

На правах рукописи

Кондраков Иван Александрович

Обобщенный непараметрический метод вычисления
положительно однородных индексов Конюса-Дивизиа и его
приложения к анализу товарных и фондовых рынков

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011 г.

Работа выполнена в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова на кафедре системного анализа факультета Вычислительной математики и кибернетики и на факультете Управления и прикладной математики Московского физико-технического института (государственного университета).

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,
профессор А. А. Шананин.

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,
профессор Л. А. Бекларян;
кандидат физико-математических наук,
Н. В. Филипенков.

Ведущая организация — Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН .

Защита состоится 7 апреля года в часов на заседании диссертационного совета Д 002.017.04 при Учреждении Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан “ ” марта 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Н. М. Новикова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Экономические индексы потребительских цен и спроса являются обобщенными показателями, позволяющими делать выводы относительно направления развития экономики.

Статистические службы в своих расчетах индексов опираются на оценку стоимости потребительской корзины в разные моменты времени. При этом существует проблема, состоящая в изменении потребительской корзины при изменении структуры цен. Используемые статистическими службами индексы Ласпейреса и Пааше не решают эту проблему, фиксируя потребительскую корзину на уровне базового или текущего года. В связи с этим возникает систематическое различие между этими индексами, названное эффектом Гершенкрона. Это явление выражает замещение относительно подорожавших товаров относительно подешевевшими. Возникает необходимость описания этого замещения.

Эта проблема была принята во внимание в работах Конюса и Бюшгенса. Там был предложен основанный на паретовской теории потребительского спроса теоретический подход к определению экономических индексов, учитывающий взаимосвязь изменения цен с изменением структуры спроса (потребительской корзины).

Существование индексов Конюса основано на гипотезе о существовании рационального репрезентативного потребителя (гипотеза рационализируемости). Одним из важнейших условий рационализируемости является условие интегрируемости Фробениуса, которое определяет существование интегрирующего множителя у дифференциальной формы обратных функций спроса.

Условие Фробениуса является условием типа равенства, оно нарушается при малых возмущениях обратных функций спроса. Такое нарушение, ставящее под вопрос возможность построения экономических индексов, воспринималось экономистами как *проблема интегрируемости*. Исследование проблемы интегрируемости привело к созданию теории выявленного предпочтения, в рамках которой была предложена эмпирически проверяемая формулировка условий рационализируемости.

Основываясь на результатах теории выявленного предпочтения, А.А. Шананин предложил непараметрический метод анализа торговой статистики, который позволяет рассчитывать положительно однородный индекс Конюса. Обобщение этого метода для статистик с неполными или неточными данными привело к созданию А.А. Шананиным и М. Хутманом обобщенного непараметрического метода (ОНМ). В работах С.Д. Вратенкова, Л.Я. Поспеловой, А.А. Шананина накоплен определенный опыт использования ОНМ для анализа торговых статистик.

Актуальным является проведение систематического исследования для изучения вопроса, насколько подход к вычислению индексов, предложенный в работах Конюса и Бюшгенса, осмыслен на практике с точки зрения изучения сегментации рынков, выделения групп взаимозаменяемых и взаимодополняющих товаров. Именно для таких «полных» групп товаров обосновано вычисление экономических индексов.

Необходима разработка конструктивных методов для вычисления положительно однородных индексов Конюса, анализа сегментированности рынков, учета эффектов взаимозамещения и взаимодополнения товаров, разработка методики применения их к анализу торговых статистик. Необходима систематизация и развитие опыта использования ОНМ и создание современного многофункционального программного комплекса для построения индекса Конюса и проведения вычислительных экспериментов с торговой статистикой.

Цель работы состоит в создании методики, численных методов и программных

средств для вычисления положительно однородного индекса Конюса, анализа эффектов взаимозамещения и взаимодополнения товаров, исследовании сегментированности потребительских рынков, изучении качественных особенностей потребительского спроса.

Методы исследования.

Для решения поставленных задач использовались методы теории экстремальных задач, выпуклого и линейного программирования, теории графов, теории двойственности задачи Монжа-Канторовича, методы объектно-ориентированного программирования.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

1. Исследован подход Конюса и Бюшгенса с точки зрения практической применимости к выделению групп взаимозаменяемых и взаимодополняющих товаров и основанный на этом подходе положительно однородный индекс Конюса-Дивизиа. Разработана методика применения этого подхода к анализу торговой статистики. Методика апробирована на реальных данных торговых статистики товарных и фондовых рынков;
2. Проанализированы условия существования положительно однородного индекса Конюса-Дивизиа, возникающие из трех областей: паретовская теория потребительского спроса, приложение теории двойственности в задаче Монжа-Канторовича и теория выявленного предпочтения. Установлена связь этих условий;
3. Предложена методика проверки адекватности процедуры агрегирования торговой статистики. Показано, что процедура многоступенчатого агрегирования с построением на промежуточных уровнях положительно однородных индексов Конюса-Дивизиа для групп товаров более адекватно отражает структуру спроса, чем процедура с использованием индексов спроса Пааше и цен Ласпейреса, традиционно применяемая статистическими службами;
4. Исследован в терминах идемпотентной алгебры смысл показателя нерациональности торговой статистики. Изучена его связь с идемпотентным аналогом числа Фробениуса-Перрона для матрицы индексов Пааше. Сформулирован и доказан идемпотентный аналог теоремы Фробениуса-Перрона;
5. Предложены удобные численные процедуры исследования торговой статистики, реализованные в программном комплексе «Индекс»: механизм формирования торговой статистики по исходным данным, методы сравнительного анализа показателей нерациональности для групп и их объединений различной сложности, процедуры исследования агрегирования, интегрируемости и отделимости при различных значениях параметра нерациональности.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Теоретическая ценность состоит в том, что предложены отвечающие потребительскому поведению средства исследования экономической статистики, учитывающие изменение структуры спроса при изменении пропорций цен, взаимозаменяемость товаров. Предложена методика качественного и количественного анализа потребительского поведения.

Практическая ценность состоит в том, что основе данной методики может быть разработана система мониторинга потребительского спроса, позволяющая адекватно отражать динамику предпочтений потребителей товаров и услуг, изучать поведение

потребителей при изменениях цен и объемов продаж, изменениях номенклатуры товаров. Подобная система может найти применение в крупных магазинах и торговых сетях.

Программный комплекс, разработанный в диссертационной работе, может быть полезен

- для исследователей при разработке математических моделей экономики и оснащении их статистическими данными;
- для государственных статистических служб при анализе динамики состояния экономики, исчислении показателей инфляции в рамках страны, региона, города;
- для аналитических служб торговых компаний, менеджеров верхнего и среднего звена, занимающихся изучением потребительского спроса, регулярности поведения потребителей, сезонных спадов и подъемов продаж, оценкой правильности той или иной ценовой политики торгового центра, анализом ассортимента товаров, выработкой стандартов методики продажи товара на специализированных потребительских рынках;
- для менеджеров среднего и низшего звена при решении текущих вопросов организации торгово-технологического процесса магазина (заказ, прием и сортировка товара, предпродажная подготовка, зонирование и размещение товара в торговом зале или на сайте сетевого интернет-магазина);
- для аналитиков и специалистов фондового рынка для анализа текущей ситуации на рынке, выработки инвестиционных решений, анализа стратегий крупных инвесторов.

Материалы диссертации, программный комплекс «Индекс» используются в учебном процессе в курсах «Математические модели в экономике» в МГУ им. Ломоносова и МФТИ(ГУ).

