

На правах рукописи

Зайцева Ольга Борисовна

**ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТЬЮ
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ,
управление и обработка информации
(промышленность)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена в Армавирской государственной педагогической академии на кафедре алгебры, геометрии и МПМ

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Каштанов В.А.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических
наук, профессор **Рыков В.В.**

доктор технических наук,
профессор **Воронин Е.А.**

Ведущая организация: Московский автомобильно-дорожный
государственный технический
университет (МАДИ)

Защита состоится 12 мая в 14.00 часов на заседании совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д002.017.03 при Учреждении Российской академии наук Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН по адресу:
119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40 в конференц-зале.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН.

Автореферат разослан « 5 » апреля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д002.017.03
кандидат физико-математических наук



А.В. Мухин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В настоящее время проблема безопасности реально протекающих процессов в различных сферах деятельности человека привлекает внимание широкого круга специалистов. Вопросы обеспечения безопасности становятся важнейшими на всех уровнях управления и во всех сферах жизнедеятельности. Существуют проблемы национальной и военной безопасности страны, экономической и продовольственной безопасности государства, экологической, энергетической и радиационной безопасности района или области, пожарной безопасности помещения или здания, безопасности на транспорте, безопасности функционирования технических систем (техногенная безопасность), информационной безопасности, социальной, личной безопасности.

Этот перечень без труда можно было бы существенно расширить.

Наличие угроз естественному (безопасному) течению процессов функционирования систем требует от специалистов разработки научного подхода к исследуемой проблеме, практическая реализация которого могла бы обеспечить анализ сложившейся ситуации и достоверный прогноз ее развития.

Проблемы обеспечения безопасности актуальны и с практической, и с теоретической точки зрения, поэтому, прежде всего, необходимо определить предмет теории, ключевые понятия теории безопасности и законодательно утвердить.

В настоящее время нет еще единого понимания проблем безопасности в различных областях, нет единой терминологии, нет общепринятого методологического подхода к анализу и решению этой проблемы. Разобщенность не способствует созданию единой математической теории безопасности, как одного из структурных компонентов математики, которая необходима, поскольку только с помощью серьезных и глубоких теоретических подходов и разработок можно создать обоснованный (высококачественный) количественный (математический) прогноз развития опасных ситуаций, выработать управления и реализовать их для обеспечения безопасного течения реальных процессов.

Анализ работ, посвященных проблеме безопасности, показывает, что понятие «безопасность» трактуется разнообразно: от принятого большинством российских ученых в качестве

методологического основания «состояния защищенности» до «совокупности свойств» или «системы защиты интересов». Рассматриваются вопросы национальной безопасности (Косолапов Н.А. и др.), экономической (Абалкин Л.И., Тамбовцев В.Л., Савин В.А. и др.), информационной (Уфимцев Ю.С., Ерофеев Е.А., Зырянова Т.Ю. и др.), функциональной (Шубинский И.Б. и др.), финансовой, экологической, безопасности жизнедеятельности.

Некоторые подходы к математическому моделированию безопасности изложены в работах Викторовой В.С., Волкова А.А., Латута О.В., Платонова Д.В. и др.

Различные подходы к проблеме управления качеством функционирования технических систем и систем массового обслуживания получили развитие в трудах российских математиков Гнеденко Б.В., Каштанова В.А., Коваленко И.Н., Рыкова В.В., Соловьева А.Д. и др. Тем самым, в математических работах увязываются понятия качества (безопасность) и надежности.

Различные аспекты проблемы обеспечения безопасности, связанные с устойчивостью функционирования динамических систем и методологические проблемы отражены в работах Северцева Н.А., Дивеева А.И., Ильичева А.В., Дедкова В.К. и др.

Разнообразие трактовок понятия «безопасность» в настоящее время обуславливает наличие противоречий между:

- всеобъемлющим характером понятия «безопасность» и неупорядоченностью включения тех или иных компонентов в его содержание, отсутствием математических моделей безопасности;
- отсутствием четкой дифференциации понятий «риск», «угроза», «опасность» и т.д. и определением степени опасности в зависимости от эволюции системы;
- требованиями общества к безопасности и реальным положением дел.

Эти противоречия показывают актуальность и важность данного исследования.

Целью диссертационного исследования является системный анализ эволюции реальных систем, позволяющий количественно оценивать безопасность как свойство процессов функционирования этих систем.

Предметом исследования являются управляемые случайные процессы с катастрофами. В настоящей работе исследуются однородные управляемые полумарковские процессы с катастрофами, обобщающие известные классы процессов – марковские процессы и

процессы восстановления.

В настоящем исследовании *безопасность* понимается – как свойство процесса функционирования системы (причем системы в широком смысле этого слова).

При описании процесса функционирования системы и создании математической модели необходимо учитывать следующие факторы: фактор времени (все процессы развиваются во времени), факторы неопределенности (нет исходных данных, стохастическая неопределенность, большая размерность, невозможность постоянно наблюдать за процессом), фактор управления (человеческий фактор), экономические факторы и т.д.

