

На правах рукописи

Димитриенко Ольга Юрьевна

КЛАСТЕРНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РЫНКА ПРОДАЖ ПРИ МАРКЕТИНГОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы, комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена в Московском Государственном Техническом
Университете имени Н.Э. Баумана.

Научный руководитель: *доктор технических наук,*
профессор
Норенков Игорь Петрович

Официальные оппоненты: *доктор физико-математических наук,*
профессор
Феоктистов Владимир Васильевич
кандидат физико-математических наук,
доцент
Бродский Юрий Игоревич

Ведущая организация: *Факультет вычислительной математи-*
ки и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоно-
сова

Защита состоится «_____» _____ 2011 г. в _____ часов _____ мин. на за-
седании диссертационного совета Д 002.017.04 при Учреждении Российской
академии наук Вычислительный Центр им. А.А.Дородницына РАН, располо-
женном по адресу: 119991, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан «_____» _____ 20____ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор

Новикова Н.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования На современном этапе развития экономики важную роль в регулировании продаж товаров играет математическое моделирование активности покупателей. Существенное влияние на покупательскую активность могут оказывать маркетинговые мероприятия продавца, которые обеспечивает рост объемов продаж и прибыли продавца. Математические модели поведения покупателей на рынке массовых продаж (отличные от моделей индивидуального выбора, разрабатываемых, например, Г.Б. Клейнером) с большим количеством наименований товаров, а также модели воздействия инструментов маркетинга на рынок пока еще только развиваются.

Для прогнозирования динамики макропоказателей рынка существуют фундаментальные модели, развитые, например, в работах R.E. Lucas, W. Phillips, R. Solow, F. Ramsey, A.A. Петрова, И.Г. Поспелова, А.А. Шананина, Т.С. Онучак, В.З. Беленького. Модели, которые применяются в реальных компаниях для описания динамики рынка продаж на текущий момент времени, можно разделить на два основных класса: описательные модели маркетинга (экономические модели Р. Kotler, J.-J. Lambin, D. Ogilvy, J. Trout, М. Porter, основанные на эмпирическом опыте исследователей) и статистические модели описания процессов, происходящих на рынке (построение регрессий, расчет корреляций рядов данных: М.И. Левин, С.А. Айвазян, М.Ж.А. Berry, G. Linoff, M.J. Shaw и другие). Такие подходы, однако, не позволяют описать причинно-следственных экономических закономерностей, происходящих на рынке продаж, поэтому они не обеспечивают достаточной точности прогнозирования при наличии внешних воздействий (кризисных явлений) и оказываются неэффективными для моделирования сложных систем с большим числом покупателей и товаров. К внешним воздействиям можно отнести изменения общей стабильности экономики - таких, как мировой финансовый кризис 2007-2009 гг. (прогнозирование внешних воздействий такого вида возможно, например, с помощью динамических моделей, разработанных Ю. Н. Павловским, Н. В. Белотеловым, Ю.И. Бродским и другими учеными), а также планомерное управление рынком посредством маркетинговых воздействий.

Таким образом, разработка математических моделей рынка массовых продаж, учитывающих закономерности коллективного поведения покупателей на рынке, а также моделирование воздействия маркетинговых меропри-

ятий на динамику покупательского поведения является актуальной задачей, востребованной в современной экономике.

Цели работы

- построение математической модели рынка массовых продаж на основе кластеризации данных о покупках;
- формулировка задач динамики движения кластеров на рынке массовых продаж;
- построение математической модели воздействия внешних сил и маркетинговых мероприятий на рынок массовых продаж;
- разработка вычислительных методов решения задач динамики движения кластеров с учетом воздействий маркетинговых мероприятий на рынке массовых продаж;
- разработка программного комплекса для моделирования динамики движения кластеров в пространстве товаров с возможностью прогноза динамики продаж товаров;
- анализ экспериментальных данных типового рынка продаж, верификация разработанной модели, проведение численного моделирования и решение задач движения кластеров на рынке продаж при воздействии маркетинговых мероприятий.

Методы исследования Для построения общей математической модели рынка продаж с учетом воздействий применены методы механики многомерных континуумов, обобщающие классические методы механики сплошных сред на многомерный случай. Для кластеризации рынка продаж был применен алгоритм обобщающей иерархической кластеризации. Моделирование воздействия маркетинговых мероприятий на рынок продаж осуществлялось на основе использования экономических моделей оценки перспективности и привлекательности. При численном решении задач динамики кластеров применены методы оптимизации для построения n -мерных эллипсоидов, а также численные методы решения систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна Разработан новый подход к моделированию рынка массовых продаж, основанный на представлении динамически меняющихся данных о покупках в виде подвижных кластеров – континуумов в многомерном евклидовом пространстве товаров. Предложена математическая модель, описывающая движение кластеров в многомерном пространстве, основанная на обобщенной формулировке законов сохранения континуальных систем.

Предложены модели движения жестких кластеров и деформируемых кластеров. Предложен метод аппроксимации кластера покупателей n -мерным эллипсоидом, включающий способ нахождения параметров эллипсоида и его расположения в пространстве.

Предложены модели внешних воздействий на рынок массовых продаж, обусловленных кризисными явлениями, и модели маркетинговых воздействий продавца на активность покупателей. Полученные результаты являются новыми.

Достоверность результатов обусловлена строгостью примененного математического аппарата и подтверждена апробацией модели на реальных экономических данных рынка массовых продаж, а также сравнением результатов расчетов с результатами других методов и с реальными экономическими данными.