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- 5-й Московской международной конференции по Исследованию операций (ORM2007), Москва, 2007;
- Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2006», Москва, 2006, «Ломоносов-2008», Москва, 2008, «Ломоносов-2009», Москва, 2009;
- Четвертой всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» ЭКОМОД-2009, Киров, 2009
- Шестой международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности», Санкт-Петербург, 2008;
- 24й Европейской конференции по исследованию операций (24th European conference on operational research EURO2010), Лиссабон, 2010;
- 8-й международной конференции «Интеллектуализация обработки информации ИОИ-2010», Кипр, 2010;

- VI Московской международной конференции по исследованию операций, Москва, 2010;
- 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», Долгопрудный, 2010;
- Научных семинарах в ЦЭМИ РАН, ВШЭ (ГУ), МГУ им. Ломоносова, ВЦ РАН, СПбЭМИ.

Полученные результаты использовались в работах, проводимых в рамках проектов РФФИ (№ 08-07-00158 и № 09-01-13534 офи-ц), РГНФ (№ 08-02-00347, 11-02-00299-а), программы ПФИ ОМН РАН № 3, проект 14, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (мероприятия 1.2.1, НК-15 П), ПФИ Президиум РАН № 14, проект 109.

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 17 печатных работ. В том числе 3 - в журналах, рекомендованных ВАК, свидетельство о регистрации в Реестре программ для ЭВМ.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и пяти приложений. Основной текст работы изложен на 150 страницах, приложения занимают 37 страниц. Список литературы включает 124 наименования.

Краткое содержание работы

Во **введении** к работе дается обзор работ по построению экономических индексов, обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель диссертации и научная новизна полученных результатов, а также дается краткое содержание диссертационной работы.

Первая глава посвящена математическим моделям потребительского поведения, на основе которых разработаны методы вычисления экономических индексов.

В §1.1 обсуждаются экономические индексы потребительских цен и спроса, дается определение индекса Конюса-Дивизия в рамках паретовской теории потребительского спроса.

Отправной точкой работы является подход к построению экономических индексов, предложенный Конюсом и Бюшгенсом и основанный на паретовской теории потребительского спроса. В основе этой теории лежит гипотеза о возможности описания потребительского поведения моделью рационального репрезентативного потребителя, выбирающего наилучший потребительский набор, доступный в силу бюджетных ограничений.

Подход Конюса и Бюшгенса можно описать следующим образом. Пусть у нас задана система поверхностей безразличия, на каждой из которых полезность для потребителя неизменна. Спросу X^τ в момент времени τ соответствует уровень полезности F^τ , а спросу X^t - уровень полезности F^t . Набор товаров, который мог быть куплен при ценах P^t в момент времени τ и имеющий полезность F^τ , обозначим $\hat{X}^\tau$. Величину $\frac{\langle P^\tau, \hat{X}^\tau \rangle}{\langle P^t, \hat{X}^t \rangle}$ будем называть индексом спроса Конюса-Ласпейреса. С другой стороны, набор товаров, который мог быть куплен при ценах P^τ в момент времени t и имеющий полезность F^t , обозначим $\hat{X}^t$. Величину $\frac{\langle P^\tau, \hat{X}^t \rangle}{\langle P^t, \hat{X}^t \rangle}$ будем называть индексом спроса Конюса-Пааше.

Для построения поверхностей безразличия необходимо определить функцию полезности, поверхностями уровня которой они являются. Будем искать функции полезности в классе Φ_0 вогнутых, положительно-однородных первой степени, непрерывных на множестве $\mathbb{R}_+^n$ функций, положительных на множестве $\text{int } \mathbb{R}_+^n$. Совокупное

поведение потребителей будем описывать с помощью обратных функций спроса $P(X) = (P_1(X), P_2(X), \dots, P_m(X))$, выражающих зависимость между объемами потребления товаров X и ценами на них P .

Определение 1. Будем говорить, что обратные функции спроса $P(X)$ рационализируются в классе функций полезности Φ_0 , если существует такая функция полезности $F(X) \in \Phi_0$, что справедливо

$$X \in \text{Argmax} \{F(Y) : \langle P(X), Y \rangle \leq \langle P(X), X \rangle, Y \geq 0\} \quad (1)$$

Будем при этом говорить, что функция полезности $F(X)$ рационализирует обратные функции спроса $P(X)$.

Отметим, что существует несколько постановок задачи построения экономических индексов, эквивалентных рационализированности обратных функций спроса.

Предложение 1. Пусть $\forall X > 0 \langle P(X), X \rangle > 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. существуют $F(X) \in \Phi_0$, $Q(P) \in \Phi_0$, такие что

$$\begin{aligned} \forall X > 0, \forall P \geq 0 \quad Q(P)F(X) &\leq \langle P, X \rangle; \\ \forall X > 0, \quad Q(P(X))F(X) &= \langle P(X), X \rangle; \end{aligned}$$

2. существует функция $F(X) \in \Phi_0$ такая, что $\forall X > 0$ справедливо $P(X) \in Q(P(X))\partial F(X)$, где $Q(P)$ - преобразование Янга функции $F(X)$

$$Q(P) = \inf \left\{ \frac{\langle P, X \rangle}{F(X)} \mid X \geq 0, F(X) > 0 \right\};$$

3. существует $F(X) \in \Phi_0$, рационализирующая обратные функции спроса $P(X)$.

Предложение 2. Пусть функция полезности $F(\cdot) \in \Phi_0$ рационализирует обратные функции спроса $P(X)$. Пусть $P^t \in \partial F(\hat{X}^t)$ и $F(\hat{X}^t) = F(X^t)$, $P^r \in \partial F(\hat{X}^r)$ и $F(\hat{X}^r) = F(X^r)$. Тогда $\frac{\langle P^t, \hat{X}^r \rangle}{\langle P^t, \hat{X}^t \rangle} = \frac{\langle P^r, \hat{X}^r \rangle}{\langle P^r, \hat{X}^t \rangle} = \frac{F(X^r)}{F(X^t)}$, т.е. индекс Конюса-Ласпейреса совпадает с индексом Конюса-Пааше.

В связи с доказанным предложением будем называть рассматриваемые индексы индексами Конюса. Индексы Конюса оказываются адекватным средством описания потребительского поведения: при использовании подхода к построению экономических индексов, предложенного Конюсом, мы не сталкиваемся с явлением, подобным эффекту Гершенкрона.

Предложение 3. Пусть функция полезности $F(\cdot) \in \Phi_0$ рационализирует обратные функции спроса $P(X)$. Тогда индекс Конюса не больше индекса Ласпейреса и не меньше индекса Пааше.

Заметим, что в случае, когда $F(\cdot) \in \Phi_0$ является дифференцируемой функцией, условие максимума в задаче рационализированности (1) принимает вид основной формулы теории экономических индексов

$$dF(X) = \frac{1}{Q(P(X))} \sum_{j=1}^m P_j(X) dX_j$$

В этом случае проблема построения индексов Конюса спроса $F(X)$ и цен $Q(P)$ сводится к проблеме поиска интегрирующего множителя $\frac{1}{Q(P(X))}$ для дифференциальной формы обратных функций спроса

$$\omega = \sum_{j=1}^m P_j(X) dX_j$$

Рассмотрим индекс Дивизиа, пользующийся большой популярностью в литературе по теории экономических индексов:

$$\frac{D(X(t))}{D(X(\tau))} = \exp \left(\int_{\tau}^t \frac{\sum_{i=1}^m P_i(X(\theta)) \frac{dX_i(\theta)}{d\theta}}{\sum_{i=1}^m P_i(X(\theta)) X_i(\theta)} d\theta \right)$$

Вообще говоря, индекс Дивизиа зависит от пути интегрирования. Однако, можно показать, что в случае, когда обратные функции спроса рационализируемы в классе дифференцируемых функций из Φ_0 , индекс Конюса совпадает с индексом Дивизиа вне зависимости от пути интегрирования. В связи с этим рассматриваемые индексы будем называть индексами Конюса-Дивизиа.

В §1.1 при определении индекса Конюса-Дивизиа использовалось предположение о существовании функции полезности. §1.2 посвящен условиям существования такой функции.