Анализ этих факторов позволяет сделать вывод – для построения математических моделей безопасности целесообразно использовать теорию управляемых случайных процессов.

Изучая безопасность – как свойство процессов функционирования системы необходимо ответить на ряд вопросов:

– Какие состояния являются безопасными, какие опасными, насколько опасными?

– Чем измерять безопасность? Какие количественные показатели характеризуют это свойство?

Естественно, что показатели, характеризующие безопасность, должны быть объективными, они должны быть связаны с процессом функционирования, зависеть от траектории, по которой эволюционирует система во времени.

В работе **объектом управления** является управляемый полумарковский процесс с катастрофами и с конечным множеством состояний, класс стратегий – множество марковских однородных рандомизированных стратегий, качество управления определяется функционалами, построенными на траекториях управляемого случайного процесса:

1. Математическим ожиданием времени до катастрофы.

2. Экономическим функционалом, определяющим затраты, которые будут иметь место при использовании выбранной стратегии (функционал накопления).

Подобные модели встречаются в работах Соловьева А.Д. (управляемые процессы восстановления с катастрофами), Каштанова В.А., Янишевского И.М. (управляемые полумарковские процессы с катастрофами).

Областью исследования является теория случайных процессов.

Методы исследования. В работе применяются классические методы теории вероятностей, теории случайных процессов, исследования операций, оптимизации и методы теории управления.

Достоверность и обоснованность полученных результатов основана на корректности постановок задач, учете важнейших реальных факторов, влияющих на безопасность, отказе от дополнительных ограничений, строгом использовании указанных методов. Все полученные результаты имеют строгие математические доказательства.

Научная новизна. В диссертации дано новое определение безопасности как свойства процесса функционирования системы во времени. Для оценки характеристик (критериев) безопасности предложены модели однородных управляемых полумарковских процессов с катастрофами. Впервые предложено в качестве оценки безопасности (количественного критерия) использовать математическое ожидание времени до катастрофы, как некоторый функционал, определенный на траекториях случайного процесса, описывающего функционирование системы во времени, и объективно отражающий уровень безопасности системы. Проблемы безопасности увязаны с экономическими показателями и характеристиками надежности. Приведена классификация состояний процесса, описывающего эволюцию системы, в основе которой лежит предложенный критерий безопасности. Построена оптимальная стратегия управления процессом функционирования системы, обеспечивающая максимальное значение критерия безопасности.

На защиту выносятся следующие положения:

Безопасность определяется как свойство процесса функционирования системы во времени.

Предложена модель однородного управляемого полумарковского процесса с катастрофами как модель анализа и оценки характеристик безопасности.

Предложено количественно измерять безопасность функционирования системы функционалами, определенными на траекториях случайного процесса, описывающего эволюцию системы.

Практическая ценность заключается в развитии и разработке

новых подходов к анализу проблемы безопасности. Разработанные теоретические положения и построенные на их основе алгоритмы способствуют развитию математической теории безопасности. Полученные результаты и формализованные алгоритмы могут быть положены в основу создания моделей оценки безопасности функционирования и эксплуатации реальных промышленных систем.

Решение данной задачи имеет важное значение для обеспечения безопасности функционирования транспортных систем, информационных, энергетических систем, систем связи и т.д.

В работе эти возможности продемонстрированы на примере исследования системы защиты.

Результаты работы могут быть также использованы в учебных курсах по теории управления, теории оптимизации, теории случайных процессов и специалистами, занимающимися разработкой систем защиты.

Реализация результатов.

Результаты диссертационного исследования могут быть рекомендованы к использованию в промышленных организациях (ОПК) и реализованы при проведении НИР и в учебном процессе ряда вузов – МИЭМ, АГПА, КубГУ.

Личный вклад автора в проведенные исследования.

Представленные на защиту результаты диссертации получены лично автором.

Апробация работы.

Результаты диссертационного исследования неоднократно докладывались автором на Международных и Всероссийских конференциях, а также на семинарах в АГПА, МИЭМ и ВЦ РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликовано **9** работ, общим объемом 6,2 п.л., в том числе 4 в журналах из перечня изданий, рекомендованных ВАК, объемом 1,5 п.л. В совместных работах автору принадлежит 60%.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Главы состоят из разделов. В каждой главе используется своя автономная нумерация формул и теорем. Объем диссертации 122 страницы. Список

литературы содержит 93 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведена общая характеристика работы, включающая актуальность темы исследования, ее цель, методы и область исследования, достоверность, научную новизну, практическую значимость, реализацию результатов, полученных в работе. Также во введении приведено краткое содержание диссертации и даны сведения о ее апробации. Во введении формулируется методологическое понимание безопасности как свойства процесса функционирования системы.

