На правах рукописи

Бобровский Дмитрий Игоревич

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ БИЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Специальность – 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена в отделе прикладных проблем оптимизации Учреждения Российской Академии Наук Вычислительный Центр имени А.А. Дородницына.

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук Дикусар Василий Васильевич

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук Гребеников Евгений Александрович

кандидат физ.-мат. наук Борисова Светлана Валерьевна

Ведущая организация:

Московский Физико-Технический Институт (Государственный университет)

Защита состоится «16» декабря 2010 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д002.017.03 при ВЦ РАН по адресу ул. Вавилова, д.40, в конференц-зале

Автореферат разослан «16» ноября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета кандидат физ.-мат. наук Мухин Александр Владимирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Данная работа посвящена исследованию частного случая нелинейных динамических систем – билинейных систем оптимального управления.

В последнее время всё более актуальными становятся нелинейные задачи оптимального управления. Нелинейные задачи возникают во многих областях – технике, промышленности, экологии, биологии и прочих. Многие из данных задач не могут быть достаточно точно описаны линейными моделями оптимального управления (если могут быть хоть сколько-то приемлемо описаны вообще).

На текущий момент достаточно сильно проработана теория решения линейных задач оптимального управления в различных постановках. Однако, при добавлении в задачу каких-либо нелинейных элементов существенно усложняется структура задачи, что не позволяет использовать теорию решения линейных задач, решение каждой конкретной задачи становится нетривиальным.

Таким образом, остаётся весьма актуальным вопрос о методах решения нелинейных задач. Также немаловажным является исследование свойств данных систем как для понимания границ применимости текущих численных алгоритмов поиска решений, так и модернизации существующих/создания новых численных алгоритмов. При этом методы, полученные в рамках данной работы, в дальнейшем возможно расширить на полиномиальные задачи оптимального управления.

Следует отметить, что тема исследования нелинейных систем относительно нова – основные публикации российских и зарубежных авторов приходятся на 70-90е года прошлого века. В это время появляются первые работы, где анализируются нелинейные системы оптимального управления, рассматриваются их свойства в достаточно простых и грубых условиях на параметры задачи. Среди зарубежных учёных в качестве основных следует выделить Г. Суссмана, В.Джаржевича, Р.Броккета. Среди отечественных учёных, внесших значительный вклад в развитие данной теории, следует отметить Р.В. Гамкрелидзе, создавшего мощнейший аппарат для изучения данных систем – хронологическое исчисление, А.А. Аграчёва и С.А. Вахрамеева, развивающих в своих работах аппарат для исследования данных систем, работы В.В. Дикусара по системам оптимального управления, а также А.Ф. Филиппова по теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

<u>Цель и задачи исследования.</u>

Основная цель состоит в исследовании и обосновании свойств билинейных систем оптимального управления, получения достаточных условий оптимальности для задач с терминальным функционалом, исследования структуры и свойств множества достижимости задачи, поиск достаточных условий выпуклости функционала задачи и множества достижимости рассматриваемой системы.

Задача оптимального управления для билинейных динамических систем – наиболее «близкая» к линейной из нелинейных задач оптимального управления. Однако, при кажущейся похожести данных систем, билинейные системы уже не обладают столь замечательными свойствами, как линейные. В частности, отсутствует критериальность принципа максимума Понтрягина, множество достижимости данной задачи необязательно будет выпуклым (а, следовательно, терминальный функционал необязательно будет выпуклым на множестве допустимых управлений).

В соответствии с целью исследования поставлены следующие задачи:

1. Поиск необходимых условий оптимальности в задаче ОУ для билинейных динамических систем с терминальным функционалом в формулировке А.А. Аграчёва.
2. Поиск достаточных условий оптимальности в задаче ОУ для билинейных динамических систем с терминальным функционалом в формулировке А.А. Аграчёва.
3. Поиск достаточного условия выпуклости функционала в задаче ОУ для билинейных динамических систем с терминальным функционалом в формулировке А.А. Аграчёва.
4. Исследование структуры множеств достижимости билинейных динамических систем.
5. Поиск достаточных условий выпуклости множеств достижимости билинейных динамических систем.

