega) \leq g(\omega) \leq \bar{g}_1(\omega), \\ \underline{h}_1(\omega) \leq h(\omega) \leq \bar{h}_1(\omega); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{g}_1(\omega) = \underline{a}_0 - \bar{b}_1 \omega - \bar{a}_2 \omega^2 + \underline{b}_3 \omega^3 + \underline{a}_4 \omega^4 - \bar{b}_5 \omega^5 - \dots, \\ \bar{g}_1(\omega) = \bar{a}_0 - \underline{b}_1 \omega - \underline{a}_2 \omega^2 + \bar{b}_3 \omega^3 + \bar{a}_4 \omega^4 - \underline{b}_5 \omega^5 - \dots; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{h}_1(\omega) = \underline{b}_0 + \underline{a}_1 \omega - \bar{b}_2 \omega^2 - \bar{a}_3 \omega^3 + \underline{b}_4 \omega^4 + \underline{a}_5 \omega^5 - \dots, \\ \bar{h}_1(\omega) = \bar{b}_0 + \bar{a}_1 \omega - \underline{b}_2 \omega^2 - \underline{a}_3 \omega^3 + \bar{b}_4 \omega^4 + \bar{a}_5 \omega^5 - \dots \end{cases}$$

Если $\omega \leq 0$, то:

$$\begin{cases} \underline{g}_2(\omega) \leq g(\omega) \leq \bar{g}_2(\omega), \\ \underline{h}_2(\omega) \leq h(\omega) \leq \bar{h}_2(\omega); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{g}_2(\omega) = \underline{a}_0 - \underline{b}_1 \omega - \bar{a}_2 \omega^2 + \bar{b}_3 \omega^3 + \underline{a}_4 \omega^4 - \underline{b}_5 \omega^5 - \dots, \\ \bar{g}_2(\omega) = \bar{a}_0 - \bar{b}_1 \omega - \underline{a}_2 \omega^2 + \underline{b}_3 \omega^3 + \bar{a}_4 \omega^4 - \bar{b}_5 \omega^5 - \dots; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{h}_2(\omega) = \underline{b}_0 + \bar{a}_1 \omega - \bar{b}_2 \omega^2 - \underline{a}_3 \omega^3 + \underline{b}_4 \omega^4 + \bar{a}_5 \omega^5 - \dots, \\ \bar{h}_2(\omega) = \bar{b}_0 + \underline{a}_1 \omega - \underline{b}_2 \omega^2 - \bar{a}_3 \omega^3 + \bar{b}_4 \omega^4 + \underline{a}_5 \omega^5 - \dots \end{cases}$$

Определение 3. Назовем угловыми полиномами восемь полиномов вида:

$$\begin{cases} \varphi_{11}(s) = \underline{g}_1(-js) + j\underline{h}_1(-js), & \varphi_{21}(s) = \overline{g}_1(-js) + j\underline{h}_1(-js), \\ \varphi_{22}(s) = \overline{g}_1(-js) + j\overline{h}_1(-js), & \varphi_{12}(s) = \underline{g}_1(-js) + j\overline{h}_1(-js); \\ \varphi_{33}(s) = \underline{g}_2(-js) + j\underline{h}_2(-js), & \varphi_{43}(s) = \overline{g}_2(-js) + j\underline{h}_2(-js), \\ \varphi_{34}(s) = \underline{g}_2(-js) + j\overline{h}_2(-js), & \varphi_{44}(s) = \overline{g}_2(-js) + j\overline{h}_2(-js). \end{cases}$$

Теорема 2. Семейство полиномов $\Phi(s)$ принадлежит классу (n, k) -эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.

1. Все восемь угловых полиномов находятся в классе (n, k) -эквивалентности.
2. При $\omega \geq 0, i = 1$ и при $\omega \leq 0, i = 2$ выполняется:

если $\underline{g}_i(\omega) \cdot \overline{g}_i(\omega) = 0$, то $\underline{h}_i(\omega) \cdot \overline{h}_i(\omega) > 0$;

если $\underline{h}_i(\omega) \cdot \overline{h}_i(\omega) = 0$, то $\underline{g}_i(\omega) \cdot \overline{g}_i(\omega) > 0$.