В первой главе «Управляемые случайные процессы как математические модели безопасности. Постановка задачи управления и оптимизации характеристик безопасности» даются определения полумарковского и марковского процессов с катастрофами с конечным множеством состояний, вводятся вероятностные характеристики, задающие эти процессы. Определяются показатели (функционалы, построенные на траекториях случайного процесса) характеризующие свойство безопасности.

В первом параграфе даны определения управляемого марковского процесса восстановления с катастроф и управляемого полумарковского случайного процесса с катастроф. Исходным объектом для конструктивного построения управляемого полумарковского процесса с катастрофами является однородная четырехмерная марковская цепь или однородный управляемый процесс марковского восстановления с катастрофами

$$(\xi_n, \theta_n, u_n, \eta_n), \quad n \geq 0, \quad \xi_n \in E, \quad \theta_n, \eta_n \in R^+ = [0, \infty), \quad u_n \in U, \quad (1)$$

где

- $E = \{1, 2, \dots, N\}$, $N < \infty$ - конечное множество состояний;
- $R^+ = [0, \infty)$ – множество неотрицательных действительных чисел (время);
- U - пространство управлений с σ - алгеброй $\mathbf{A}$ подмножеств этого пространства.

Марковская цепь задается переходными вероятностями

специального вида

$$\begin{aligned} P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t, u_{n+1} \in B, \eta_{n+1} < x / \xi_n = i, \theta_n = \tau, u_n = u, \eta_n = y\} = \\ = P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t, u_{n+1} \in B, \eta_{n+1} < x / \xi_n = i\} = \tilde{Q}_{ij}(t, B, x) \end{aligned} \quad (2)$$

Семейство функций $\tilde{Q}_{ij}(t, B, x)$ порождает на измеримом пространстве (U, A_i) семейство вероятностных мер

$$G_i(B) = P\{u_{n+1} \in B / \xi_n = i\} = \sum_{j \in E} \tilde{Q}_{ij}(\infty, B, \infty), \quad i \in E, B \in A_i$$

и на основании теоремы Радона-Никодима полумарковское ядро

$$Q_{ij}(t, u, x) = P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t, \eta_{n+1} < x / \xi_n = i, u_{n+1} = u\}, \quad (3)$$

для которого имеет место равенство

$$\tilde{Q}_{ij}(t, B, x) = \int_B Q_{ij}(t, u, x) G_i(du).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Однородный управляемый процесс марковского восстановления с катастрофами задается семейством матриц $\{Q_{ij}(t, u, x)\}$, множеством вероятностных мер $G_i(B)$ и начальным распределением вероятностей состояний p_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Управляемый полумарковский процесс с катастрофами $Y(t)$ определяется как случайный процесс, у которого четыре компоненты $Y(t) = (\xi(t), u(t), \theta(t), \eta(t))$, где

$$\xi(t) = \xi_{v(t)}, \quad u(t) = u_{v(t)+1}, \quad \theta(t) = \theta_{v(t)+1}, \quad \eta(t) = \eta_{v(t)+1},$$

$$v(t) = \sup\{n : \sum_{k \leq n} \theta_k \leq t\}, \quad \theta_0 = 0.$$

Компоненты $\theta(t)$ и $\eta(t)$ увяжем с моментами появления некоторого события A , называемого *катастрофой*. Если для некоторого $t \geq 0$ выполняется неравенство $\theta(t) > \eta(t)$, то считаем, что на периоде $[t_{v(t)}, t_{v(t)+1})$ произошла катастрофа в момент $t_{v(t)} + \eta(t)$. Значение считающего процесса $v(t)$ определяет номер периода, на котором произошла катастрофа. Далее заметим, что на каких-то периодах между соседними моментами изменения состояний управляемого полумарковского произошла катастрофа (на этом

периоде $\theta_n < \eta_n$, n – номер периода), а на каких-то интервалах катастроф не было (на этих периодах выполняется неравенство $\theta_n \leq \eta_n$). Если обозначить через n_i номера интервалов, на которых произошли катастрофы, то номер i определяет номер катастрофы, а момент $\tau_i = t_{v(t)} + \eta(t)$ определяет момент катастрофы с заданным номером i . Таким образом, получаем последовательность (поток) моментов катастроф при $t > 0$.

В частности, можно определить момент первой катастрофы. Определим нижнюю грань тех моментов времени, для которых третья компонента превышает четвертую компоненту $\zeta = \inf\{t : \theta(t) > \eta(t)\}$. Момент $\zeta \geq 0$ совпадает либо с нулем, либо с некоторым моментом изменения состояний управляемого полумарковского процесса с катастрофами $Y(t)$. Это значит, момент ζ определяет номер периода $n(t)$, на котором произошла катастрофа, $\zeta = t_{n(t)-1} = \sum_{k \leq n(t)-1} \theta_k$. Тогда календарный момент первой катастрофы определится равенством $\tau_1 = \zeta + \eta(\zeta)$.