Практическая и теоретическая ценность Разработанные в диссертационной работе модели являются комбинацией экономического и физико-математических подходов к моделированию динамики рынка продаж. Важной с теоретической точки зрения является возможность описания динамики продаж с помощью характеристик движения n -мерного эллипсоида, а также возможность управления этим движением с помощью внешних воздействий. Для практического применения ценным являются возможность моделирования влияния, оказываемого проводимыми маркетинговыми воздействиями, и прогнозирование продаж товаров продавцом в отсутствие внешних воздействий и при их наличии.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. кластерно-континуальная модель рынка массовых продаж, основанная на обобщении законов сохранения для многомерных континуумов и применении их для экономических систем;
2. модели динамики жестких и деформируемых кластеров покупателей;
3. модели внешних экономических воздействий и маркетинговых мероприятий продавца на рынке массовых продаж;
4. вычислительный алгоритм решения задач динамики кластеров при воздействии маркетинговых мероприятий, основанный на модели движения n -мерных эллипсоидов.

Апробация результатов работы Результаты диссертационной работы применялись для исследования рынка продаж автомобилей, произведенных

группой промышленных компаний BMW, Audi, Opel, Volkswagen в Германии и реализуемых через on-line магазин. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях аспирантов и молодых исследователей в 2007, 2008 и 2009 гг., проводившихся в МГТУ им. Баумана, Российской экономической академии им. Г.В.Плеханова и Университете Гумбольдта (Берлин, Германия).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 14 публикациях, список которых приведен в конце автореферата, в том числе 5 публикациях в журналах из списка, рекомендованного ВАК [1–5].

Личный вклад соискателя 1) Разработка основных положений кластерно–континуальной модели рынка массовых продаж промышленного предприятия.

2) Формулировка модели движения жестких и деформируемых кластеров покупателей в пространстве товаров.

3) Систематизация маркетинговых мероприятий и моделирование маркетинговых воздействий на рынке массовых продаж.

4) Разработка программного комплекса для обобщающей иерархической кластеризации и аппроксимации кластеров n -мерными эллипсоидами на основе оптимизационных методов.

5) Реализация алгоритма для проведения численных исследований движения эллипсоидов в пространстве согласно моделям жесткого и деформируемого кластеров. Исследование точности модели для реальных данных и сравнение с существующими методами прогноза.

6) Численное моделирование движения кластеров покупателей в 5-мерном пространстве товаров на примере рынка продаж автомобилей on-line магазина с учетом внешних экономических и маркетинговых воздействий и без них.

Структура и объем работы Работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 164 страницах, содержит 71 иллюстрацию. Библиография включает 74 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов, указаны основные положения, выносимые на защиту, структура и объем диссертационной работы.

Первая глава работы освещает теоретические основы модели. Для описания рынка массовых продаж продавца предлагаются методы континуального анализа, обобщенные на n -мерный случай. Для больших систем покупателей анализ поведения индивидуального покупателя не представляется целесообразным, как правило, более важным является описание группового поведения системы. Вводится n -мерное евклидово пространство товаров E_n , каждый элемент которого $\mathbf{x} = \{x^1, \dots, x^n\}$ представляет совокупность “количеств” товаров x^i , купленных или планируемых к покупке покупателем за время t . Точки множества покупателей объединяются в кластеры – группы покупателей со схожим покупательским поведением. Эти группы выявляются с помощью методов кластеризации. В данном исследовании был использован алгоритм обобщающей иерархической кластеризации. При континуальном описании каждый кластер в пространстве E_n представляет собой область V .

Вводится лагранжево–эйлерово описание движения покупателя на рынке с помощью закона накопления покупок $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^i, t)$, где t — время, $X^i = Q_{0j}^i(\overset{\circ}{x}^j - \overset{\circ}{x}^{0j})$ — лагранжевы координаты покупателя, Q_{0j}^i — компоненты ортогональной матрицы поворота кластера в момент t_0 , x_i и $\overset{\circ}{x}^j$ — эйлеровы координаты точки (покупателя) в моменты времени t и t_0 , $\overset{\circ}{x}^{0i}$ — координаты центра поворота кластера.

Движение локальной группы покупателей во времени в пространстве E_n характеризует градиент деформации кластера $\mathbf{F}$, который связывает положение “близкого соседа покупателя” $d\mathbf{x}$ в локальной группе dV в момент t и $d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ — в момент t_0 : $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$. Полагая функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X^i, t)$ дифференцируемыми, вводится вектор частот покупок $\mathbf{v} = \partial\mathbf{x}(X^i, t)/\partial t$, удовлетворяющий условию покомпонентной неотрицательности: $v^j = \partial x^j(X^i, t)/\partial t \geq 0$.

Для кластера, состоящего из одних и тех же покупателей в течение всего рассматриваемого времени t , имеет место закон сохранения количества покупателей, а также аксиоматически формулируется закон изменения частот покупок в кластере

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{f}_m dV + \int_{\Sigma} \mathbf{t}_{\Sigma} d\Sigma, \quad (2)$$

где ρ — плотность покупателей в локальной группе dV , $\mathbf{f}_m$ — плотность внешней массовой силы, $\mathbf{t}_{\Sigma}$ — поверхностная сила — аксиоматически вводимые

векторы, описывающие внешние воздействия на кластер (к которым будем относить маркетинговые воздействия и влияние кризисных экономических ситуаций). Силы вводятся в модели для представления взаимодействий, удерживающих покупателей от произвольного движения. Причины таких связей — в общих социальных признаках, общих психологических признаках покупателей и взаимообмене информацией.