Для существования функции полезности (рационализируемости обратных функций спроса) необходимо выполнение определенных условий. Одним из важнейших условий рационализируемости является условие интегрируемости Фробениуса: для любых различных чисел $i, j, k \in M = (1, 2, \dots, m)$ и любого $X > 0$ справедливо равенство:

$$P_i(X) \left(\frac{\partial P_j}{\partial X_k}(X) - \frac{\partial P_k}{\partial X_j}(X) \right) + P_j(X) \left(\frac{\partial P_k}{\partial X_i}(X) - \frac{\partial P_i}{\partial X_k}(X) \right) + P_k(X) \left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(X) - \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(X) \right) = 0 \quad (2)$$

Это условие существования интегрирующего множителя у дифференциальной формы обратных функций спроса ω .

Важным условием рационализируемости является условие делимости.

Определение 2. Будем говорить, что группа товаров $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ отделяется от остальной номенклатуры товаров $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{m-n})$, если перестановкой компонент вектор товаров $Y = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ можно представить в виде (Y, Z) и функция полезности представляется в виде суперпозиции $F(X) = F_0(F_1(Y), Z)$.

Можно показать, что если функции $F_0(\cdot) \in \Phi_0$ и $F_1(\cdot) \in \Phi_0$ непрерывно дифференцируемы, то обратные функции спроса на товары из группы Y удовлетворяют условию делимости в следующей форме: для любых $\lambda > 0, Y \in \text{int } \mathbb{R}_+^n, Z \in \mathbb{R}_+^{m-n}, W \in \mathbb{R}_+^{m-n}$

$$\frac{P_i^Y(\lambda Y, Z)}{P_j^Y(\lambda Y, Z)} = \frac{P_i^Y(Y, W)}{P_j^Y(Y, W)}.$$

Здесь $P_i^Y(Y, \cdot)$ обратная функция спроса на i -ый товар из выделенной группы товаров Y .

Свойства делимости отражают сегментацию потребительского рынка и являются важной структурной характеристикой потребительского спроса.

Пропорции потребления товаров отдельной группы определяются лишь ценами на товары данной группы. Отделимые группы объединяют товары, связанные свойствами взаимодополняемости и взаимозаменяемости. Условие отделимости выражает полноту номенклатуры рассматриваемой группы товаров, для которой существует соответствие между пропорциями цен и пропорциями спроса на товары.

В качестве одного из условий рационализируемости используется следующая формулировка условий отделимости: для любых $i, j \in M$, произвольного $\lambda > 0$ и любого $X > 0$ справедливо соотношение:

$$\frac{P_i(\lambda X)}{P_j(\lambda X)} = \frac{P_i(X)}{P_j(X)} \quad (3)$$

В работах В.Л. Левина получены условия рационализируемости как одно из приложений теории двойственности задачи Монжа-Канторовича. В диссертационной работе проанализирована их связь с теорией потребительского поведения.

Необходимым условием является симметричность и неположительную определенность матрицы $A(X) = (a_{ij}(X))$, где

$$a_{ij}(X) = \langle P(X), X \rangle \frac{\partial P_j(X)}{\partial X_i} - P_j(X) \sum_{k=1}^m X_k \frac{\partial P_k(X)}{\partial X_i} \quad (4)$$

Достаточные условия помимо необходимых включают в себя требование выполнения неравенства

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{P_j(X)}{\langle P(X'), X \rangle} - \frac{P_j(X')}{\langle P(X'), X' \rangle} \right) (X'_j - X_j) \geq 0 \quad (5)$$

для всех $X, X' \in \text{int } \mathbb{R}_+^m$,

Как показано в диссертационной работе, эти условия тесно связаны с условиями, полученными в паретовской теории потребительского спроса.

Утверждение 1. Одновременное выполнение условий отделимости (3) и условий Фробениуса (2) эквивалентно симметричности матрицы (4).

Утверждение 2. Условие (5) выражает эффект Гершенкрона: индекс Ласпейреса не меньше индекса Пааше.

Отметим, что условие (5) является условием типа неравенства, т.е. сохраняется при малых возмущениях функций $P(X)$. С другой стороны, условие Фробениуса является условием типа равенства, оно нарушается при малых возмущениях функций $P(X)$. Такое нарушение, ставящее под вопрос существование экономических индексов, воспринималось экономистами как проблема, которую следуя П.Самуэльсону, будем называть *проблемой интегрируемости*.

Анализу выполнимости и интерпретации условия интегрируемости посвятили свои работы многие известные экономисты XX века, таких как В.Парето, П.Самуэльсон, Дж. Хикс, К.Эрроу, Х.Хаутеккер, Л.Гурвиц, Д.Гейл, Х.Удзава, М.Рихтер и др. Их работы привели к созданию теории выявленного предпочтения, с помощью которой удалось сформулировать условия рационализируемости в форме, удобной для эмпирической проверки.

§1.3 посвящен теории выявленного предпочтения и основанным на ней методам проверки условий интегрируемости, непараметрическому методу анализа торговой статистики.

В паретовской теории потребительского спроса исходной информацией для вычисления индексов являются обратные функции спроса $P(X)$. Однако на практике мы можем оперировать лишь с наблюдаемой торговой статистикой $\{P^t, X^t\}_{t=0}^T$, которая определяет значения обратных функций спроса в конечном числе точек $\{X^t\}_{t=0}^T$. При этом рационализируемость торговой статистики понимается как возможность продолжить ее до обратных функций спроса, рационализируемых в классе Φ_0 . Теория выявленного предпочтения (теорема Африата-Верияна) позволяет сформулировать условия рационализируемости торговой статистики в форме эквивалентных условий:

- однородная сильная аксиома (ОСА): для любой цепочки $\{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset T = \{0, 1, \dots, T\}$ выполнено

$$\langle P^{t_1}, X^{t_2} \rangle \langle P^{t_2}, X^{t_3} \rangle \dots \langle P^{t_k}, X^{t_1} \rangle \geq \langle P^{t_1}, X^{t_1} \rangle \langle P^{t_2}, X^{t_2} \rangle \dots \langle P^{t_k}, X^{t_k} \rangle, \quad (6)$$

- существование решения у системы неравенств Африата-Верияна:

$$\begin{aligned} \lambda_t \langle P^t, X^t \rangle &\leq \lambda_\tau \langle P^\tau, X^t \rangle, \quad \forall t, \tau \in \{0, 1, \dots, T\} \\ \lambda_t &> 0, \quad t = 1, 2, \dots, T. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом функцию полезности можно выбрать в виде

$$F(X) = \min_{\tau=1, T} \lambda_\tau P^\tau X, \quad (8)$$

где λ_t удовлетворяют (7). В таком случае, если

$$Q(P) = \inf \left\{ \frac{\langle P, X \rangle}{F(X)} \mid X \geq 0, F(X) > 0 \right\},$$

то

$$Q(P^t) = \frac{1}{\lambda_t}, \quad F(X^t) = \lambda_t \langle P^t, X^t \rangle.$$

Такой метод построения экономических индексов называется **непараметрическим методом**.

В отличие от методов вычисления индексов Ласпейреса или Пааше непараметрический метод позволяет на основе проверки отделимости изучать сегментированность рынков.

Решение системы неравенств Африата-Верияна (7) основано на алгоритме Варшалла-Флойда. Опишем его. Обозначим коэффициенты матрицы индексов цен Пааше через

$$C_{\tau t} = \frac{\langle P^t, X^t \rangle}{\langle P^\tau, X^t \rangle}$$

В новых обозначениях система (7) имеет вид

$$\lambda_t C_{\tau t} \leq \lambda_\tau \quad (9)$$

Определим

$$C_{\tau t}^* = \sup \{ C_{\tau t_1} C_{t_1 t_2} \dots C_{t_k t} \mid (t_1, t_2, \dots, t_k) \subset T, k \geq 0 \}.$$

Из теоремы Африата - Верияна следует, что система (9) разрешима, тогда и только тогда, когда $C_{tt}^* \leq 1$.