Заметим, что случайный номер периода $n(t)$, на котором произошла катастрофа, и значение считающего процесса $v(t)$ связаны соотношением $n(t) = v(t) + 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Однородный управляемый полумарковский процесс с катастрофами $Y(t)$ задается семейством матриц $\{Q_{ij}(t, u, x)\}$, множеством вероятностных мер $G_i(B)$ и начальным распределением вероятностей состояний p_i .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Однородный управляемый полумарковский процесс с катастрофами $Y(t)$ задается семейством матриц $\{Q_{ij}(t, u)\}$, множеством вероятностных мер $G_i(B)$, семейством распределений $F_i(x, t, u)$ и начальным распределением вероятностей состояний p_i .

Выше обозначена функция

$$F_i(x, t, u) = P\{\eta_{n+1} < x / \zeta_n = i, \theta_{n+1} = t, u_{n+1} = u\},$$

удовлетворяющая равенству

$$\sum_{j \in E} Q_{ij}(t, u, x) = \int_0^t F_i(x, y, u) d_y \left(\sum_{j \in E} Q_{ij}(y, u) \right).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Однородный управляемый полумарковский процесс с катастрофами $Y(t)$ задается семейством матриц $\{Q_{ij}(t, u)\}$, множеством вероятностных мер $G_i(B)$, семейством распределений $F_{ij}(t, x, u)$ и начальным распределением вероятностей состояний p_i .

Выше обозначена функция $F_{ij}(t, x, u) = \frac{P_{ij}(t, u, x)}{P_{ij}(t, u)}$, в которой

функции $P_{ij}(t, u, x)$ и $P_{ij}(t, u)$ определяются равенствами

$$Q_{ij}(t, u, x) = \int_0^t P_{ij}(x, y, u) d_y \left(\sum_{j \in E} Q_{ij}(y, u) \right),$$

$$Q_{ij}(t, u) = \int_0^t P_{ij}(y, u) d_y \left(\sum_{j \in E} Q_{ij}(y, u) \right).$$

Во втором параграфе дано определение управляемого марковского случайного процесса с катастрофами. Компоненты управляемого марковского процесса с катастрофами определяются аналогично полумарковскому случаю. Изменяется только полумарковское ядро

$$Q_{ij}(t, u) = \frac{\lambda_{ij}(u)}{\Lambda_i(u)} (1 - e^{-\Lambda_i(u)t}), \quad \Lambda_i(u) = \sum_{k \neq i} \lambda_{ik}(u).$$

Управляемый марковский процесс с катастрофами задается интенсивностями перехода $\lambda_{ij}(u)$, $i, j \in E$, $u \in U_i$, зависящими от управлений, вероятностными мерами $G_i(B)$, определяющими марковскую однородную рандомизированную стратегию, условными распределениями $F_{ij}(t, x, u)$ момента катастрофы и начальным распределением вероятностей состояний p_i , $i, j \in E$, $t, x \in [0, \infty)$, $u \in U_i$, $B \in \mathbf{A}_i$.

В третьем параграфе приведена постановка задачи управления и оптимизации характеристик безопасности.

Математические задачи формулируются следующим образом:

1. Определить условное распределение $P\{\tau_1 < t / \zeta(0) = k\}$ в зависимости от исходных характеристик управляемого полумарковского и марковского процессов;
2. Исследовать структуру условного математического ожидания $M(\tau_1 / \zeta(0) = k)$ в зависимости от вероятностных распределений $G_i(B)$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$;
3. Определить набор вероятностных распределений $G_i(B)$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, на которых достигается максимум условного математического ожидания $M(\tau_1 / \zeta(0) = k)$.

В практической ситуации необходимо учитывать и ресурсы необходимые для реализации оптимальной стратегии. На траекториях управляемого полумарковского процесса строится функционал накопления - математическое ожидание накопленного эффекта (затрат) до момента катастрофы. Если накопленный эффект до момента t равен $\zeta(t)$, то необходимо исследовать функционал

$$C_i = \lim_{t \rightarrow \infty} C_i(\min(t, \tau_1)) = \lim_{t \rightarrow \infty} M[\zeta(\min(t, \tau_1)) / \zeta(0) = i].$$

Проблема, связанная с экономическими аспектами безопасности: исследовать структуру условного математического ожидания накопленного эффекта до момента катастрофы C_k в зависимости от вероятностных распределений $G_i(B)$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Во второй главе «Анализ характеристик безопасности» решаются сформулированные в первой главе задачи.

В первом параграфе приведена постановка задачи.