Для формулировки закона изменения момента частот покупок в n -мерном пространстве применяется операция обобщенного векторного произведения для случая n -мерного пространства: $\mathbf{x} \times \mathbf{v} \equiv P(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = e_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} v^{i_2} \bar{\mathbf{e}}^{i_3} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}^{i_n}$, где $\bar{\mathbf{e}}^{i_3}$ — ортонормированный базис в E_n , x^{i_1} и v^{i_2} — компоненты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}$ в этом базисе, $\otimes$ — знак операции тензорного умножения, $e_{i_1 \dots i_n}$ — n -мерные символы Леви–Чивиты. Тогда закон изменения момента частот покупок в кластере формулируется следующим образом

$$\frac{d}{dt}({}^{n-2}\bar{\mathbf{m}}) = {}^{n-2}\boldsymbol{\mu}, \quad (3)$$

где ${}^{n-2}\bar{\mathbf{m}}$ — тензор момента частоты покупок (тензор $n - 2$ -го ранга), ${}^{n-2}\boldsymbol{\mu}$ — тензор суммарных моментов внешних сил, действующих на кластер.

Во **второй главе** предложена модель жесткого кластера в пространстве E_n , расстояния между отдельными точками которого считаются постоянными на всем рассматриваемом промежутке времени $[0, t_{\max}]$. Движение жесткого кластера описывается вектором поступательного движения центра масс с координатами $x^{0j}(t)$ и ортогональной матрицей поворота $Q_j^i(t)$: $x^j = x^{0j}(t) + Q_j^i(t)X^i$, где X^i — лагранжевы координаты, точка начала которых x_i^0 может быть выбрана в центре масс кластера при t_0 . В векторном представлении закон движения будет переписан так: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0(t) + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}'$, где $\mathbf{Q} = Q^{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j$ — тензор поворота, $\tilde{\mathbf{x}}' = X^i \bar{\mathbf{e}}_i$ — локальный радиус вектор.

Теорема 1. Если центр вращения кластера совпадает с центром его массы, то тензор моментов частот покупок для жесткого экономического кластера представляет собой сумму моментов вращения: ${}^{n-2}\bar{\mathbf{m}} = M\mathbf{x}_0 \times \mathbf{v}_0 + (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}) \cdot {}^n\boldsymbol{\epsilon}$, где $\mathbf{W} = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T$ — косо-симметричный тензор вращения кластера, $\mathbf{I} = \int_V \rho \tilde{\mathbf{x}} \otimes \tilde{\mathbf{x}} dV$ — тензор моментов инерции кластера.

Теорема 2. Тензор вращения $\mathbf{W}$ жесткого экономического кластера удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}) \cdot {}^n\boldsymbol{\epsilon} = {}^{n-2}\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \quad (4)$$

где ${}^{n-2}\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ — тензор моментов внешних сил относительно подвижного центра

масс кластера.

Теорема 3. Уравнение движения жесткого кластера в подвижном базисе имеет следующий вид

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{W}^J + \mathbf{W}^J \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^T - \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \quad (5)$$

где $\mathbf{W}^J$ — производная Яуманна, $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = -^{n-2}\tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \underbrace{\dots}_{n-2} \cdot {}^n\boldsymbol{\epsilon}^{(n\dots 1)}$, где $\cdot \underbrace{\dots}_{n-2} \cdot$ — $(n-2)$ -кратное скалярное произведение, ${}^n\boldsymbol{\epsilon}^{(n\dots 1)}$ — транспонированный тензор Леви-Чивиты.

Задача Коши для системы уравнений движения жесткого кластера в подвижном базисе формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} M \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} &= \bar{\mathbf{f}}, \\ \frac{d\mathbf{x}_0}{dt} &= \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{I} \cdot \mathbf{W}^J + \mathbf{W}^J \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^T - \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{Q} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q} &= 0, \\ t = 0 : \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}_0^0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0^0, \mathbf{W} = \mathbf{W}_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Четвертая группа уравнений этой системы представляет собой обобщения на n -мерный случай уравнений Пуассона. В компонентном виде общая система уравнений движения жесткого кластера в подвижном базисе имеет вид:

$$\begin{aligned} M \frac{dv_{0i}}{dt} &= \bar{f}_i, \\ \frac{dx_{0i}}{dt} &= v_{0i}, \\ \frac{dW'^{\alpha\beta}}{dt} &= \frac{I_\alpha - I_\beta}{I_\alpha + I_\beta} \sum_{k=1}^n W'^{\alpha k} W'^{\beta k} + \frac{\tilde{\mu}'^{\alpha\beta}}{I_\alpha + I_\beta}, \\ \dot{Q}^{ji} + Q^j_k W'^{ki} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для плотности внешней массовой силы $\mathbf{f}_m$ предложена потоковая модель, согласно которой $\mathbf{f}_m$ складывается из изменения потока покупок, поступающих “на склад” $\mathbf{h}^s$ у покупателя, и потока покупок, поступающих “в производство” (потребление) $\mathbf{h}^p$:

$$\mathbf{f}_m = \frac{d\mathbf{h}^s}{dt} + \frac{d\mathbf{h}^p}{dt}. \quad (8)$$

Вводится модель стабильного процесса покупок, в котором:
 $\mathbf{h}^s = \mathbf{h}_0^s = \text{const}$, $\mathbf{h}^p = \mathbf{h}_0^p = \text{const}$.