<u>Объект исследования.</u>

Объектом исследования является задача ОУ для билинейной динамической системы терминальным квадратичным функционалом общего вида.

<u>Предмет исследования.</u>

Предметом исследования является процесс решения задачи минимизации терминального квадратичного функционала на решениях билинейной динамической системы ОУ.

<u>Теоретические и методологические основы исследования.</u>

Теоретическую и методологическую основу диссертации составляют труды российских и зарубежных учёных-математиков по методам решения задач ОУ, методам оптимизации, функциональному анализу и теории многообразий.

<u>Научная новизна исследования.</u>

Получены необходимые условия оптимальности управления в новой задаче ОУ для билинейных динамических систем с терминальным квадратичным функционалом и достаточные условия оптимальности управления в ряде частных случаев, найдены условия выпуклости для квадратичного функционала задачи в частном случае, показан ряд свойств множества достижимости билинейной динамической системы как гладкого подмногообразия орбиты билинейной динамической системы, исследована структура граничных точек множества достижимости и показана их связь с граничными точками множества допустимых управлений, показаны условия выпуклости множества достижимости билинейной динамической системы в ряде частных случаев.

<u>Личный вклад автора в проведённое исследование.</u>

Представленные на защиту результаты диссертации получены автором самостоятельно.

<u>Практическая значимость.</u>

Получены качественные оценки множеств достижимости, которые носят универсальный характер для выделенного класса систем, что было продемонстрировано на примере модели «хищник-жертва»; было показано, что оптимальное управление в данной задаче находится на границе множества допустимых управлений.

<u>Публикации.</u>

Основные результаты исследований отражены в четырёх публикациях автора, общим объёмом 1.7 п.л. в том числе две статьи в журналах из перечня изданий, рекомендованных ВАК, объёмом 0,9 п.л.

<u>Структура и объём работы.</u>

Диссертация состоит из четырёх глав и заключения. Основное содержание диссертации изложено на 93 страницах печатного текста. Список литературы содержит 46 наименований.

Основное содержание работы.

В первой главе ***«Введение»*** изложены обоснование предмета и цели исследования, обзор литературы по данному вопросу, основные результаты, выносимые на защиту, характеристика их научной новизны и практической значимости.

Во второй главе «***Билинейные системы оптимального управления с квадратичным терминальным функционалом***» производится постановка задачи ОУ:

$$J(u) = \left|x(T,u) - y\right|^2 \to \inf$$

В условиях задачи

$u_k \in L_2\left[t_0,T\right],\ k=\overline{1,...,m},\ \left(u_1,...,u_m\right) \in U \subset L_2^m\left[t_0,T\right],\ U$ - компакт, $a_i \le u_i\left(t\right) \le b_i$, где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$

Здесь $x(t,u)$ - решение задачи Коши системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left(A_0\left(t\right) + \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(t)u_k(t)\right)x(t),\ t \in \left[t_0,T\right] \\ x\left(t_0\right) = x_0, \end{cases}$$

где $A_0\left(t\right),\ A_k\left(t\right)$ матрицы порядка $n \times n$, $k=\overline{1,...,m}$, $a_{i,j}^k\left(t\right) \in L_2\left[t_0,T\right]$, $\left|a_{i,j}^k\left(t\right)\right| \le C,\ x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказывается теорема существования оптимального управления в задаче, находятся необходимые условия оптимальности:

Теорема.