Во втором параграфе исследуются вероятностные характеристики момента катастрофы. Для функции распределения момента катастрофы

$$\Psi_i(x) = P\{\tau_1 < x / \zeta(0) = i\}, \bar{\Psi}_i(x) = 1 - \Psi_i(x)$$

получена система интегральных уравнений

$$\bar{\Psi}_i(x) = \sum_{j \in E} \int_{u \in U_j}^x [\int_0^x \bar{F}_{ij}(t, t, u) \bar{\Psi}_j(x-t) d_t Q_{ij}(t, u) + \int_x^\infty \bar{F}_{ij}(t, x, u) d_t Q_{ij}(t, u)] G_i(du).$$

Для математического ожидания $M_k = M(\tau_1 / \zeta(0) = k)$ получена система алгебраических уравнений

$$(1 - \beta_{ii})M_i - \sum_{j \in E, j \neq i} \beta_{ij}M_j = b_i, \quad (4)$$

в которой коэффициенты определяются равенствами

$$b_i = \sum_{j \in E} \int_{u \in U_i} \int_0^\infty \int_0^t [x d_x F_{ij}(t, x, u) + \int_t^\infty t d_x F_{ij}(t, x, u)] d_t Q_{ij}(t, u) G_i(du), \quad (5)$$

$$\beta_{ij} = \int_{u \in U_i} \int_0^\infty \bar{F}_{ij}(t, t, u) d_t Q_{ij}(t, u) G_i(du). \quad (6)$$

Коэффициент β_{ij} равен условной вероятности того, что процесс перешел в состояние j (следующим состоянием будет состояние j) и за время этого перехода не произошло катастрофы при условии, что на этом периоде процесс находился в состоянии i .

Коэффициент b_i есть условное математическое ожидание минимума двух случайных величин – длительности периода и случайной величины, определяющей момент катастрофы на периоде, при условии, что процесс провел период в состоянии i .

Классификация состояний. Если для состояния i выполняется равенство $\sum_{j \in E} \beta_{ij} = \beta_i = 0$, то такое состояние назовем особо опасным.

Если для состояния i выполняется равенство $\beta_i = I$, то такое состояние назовем безопасным. Если для состояния i выполняются равенства $0 < \beta_i < I$, то такое состояние назовем опасным. Далее будем использовать следующие обозначения: B – матрица с элементами β_{ij} , $i, j \in E$, Δ – определитель матрицы $I-B$, (I – единичная матрица), Δ_j , $j \in E$ – определитель матрицы $I-B$, в которой j -ый столбец заменяется столбцом из свободных членов.

ТЕОРЕМА 2.1. Если в каждом эргодическом множестве (неразложимом классе) вложенной цепи Маркова управляемого полумарковского процесса с катастрофами и конечным множеством состояний есть хотя бы одно опасное или особо опасное состояние, то решение алгебраической системы (4) представляется

отношением определителей $M_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Для состояний из фиксированного неразложимого класса $i \in E_{3k}$ решение системы (4) определяется

отношением $M_i = \frac{\Delta_i^{(k)}}{\Delta^{(k)}}$, где $\Delta^{(k)}$ - определитель матрицы $B^{(k)}$ переходных вероятностей внутри неразложимого класса, $\Delta_i^{(k)}$ определитель матрицы $B^{(k)}$, в которой i -ый столбец заменен столбцом $b^{(k)}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если состояние $i \in E_0$ особо опасное состояние, то $M_i = b_i = \sum_{j \in E} \int_{u_1}^{\infty} \int_0^t x d_x F_{ij}(t, x, u) d_t Q_{ij}(t, u) G_i(du)$.

В третьем параграфе приведен алгоритм построения оптимальной стратегии управления. Доказана теорема и следствия о структуре исследуемого функционала.

ТЕОРЕМА 2.2. Для управляемого полумарковского процесса с катастрофами и конечным множеством состояний, у которого в каждом эргодическом множестве есть хотя бы одно опасное или особо опасное состояние, математическое ожидание момента катастрофы есть дробно-линейный функционал относительно вероятностных мер $\vec{G} = \{G_1, G_2, \dots, G_N\}$

$$M_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\int_{u_1} \int_{u_2} \dots \int_{u_N} A_i(u_1, u_2, \dots, u_N) G_1(du_1) G_2(du_2) \dots G_N(du_N)}{\int_{u_1} \int_{u_2} \dots \int_{u_N} B(u_1, u_2, \dots, u_N) G_1(du_1) G_2(du_2) \dots G_N(du_N)}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Если процесс стартует из некоторого эргодического класса, то дробно-линейный функционал $M_i = M_i(\vec{G})$ зависит только от распределений G_j , $j \in E_{3k}$, E_{3k} - стартовый эргодический класс.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Если i особо опасное состояние, $i \in E_0$, то $M_i = M_i(G_i)$ является линейным функционалом.

Построение оптимальной стратегии управления базируется на

теореме¹: если существует максимум дробно-линейного функционала, $\Omega_0 \neq \emptyset$, и множество допустимых распределений Ω содержит все вырожденные распределения $\Omega^{(0)}$, то $\Omega_0 \cap \Omega^{(0)} \neq \emptyset$.

Утверждение этой теоремы позволяет выписать равенство

$$\max_{\vec{G} \in \Omega} M_i(\vec{G}) = \max_{\vec{G} \in \Omega^{(0)}} M_i(\vec{G}), \quad (7)$$

если σ -алгебры A_i , $i \in E$ содержат одноточечные множества.