В **третьей главе** предложена модель деформируемого кластера, в которой допускается возможность изменения расстояния между точками кластера, которое обусловлено только изменением финансового запаса покупателя $\hat{e}$, вводимого в модели аксиоматически. Модель движения такого кластера характеризуется следующим законом: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{x}}'$, где $\mathbf{S}(\hat{e})$ — тензор растяжения, который зависит только от $\hat{e}$, и может быть представлен в виде $\mathbf{S} = S^j_i \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}^i = \sum_{\gamma=1}^n S_\gamma \mathbf{p}_\gamma \otimes \mathbf{p}_\gamma$, где $\mathbf{p}_\gamma$ — собственный базис $\mathbf{S}$, а $S_\gamma = 1 + A_\gamma(\hat{e} - \hat{e}_0)$ — собственные значения. Если $\mathbf{p}_\gamma$ совпадает с собственным базисом $\overset{\circ}{\mathbf{e}}'_\gamma$ тензора инерции $\mathbf{I}$, то будем говорить, что имеет место модель согласованно деформируемого кластера.

Показано, что изменение объема деформируемого кластера определяется формулой: $V/\overset{\circ}{V} = S_1 \dots S_n$.

Теорема 4. Вектор частот покупок покупателей $\mathbf{v}$ в деформируемом кластере представляет собой сумму вектора частот $\mathbf{v}_0$ покупок типового покупателя, вектора относительных частот $\tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{W}$ покупок в кластере за счет вращения и вектора относительных частот $\tilde{\mathbf{x}} \cdot \ln \mathbf{S}^J$ покупок в кластере за счет его деформирования:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{W}}, \quad \text{где } \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} + \ln \mathbf{S}^J. \quad (9)$$

Теорема 5. Тензор моментов частот покупок для деформируемого кластера выражается формулой

$${}^{n-2}\bar{\mathbf{m}} = M \mathbf{x}_0 \times \mathbf{v}_0 + (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}) \cdot \cdot {}^n\boldsymbol{\epsilon} + (\ln \mathbf{S}^J \cdot \mathbf{I}) \cdot \cdot {}^n\boldsymbol{\epsilon}. \quad (10)$$

Теорема 6. Тензор вращения $\tilde{\mathbf{W}}$ деформируемого экономического кластера удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}) \cdot \cdot {}^n\boldsymbol{\epsilon} + \frac{d}{dt}(\ln \mathbf{S}^J \cdot \mathbf{I}) \cdot \cdot {}^n\boldsymbol{\epsilon} = {}^{n-2}\tilde{\boldsymbol{\mu}}. \quad (11)$$

Уравнения движения деформируемого кластера в подвижном базисе имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \cdot \mathbf{W}^J + \mathbf{W}^J \cdot \mathbf{I} = \mathbf{W}^2 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{I} \cdot \mathbf{W}^2 + \mathbf{W} \cdot (\ln \mathbf{S}^J \cdot \mathbf{I} - \mathbf{I} \cdot \ln \mathbf{S}^J) - \\ - (\ln \mathbf{S}^J \cdot \mathbf{I} - \mathbf{I} \cdot \ln \mathbf{S}^J) \cdot \mathbf{W} + \mathbf{I} \cdot \ln \mathbf{S}^{JJ} - \ln \mathbf{S}^{JJ} \cdot \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Задача Коши для уравнений движения деформируемого кластера имеет вид (6), в которой 3-я группа уравнений заменяется на(12).

В четвертой главе систематизированы основные маркетинговые инструменты, применяемые в настоящее время для продвижения товаров на типичном рынке массовых товаров. Для описания этих мероприятий предложена модель, в которой введены S наборов однотипных маркетинговых мероприятий (инструментов): $\mathbf{u}^{[s]} = \{\mathbf{u}^{[s](1)} \dots \mathbf{u}^{[s](p)} \dots \mathbf{u}^{[s](r_s)}\}$, где s — номер набора маркетинговых мероприятий, p — номер мероприятия внутри набора, r_s — длина набора. Воздействие каждого набора маркетинговых инструментов $\mathbf{u}^{[s]}$ на потоки покупок в модели описывается векторной функцией (далее ее называем “психологической” функцией, поскольку она описывает психологическую реакцию покупателя на маркетинговые мероприятия)

$$\mathbf{z}^{[s]} = \mathbf{z}^{[s]}(\mathbf{u}^{[s]}), \quad (13)$$

изменяющей поток покупок по сравнению со стабильным процессом:

$$\mathbf{h}^s = \mathbf{h}_0^s + \mathbf{h}_0^s \cdot {}^3\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{z}^{[1]}, \quad \mathbf{h}^p = \mathbf{h}_0^p + \mathbf{h}_0^p \cdot {}^{S+1}\mathbf{K} \cdot \dots \cdot {}^{S-1}\mathbf{Z}, \quad (14)$$

где ${}^3\boldsymbol{\kappa}$ — тензор 3-го ранга и ${}^{S+1}\mathbf{K}$ — тензор $S + 1$ -го ранга, описывающие взаимовлияние товаров, ${}^{S-1}\mathbf{Z} = \mathbf{z}^{[2]} \otimes \dots \otimes \mathbf{z}^{[S]}$ — тензор обобщенного влияния “психологических” функций всех видов на поток покупок.