На рис. 1 показана динамика поведения и геометрическая структура угловых годографов из теоремы 2

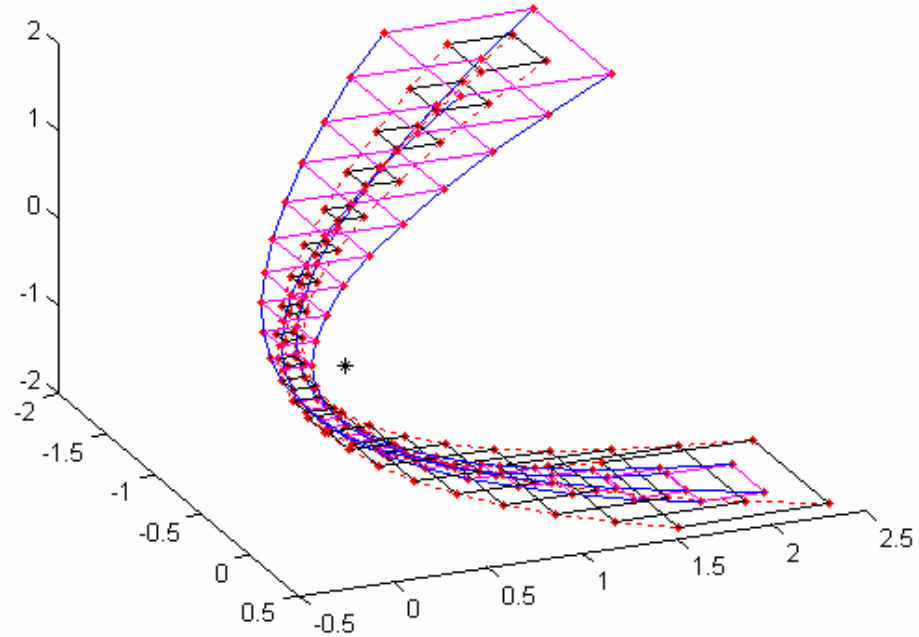


Рисунок 1. Поведение годографов угловых полиномов комплексного интервального семейства полиномов.

В п. 2.2. – 2.3. анализируются обобщения графических критериев исследования робастной устойчивости и неустойчивости интервальных полиномов с вещественными и комплексными коэффициентами, позволяющее снять все ограничения на коэффициенты, которые присутствовали ранее. Причем при $k = 0$ эти критерии переходят в соответствующие графические критерии устойчивости ин-

тервальных семейств полиномов. Предложены графические критерии робастного поведения интервального семейства полиномов с вещественными и комплексными коэффициентами с двумя размахами неопределенности.

Рассмотрим интервальное семейство полиномов с комплексными коэффициентами $\Phi(s)$,

$$\Phi(s) = \left\{ \begin{array}{l} f(s) = A_0 + A_1 s + \dots + A_n s^n, A_i = a_i + j b_i, |a_i - a_i^0| \leq \alpha_i \gamma, \\ |b_i - b_i^0| \leq \beta_i \mu, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \gamma > 0, \mu > 0. \end{array} \right\}$$

Определение 4. Назовем при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$ функцию

$$Z_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)} = x_0(\omega) + j y_0(\omega),$$

определенную на всей вещественной оси, сложным нормированным номинальным годографом или кратко - сложным годографом.

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0(\omega) = a_0^0 - b_1^0 \omega - a_2^0 \omega^2 + b_3^0 \omega^3 + a_4^0 \omega^4 - \dots, \\ h_0(\omega) = b_0^0 + a_1^0 \omega - b_2^0 \omega^2 - a_3^0 \omega^3 + b_4^0 \omega^4 + \dots \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\omega) = \alpha_0 + \frac{\mu}{\gamma} \beta_1 |\omega| + \alpha_2 \omega^2 + \frac{\mu}{\gamma} \beta_3 |\omega|^3 + \alpha_4 \omega^4 + \dots, \\ T(\omega) = \beta_0 + \frac{\gamma}{\mu} \alpha_1 |\omega| + \beta_2 \omega^2 + \frac{\gamma}{\mu} \alpha_3 |\omega|^3 + \beta_4 \omega^4 + \dots \end{array} \right\}$$