Следовательно, на основании этой теоремы имеем

$$\max_{\vec{G} \in \Omega} M_i(\vec{G}) = \max_{\vec{u} \in U^{(N)}} \frac{A_i(u_1, u_2, \dots, u_N)}{B(u_1, u_2, \dots, u_N)} = \frac{A_i(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_N^{(0)})}{B(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_N^{(0)})}. \quad (8)$$

Теперь можно определить оптимальную стратегию управления: каждый раз при попадании управляемого процесса в состояние $i \in E$ нужно с вероятностью единица принимать решение $u_i^{(0)} \in U_i$.

В четвертом параграфе исследуются экономические аспекты безопасности. Для математического ожидания C_k получена система алгебраических уравнений $C_k = c_k + \sum_{i \neq N+1} p_{ki} C_i$, где $p_{ij} = \beta_{ij}$,

$$c_k = \sum_{j \in E} \int_{u \in U_k} \int_0^\infty \int_0^t [R_{kj}(t, x, u) d_x F_{kj}(t, x, u) + R_{kj}(t, u) \bar{F}_{kj}(t, t, u)] d_t Q_{kj}(t, u) G_k(du),$$

$R_{ij}(t, \tau, u)$ - математическое ожиданию накопленного эффекта за календарное время τ при условии, что в нулевой момент времени $t=0$ процесс перешел в состояние i , через время t перейдет в состояние j и в нулевой момент времени было принято решение u , $R_{ij}(t, t, u) = R_{ij}(t, u)$.

Решение этой системы алгебраических уравнений есть дробно-линейные функционалы

¹ Вопросы математической теории надежности / Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А. и др. / под ред. Гнеденко Б.В. – М.: Радио и связь, 1983- 376с.

$$C_k(G_1, G_2, \dots, G_N) = \frac{\int_{U_1} \int_{U_2} \dots \int_{U_N} D_i(u_1, u_2, \dots, u_N) G_1(du_1) G_2(du_2) \dots G_N(du_N)}{\int_{U_1} \int_{U_2} \dots \int_{U_N} D(u_1, u_2, \dots, u_N) G_1(du_1) G_2(du_2) \dots G_N(du_N)}$$

и для оптимальной вырожденной стратегии управления получаем значение экономического показателя

$$C_k(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_N^{(0)}) = \frac{D_i(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_N^{(0)})}{D(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_N^{(0)})}.$$

В третьей главе приведен пример конкретного использования теоретических результатов второй главы. Исследуется модель функционирования системы защиты. Эта модель описывает процессы, связанные с охраной объектов, охраной территории, охраной информации и другими подобными ситуациями. В описываемой схеме рассматриваются два аспекта. С одной стороны, есть внешние воздействия (попытки несанкционированного проникновения на территорию охраняемых объектов, несанкционированные попытки проникновения в информационную систему и тому подобные воздействия). С другой стороны, есть система защиты (технические элементы и системы, организационные структуры, программные системы), которая призвана парировать возникающие угрозы. Система защиты может находиться в различных состояниях, от которых зависит качество ее функционирования, то есть качество парирования угроз. Эволюция системы защиты во времени также носит случайный характер (отказы, сбои, старение), в этот процесс может вмешиваться обслуживающий персонал (проведение различных восстановительных работ, проверок, профилактик, обновлений).

В первом параграфе дано описание процесса атак на систему защиты – поток атак есть процесс Пуассона с параметром λ .

Во втором параграфе приведено описание процесса эволюции системы защиты, без учета структуры, у которой отказ самостоятельно проявляется через случайное время.

Пусть задана система, у которой время безотказной работы ξ

распределено по закону $F(x) = P\{\xi < x\}$.

Появившийся отказ самостоятельно проявляется через случайное время ζ , $\Phi(x) = P\{\zeta < x\}$.

В начальный момент $t_0=0$ начинается эксплуатация системы защиты и назначается плановое предупредительное обновление (профилактика) системы через время $v \geq 0$, распределенное по закону $G(x) = P\{v < x\}$, $G(0) = 0$.

Если к назначенному моменту система не отказала $\{v < \xi\}$, то в момент v начинается плановое предупредительное обновление системы, которое длится время γ_1 , $F_1(x) = P\{\gamma_1 < x\}$.

Если к назначенному моменту система отказала, но отказ не обнаружился $\{\xi \leq v < \xi + \zeta\}$, то в назначенный момент v начинается плановое аварийное обновление системы, длительностью γ_2 , $F_2(x) = P\{\gamma_2 < x\}$.

Если отказ системы наступил и самостоятельно проявился до назначенного момента $\{v \geq \xi + \zeta\}$, то в момент обнаружения отказа $\xi + \zeta$ начинается внеплановое аварийное обновление системы длительностью γ_3 , $F_3(x) = P\{\gamma_3 < x\}$.

После окончания восстановительных работ весь процесс обслуживания повторяется заново.