Нелинейные векторные функции (13) для кластеров покупателей являются анизотропными по отношению к группе ортогональных преобразований в пространстве E_n , далее полагаем, что имеет место триклинная группа симметрии кластера G_1 , в которой векторы $\mathbf{u}^{[s]}$ имеют скалярные инварианты $u_\alpha^{[s]}$, и в этой группе “психологические” функции $\mathbf{z}^{[1]}$ и $\mathbf{z}^{[6]}$, характеризующие ряд признаков покупателя: “инстинкт создания запаса” и доверие, выбираются следующим образом:

$$\mathbf{z}^{[s]} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{a}_\alpha^{[s]} \ln(1 + b_\alpha^{[s]} u_\alpha^{[s]}), \quad s = 1; 6. \quad (15)$$

Векторы $\mathbf{a}_\alpha^{[s]}$ имеют ненулевыми компонентами только $a_{\alpha\alpha}^{[s]}$. Для функций $\mathbf{z}^{[s]}$, характеризующих такие признаки покупателя, как “желательность покупки”, новизну товара, ассоциированность покупателя с товаром и информированность покупателя ($s \in [2; 5]$), предложены следующие зависимости

$$\mathbf{z}^{[s]} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\mathbf{a}_\alpha^{[s]}}{1 + \exp(b_\alpha^{[s]} - u_\alpha^{[s]})} - \frac{\mathbf{a}_\alpha^{[s]}}{1 + \exp(b_\alpha^{[s]})}, \quad s = 2, \dots, 5. \quad (16)$$

Функция соответствия с бюджетом ($s = 7$) задается законом следующего вида:

$$\mathbf{z}^{[7]} = \sum_{\alpha=1}^n \exp\left(-\frac{(u_\alpha^{[7]} - \mathbf{a}_\alpha^{[7]})^2}{(b_\alpha^{[7]})^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\mathbf{a}_\alpha^{[7]})^2}{(b_\alpha^{[7]})^2}\right). \quad (17)$$

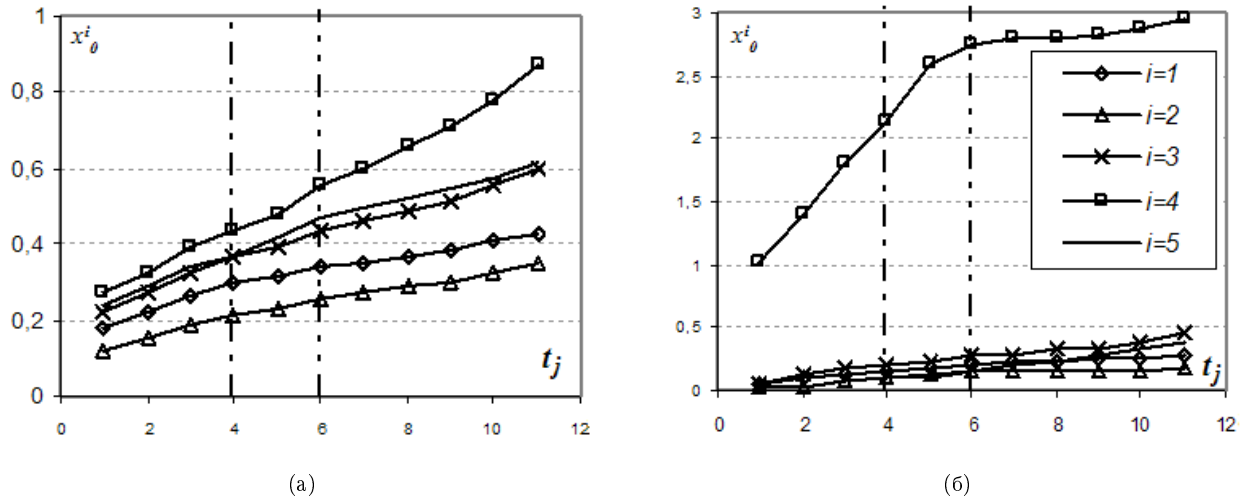


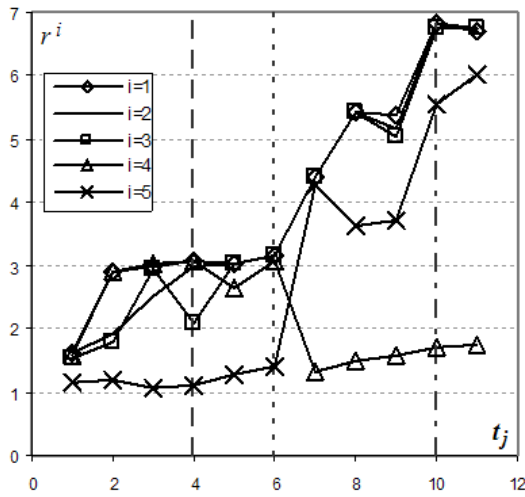
Рис. 1. Движение центров масс для кластеров 1 (а) и 2 (б)

Важным частным случаем воздействия продавца на рынок является проведение “простых” маркетинговых мероприятий: одновременно по всем товарам, тогда $\mathbf{u}$ — матрица управления, задаваемая произведением двух матриц $\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi} \cdot \bar{\mathbf{u}}$. Матрица $\boldsymbol{\chi}$ содержит временные параметры воздействия маркетинговых инструментов, а матрица $\bar{\mathbf{u}}$ — количество проведенных акций для каждого товара.