Рассмотрим идемпотентное полукольцо с операциями $a \oplus b = \max \{a, b\}$ и $a \otimes b = ab$. Тогда

$$C^* = C \oplus C^2 \oplus \dots \oplus C^k \oplus \dots$$

где C^k означает возведение матрицы в степень k в идемпотентном смысле (т.е. все операции суммирования заменяются операцией $\oplus$ взятия максимума). Если на каком-то шаге вычисления идемпотентных степеней выясняется, что диагональный элемент больше 1, то все элементы матрицы C^* равны ∞ и система неразрешима. В противном случае для вычисления ряда достаточно ограничиться первыми $T + 1$ слагаемыми, и, таким образом, алгоритм вычисления C^* имеет сложность порядка $(T + 1)^3$. Решение системы (7) можно выбрать в следующем виде:

$$\lambda_t^* = \max_{\beta=0, T} C_{t\beta}^*, \quad t = \overline{0, T}.$$

В §1.4 описана модель реализуемости междисциплинарных научно-исследовательских проектов Канторовича-Макарова и обсуждаются идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах.

Крупные научно-исследовательские проекты, требующие взаимодействия в процессе научных исследований из разных областей, имеют большое значение как для науки, так и для государства (прежде всего отметим ядерный и космический проекты). Для их описания предложена модель, использующая опыт планирования взаимодействия между различными отраслями экономики с учетом специфики информационной продукции (научных знаний).

Выделим в анализируемом проекте n составляющих его научно-исследовательских направлений. Будем описывать степень выполнения проекта с помощью n -мерного вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_j измеряется, например, количеством денег, эффективно потраченных по j -му направлению исследований. Будем предполагать, что исследования по различным направлениям взаимосвязаны и что расходы в объеме x_j по j -му направлению эффективны при условии их согласованности с эффективными расходами по другим направлениям исследований, а именно если

$$a_{ij}x_j \leq x_i, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Здесь коэффициенты $a_{ij} \geq 0$ отражают зависимость эффективного продвижения по j -му направлению исследований от продвижения по i -му направлению. Составленная из этих коэффициентов квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ описывает связи между выделенными направлениями исследований. Поскольку неравенства (10) должны выполняться для всех $j = \overline{1, n}$, получаем, что

$$\max_{j=\overline{1,n}} a_{ij}x_j \leq x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Используя идемпотентные операции, неравенства (11) можно записать в виде

$$\bigoplus_{j=\overline{1,n}} a_{ij}x_j \leq x_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

или в векторной форме $A^{\oplus}X \leq X$, где в векторной операции умножения матрицы A на вектор X обычное суммирование заменяется идемпотентным суммированием $\oplus$.

Определение 3. Будем говорить, что неотрицательная матрица A является продуктивной в идемпотентном смысле, если существует вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ такой, что выполняются неравенства (11).

Вопрос о реализуемости междисциплинарного научного проекта с выделенными направлениями исследований, связи между которыми задаются матрицей $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, сводится к проверке ее продуктивности в идемпотентном смысле.

Заметим, что (10) - это та же система, которая используется в теореме Африата-Верриана (7) для матрицы $C_{\tau t} = \frac{\langle P^t, X^t \rangle}{\langle P^\tau, X^\tau \rangle}$. Для изучения решения системы (7), а следовательно и индексов Конюса-Дивизиа, необходимо исследование свойств матрицы C^* , которая возникает как результат действий в идемпотентном полукольце.

Теорема 1. (Идемпотентный аналог теоремы Фробениуса-Перрона) Пусть $\|A\|_{i,j=\overline{1,n}}$ - положительная матрица. Тогда верно следующее:

1. существует положительное число $r^* > 0$ и положительный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ такой, что

$$\max_{j=\overline{1,n}} a_{ij}x_j = r^*x_i, \quad i = \overline{1,n} \quad (13)$$

2. если $r \geq r^*$, то неравенство

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1} \leq r^k \quad (14)$$

справедливо для любой цепочки $(i_1, i_2, \dots, i_k)$,

3. если $\hat{r} > 0$ - минимальное значение параметра r среди таких значений, что для любой цепочки $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ справедливо неравенство (14) и, кроме того, существует перестановка $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, для которой

$$a_{j_1 j_2} a_{j_2 j_3} \cdots a_{j_n j_1} = \hat{r}^n$$

то $\hat{r} = r^*$, где $r^* > 0$ - минимальное число, для которого система уравнений (13) имеет положительное решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение 4. Пусть $\|A\|_{i,j=\overline{1,n}}$ - положительная матрица. Идемпотентным числом Фробениуса-Перрона $r^*(A)$ будем называть минимальное число $r^* > 0$, для которого система уравнений

$$\max_{j=\overline{1,n}} a_{ij}x_j = r^*x_i, \quad i = \overline{1,n}$$

имеет положительное решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Для существования индекса Конюса-Дивизиа должно выполняться условие:

$$\hat{r} = \min \{r > 0 \mid C_{t_1 t_2} C_{t_2 t_3} \cdots C_{t_k t_1} \leq r^k, \forall (t_1, t_2, \dots, t_k) \subset T\} \leq 1.$$

При этом, если окажется, что $\hat{r} > 1$, то можем разделить все элементы матрицы Пааше на $\hat{r}$, применить алгоритм Варшалла-Флойда для модифицированной матрицы и вычислить модифицированный индекс Конюса-Дивизиа. Такое обобщение непараметрического метода будет рассмотрено в следующей главе.

Во **второй главе** диссертации обсуждаются эксперименты по анализу торговой статистики, описывается обобщенный непараметрический метод.

§2.1 посвящен применению непараметрического метода к анализу статистик, собираемых государственными статистическими службами.

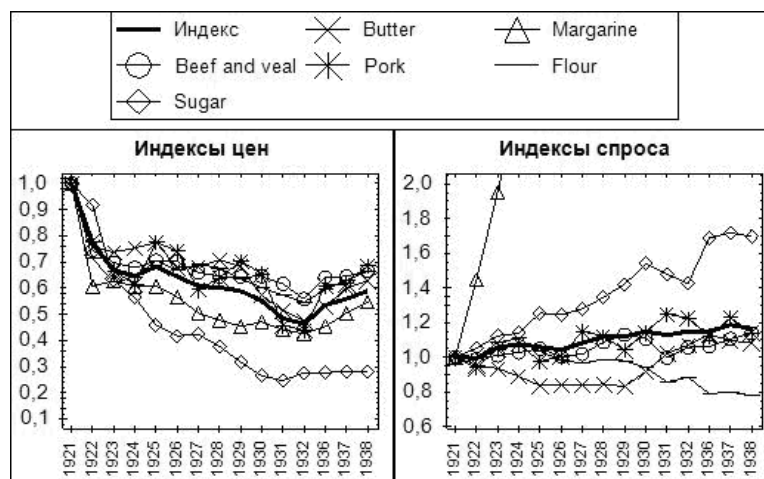


Рис. 1. Индекс Конюса-Дивизиа для статистики потребления продуктов питания в Швеции за период 1921-38 годы

При анализе торговой статистики потребления продуктов питания в Швеции за период 1921-38 годы индекс Конюса-Дивизиа удалось построить за период 1921-1932, 1936-1938.

Вычисленные экономические индексы Конюса-Дивизиа, рассчитанные с помощью непараметрического метода, имеют усредненную и более инерционную динамику по сравнению с временными рядами цен и спроса отдельных товаров (см. рис. 1).