В третьем параграфе определены характеристики управляемого полумарковского процесса с катастрофами.

В рассматриваемой модели марковские моменты - моменты начала и окончания восстановительных работ. Полумарковский процесс принимает значения из множества $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Решения принимается только в моменты перехода в состояние 0 (в моменты окончания восстановительных работ) из множества $U_0 = [0, \infty)$.

Состояния $i=1, 2, 3$ определяются видом восстановления.

Полумарковское ядро имеет вид

$$Q_{i0}(t, u) = P\{\gamma_i < t\} = F_i(t), \quad Q_{ij}(t, u) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$Q_{01}(t, u) = P\{v < t, v \leq \zeta / v = u\} = \begin{cases} 0, & u > t, \\ \bar{F}(u), & u \leq t, \end{cases}$$

$$Q_{02}(t, u) = P\{v < t, \zeta < v \leq \zeta + \zeta / v = u\} = \begin{cases} 0, & u > t, \\ \int_0^u \bar{\Phi}(u-x) dF(x), & u \leq t, \end{cases}$$

$$Q_{03}(t, u) = P\{v > \zeta + \zeta, t > \zeta + \zeta / v = u\} = \begin{cases} \int_0^t \Phi(t-x) dF(x), & u > t, \\ \int_0^u \Phi(u-x) dF(x), & u \leq t, \end{cases}$$

Характеристики катастроф определяются равенствами

$$F_{01}(t, x, u) = P\{\eta_{n+1} < x / \zeta_n = 0, \zeta_{n+1} = l, \theta_{n+1} = u_{n+1} = t\} = \begin{cases} 0, & x \leq t, \\ 1 - e^{-\lambda(x-t)}, & x \geq t. \end{cases}$$

При переходе из состояния $i=0$ в состояние $j=2$ решение совпадает с интервалом между марковскими моментами с вероятностью единица. Поэтому

$$F_{02}(u, x, u) = P\{\eta_{n+1} < x, \eta_{n+1} > \zeta / \zeta < u \leq \zeta + \zeta\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\int_0^x (1 - e^{-\lambda(x-y)}) \bar{\Phi}(u-y) dF(y)}{\int_0^u \bar{\Phi}(u-y) dF(y)}, & x \leq u, \\ \frac{\int_0^u (1 - e^{-\lambda(x-y)}) \bar{\Phi}(u-y) dF(y)}{\int_0^u \bar{\Phi}(u-y) dF(y)}, & x > u. \end{cases}$$

$$F_{03}(t, x, u) = P\{\eta_{n+1} < x, \eta_{n+1} > \xi / \xi + \zeta = t, v = u, t \leq u\} =$$

$$= P\{\eta_{n+1} < x, \eta_{n+1} > \xi / \xi + \zeta = t\} = \begin{cases} \frac{\int_0^x (1 - e^{-\lambda(x-y)}) d_t \Phi(t-y) dF(y)}{\int_0^t d_t \Phi(t-y) dF(y)}, & x \leq t, \\ \frac{\int_0^t (1 - e^{-\lambda(x-y)}) d_t \Phi(t-y) dF(y)}{\int_0^t d_t \Phi(t-y) dF(y)}, & x \geq t. \end{cases}$$

В четвертом параграфе приведен вывод основных соотношений. Математическое ожидание времени до катастрофы определяется равенством

$$M_0(u) = \frac{\Delta_0(u)}{\Delta(u)}$$

где

$$\Delta(u) = 1 - \bar{F}(u) \int_0^u e^{-\lambda t} dF_1(t) - \int_0^u e^{-\lambda(u-y)} \bar{\Phi}(u-y) dF(y) \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_2(t) -$$

$$- \int_0^u e^{-\lambda x} F(u-x) d\Phi(x) \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_3(t). \quad (9)$$

$$\Delta_0(u) = u \bar{F}(u) + \int_0^u \left(y + \frac{1 - e^{-\lambda(u-y)}}{\lambda} \right) \bar{\Phi}(u-y) dF(y) + \int_0^u y \Phi(u-y) dF(y) +$$

$$+ \int_0^u \frac{1 - e^{-\lambda z}}{\lambda} F(u-z) d\Phi(z) + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \bar{F}_1(t) dt \bar{F}(u) +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-\lambda t} \bar{F}_2(t) dt \int_0^u e^{-\lambda(u-y)} \bar{\Phi}(u-y) dF(y) + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \bar{F}_3(t) dt \int_0^u e^{-\lambda x} F(u-x) d\Phi(x).$$

$$F_{i0}(t, x, u) = P\{\eta_{n+1} < x / \xi_n = i, \xi_{n+1} = 0, \theta_{n+1} = t, u_{n+1} = u\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

и задача сводится к поиску максимума функции $M_0(u)$ и точки u_0 , в которой достигается максимум.