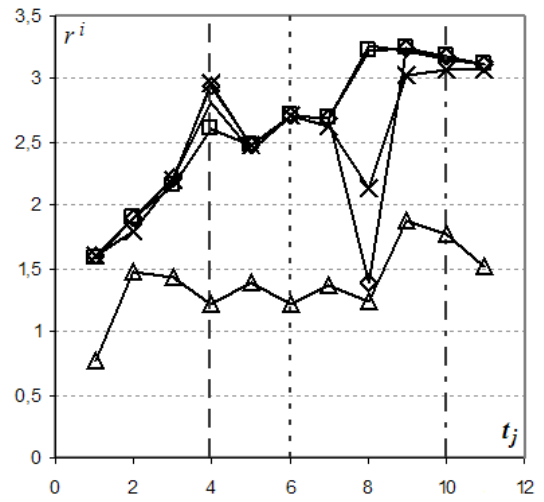
Пятая глава содержит описание численных результатов моделирования, полученных на основе решения систем уравнений для жесткого (7) и соответствующей системы для деформируемого кластера, с учетом моделей маркетинговых воздействий, предложенных в главе 4. Для численного решения систем уравнений (7) в n -мерном пространстве были разработаны алгоритмы: 1) обобщающей иерархической кластеризации с предварительной континуализацией данных, 2) аппроксимации кластеров n -мерными эллипсоидами с помощью метода условной оптимизации, минимизирующего объем эллипсоида $V_n(\mathbf{r}) = \left(\prod_{i=1}^n r^i \right) V_n \rightarrow \min$, с вычислением компонент матрицы инерции по экспериментальным точкам кластера и нахождением ее собственных векторов и собственных значений по методу Якоби, 3) вычисления многомерных интегралов на основе 4 способов, 4) решения систем (7) с помощью явной и неявной разностных схем.

Разработанные модели и вычислительные алгоритмы были применены для анализа данных по продажам автомобилей на авторынке Германии. Исследования проводились для 5 ценовых классов автомобилей, поэтому в данной задаче пространство товаров E_n было 5-тимерным.

В целях последующего анализа данные были предварительно обработаны для континуализации области. Кластеризация данных выявила присут-



(a)



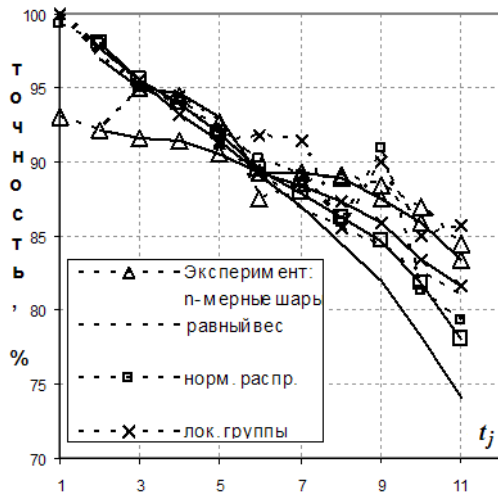
(б)

Рис. 2. Изменение длин полуосей для кластеров 1 (а) и 2 (б)

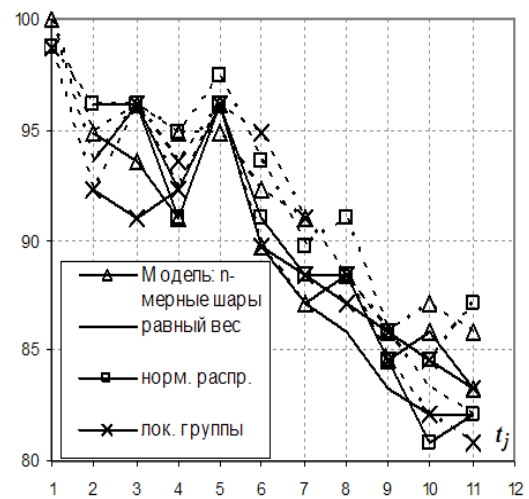
ствие двух больших кластеров. Исследование движения центров масс $\mathbf{x}^0$ показало, что без воздействия внешних сил оно носит линейный характер по всем осям товаров (Рис. 1), как это и следует из разработанной модели (7). Наличие внешних воздействий (маркетинговых мероприятий в точках t_{10} и кризисных явлений t_4, t_6) приводит к изменению углов наклона линейной траектории движения кластеров, что также полностью соответствует предложенной модели.

Динамика изменения длин аппроксимирующих n -мерных эллипсоидов (на Рис. 2) показывает, что кластерам свойственно уменьшение объема при наличии внешних воздействий (после первой и второй волны кризиса и под действием маркетинга): кластер в эти периоды показывает усиление групповых закономерностей. В отсутствие действия внешних сил кластер имеет тенденцию к увеличению объема.

Анализ экспериментальных данных показал, что кластеры имеют также вращательные движения, однако их прямое экспериментальное описание с помощью метода построения аппроксимирующего эллипсоида для каждого момента времени приводит к хаотичному движению кластера. В то же время применение разработанных моделей жесткого и деформируемого кластеров дает стабильные результаты прогноза движения кластера. Изменение независимых компонент матрицы поворота рассчитывается по дифференциальным уравнениям системы (7) и поэтому более стабильно и предсказуемо, чем их определение путем аппроксимации экспериментальных данных. Для проверки качества модели был использован процент попадания точек в моделируемый эллипсоид. Результаты моделирования с использованием модели



(а)



(б)

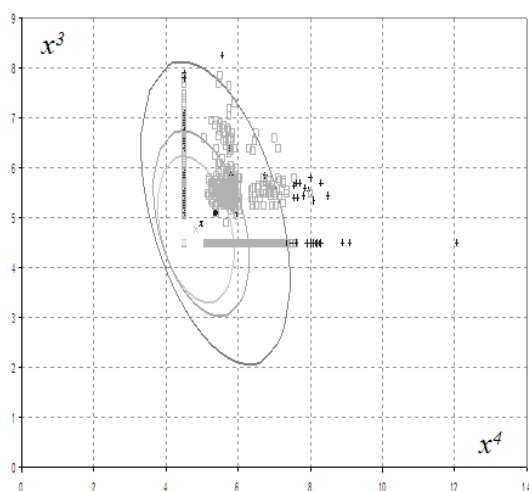
Рис. 3. Изменение качества модели жесткого кластера для кластеров 1 (а) и 2 (б)

жесткого кластера и 4-х способов вычисления интегралов в пространстве E_n показаны на рис. 3 и демонстрируют достаточно высокую точность описания динамики движения покупателей (максимальная погрешность для 11 периодов не превышает 15-25%).