Для выполнения условий рационализируемости (ОСА) пришлось исключить из временного ряда статистику за 1933-35 годы. Добавление во временные ряды данных хотя бы одного из 1933-35 годов приводит к нарушению условий рационализируемости (ОСА). Можно сделать предположение, что нарушение условий рационализируемости (ОСА) связано с системными перестройками в экономике Швеции, последовавшими за Великой экономической депрессией. Эта связь обнаруживается при анализе статистики потребления Венгрии, обладающий более сложной структурой. Рассмотрим понятие дерева экономических индексов.

Государственные статистические службы производят обработку торговой статистики потребления следующим образом. Вся номенклатура товаров разбивается на группы, связанные отношением вложения. Получившуюся структуру можно представить как дерево, в котором группы товаров на более низком уровне вложены в группы товаров на более высоком. Затем для групп происходит вычисление индексов цен Ласпейреса и спроса Пааше, что представляет собой иерархически организованный, многоуровневый процесс. Так появляется дерево экономических индексов.

Отметим, что разбиение на уровни основано на эвристических представлениях о группах родственных товаров, существующих на «гуманитарном» уровне и зафиксированных в форме обобщающих понятий. Заметим, что формирование терминов в языке - это процесс с характерным временем порядка нескольких десятков лет. Изменение структуры потребительского спроса - более быстрый процесс. Поэтому необходим анализ таких представлений о разбиении продуктов на группы, который позволяет провести непараметрический метод.

Структура спроса была проанализирована в торговой статистики Венгрии за 1975-1984 гг., состоящей из 196 товаров. В экономике Венгрии в этот период происходили структурные изменения: появлялись рыночные отношения. Исследование показало, что в это время происходило смещение структуры потребления в сторону товаров длительного пользования.

Расчеты показывают, что вся торговая статистика, т.е. все товары в совокупности, удовлетворяет условиям рационализируемости (ОСА). Из групп, выделенных статистическими службами, многие не удовлетворяют этим условиям. Таким образом, предложенная статистическими службами классификация товаров не вполне отражает реальную структуру спроса. По-видимому, она не соответствует структурным процессам, происходящим в этот период.

Была предложена другая классификация товаров, основанная на характерном времени потребления: товары повседневного спроса и товары длительного пользования. Для этих двух групп экономические индексы существуют.

Как и в торговой статистике Швеции, системные перестройки экономики оказывают влияние на выполнение условий рационализируемости. В экономике Венгрии структурные изменения потребительского спроса сказались на рационализируемости отдельных групп товаров. Эти изменения были выявлены с помощью непараметрического метода.

В §2.2 вводится обобщенный непараметрический метод и обсуждается его применение для анализа структуры потребительского спроса.

Рассмотренные выше статистики Швеции и Венгрии собраны и обработаны государственными статистическими службами. Подобные торговые статистики содержат индексы цен Ласпейреса и спроса Пааше для товарных групп, выделенных экспертами статистических служб. При этом может не учитываться взаимозаменяемость товаров. Сама группировка и принципы, по которой она проводилась, остаются за рамками рассмотрения. Таким образом, в таких статистиках могут присутствовать неточности, вызванные как дефектами обработки, так и ошибками в исходных данных.

Рассматриваемый нами подход можно обобщить так, чтобы исследовать структуру спроса, несмотря на указанные дефекты. Это оказалось существенным при исследовании статистики потребления в Нидерландах, состоящей из 106 товаров, за 1951-1977 гг.

Расчеты показали, что торговая статистика удовлетворяет условиям рационализируемости (ОСА), однако ни одна из групп, выделенных в классификации, - не удовлетворяет. В такой ситуации изучать структуру спроса невозможно, по-видимому, непараметрический метод нуждается в обобщении.

Такое обобщение возможно с введением показателя, измеряющего степень рационализируемости торговой статистики. Предлагается ввести показатель $\omega > 0$ в систему неравенств Аффриата-Вериана (7).

$$\lambda_t \langle P^t, X^t \rangle \leq \omega \lambda_\tau \langle P^\tau, X^\tau \rangle, \quad \forall t, \tau \in \{0, 1, \dots, T\}, \quad t \neq \tau. \quad (15)$$

Минимальное значение $\omega_{min} > 1$, при котором система (15) совместна, служит показателем нерациональности. Математический смысл показателя нерациональности основан на его связи с идемпотентным аналогом числа Фробениуса-Перрона для матрицы индексов цен Пааше, который обсуждается в §1.4. По положительному решению системы (15) можно построить временные ряды обобщенных индексов потребительских цен Конюса-Дивизия $Q(P^t) = \frac{1}{\lambda_t}$ и обобщенных индексов спроса Конюса-Дивизия $F(X^t) = \lambda_t \langle P^t, X^t \rangle$. Этот метод будем называть **обобщенным непараметрическим методом (ОНМ)**.

Индекс торговой статистики Нидерландов, т.е. всех товаров, можно построить двумя способами. Во-первых, вычислить индекс напрямую, рассмотрев все товары. С другой стороны, с помощью ОНМ посчитать индексы групп из классификатора статистических служб и на их основе вычислить индекс для всех товаров торговой статистики. Расчеты показали, что отклонение полученных двумя описанными способами индексов не превышает 2%. Таким образом, ОНМ позволяет изучать дерево экономических индексов даже при наличии дефектов в торговой статистике.

При использовании ОНМ у нас появляется возможность проверить, насколько предварительная обработка с вычислением индексов цен Ласпейреса и спроса Пааше, влияет на рационализируемость. Действительно, мы можем вычислить индекс всей статистики тремя способами. Во-первых, посчитать напрямую по всем товарам торговой статистики. Во-вторых, с предварительным агрегированием по группам, т.е. рассчитать сначала индексы Конюса-Дивизиа для групп из классификатора, а затем построить индекс всей статистики. И, в-третьих, с предварительным агрегированием по группам, но при этом рассчитывая для групп индекс цен Ласпейреса и спроса Пааше, т.е. имитируя обработку, которая обычно производится статистическими службами.

Индекс, рассчитанный с агрегированием по группам и построением индексов цен Ласпейреса и спроса Пааше, сильно отклоняется от двух других графиков как в расчетах для статистики Венгрии, так и для статистики Нидерландов. Максимальные отклонения индексов цен, рассчитанных для статистики Нидерландов: первый способ - второй способ - 1.76%, первый способ - третий способ - 5.89%. Статистика Венгрии: первый способ - второй способ - 0.37%, первый способ - третий способ - 2.58%. При всех проведенных расчетах отклонение графиков, построенных по первому и второму способам, меньше, чем по первому и третьему. Таким образом, можно утверждать, что агрегирование с построением для групп товаров индексов Конюса-Дивизиа в большей степени отражает структуру потребительского спроса.

Интересно сопоставить индекс Конюса-Дивизиа с другими экономическими индексами. Рассмотрим статистику Венгрии за 1960-1970 гг. и результаты расчетов экономических индексов для этой статистики, приведенные в книге Э.Б.Ершова (Ершов Э.Б. Ситуационная теория индексов цен и количеств. Москва, РИОР, 2011. 419 с.). Для исследования использовались цепные индексы цен. Статистика состоит из 39 товаров. Расчеты показывают, что статистика рационализируема. Более того, минимальный показатель нерациональности для нее меньше 1 и составляет $\omega_{min} = 0.99654$. Был рассчитан минимальный показатель нерациональности, при котором соответствующий индекс (точнее, единица, деленная на значение индекса) удовлетворяет системе (15). По индексам, рассчитанным в книге Э.Б.Ершова для данной статистики, нельзя построить решение системы неравенств Африата-Верияна, нужно рассматривать ее обобщение и вводить показатель нерациональности порядка $\omega_{min} = 1.002$. Были вычислены отклонения значений индексов цен от индекса цены Конюса-Дивизиа. За исключением индексов Ласпейреса и Пааше отклонение не превышает 2%.

В §2.3 обсуждается применение обобщенного непараметрического метода к анализу первичных статистик.

