

На правах рукописи

Гришенков Тимофей Евгеньевич

**РАСЧЕТ ПРОГРАММНЫХ ТРАЕКТОРИЙ И ЗАДАЧА
СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ**

Специальность 05.13.01 – «Системный анализ, управление
и обработка информации» (промышленность)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Научный руководитель:

Северцев В. Н., д. т. н.

Официальные оппоненты:

Дружинина О. В., д. ф.-м. н., проф.

Назаренко К. М., к. ф.-м. н.

Ведущая организация

Учреждение российской академии наук

Центральный экономико-математический институт (ЦЭМИ) РАН

Защита диссертации состоится 16 декабря 2010 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д002.017.03 при Учреждении российской академии наук Вычислительном Центре им. А.А. Дородницына РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40 в конференц-зале.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Вычислительного Центра им. А.А. Дородницына РАН

Автореферат разослан «__» _____ 2010 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

кандидат физико-математических наук



Мухин А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Проблема повышения качества и безопасности управления сложными техническими системами в настоящее время становится всё более актуальной вследствие усложнения, повышения качества систем управления в смысле точности и оперативности обработки поступающей информации. В этой области нельзя не отметить работы Шлейера Г. Э., Афанасьева В.Н., Головина В. И., Антоненко В. А., Бернштейна С. И., Лубкова А. В., Сиркен А. Б. и других авторов.

Предложенные методы синтеза регулятора имеют универсальный характер и могут применяться для оптимального управления различными техническими объектами в промышленных комплексах, а также морскими и речными подвижными объектами, летательными аппаратами.

Цель работы.

1. Разработать эффективные алгоритмы для расчета программных траекторий в режиме реального времени для задач оптимального управления в линейных нестационарных системах.
2. Предложить решение задачи синтеза нестационарного линейного регулятора выхода, исключаящее трудоемкую процедуру решения уравнения Риккати.
3. Проиллюстрировать эффективность методики на примере ряда задач оптимального управления из области судовождения.

Методы исследования.

1. Схема Дубовицкого-Милютин. Задача Понтрягина. Схема Блисса-Больша-Майера.
2. Численные методы интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений явными схемами.
3. Оптимальное управление с обратной связью.
4. Задача синтеза нестационарного регулятора выхода.
5. Методы решения краевых задач для расчета программных траекторий.

6. Вычислительные эксперименты с математическими моделями.

Научная новизна.

1. Разработана новая методика численного решения задачи синтеза нестационарного линейного регулятора выхода, исключающая процедуру решения уравнения Риккати.
2. Предложены новые численные методы интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений и сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при производной.

Обоснованность научных положений.

1. Корректное использование известных положений и теорем: принципа максимума, аналитических методов исследования, теоремы Лакса-Рябенского.
2. Обоснование новых методов синтеза базируется на доказанных теоремах, а также на модельных экспериментах на ЭВМ.

Практическая ценность.

1. Предложенные методы имеют универсальный характер и могут применяться для широкого круга научно-исследовательских и прикладных задач в области численных методов и в задачах синтеза оптимального управления.
2. Разработанный метод позволяет значительно повысить скорость обработки данных в автоматизированных системах управления. В частности, данная методика использована в автоматизированной системе управления судном и показала свою эффективность при управлении в режиме реального времени.
3. Разработанная методика была реализована в пакете прикладных программ, который может использоваться для практических расчетов для управления сложными техническими системами на промышленных предприятиях.

Апробация работы и публикации. Результаты работы докладывались на научных конференциях ИСА РАН, МФТИ, ВЦ РАН, ИПМ РАН, ИПУ РАН, ЦЭМИ РАН, а также на международных конференциях.

По теме диссертационной работы имеется 5 публикаций, общим объемом 2.3 п.л., в том числе 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК России, объемом 1,5 п.л. В статьях с соавторами автору принадлежит 50% материалов.

Личный вклад. Все приведенные результаты диссертации получены автором самостоятельно, а в совместных работах принадлежат их авторам в равных долях.

Структура и объем работ.

Текст диссертации состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 108 наименований. Диссертация содержит 118 страниц машинописного текста, 4 иллюстрации, 9 таблиц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе проводится обзор аналитических моделей движения различных типов судов, методов решения задач оптимального управления движением морских и речных судов, а также приводятся постановки задач оптимального управления движением судна с использованием авторулевых.

Задача 1. Разворот судна на заданный курс за минимальное время.

Уравнения движения судна в горизонтальной плоскости в связанной с судном системе координат можно представить в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_y \\ \omega \\ \varphi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ \omega \\ \varphi \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta + \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

где v_y – скорость бокового сноса судна, часто вместо v_y рассматривают угол дрейфа β , который определяется по формуле $\sin \beta = v_y / v$;

y – боковой снос, ω – угловой снос, φ – курс судна, δ – угол перекадки руля, F – возмущающая сила, M – возмущающий момент, $t \in [0, T]$, T – время разворота судна.