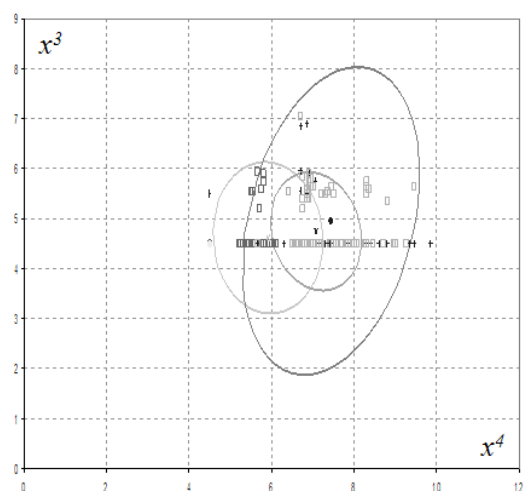
Модель деформируемого кластера позволяет учитывать реакцию кластеров на изменение финансового запаса агентов $\hat{e}$ посредством изменения длин полуосей эллипсоида r^i . Движение эллипсоидов, построенных с помощью модели деформируемого кластера, в плоскости (x^3, x^4) показано на рис. 4. Максимальные значения длин полуосей n -мерного эллипсоида, рассчитанного по модели деформируемого кластера, не превышают максимальных значений, полученных путем аппроксимации экспериментальных данных. Точность модели деформируемого кластера выше точности модели жесткого кластера, однако, она требует большего количества входных данных (динамики финансового запаса кластера $\hat{e}$), таким образом, применение той или иной модели может быть обусловлено характером анализируемых данных и наличием необходимых данных.

Проведено моделирование влияния маркетингового воздействия $\mathbf{u}$, известного из экспериментальных данных, на движение центра масс $\mathbf{x}^0$ и динамику вращения кластера, определяемую тензорами $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{W}$. Показано, что учет маркетингового воздействия не приводит к уменьшению точности моделей жесткого и деформируемого кластеров при учете влияния внешней силы на вращение.

Для демонстрации эффективности разработанного метода при прогнозировании динамики продаж продавца было проведено сравнение разработанно-



(а)



(б)

Рис. 4. Движение эллипсоидов, рассчитанных по модели деформируемого кластера для кластеров 1 (а) и 2 (б)

го подхода с 3-мя методами прогнозирования, часто используемыми на практике: построением линейного тренда методом наименьших квадратов (МНК), методом кубического сплайна, построением тригонометрического ряда Фурье с определением периодов колебаний методом спектрального анализа. Разработанная модель показала на тестовом примере наилучшую точность прогнозирования по сравнению с указанными методами (рис. 5), что позволяет сделать предварительный вывод о ее пригодности к дальнейшему использованию на практике.

Заключение подводит итоги работы и систематизирует основные результаты.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОоды И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработана кластерно–континуальная модель рынка массовых продаж промышленного предприятия, включающая в себя методику построения кластеров с большим числом покупателей, переход к континуальному описанию, и модель движения многомерных континуумов.

2. Разработаны модели жестких и деформируемых кластеров покупателей, получены основные дифференциальные уравнения, описывающие динамику движения кластеров на рынке продаж.

3. Построены математические модели внешних экономических воздействий и модели воздействия маркетинговых мероприятий продавца на рынок массовых продаж.

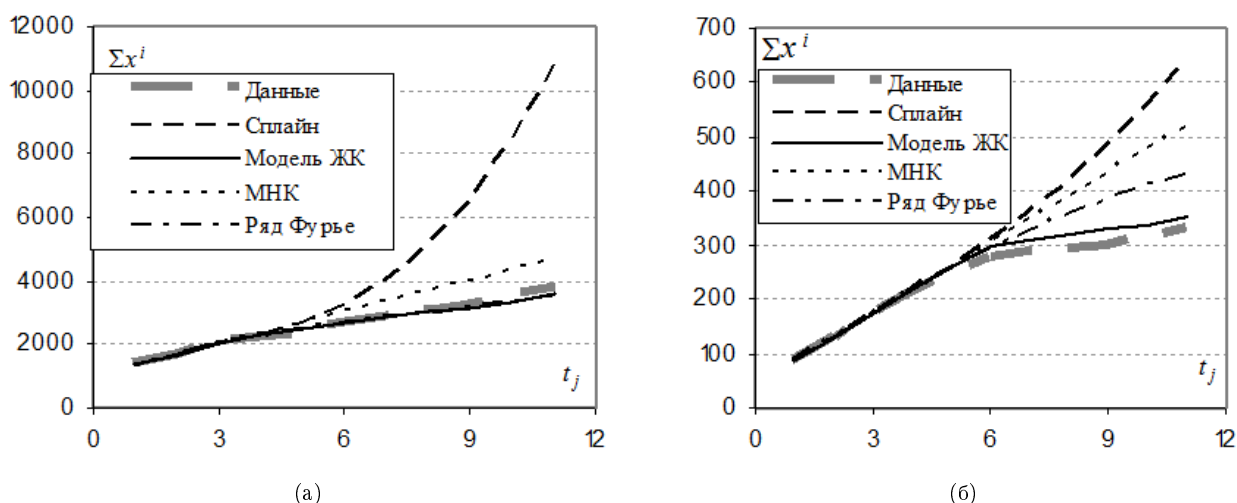


Рис. 5. Прогнозирование динамики суммарных продаж товаров, осуществленное с помощью модели деформируемых кластеров и с помощью классических методов прогнозирования для кластеров 1 (а) и 2 (б)

4. Сформулирована задача движения жестких и деформируемых кластеров покупателей при воздействии маркетинговых мероприятий продавца.