Выше были рассмотрены статистики, собранные и обработанные государственными статистическими службами. Первичные статистики, рассмотренные в данном параграфе, представляют собой детальные сведения о розничных продажах конкретных магазинов.

Приведем результаты анализа с помощью ОНМ структуры потребительского спроса на узкоспециализированном рынке Москвы (2007 г.) «Безалкогольные напитки». Исходная выборка содержит ежемесячные данные (январь 2007 - декабрь 2007) о продажах безалкогольных напитков в 643 магазинах г. Москвы. Товары одинаковой номенклатуры (бренда), продаваемые в разных магазинах, считаются разными товарами, и именно они образуют товароведческие классы.

Отметим, что фактически на рынке продается пара взаимодополняющих товаров: сам напиток, себестоимость которого не меняется, и торговая услуга. В магазинах социальной направленности, в гипермаркетах услуга стоит дешевле, чем в магазинах, которые посещаются покупателями с высоким достатком. Целью исследования было выяснить, как влияют торговые услуги на сегментацию рынка. Было предложено два

варианта: сегментация определяется торговыми услугами (сегментация по магазинам), или же она базируется в первую очередь на торговой марке (сегментация по брендам).

В результате точной проверки выполнения условий рационализируемости (показатель $\omega = 1$) оказалось, что 13 классов-брендов рационализируемы. Был выявлен лишь один класс-бренд, статистика продаж которого не удовлетворяет условиям рационализируемости (ОСА), но который, тем не менее, имеет достаточно небольшой показатель нерациональности. По приведенным результатам можно сделать вывод о том, что в Москве существует узкоспециализированный конкурентный рынок безалкогольных напитков, не зависящий от магазина. Этот результат не является очевидным: разброс цен достаточно велик, т.е. цена торговой услуги существенно различается, но тем не менее выявлена сегментация по брендам.

Также были проанализированы продажи выбранных товаров внутри 643 магазинов. Более двух третей классов-магазинов имеют показатель нерациональности, больший, чем единственный не рационализируемый при $\omega = 1$ класс-бренд. Для безалкогольных напитков сегментация по брендам лучше отражает структуру потребительского спроса, чем сегментация по магазинам.

Как мы видим, обобщенный непараметрический метод превращается просто в непараметрический, когда мы рассматриваем большую географически распределенную выборку магазинов. Почти все классы-бренды в статистике безалкогольных напитков рационализируемы. Но также интересно посмотреть, как проявит себя обобщенный непараметрический метод на выборке, состоящей из одного магазина, пусть и очень крупного.

В качестве исследуемой торговой статистики были взяты продажи крупного компьютерного супермаркета за период с 05.01.1999 по 21.12.1999.

Наименьший показатель нерациональности имеет группа «Все товары». Отметим, что объединения классов имеют намного меньший показатель нерациональности, чем сами классы. Это связано с тем, что объединения полнее учитывают свойства взаимозаменяемости и взаимодополняемости. Хорошим примером служит то, что товары из класса «Память» образуют рационализируемую группу с «Процессорами» и «Сетевым оборудованием». Это иллюстрирует поведение потребителя: обычно покупатель приобретает память и процессор не по отдельности, а вместе, чтобы характеристики подходили друг к другу.

§2.4 посвящен применению обобщенного непараметрического метода к анализу матрицы кросс-курсов на валютных рынках.

Пусть на рынке котируются n валют. Обозначим через a_{ij} количество валюты j -го вида, которое можно получить при обмене за единицу валюты i -го вида. Составленная из чисел a_{ij} матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n}$ называется матрицей кросс-курсов и описывает состояние валютного рынка. Рассмотрим цепочку обменов $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, при которой единица валюты i_1 обменивается на валюту i_2 , затем все вырученные при обмене средства обмениваются на валюту i_3 и т.д.; наконец, все вырученные при обмене средства в валюте i_k обмениваются на валюту i_1 . В результате всех проведенных обменов получается количество денег в валюте i_1 , равное $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1}$.

Определение 5. Будем говорить, что матрица кросс-курсов $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n}$ допускает арбитражную цепочку $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, если

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1} > 1.$$

Отметим, что если на валютном рынке котируется несколько десятков валют, проверка отсутствия арбитражных цепочек прямым перебором является сложной вычислительной задачей.

Если арбитражные цепочки существуют, то реализация арбитражной цепочки приносит прибыль, при этом консолидированная банковская система несет финансовые потери. Устранение потерь от арбитражных цепочек может быть достигнуто за счет комиссионных сборов, взимаемых при каждом обмене пропорционально сумме подлежащей обмену. Задача о вычислении минимальной ставки комиссионных сборов, при которой отсутствуют арбитражные цепочки, ставится следующим образом: найти минимальное значение $\hat{r}$ величины r такое, что для любого натурального числа k и любой цепочки обменов $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ справедливо неравенство

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1} \leq r^k.$$

Если неравенства выполняются при $r \leq 1$, то арбитражные цепочки отсутствуют. Если неравенства выполняются при $r > 1$, то уменьшение выплачиваемой суммы в r раз подавляет все арбитражные цепочки. Заметим, что величина $\hat{r}$ является аналогом минимального показателя нерациональности при исследовании торговой статистики, в этом случае $a_{ij} = \frac{\langle P^j, X^j \rangle}{\langle P^i, X^j \rangle}$. Математический смысл величины $\hat{r}$, ее связь с идемпотентным аналогом числа Фробениуса-Перрона обсуждается в §1.4.

Величину $\hat{r}$ можно рассчитать с помощью алгоритма Варшалла-Флойда. Ее сопоставление с фондовыми индексами различных стран показывает, что этот показатель можно рассматривать как индикатор стабильности мировой финансовой системы (рис. 2).

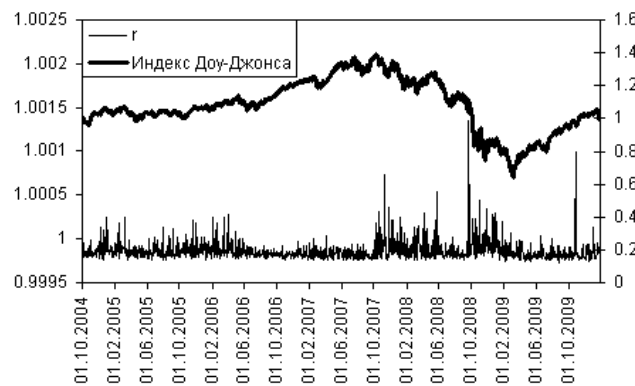


Рис. 2. Минимальная ставка комиссионных сборов $\hat{r}$, при которой отсутствуют арбитражные цепочки, (ось ординат слева) и индекс Доу-Джонса (ось ординат справа, нормированный).

В §2.5 обсуждается применение обобщенного непараметрического метода к анализу торговой статистики фондовых рынков.

Были взяты данные 21 крупнейшей по объему торгов биржи. Сначала были проанализированы биржи по отдельности, затем мы перешли к анализу мирового фондового рынка.

При исследовании отдельных бирж интерес представляют, прежде всего, экономические индексы Конюса-Дивизиа, построенные с помощью ОНМ. Эти индексы естественно сопоставить с индексами, рассчитываемыми по традиционным методикам (среднее, взвешенное по цене, среднее, взвешенное по капитализации, суммарный доход на капитал). Расчеты показали, что индексы Конюса-Дивизиа более рельефно отражают ситуацию на фондовом рынке.

Взаимосвязь фондовых рынков различных стран представляет большой интерес. Действительно, в настоящее время многие крупные инвесторы не ограничиваются

рамками одной страны, но действуют в глобальном масштабе. Метод анализа матрицы кросс-курсов, предложенный в §2.4, позволяет объединить акции различных бирж, номинированные в разных валютах, в одну торговую статистику и исследовать фондовые рынки в совокупности.