При этом критерий оптимального управления

$$T \rightarrow \min. \quad (1.2)$$

В системе (1.1) отсутствует уравнение сил в продольном движении, так как обычно скорость движения судна принимается постоянной ($v_x = \text{const}$), и отсутствуют уравнения моментов в продольной и поперечной плоскостях, так как часто пренебрегают воздействием крена и дифферента на динамику движения в горизонтальной плоскости.

Граничные условия для данной задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(T) &= 0, \quad \varphi(T) = \varphi_1, \\ \delta_{\min} &\leq \delta \leq \delta_{\max}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

При этом $\dot{v}_y(T)$, $\dot{y}(T)$, $v_y(T)$, $y(T)$ – произвольные.

Задача 2. Разворот судна на заданный курс за минимальное время без учета бокового сноса.

При исследовании только углового движения судна система (1.1) может быть представлена системой дифференциальных уравнений 3-го порядка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_y \\ \omega \\ \varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ \omega \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \delta + \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}, \\ t &\in [0, T], \quad T \rightarrow \min \end{aligned} \quad (1.4)$$

Граничные условия в этом случае совпадают с условиями (1.3), при этом $v_y(T)$ произвольно.

Задача 3. Прохождение судна по фарватеру за минимальное время.

Рекомендуемая траектория движения по фарватеру является ломаной линией, и потому рекомендуемый курс судна в функции времени является разрывной функцией с точками разрыва в моменты перехода от одного створа к другому. Эти точки можно считать распределенными по закону Пуассона, и, следовательно, корреляционная функция процесса изменения курса $z(t)$ будет равна

$$K_z(\tau) = D_z e^{-\alpha \tau}, \quad (1.5)$$

где D_z – дисперсия, зависящая от степени извилистости фарватера; значение коэффициента α , выраженное в единицах в секунду, зависит от фарватера и от скорости судна.

Для речных судов значение моментов сил, сбивающих судно с курса, невелико, и главная задача авторулевого заключается в отслеживании задаваемой программы изменения курса $z(t)$. Уравнение движения речного судна может быть записано в виде

$$A(D)y = u + \varphi(t), \quad (1.6)$$

где $A(D)$ – передаточная функция судна; y – текущее значение угла курса; возмущающее воздействие $\varphi(t)$ для речных судов может быть принято равным нулю; управление u допустимо в границах $u_1 \leq u \leq u_2$; $t \in [0, T]$, при этом $T \rightarrow \min$.

Граничные условия на угол курса могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_1, \\ y(T) &= y_2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где y_1, y_2 заданы.

Задача 4. Задача успокоения качки судна.

Известно, что качка судна существенно ухудшает условия его эксплуатации, и это ухудшение тем значительнее, чем больше интенсивность качки. Поэтому на судах широко применяются различные устройства, уменьшающие качку. Одним из наиболее совершенных устройств являются управляемые бортовые рули. Силы, действующие на эти рули, создаются набегающим потоком воды при движении судна. За счет поворота рулей достаточно быстродействующим приводом создается переменный во времени момент сил, действующих на судно со стороны рулей и направленный противоположно моменту сил, вызывающих бортовую качку.

Уравнение бортовой качки судна, снабженного рулями успокоителями, для малых углов качки может быть записано в виде

$$(T_1^2 D^2 + T_2 D + 1)\theta = u + \varphi(t), \quad (1.8)$$

где T_1 и T_2 – постоянные времени в секундах; θ – текущее значение угла крена; $u(t)$ – момент рулей-успокоителей, измеряемый в градусах угла крена, создаваемого ими; $\varphi(t)$ – угол эффективного волнового склона в градусах, являющийся в данном случае возмущающим воздействием; $t \in [0, T]$.

Граничные условия на угол крена можно записать следующим образом:

$$\theta_1 \leq \theta(T) \leq \theta_2, \quad (1.9)$$

при этом $T \rightarrow \min$.

Во второй главе приводятся различные постановки задач принципа максимума. Сначала формулируется задача Понтрягина:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t), K(p) = 0, p = (x(t_0), x(t_1), t_0, t_1), \\ u &\in R, x \in E^n, u \in E^r, f \in E^n, t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь R – произвольное множество пространства u ; x – фазовый вектор; u – вектор управления. Правая часть $f(x, u, t)$ непрерывно дифференцируема по переменным x и t и непрерывна по управлению, $K(p)$ – гладкая функция от p ; функционал $J(p)$ – выпуклый по p . Рассмотрение поставленной задачи (2.1) в классе игольчатых вариаций приводит к известному принципу максимума Понтрягина Л.С. Минимум ищется в классе всех ограниченных измеримых по Лебегу функций $u(t), t_0, t_1$. При этом $x(t)$ будет абсолютно интегрируемой функцией.

Необходимо заметить, что принцип максимума Понтрягина Л.С. был доказан для задачи с интегральным функционалом и фиксированными начальными и краевыми условиями.