5. Разработаны вычислительные алгоритмы решения задач динамики кластеров при воздействии маркетинговых мероприятий на рынке массовых продаж, основанные на модели n -мерных эллипсоидов.

6. С помощью численного моделирования осуществлена верификация разработанной модели на экспериментальных данных типового рынка массовых продаж, показавшая, что разработанная модель и вычислительные алгоритмы обеспечивают достаточно высокую точность описания динамики движения кластеров покупателей и прогнозирования динамики суммарных продаж.

ТРУДЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Димитриенко Ю.И., Димитриенко О.Ю. Кластерно-континуальное моделирование экономических процессов// Доклады Академии Наук. - М. Изд-во "Наука". - Т. 435. - №4. - 2010. - С. 466–469
2. Димитриенко Ю.И., Димитриенко О.Ю. Модель деформируемых кластеров для анализа динамических данных в экономике// Информационные технологии. - М. Изд-во "Новые технологии". - №9 - 2010. - С. 43–50
3. Димитриенко Ю.И., Димитриенко О.Ю. Обобщение законов

- механики сплошных сред на многомерный случай // Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер.Естественные науки. - 2010, №3.-С.23–35
4. Димитриенко Ю.И., Димитриенко О.Ю. Кластерно-континуальное моделирование в экономике на основе методов механики многомерных сплошных сред// Информационные технологии. - М. Изд-во "Новые технологии". - №8-2010. - С. 54 –62
 5. Димитриенко О.Ю. Сравнительный анализ современных информационных систем обработки данных для задач маркетинга. // Информационные технологии. - М. Изд-во "Новые технологии". - №11-2007. - С. 74–79.
 6. Dimitrienko Yu. I., Dimitrienko O. Yu. Cluster-Continuum Modeling of Economic Processes. // Doklady Mathematics. - Pleiades Publishing Ltd. - Vol. 82. - No. 3. - 2010. - Pp. 982—985.
 7. Димитриенко О.Ю. Кластерная модель поведения покупателей для задач маркетингового планирования. - Актуальные проблемы фундаментальных наук: Сборник трудов Четвертой научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей, февраль 2010. – М.: НИИ РЛ МГТУ им. Н.Э.Баумана. - 2010. - С.12–14.
 8. Димитриенко О.Ю. Мультиагентная модель для стратегического маркетингового планирования. - Актуальные проблемы фундаментальных наук. Сборник трудов Третьей научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей, февраль 2009. - М.: НИИ РЛ МГТУ им. Н.Э.Баумана. - 2009. - С. 9–12.
 9. Димитриенко О.Ю. Разработка комплексной математической модели "клиент-рынок-маркетинг" для задач маркетингового анализа. - Актуальные проблемы фундаментальных наук. Сборник трудов Второй научно-методической конференции аспирантов и молодых исследователей, февраль 2008. - М.: НИИ РЛ МГТУ им. Н.Э.Баумана. - 2008. - С. 87–90.
 10. Димитриенко О.Ю. Анализ математических моделей в маркетинговых исследованиях. - Студенческий научный вестник. Сборник тезисов докладов общеуниверситетской научно-технической конференции "Студенческая научная весна-2007". 24 Апреля 2007, МГТУ им. Н.Э.Баумана. Под ред. К.Е. Демихова. - М.: НТА "АПФН". - 2007.- Т.4. - Часть 2. - С. 172–173
 11. Димитриенко О.Ю. Информационная система разработки тактического маркетинга. - Сборник научных трудов к 100-летию Российской экономи-

чекой академии им. Г.В.Плеханова. - М.: Изд-во Рос.экон.акад., 2007. - С. 150–151.

12. Димитриенко О.Ю. Информационная система поддержки принятия решений в маркетинге. - Тезисы XIX Международной конференции Российской экономической академии им. Г.В.Плеханова, 4 - 7 Апреля 2006. - Изд-во Рос.экон.акад. - С. 111–115.
13. Димитриенко О.Ю. Математические модели в маркетинге. - Студенческий научный вестник. Сборник тезисов докладов общеуниверситетской научно-технической конференции "Студенческая научная весна-2006". 14 - 28 Апреля 2006, МГТУ им. Н.Э.Баумана / Под ред. К.Е. Демихова. - М.: НТА "АПФН". - 2006. - С.200–203.
14. Димитриенко О.Ю. Математическое моделирование экономического роста.- Студенческий научный вестник. Сборник тезисов докладов общеуниверситетской научно-технической конференции "Студенческая научная весна - 2005". 4 - 29 Апреля 2005, МГТУ им. Н.Э.Баумана / Под ред. К.Е. Демихова. - М.: НТА "АПФН". - 2005. - Т.2.- С.232–233.

Основные результаты диссертации представлены в работах [1–5]. В совместных работах [1, 2] диссертантом разработана кластерно–континуальная модель рынка продаж, модель жестких кластеров, проведено численное моделирование, разработан программный комплекс. Результаты совместной работы [3] были получены при непосредственном участии диссертанта. В совместной работе [4] диссертантом выполнены разработка модели деформируемых кластеров, систематизация внешних воздействий, обоснование кластеризации, численное моделирование, разработка программного комплекса.