Если $J\left(u\right)$ достигает в точке $\tilde{u} \in U$ минимума, то выполняется следующее условие:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \left\langle A_1\Omega_{t_0}^{T}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)x_0, \Omega_T^{t}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)^{*}\left(\Omega_{t_0}^{T}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)x_0 - y\right)\right\rangle \\ \dots \\ \left\langle A_m\Omega_{t_0}^{T}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)x_0, \Omega_T^{t}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)^{*}\left(\Omega_{t_0}^{T}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)x_0 - y\right)\right\rangle \end{pmatrix}, u-\tilde{u} \right\rangle_{L_2^m[t_0,T]} \geq 0$$

Если $u \in \operatorname{int} U$, то это условие эквивалентно

$$\begin{pmatrix} \left\langle A_1\Omega_{t_0}^{T}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)x_0, \Omega_T^{t}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)^{*}\left(\Omega_{t_0}^{T}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)x_0 - y\right)\right\rangle \\ \dots \\ \left\langle A_m\Omega_{t_0}^{T}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)x_0, \Omega_T^{t}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)^{*}\left(\Omega_{t_0}^{T}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)x_0 - y\right)\right\rangle \end{pmatrix} = 0,$$

где $\Omega_{t_0}^{T}$- матрациант соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений, $A\left(u\right) = A_0\left(\tau\right) + \sum_{i=1}^{m} u_i\left(\tau\right)A_i\left(\tau\right)$

Далее рассматриваются достаточные условия оптимального управления исходя из вида функционала. Приводится достаточное условие оптимальности управления, приводится условие выпуклости квадратичного терминального функционала билинейной задачи ОУ.

Теорема.

Пусть для $\tilde{u} \in U$ выполняется необходимое условие оптимальности и справедливо:

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\begin{pmatrix} 2\cdot\left\langle A_k x\left(t,\tilde{u}\right), \Omega_T^{t}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)^{*}\cdot\left(Ad\Omega_T^{\tau}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)\right)^{*}A_i\cdot x_0\right\rangle - \\ \left\langle A_k\Omega_{t_0}^{t}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)\cdot\left(Ad\Omega_{t_0}^{\tau}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)\right)A_i\cdot x_0, \Omega_T^{t}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)^{*}\cdot\left(\Omega_{t_0}^{T}\left(A\left(\tilde{u}\right)\right)x_0 - y\right)\right\rangle \end{pmatrix} h_i\left(\tau\right)h_k\left(t\right)d\tau dt \geq c\left\|h\right\|^2,$$

$h \in L_2^m\left[t_0,T\right], c \in \mathbb{R}_+$

Тогда $\tilde{u}$ - оптимальное управление.

В конце главы рассматривается частные случаи билинейных систем – коммутативные и квазикоммутативные билинейные системы ОУ. Для них находятся достаточные условия оптимальности управления и выпуклости для функционала задачи.

Утверждение.

Для выпуклости функционала $J(u)$в условиях $A_i A_j = A_j A_i$ достаточно, чтобы матрица $\left\{ \left\langle e^{A_0(T-t_0)} e^{\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i(\tau) A_i \right)} x_0 - y, e^{A_0(T-t_0)} e^{\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i(\tau) A_i \right)} A_i A_j x_0 \right\rangle \right\}_{i=1,\dots,n;\, j=1,\dots,n}$ порождала положительно определённую квадратичную форму.

В начале третьей главы «***Исследование структуры множества достижимости билинейной динамической системы***» вводятся базовые понятия из теории хронологического исчисления и гладких многообразий.

Далее рассматривается множество достижимости билинейной динамической системы для более широкого множества оптимальных управлений, доказывается утверждение о структуре многообразия на множестве достижимости, рассматриваются достаточные условия постоянства ранга для билинейных динамических систем.

Теорема.

Пусть исходная система есть система постоянного ранга.

Тогда $\left\{ F\left(T,u,x_0\right), u \in L_2^m\left[t_0,T\right] \right\}$ - подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ размерности s, где

$$s = \dim \operatorname{Im} F'\left(T,u,x_0\right) = span\left\{ \Omega_t^T\left(A\left(u\right)\right) \cdot A_i\left(t\right) \cdot \Omega_{t_0}^t\left(A\left(u\right)\right) \cdot x_0, 1 \le i \le m, t_0 \le t \le T \right\}$$

На основании данной теоремы показывается связь граничных точек множества достижимости билинейной динамической системы и граничных точек множества допустимых управлений.