Теорема 3. Для того, чтобы комплексный интервальный полином $\Phi(s)$ степени n был интервальным полиномом класса (n, k) -эквивалентности при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1. $\left\{ \begin{array}{l} \max((a_0^0)^2 - (\gamma \alpha_0)^2, (b_0^0)^2 - (\mu \beta_0)^2) > 0, \\ \max((a_n^0)^2 - (\gamma \alpha_n)^2, (b_n^0)^2 - (\mu \beta_n)^2) > 0. \end{array} \right\},$
2. Годограф $Z_0(\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ проходит последовательно против часовой стрелки ровно $n - 2k$ полуоборотов $(\Delta \arg_{-\infty < \omega < +\infty} Z_0(\omega) = \pi(n - 2k))$, не пересекая прямоугольника с вершинами $(\pm \gamma, \pm \mu)$.

В третьей главе проведен анализ методов исследования робастного поведения линейных систем управления с неинтервальным описанием неопределенности.

В п. 3.1. анализируются критерии существования выпуклых множеств неустойчивых полиномов в пространстве коэффициентов характеристического полинома системы первого приближения принадлежащих однородным классам неустойчивости. Эти критерии позволяют свести исследование бесконечномерной задачи к конечномерной, т.е. путем проверки конечного числа условий, налагаемых на полиномы, образующие это семейство, установить свойства всего этого семейства полиномов и геометрии их семейства годографов.

В п. 3.2. рассмотрены критерии робастного поведения семейств полиномов с неинтервальным описанием неопределенности. Системы с неинтервальным описанием неопределенности можно исследовать с помощью аналитических и графических критериев и вероятностного подхода как в непрерывном, так и в дискретном случаях. Пусть задано аффинное семейство полиномов

$$\tilde{F}(s, Q) = \{F(s, q) = F_0(s) + q_1 F_1(s) + \dots + q_l F_l(s), |q_i| \leq \gamma, i = \overline{1, l}\}$$

Теорема 4. Пусть $\deg F_i(s) \leq \deg F_0(s), i = \overline{1, l}, \deg F_0(s) = n$,

$$\gamma \sum_{i=1}^l |a_n^i| < |a_n^0|, \gamma \sum_{i=1}^l |a_0^i| < |a_0^0|,$$

где $a_m^i, i = \overline{1, l}$, – коэффициенты при s^m полиномов $F_i(s)$. Пусть полином $F_0(s)$ из класса (n, k) – эквивалентности. Тогда для принадлежности всего аффинного семейства $\tilde{F}(s, Q)$ классу (n, k) – эквивалентности необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

либо все реберные полиномы находятся в классе (n, k) – эквивалентности;
либо для любой пары $F_\mu(s), F_\eta(s)$ вершинных полиномов, являющихся концами реберного полинома, для их годографов

$$F_\mu(j\omega) = g_\mu(\omega) + jh_\mu(\omega) \text{ и } F_\eta(j\omega) = g_\eta(\omega) + jh_\eta(\omega)$$

выполняется: если $\omega = \omega_0$ вещественный положительный корень уравнения

$$g_\mu(\omega)h_\eta(\omega) - g_\eta(\omega)h_\mu(\omega) = 0,$$

то при $\omega = \omega_0$ выполняется неравенство

$$g_\mu(\omega)g_\eta(\omega) + h_\mu(\omega)h_\eta(\omega) > 0.$$

На рис. 2 показана геометрия семейства годографов аффинного семейства полиномов.