Расчеты показали, что значение показателя нерациональности для мирового фондового рынка является наименьшим по сравнению с отдельными биржами. Это говорит о том, что репрезентативный инвестор является глобальным, и рассмотрение мирового фондового рынка в рамках одной торговой статистики дает наилучшее понимание его поведения.

ОНМ позволяет исследовать сегментацию мирового фондового рынка и сравнительную динамику индексов для различных групп акций. Заметим, что индекс мирового фондового рынка рассчитывается компанией Morgan Stanley. Это MSCI ACWI (All country World Index - Мировой индекс всех стран). На рисунке 3 показана динамика мирового фондового индекса, рассчитанного с помощью ОНМ, в сравнении с индексом MSCI ACWI и индексом Доу-Джонса. Отметим, что индекс Конюса-Дивизиа более чувствителен к событиям на рынке, чем индексы MSCI ACWI и Доу-Джонс. Это же наблюдение прослеживается, если сравнить индекс Конюса-Дивизиа мирового фондового рынка и биржи Нью-Йорка. В расчете мирового индекса имеют значение большее количество факторов, прежде всего развивающиеся рынки. Например, для типичного развивающегося фондового рынка, бразильского, характерен внушительный рост (почти в семь раз с начала исследуемого периода до максимума в середине 2008 года) и не менее внушительное падение во время кризиса. Подобное поведение бразильского и других развивающихся рынков учитывается ОНМ при расчете мирового индекса.

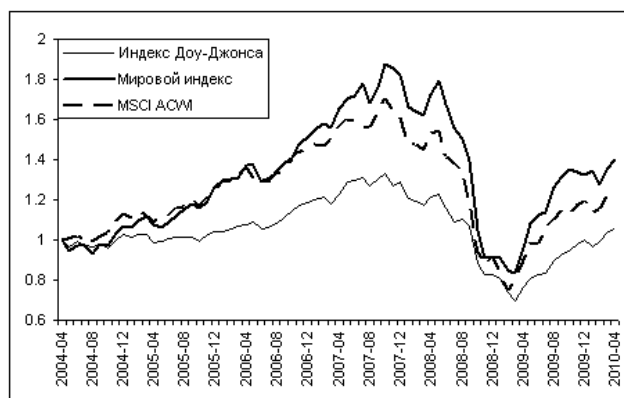


Рис. 3. Мировой индекс, MSCI ACWI и Доу-Джонс

ОНМ позволяет построить индексы цен акций компаний в различных отраслевых разрезах и сравнить их с мировым индексом фондовых рынков. Так, расчеты показали, что мировой кризис наиболее сильно затронул финансовый сектор. С другой стороны, стабилизирующее влияние на мировой индекс фондовых рынков оказали акции компаний, производящих потребительские товары, таких как «Кока-Кола» и «Джонсон и Джонсон».

При исследовании статистики с помощью ОНМ имеется возможность выделить сегменты фондовых рынков. Мы можем рассчитать мировой индекс тремя способами: напрямую по всем акциям, с предварительным агрегированием по биржам и с предварительным агрегированием по отраслям. Максимальное отклонение индекса, рассчитанного напрямую по всем акциям с индексом, рассчитанным после агрегирования по биржам, составляет 4,36%, а с индексом, рассчитанным после агрегирования по отраслям, составляет 7,32%. Причем максимум достигается в период мирового финансового

кризиса. Таким образом, за исключением кризисных ситуаций на рынке присутствует четкая сегментированность как по биржам, так и по отраслям.

Подобная сегментированность фондового рынка означает, что акции одной биржи обладают схожими свойствами для инвестора — являются взаимодополняющими или взаимозаменяющими товарами в терминологии теории потребительского спроса. Репрезентативный инвестор при принятии решения о вложении средств сначала выбирает те биржи, на которых он собирается вкладывать деньги, а на втором этапе определяется с набором акций на конкретной бирже. Еще больший интерес представляет выявленная сегментированность мирового фондового рынка по отраслям. Это говорит о второй стратегии вложения средств репрезентативного инвестора: сначала определиться с отраслью, а затем выбирать конкретные акции. Эта стратегия вполне оправдана, учитывая разную динамику акций различных отраслей.

Третья глава работы посвящена программному комплексу анализа торговой статистики «Индекс», реализующему обобщенный непараметрический метод построения индексов Конюса-Дивизиа и методику анализа сегментированности потребительских рынков. Это удобный инструмент анализа торговой статистики, с помощью которого проведены численные эксперименты, описанные во второй главе.

§3.1 посвящен обсуждению требований к разработке программного комплекса, поддерживающего методику анализа торговой статистики на основе обобщенного непараметрического метода.

В рамках школы акад. РАН А.А. Петрова коллективом ученых под руководством А.А.Шананина проводились эксперименты по применению ОНМ к анализу торговой статистики (отметим прежде всего вклад Л.Я. Поспеловой). В этих исследовательских мероприятиях был накоплен определенный опыт использования непараметрического метода. Он включает в себя как эвристические представления о характерных особенностях структуры потребительского спроса, которые можно выявить с помощью ОНМ, так и понимание того, какую функциональность должен реализовывать программный комплекс анализа торговой статистики, базирующийся на этом методе.

Программный комплекс, сохраняя преемственность в развивающейся технологии, должен стать наукоемким, открытым, практически полезным, несложным в изучении и использовании, массово применяемым для анализа товарных, фондовых и валютных рынков инструментом исследователя. Для достижения этих целей программный комплекс должен обладать определенными характеристиками, обусловленными как ОНМ, так и областью использования и особенностями условий эксплуатации.

Понятная легко расширяемая архитектура являются базовым требованием при создании программного продукта, который будет широко использоваться. Опыт применения ОНМ в различных прикладных областях, полученные результаты и выводы открывают широкие перспективы его использования как в теоретическом, так и практическом плане, так что возможность простой модернизации или модификации должна учитываться на всех этапах разработки. В целях расширения круга исследователей, использующих «Индекс» в своей работе, программный комплекс должен допускать удобную реализацию в сети Интернет. Из требований, накладываемых ОНМ, выделим следующие:

- Удобный способ формирования групп товаров для проверки их на рационализируемость. Дело в том, что если торговая статистика состоит из m товаров, то общее число возможных групп равняется 2^m . Поэтому полный перебор возможных групп товаров и проверка их на рационализируемость при достаточно большом m представляется вычислительно затруднительным даже на современных

компьютерах. Необходим метод, помогающий и частично автоматизирующий процесс поиска рационализируемых групп.

- Метод отображения графа связей как инструмент наглядного исследования структуры спроса. Основным средством изучения структуры потребительского спроса является дерево экономических индексов. Сложность при исследовании этого дерева с помощью ОНМ состоит в том, что фактически связи по отношению отделимости образуют более сложную структуру, чем дерево.
- Средства наглядной визуализации графиков для изучения динамики индексов Конюса-Дивизиа.

§3.2 посвящен обсуждению процесса разработки и архитектуры программного комплекса - системы «Индекс». В процессе разработки программного комплекса были в полной мере учтены требования, изложенные в предыдущем параграфе. Программный комплекс был разработан в рамках парадигмы объектно-ориентированного программирования (ООП) на языке C# платформы Microsoft .NET Framework в среде Microsoft Visual Studio. Язык программирования C# выбран как современный объектно-ориентированный язык программирования, позволяющий быстро и удобно создавать эффективные по времени исполнения коды. Microsoft .NET Framework выбрана как современная платформонезависимая виртуальная машина, позволяющая создавать как настольные программы, так и приложения, работающие в среде Интернет.

Программный комплекс «Индекс» в среде Microsoft Visual Studio разработан в виде приложения Windows Forms с разделением интерфейса (главная форма - MainForm.cs) и внутреннего ядра, хранящего информацию о торговой статистике и выполняющего операции с ней (TradeStatContainer.cs). Веб-сервис «Индекс» разработан в виде приложения Webforms с такой же программной архитектурой.