Теорема.

Пусть для билинейной динамической системы ОУ постоянного ранга $x(T,u)\in\partial X\left(U\right)$. Тогда u - существенно граничное управление.

Выводится ряд утверждений, показывающих взаимосвязь билинейных динамических систем ОУ с порождёнными ими симметричными системами. Доказывается теорема о выпуклости множества достижимости билинейной динамической системы ОУ в частном случае, в частном случае квазикоммутативных систем показывается совпадение множеств достижимости исходной системы и системы, построенной на управлениях, в каждой точке с вершинами n-мерного параллелепипеда.

Утверждение.

Пусть исходная система – квазикоммутативная билинейная динамическая система ОУ и пусть выполняется следующее условие:

$\forall x_0\mathbb{R}^n\ \exists V\left(x_0\right)\subset\mathbb{R}^n$ и $\exists a_{ijk},b_{ij}\in C^{\infty}\left(V\right),\left|b_{ij}\left(x\right)\right|<1,\forall x\in V$ такие, что $\left[A_i,ad^kA_0A_i\right]\left(x\right)=\sum_{j=1}^{k}a_{ijk}\left(x\right)ad^jA_0A_ix+b_{ik}\left(x\right)ad^{k+1}A_0A_ix,\forall k=0,1,...,i=1,...,m$.

Тогда имеет место следующее равенство:

$F\left(T,U,x_0\right)=F\left(T,\{a_i,b_i\},x_0\right)$,

где $\{a_i,b_i\}=\left\{u\left(\cdot\right)\subset U:u_i\left(t\right)=a_i\ \textit{или}\ u_i\left(t\right)=b_i,\forall i=1,...,m,\forall t\in\left[t_0,T\right]\right\}$

Утверждение.

Множество достижимости в условиях $A_iA_j=A_jA_i$ является выпуклым, если $\forall u,v\in U,\exists\lambda\geq 0,r\in U:e^{\int_{t_0}^{T}A_i\left(u_i\left(\tau\right)-v_i\left(\tau\right)\right)d\tau}-E=\lambda\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{m}\left(A_i\left(r_i\left(\tau\right)-u_i\left(\tau\right)\right)\right)d\tau$.

С помощью теорем о связи граничных точек множества достижимости и граничных точек множества допустимых управлений можно существенно снизить вычислительную сложность задачи численного поиска оптимального управления, т.к. из рассмотрения в процессе поиска оптимального управления можно исключить внутренние точки множества допустимых управлений. К примеру, для множества допустимых управлений, заданных на выпуклом многограннике, можно получить теоретическую оценку уменьшения количества рассматриваемых управлений при рассмотрении покрытия множества допустимых управлений аппроксимирующим его множеством кусочно-постоянных функций. Условие выпуклости множества достижимости позволяет для выпуклых функционалов использовать численные методы, существенно завязанные на выпуклости функционала.

Также рассматриваются условия достижимости и сильной достижимости для билинейных динасических систем ОУ. Рассматривается адаптация теорем Суссмана-Джарджевича о достижимости и сильной достижимости в частных случаях коммутативных и квазикоммутативных билинейных динамических систем ОУ.

Четвёртая глава называется «***Применение теории билинейных систем оптимального управления в исследовании модели «хищник-жертва» с учётом внутривидовой конкуренции***». Здесь даётся пример применения описанной в работе теории к конкретной задаче.

Рассмотрим постановку задачи.