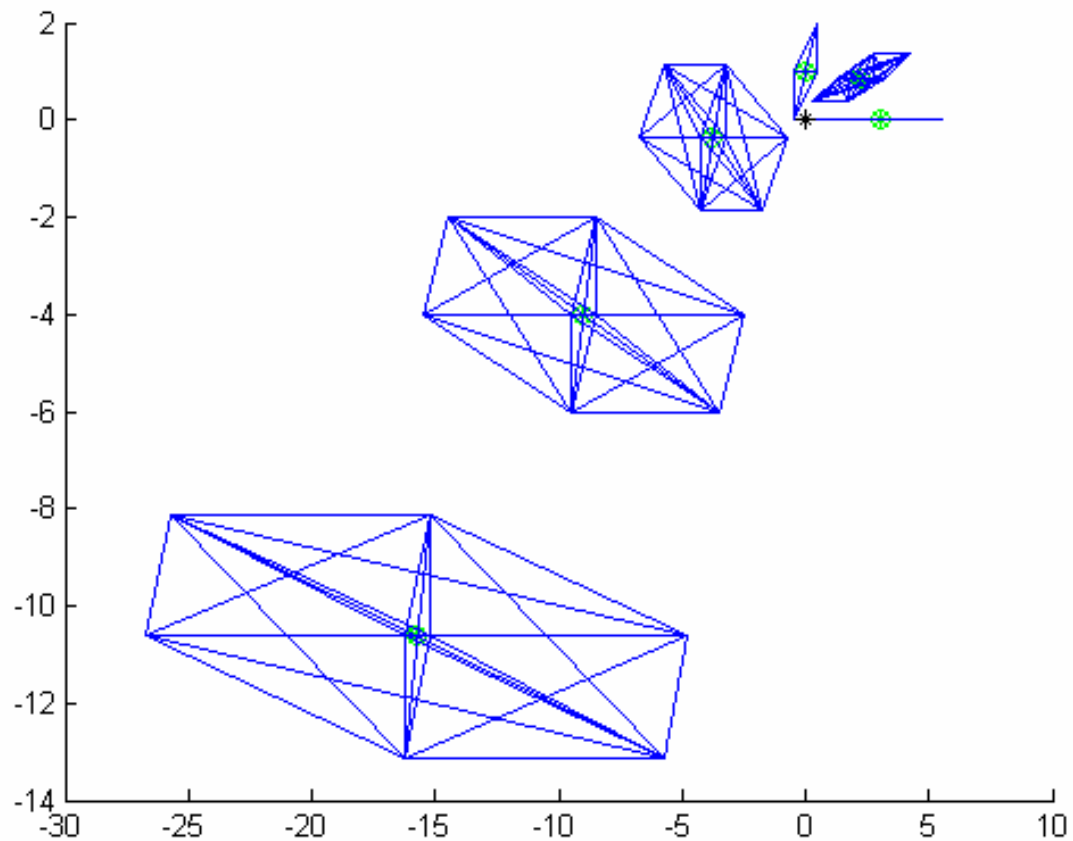


Рисунок 2. Визуализация применения теоремы 4 (срезы годографов $\tilde{F}(s, Q)$ при фиксированных значениях частот)

В п. 3.3. рассмотрена техника применения допустимых линейных преобразований для исследования робастного поведения семейств полиномов.

Определение 5. Любое линейное преобразование $B=DA$, коэффициентов полинома из класса (n, k) – эквивалентности

$$f(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n,$$

оставляющее его полиномом того же класса

$$F(s) = b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n,$$

называются допустимыми линейными преобразованиями.

Основные допустимые линейные преобразования коэффициентов характеристического полинома линейной системы управления:

$$1. b_i = \alpha a_i, b_{\bar{i}} = \alpha^i a_i, (i = 0, 1, \dots, n), \alpha > 0.$$

$$2. b_{2i} = \alpha a_{2i}, b_{2i+1} = \beta a_{2i+1}, \alpha > 0, \beta > 0, \begin{cases} i = \overline{0, l}, n = 2l + 1; \\ i = \overline{0, l-1}, n = 2l, a_{2l+1} = b_{2l+1} = 0. \end{cases}$$

$$3. b_{2i} = \alpha a_{2i} + \gamma a_{2i+1}, b_{2i+1} = \beta a_{2i+1}, a_{n+1} = 0, \alpha > 0, \gamma > 0, \beta > 0, a_0 b_0 > 0.$$

$$4. n = 2l + 1, b_{2i} = \alpha a_{2i}, b_{2i+1} = \beta a_{2i+1} + \gamma a_{2i}, i = \overline{0, l}, \alpha > 0, \gamma > 0, \beta > 0.$$

$$5. n = 2l, \alpha > 0, \gamma > 0, \beta > 0, \begin{cases} b_{2i} = \alpha a_{2i} + \gamma a_{2i-1}, i = \overline{0, l}, a_{-1} = 0, \\ b_{2i+1} = \beta a_{2i+1}, i = \overline{0, l-1}, \end{cases}$$