Разработанная структура классов отражает естественные взаимосвязи в торговой статистике. Заметим, что в рамках классовой иерархии эффективно реализован полиморфизм ООП для операций, проводимых как с товарами, так и с группами товаров. Теоретико-множественные операции над группами реализованы с помощью классов Интервал (ClassInterval) и Интервалы (ClassIntervals) через перегрузку логических операций.

Программные блоки системы «Индекс» представлены на рис. 4. Процесс обработки торговой статистики начинается с ее загрузки. Данные могут быть загружены как из файлов базы данных формата «Индекс» с помощью Блока загрузки, так и импортированы. Поддерживается импорт кросс-курсов валют (Блок анализа валютного рынка), так и данных торгов на фондовых биржах (Блок анализа фондового рынка). Основная вычислительная нагрузка лежит на Блоке проверки рационализируемости и вычисления индексов Конюса-Дивизиа, в котором реализован алгоритм Варшалла-Флойда. Загруженные данные попадают в Блок торговой статистики, где они хранятся и обрабатываются во время выполнения программы.

Блок визуализации позволяет строить графики индексов Конюса-Дивизиа. Также в данном блоке реализован механизм групп-кандидатов для подбора новых групп товаров для проверки на удовлетворение условиям рационализируемости. В блоке анализа сегментированности реализовано отображение дерева экономических индексов в виде графа связей. Также в этом блоке предоставляются методы для сравнительного анализа показателей нерациональности для различных групп товаров.

§3.3 содержит описание функций системы «Индекс». Функциональность программного комплекса «Индекс» в полной мере отражает требования, изложенные в параграфе 1



Рис. 4. Схема организации работы программного комплекса «Индекс»

настоящей главы. Среди функций, реализованных в программном комплексе, отметим следующие удобные средства анализа торговой статистики:

- Вычисление и сохранение в файл показателей нерациональности для всех лингвистических групп товаров, а также для объединений различной сложности;
- Формирование групп товаров в виде механизма групп-кандидатов;
- Последовательное преобразование статистики с исключением моментов времени и/или товаров, в большей степени влияющих на рационализируемость;
- Исследование процедуры агрегирования, рационализируемости и отделимости при различных значениях показателя нерациональности.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Приложение **П.1** содержит описания возможностей ОНМ по прогнозированию цен. В приложениях **П.2-П.5** приведены данные торговых статистик и результаты расчетов, используемых в §2.1-§2.2. Аналогичная информация по §2.3-§2.5 доступна на Интернет-сайте <http://www.kondrakov.com/>.

Основные результаты работы

1. Проанализирован положительно однородный индекс Конюса-Дивизиа в рамках паретовской модели потребительского спроса и дана мотивировка его использования как инструмента учета взаимозаменяемости товаров. Предложен конструктивный численный метод вычисления индексов Конюса-Дивизиа;
2. Разработана методика анализа торговой статистики, позволяющая исследовать сегментацию товарных и фондовых рынков, изучать степень рациональности поведения потребителя (инвестора), анализировать структуру потребительского спроса, определять группы товаров, связанные отношением взаимозамещения и взаимодополнения. Методика применена к анализу торговой статистики товарных, валютных и фондовых рынков. Дана содержательная интерпретация влияния структурных сдвигов в экономике на показатель нерациональности;

3. Разработан на языке программирования С# платформы Microsoft .NET программный комплекс анализа сегментации товарных, фондовых и валютных рынков. Программный комплекс реализует обобщенный непараметрический метод и методику анализа торговой статистики, предложенную в диссертационной работе.

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Алексеевичу Шананину за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы, а также к.т.н. Поспеловой Людмиле Яковлевне за предоставление данных по товарным рынкам и ценные консультации. Также автор благодарит к.ф.-м.н. Ващенко Михаила Петровича за предоставление данных по фондовым и валютным рынкам и полезные обсуждения.

Публикации по теме диссертации

1. **Кондраков И.А., Шананин А.А. Идемпотентные аналоги теорем о неотрицательных матрицах и их приложения к анализу экономической информации. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2011, том 51, №2, с. 188-205.**
2. **Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Обобщенный непараметрический метод. Применение к анализу товарных рынков. // Труды МФТИ, 2010, т.2, №3, с.32-45.**
3. **Кондраков И.А. Программный комплекс анализа торговой статистики на основе обобщенного непараметрического метода "Индекс". // Системы управления и информационные технологии, 1.1(43), 2011, с. 198-203.**
4. Кондраков И.А. Задача Монжа-Канторовича и рационализация потребительского спроса // Сборник тезисов докладов 13й Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, МГУ им. Ломоносова, 2006, с. 25-26.
5. Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Усанов Ю.А., Шананин А.А. Разработка технологии и инструмента исследования потребительского рынка с помощью обобщенного непараметрического метода. М.: ВЦ РАН, 2007 г. 63 с.
6. Кондраков И.А. Задача Монжа-Канторовича и рационализация потребительского спроса // Труды V Московской международной конференции по исследованию операций, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Моисеева, Москва МАКС Пресс, 2007, с. 89-91.
7. Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Компьютерная технология исследования потребительского спроса с помощью обобщенного непараметрического метода // Сборник трудов шестой международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности», Санкт-Петербург Издательство Политехнического университета, 2008, с. 69-71.
8. Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Программа исследования и сегментации потребительских рынков. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008615547. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 19 ноября 2008 г. Москва, реестр программ для ЭВМ, 2008, 50 с.

9. Кондраков И.А. Исследование структуры спроса потребительских рынков с помощью обобщенного непараметрического метода // Сборник тезисов докладов 15 Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2008». Москва, МГУ им. Ломоносова, 7-11 апреля 2008 г. Москва, Макс-пресс, 2008, С. 96-97.
10. Кондраков И.А. Компьютерная технология исследования потребительского спроса с помощью обобщенного непараметрического метода Ломоносов-2009 // Материалы докладов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» М.: МАКС Пресс, 2009. с.38.
11. Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Технология исследования ценообразования и структуры спроса узкоспециализированных рынков с помощью обобщенного непараметрического метода // тезисы докладов 4 всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» ЭКОМОД-2009, Киров, изд-во ГОУ ВПО ВятГУ, 2009, с.41.
12. Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Обобщенный непараметрический метод исследования структуры спроса на узкоспециализированных рынках. Сборник трудов IV Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» ЭКОМОД-2009 - Киров, изд-во ГОУ ВПО ВятГУ, 2009. С. 160-169.
13. Kondrakov Ivan, Shananin Alexander. Nonparametric method for economic indices construction. Application to analysis of capital and financial markets // 24th European conference on operational research EURO2010, - Lisbon, 2010, p. 239. (на англ.).
14. Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Непараметрический метод построения экономических индексов. Применение к анализу товарных, фондовых и валютных рынков. // Труды VI Московской международной конференции по исследованию операций, Москва, Макс-пресс, 2010, с.100-101.
15. Кондраков И.А., Шананин А.А. Анализ фондовых и валютных рынков с помощью обобщенного непараметрического метода // Доклады 8-й международной конференции «Интеллектуализация обработки информации ИОИ-2010» Москва, Макс-пресс, 2010, с.228-231.
16. Кондраков И.А., Шананин А.А. Исследование сегментации мирового фондового рынка с помощью обобщенного непараметрического метода // Труды 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», Москва-Долгопрудный, МФТИ, 2010, с. 98-100.
17. Кондраков И.А., Поспелова Л.Я., Усанов Д.А., Шананин А.А. Технологии анализа рынков на основе обобщенного непараметрического метода. М.:ВЦ РАН. 2010. 67 с.

В работах из списка ВАК [1]-[2] автору принадлежат доказательства основных утверждений, проведение, интерпретация и описание численных экспериментов. Выносимые на защиту результаты диссертации, изложенные в работах [5], [7]-[8], [11]-[17], получены лично автором.