Обозначим s_i затраты за единицу времени проведения восстановительной работы вида i , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Затраты, которые имеют место до момента катастрофы определяются равенством

$$C_0(u_0) = \frac{A(u_0)}{\Delta(u_0)},$$

где $\Delta(u_0)$ определяется равенством (9), а числитель равен

$$\begin{aligned} A(u_0) = & s_1 \bar{F}(u_0) \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \bar{F}_1(t) dt + s_2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \bar{F}_2(t) dt \int_0^{u_0} e^{-\lambda(u_0-y)} \bar{\Phi}(u_0-y) dF(y) + \\ & + s_3 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \bar{F}_3(t) dt \int_0^{u_0} e^{-\lambda x} F(u_0-x) d\Phi(x). \end{aligned}$$

В Заключение представлены основные выводы и приведены научные результаты исследования.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Дано определение безопасности как свойства процесса функционирования системы во времени.
2. Для оценки характеристик (критериев) безопасности предложены модели однородных управляемых полумарковских процессов с катастрофами, обобщающие известные модели марковских процессов и процессов восстановления.
3. Проанализированы различные способы задания однородного управляемого полумарковского процесса с катастрофами и конечным множеством состояний.
4. Предложено в качестве оценки безопасности (количественного критерия) использовать математическое ожидание времени до катастрофы, как некоторый функционал, определенный на траекториях случайного процесса, описывающего функционирование системы во времени, и объективно отражающий уровень безопасности системы.
5. Построен экономический функционал на траекториях управляемого полумарковского процесса с катастрофами, характеризующий затраты, обеспечивающие заданный уровень безопасности.

6. Исследованы свойства показателей безопасности. Сформулированы достаточные условия того, что распределение момента до катастрофы является собственным, а математическое ожидание времени до катастрофы – конечным.
7. Доказана теорема о структуре математического ожидания времени до катастрофы (дробно-линейный функционал относительно мер, определяющих марковскую однородную рандомизированную стратегию).
8. Исследованы свойства экономических показателей. Доказана теорема о структуре экономического показателя (дробно-линейный функционал относительно мер, определяющих стратегию).
9. Доказана теорема о существовании оптимальной стратегии в классе детерминированных стратегий.
10. Приведена классификация состояний процесса, описывающего эволюцию системы, в основе которой предложенный критерий безопасности.
11. Полученные математические результаты использованы при анализе моделей защиты, в которых учитываются попытки несанкционированного доступа к системе и парирование этих угроз. Построена оптимальная стратегия технического обслуживания системы защиты, обеспечивающая максимальное значение времени до проникновения (катастрофы).
12. В этих моделях продемонстрирована зависимость критериев безопасности от характеристик надежности.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в реферируемых изданиях, входящих в перечень ВАК

1. Зайцева О.Б., Каштанов В.А. Оптимизационная задача при анализе «редких» событий // Обозрение прикладной и промышленной математики. - 2010. – Т. 17. Вып. 2. - С. 230-231.
2. Зайцева О.Б. Исследование вероятностных характеристик

- системы защиты // Обзорение прикладной и промышленной математики. - 2010. – Т. 17. Вып. 4. – С. 553-554.
3. Зайцева О.Б. Построение оптимальной стратегии управления в полумарковской модели безопасности // Надежность. – 2011. - №1. – Москва. Издательский Дом «ТЕХНОЛОГИИ». – С. 47-58.
 4. Северцев Н.А., Зайцева О.Б., Осташкевич В.А. Использование структурной вероятности и структурного индекса в технологии обеспечения безопасности и устойчивости технических систем // Наукоемкие технологии. – 2011. – Т. 12, №2 – С. 88-91.

**Статьи и тезисы в сборниках научных трудов и материалах
научных конференций и научные публикации**

5. Зайцева О.Б., Каштанов В.А. О построении математических моделей безопасности. Современные образовательные технологии обучения математике и информатике в высшей и средней школе: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции (г. Армавир, 30-31 марта)/ научные редакторы Н.Г. Дендеберя, Е.А. Плужникова. – Армавир, РИЦ АГПУ, 2010. – С. 45-49.
6. Зайцева О.Б., Каштанов В.А. Стохастические модели исследования операций. – Армавир: РИЦ АГПУ, 2010. – 132с.
7. Северцев Н.А., Зайцева О.Б., Осташкевич В.А. Метод оценки устойчивости и безопасности сложных технических систем на основе использования структурных вероятностей и структурного индекса. Проблемы управления безопасностью сложных систем: Труды XVIII Международной конференции. Москва, декабрь 2010 г. / Под ред. Н.И. Архиповой, В.В. Кульбы. М.: РГГУ, 2010. - С. 457-460.
8. Зайцева О.Б. Анализ безопасности функционирования технических систем // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2011. Том 18. Выпуск 1. – Москва. - С. 94-95.
9. Зайцева О.Б. Анализ полумарковской модели безопасности // Обзорение прикладной и промышленной математики. - 2011. – Т. 18. Вып. 2. – С. 223-235.