Изменение числа хищников и жертв во времени характеризуется следующей нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon_1 x_1 - \gamma_2 x_1 x_2 - \gamma_1 x_1^2 - u_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = -\varepsilon_2 x_2 + \gamma_2 x_1 x_2 - u_2 x_2 \end{cases},$$

с начальными условиями:

$$x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}$$

Здесь x_1 и x_2 – количество жертв и хищников соответственно в момент времени $t \in [t_0, T]$, $\varepsilon_1 > 0$ - скорость прироста числа жертв в отсутствии хищников; $\varepsilon_2 > 0$- естественное вымирание хищников, лишённых пищи;

$\gamma_1, \gamma_2 > 0$ - константы, характеризующие потребность в пище жертв и хищников соответственно; u_i - часть отлова в единицу времени (управление). Управление удовлетворяет ограничениям:

$$0 \le u_i \le b_i,\ i = 1,2,\ t \in [t_0, T],$$

где $0 \le b_i \le 1,\ i = 1,2$ (максимальная часть отлова жертв и хищников).

Требуется найти оптимальное управление, которое максимизирует прибыль фирмы, выраженную интегралом

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{2} (\rho_i x_i - c_i) u_i(t)\, dt .$$

Здесь $\rho_i, i = 1,2$ - стоимость хищников и жертв, $c_i, i = 1,2$ - стоимость затрат на отлов.

Путём введения дополнительной переменной рассматриваемая система сводится к аффинной системе с терминальным функционалом, где аффинная система – обобщение билинейной динамической системы на случай произвольного стационарного векторного поля сноса. Для полученной системы доказывается, что оптимальное управление лежит на границе множества допустимых управлений.

Утверждение.

Пусть $\tilde{u}$-оптимальное управление в задаче «хищник-жертва» с учётом межвидовой конкуренции. Тогда $\tilde{u}$ - существенно граничное управление.

<u>Основные выводы и результаты.</u>

Основным результатом работы является проведение исследования билинейный систем ОУ.

В случае квадратичного терминального функционала были получены:

1) Необходимое условие оптимальности в задаче понтрягинского типа в формулировке А.А. Аграчёва.
2) Достаточное условие оптимальности для задачи ОУ понтрягинского типа в формулировке А.А. Аграчёва общего вида и ряда частных случаев.

3) Исследован вопрос выпуклости функционала задачи, и получен результат для частного случая коммутативных билинейных задач ОУ.

4) Исследована структура множеств достижимости, показана важная связь граничных точек множества достижимости и граничных точек множества допустимых управлений.

5) Получены условия выпуклости множества достижимости для частных случаев билинейных динамических систем ОУ в задаче понтрягинского типа в формулировке А.А. Аграчёва.

В целом, вопросы, связанные с нелинейными системами оптимального управления на текущий момент исследованы не в достаточной мере. Это связано со сложностью изучения данных систем классическими методами вариационного исчисления. По мнению автора, можно отметить два наиболее перспективных подхода к исследованию данных систем: геометрический подход на основе хронологического исчисления и исследование алгебр Ли соответствующих билинейных и аффинных динамических систем ОУ. Необходимы исследования в отношении синтеза оптимального управления для билинейных и аффинных динамических систем, рассмотрение билинейных динамических систем с функционалами общего вида, рассмотрение вопросов выпуклости множества достижимости для аффинных задач в общем виде.

Результаты исследований по теме диссертации опубликованы автором в следующих работах:

1) Бобровский Д.И. Исследование ранговых свойств билинейных систем и структуры множества достижимости. Труды института системного анализа РАН. Под. Ред. Ю.С. Попкова. Т.32(3). М.: Изд. ЛКИ, 2008, с.8-14

2) Бобровский Д.И. Исследование свойств билинейных систем оптимального управления. Труды института системного анализа РАН. Под. Ред. Ю.С. Попкова. Т.32(3). М.: Изд. ЛКИ, 2008, с.14-19.

3) Бобровский Д.И. Задача билинейного оптимального управления. Сборник трудов XII Всероссийской школы-семинара «Современные проблемы математического моделирования». Ростов-на-Дону, изд. Южного федерального университета, 2007, с.48-55

4) Бобровский Д.И. Исследование коммутативных билинейных систем с квадратичным функционалом. Тезисы докладов XVII Всероссийской конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам" памяти К.И.Бабенко, Дюрсо. 2008. с. 47-51.