Теорема 5. Пусть: а) $\tilde{A}$ - множество коэффициентов интервального семейства полиномов $F(s)$ из класса (n, k) -эквивалентности; б) D — матрица допустимого линейного преобразования коэффициентов полинома (1-5). Тогда множество коэффициентов $\tilde{B} = \bigcup_{A \in \tilde{A}} DA$ образует интервальное семейство поли-

номов $\tilde{F}(s)$ из того же класса, а полиномы, соответствующие сторонам прямоугольника годографов переходят в полиномы с таким же свойством.

Образы угловых полиномов могут «перейти» на стороны прямоугольника и уже не быть угловыми (см. рис. 3).

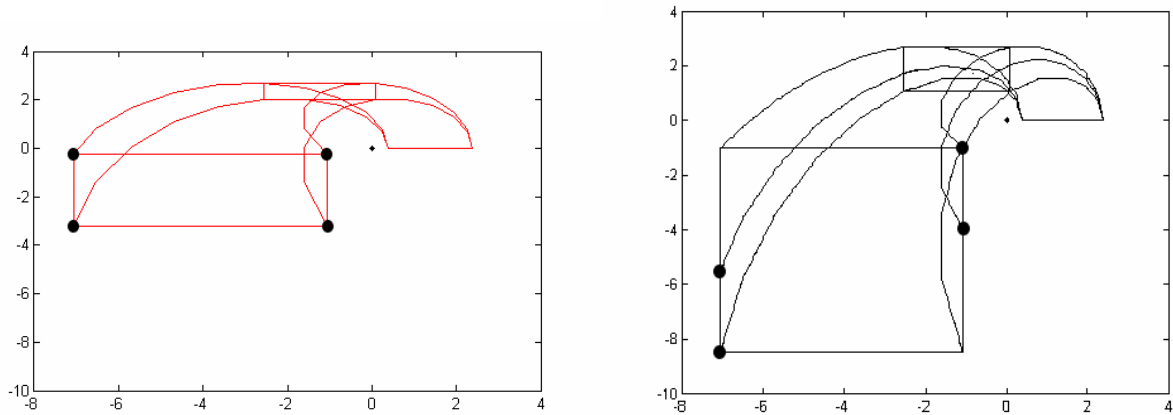


Рисунок 3. Образ семейства годографов (справа), полученного после преобразования (4) коэффициентов исходного семейства годографов (слева).

В п. 3.4. рассмотрены вопросы робастной k -стабилизации для объектов, описанных одномерными передаточными функциями. k -стабилизации позволяет переводить систему из одного класса устойчивости или неустойчивости в другой.

В п. 3.5. рассмотрен вероятностный подход к исследованию робастного поведения семейств полиномов. Рассмотрено применение метода Монте-Карло и аппроксимации доверительным эллипсом.

Четвертая глава посвящена анализу методов исследования робастной устойчивости и неустойчивости семейств матриц линейных систем управления. Исследован вопрос о робастной устойчивости семейств нестационарных матриц устойчивых по Важевскому (вещественные матрицы) и сильно сверхустойчивых (комплексные матрицы). Анализируются новейшие исследования по k -диагональным матрицам. При $k = 0$ их называют сверхустойчивыми.

В п. 4.1. приведены вспомогательные сведения и постановка проблемы.

Определение 6. Матрица $A \in C^{n \times n}$ называется:

- а) устойчивой, если весь ее спектр локализован слева от мнимой оси;
- б) устойчивой по Шуру, если ее спектр локализован внутри круга единичного радиуса.
- в) принадлежащей классу (n, k) -эквивалентности, если k чисел спектра вместе с кратностями лежат справа от мнимой оси, а $n - k$ – слева.
- г) принадлежащей классу (n, k) -эквивалентности по Шуру, если k чисел ее спектра находятся вне круга единичного радиуса, а $n - k$ – внутри этого круга.

Рассмотрим параметрические семейства матриц, такие как интервальное семейство, задаваемое в форме

$$A = (a_{ij}), \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}$$

или

$$A = A_0 + \Delta, \Delta = (\Delta_{ij}), |\Delta_{ij}| \leq \alpha_{ij} \gamma, i, j = \overline{1, n}, \sum_{i,j=1} \alpha_{ij} > 0, \alpha_{ij} \geq 0;$$

либо аффинное семейство

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^m q_i A_i, |q_i| \leq \gamma, i = \overline{1, m};$$

либо матричное семейство

$$A = A_0 + \Delta, \|\Delta\| \leq \gamma,$$

где матричные возмущения Δ ограничены по норме.

Определение 7. Семейство матриц $A \in C^{n \times n}$ называется принадлежащим классу (n, k) -эквивалентности матриц, если все его элементы (матрицы) принадлежат классу (n, k) -эквивалентности при всех a_{ij} или при всех Δ_{ij} из допустимого множества. Наибольшее число $\gamma = \gamma_{\max}^k$, для которого робастное (n, k) -поведение сохраняется при всех $\gamma < \gamma_{\max}^k$, называется k -радиусом матричного семейства.

В п. 4.2. анализируются формулы k -радиуса робастного поведения для непрерывных и дискретных систем, матрицы которых имеют k -диагональное преобладание.

В п. 4.3. предлагаются методики исследования робастного поведения семейств матриц с неопределенностью, задаваемой с помощью матричных норм для исследования принадлежности семейств матриц классам (n, k) -эквивалентности.

В п. 4.4. рассмотрены достаточные условия существования устойчивых выпуклых множеств в пространстве параметров нестационарной системы первого приближения, что является одной из задач робастной устойчивости матриц.

Определение 8. Будем говорить, что матрица $A(t) \in C^{n \times n}$ обладает сильной сверхустойчивостью (если $A(t) \in R^{n \times n}$, то обладает устойчивостью по Важевскому), если её эрмитова составляющая является отрицательно определенной $H_1(t)$ в представлении

$$A(t) = (A(t) + A^*(t)) / 2 + (A(t) - A^*(t)) / 2 = H_1(t) + jH_2(t)$$

Из определения следует, что сильно сверхустойчивая матрица $A(t)$ и матрица $H_1(t)$ имеют собственные числа, локализованные в левой полуплоскости.

Теорема 6. Пусть матрицы $A_1(t), \dots, A_m(t)$ из $C^{n \times n}$ обладают сильной сверхустойчивостью, тогда их любая выпуклая комбинация

$$A(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i(t), \quad \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = a, \quad a > 0$$

также обладает сильной сверхустойчивостью.

Теорема 7. Пусть матрица $A(t) \in C^{n \times n}$ обладает сильной сверхустойчивостью, а возмущение $\Delta \in C^{n \times n}$ фиксировано. Тогда семейство матриц $A(t) + \mu\Delta$, $\mu > 0$ является сильно сверхустойчивым, если

$$\mu < \min_{1 \leq i \leq n} \left(\inf_{t \geq 0} |\mu_i(t)| \right) / \|\Delta\|,$$

где $\mu_i(t)$ - собственные числа матрицы $A(t) + A^*(t)$, $\|\Delta\|$ - спектральная норма.

Теорема 7 верна для $A(t) \in R^{n \times n}$, устойчивой по Важевскому, и $\Delta \in R^{n \times n}$.

В приложении приведены алгоритмы, программы и приемы визуализации для применения современных подходов для исследования робастного поведения (устойчивости или неустойчивости) систем управления в инженерной практике. Проиллюстрировано приложение теоретических положений на примере ряда моделей систем управления.

Основные результаты диссертационной работы.

Исследования и результаты, полученные в диссертации, направлены на адаптацию известных методов исследования робастной устойчивости линейных

динамических систем СТС с интервальным и неинтервальным описанием неопределенности. Все описанные результаты рассматриваются с точки зрения общего подхода к проблеме устойчивости, а именно, исследования, как устойчивости, так и неустойчивости. Построен ряд новых алгоритмов, относящихся к теме исследования, и имеющих прикладное значение для инженерной практики. Рассмотрено приложение разработанной теории к некоторым математическим моделям систем управления технических объектов.

1. Проведен критический сравнительный анализ широкого круга вопросов связанных с исследованием робастной устойчивости и неустойчивости интервальных и неинтервальных систем управления СТС.
2. Модифицированы некоторые аналитические и графические критерии принадлежности классам (n,k) - эквивалентности линейных систем управления с комплексными и вещественными коэффициентами в непрерывном и дискретном случаях в приложении к СТС. Разработана методика и алгоритмы расширения робастно устойчивого или неустойчивого интервального семейства полиномов с помощью допустимых линейных преобразований. Найдены новые геометрические свойства этих преобразований.
3. Построено большое число новых алгоритмов сопровождающих исследования в диссертационной работе, полезных как для инженерной практики, так и для научных и образовательных целей.
4. С помощью полученной методики найден ряд робастных характеристик СТС (робот-сварщик, катер, судно), анализ которых позволяет повысить эффективность, безопасность и надежность этих систем.

Основные публикации по теме диссертации.

1. Зеленков Г.А., Неронов В.Ф., Черноглазов Д.Г. Исследование робастного поведения семейств полиномов методом допустимых линейных преобразований. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 29(1). М.: ЛКИ, 2007 с.122-130.
2. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Черноглазов Д.Г., Неронов В.Ф. Оценка вещественного радиуса робастной устойчивости для семейства матриц, устойчивых по Важевскому. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 31(1). М.: ЛКИ, 2007, с 158-161.
3. Зеленков Г.А., Лопатин М.С., Черноглазов Д.Г. Вероятностный подход к исследованию робастной устойчивости и неустойчивости семейств

- полиномов. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 31(2). М.: ЛКИ, 2007 с. 126-132.
4. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Лопатин М.С., Черноглазов Д.Г. Робастное поведение интервальных полиномов с независимыми ограничениями на вещественную и комплексную части коэффициентов. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 32(3). М.: ЛКИ, 2008 с.161-167.
 5. Зеленков Г.А., Мякинин В.В., Черноглазов Д.Г. О связи локализации спектра матрицы линейного оператора в унитарном пространстве и ее эрмитовой составляющей. Материалы XVI международной конференции «Математика. Экономика. Образование». V Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2008 с. 119-120.
 6. Зеленков Г.А., Тульчий В.В., Черноглазов Д.Г. Об устойчивости и неустойчивости семейств матриц с возмущениями, ограниченными по норме. Материалы седьмой региональной научно-технической конференции «Проблемы эксплуатации водного транспорта и подготовки кадров на юге России». Новороссийск: РИО МГА имени адмирала Ф.Ф. Ушакова, 2008 с. 220.
 7. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Черноглазов Д.Г. О робастной устойчивости и неустойчивости комплексных интервальных полиномов. Материалы XV международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Выпуск 15. Дубна, Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. с. 13.
 8. Зеленков Г.А., Тульчий В.В., Черноглазов Д.Г. Проблемы робастной устойчивости систем управления подвижных объектов. Сборник научных трудов. Выпуск 13. Новороссийск: МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2009.
 9. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Черноглазов Д.Г. Робастные семейства матриц с k -диагональным преобладанием. Материалы шестнадцатой международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Выпуск 16. Ч.1. Пущино, Москва-Ижевск: Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009, с. 109.
 10. Зубов Н.В., Тульчий В.В., Черноглазов Д.Г. О робастной устойчивости семейств нестационарных матриц устойчивых по Важевскому. Материалы международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, М.:МИАН, 2009, с. 74-45.
 11. Зеленков Г.А., Лопатин М.С., Черноглазов Д.Г. Методы исследования устойчивости полиномов и их обобщения для анализа неустойчивости. Часть I. Матричные и графические методы. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 42(2). М.: ЛКИ, 2010, с. 56-69.

12. Черноглазов Д.Г., Лопатин М.С., Зеленков Г.А. Исследование устойчивости и неустойчивости интервального полинома по вещественным и мнимым частям коэффициентов. Материалы XVII международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Выпуск 17. Дубна, Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
13. Черноглазов Д.Г., Лопатин М.С., Тульчий В.В., Зеленков Г.А. Критерии робастной устойчивости и неустойчивости интервального полинома с двумя размахами неопределенности. Сборник научных трудов. Выпуск 14. Новороссийск: МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2010.