Формулируется также задача Бласса-Больца: требуется найти $\min_{u \in V(x, t)} J(p)$ при наличии следующих ограничений:

$$x = f(x, u, t), \quad K(p) = 0, \quad p = (x(t_0), x(t_1), t_0, t_1), \quad x \in E^n,$$

$$g(x, u, t) = 0, \quad \Phi(x, u, t) \leq 0,$$

$$V(x, t) = \{u|_{g=0}, \Phi \leq 0\}, \quad u \in E^r,$$

где J, f, K, g, Φ – гладкие функции по совокупности своих аргументов; $J, f, K, g, \Phi \setminus G$, где G – некоторое открытое множество пространства x, u, t, p ; запись $\Phi \setminus G$ означает, что G является областью определения Φ ; ограничения $\Phi \leq 0, g = 0$ – независимые; независимость ограничений означает, что в каждой точке x, u, t , для которых эти ограничения выполнены, градиенты $g'_{iu}, \Phi'_{ku}, K \in j(x, u, t)$ линейно независимы; $j(x, u, t)$ – множество активных индексов. Активным индексом точки x, u, t $u \in V(x, t)$ называется число j , для которого выполнено соотношение $\Phi_j(x, u, t) = 0$; на поверхности $g = 0$ ранг $g'_u = \dim g = r_1 \leq r$, размерность Φ – любая; минимум ищется в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$.

Приводится также постановка канонической задачи Дубовицкого-Милютина: найти $\min J(p)$, если выполнены следующие ограничения

$$\dot{x} = f(x, u, t), K(p) = 0, \varphi(p) \leq 0, p = (x(t_0), x(t_1), t_0, t_1)$$

$$g(x, u, t) = 0, g = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}, \Phi_i(x, u, t) \leq 0, \quad i \leq M,$$

$$u = (u_1, u_2), u_i \in E^{K_i}, i = 1, 2; \quad u_2 \in R$$

где R — произвольное множество пространства E^{K_2} , μ — любое натуральное число, $f = \{f_1, \dots, f_n\}$, $x \in E^n$, $t \in [t_0, t_1]$.

Предположения, при выполнении которых производится вариационное исследование задачи A : функции $f(x, u, t), K(p), g(x, u, t)$ и их частные производные по x, u, t непрерывны по всем своим аргументам в некоторой окрестности поверхности $K = 0, g = 0$. Ранг $g'_{u_1} = \dim g \leq K_1$ для всех точек поверхности $g = 0$. Функции J, φ, Φ — локально выпуклые по x, u_1, p, t , размерность вектор-функции $\varphi = \{\varphi_i\}$ — любая. Траектория $x_0(t), u_0(t), t_0, t_1$, исследуемая на экстремум, — измеримая и ограниченная. Непосредственно усматривается, что каноническая задача объединяет Понтрягинскую и Блиссовские постановки.

Ответ формулируется в виде интегрального принципа максимума Π_0 в регулярном случае. Также указывается класс задач оптимального управления, сводящихся к канонической задаче Дубовицкого-Милютина. Кроме того, приводится каноническая задача Дубовицкого-Милютина с непрерывной зависимостью от времени при фиксированном правом конце по t .

В третьей главе предлагаются явные численные методы интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений и сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при производной, а также новые методы синтеза систем с обратной связью с квадратичным критерием качества для линейных систем.

Методы интегрирования жестких систем

Метод экспоненты

Рассмотрим две задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad f \in \mathbb{R}^1, \quad (3.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(y, t), \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad g \in \mathbb{R}^1, \quad (3.2)$$

Применяя явный метод Эйлера к системам (3.1) – (3.2), получим

$$x_{n+1} = x_n + (y_{n+1} - y_n) \frac{f_n}{g_n}, \quad f_n = f(x_n, t_n), \quad g_n = g(y_n, t_n), \quad (3.3)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n g_n - y_n f_n}{g_n} + y_{n+1} \frac{f_n}{g_n}. \quad (3.4)$$

Положим $x_n = y_n$, $f_n = g_n$, $\dot{y} = -\lambda_n y$, $\lambda_n > 0$. Отсюда, согласно (3.4), имеем

$$x_{n+1} = y_{n+1} \frac{f_n}{g_n} = \frac{y_{n+1} f_n}{-\lambda_n y_n} = -\frac{f_n \exp(-\lambda_n t_{n+1})}{\lambda_n \exp(-\lambda_n t_n)}. \quad (3.5)$$

С учетом равенства (3.5) и $g_n = -\lambda_n y_n$, $y_n = x_n$ получаем

$$x_{n+1} = x_n \exp\left(\frac{f_n}{x_n} \Delta t\right), \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n. \quad (3.6)$$

Замечание 1. В случае сложной правой части (3.1) при $x_n \rightarrow 0$ полагаем

$$z = 1 + x, \quad \dot{z} = \dot{x}.$$

Замечание 2. Формула (3.6) применима также к системе уравнений типа (3.1)

при $x \in \mathbb{R}^k$, $f \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^k$, $g \in \mathbb{R}^k$.

Метод Рунге-Кутты

Для численного интегрирования задачи (3.1) часто применяют метод Рунге-Кутты четвертого порядка. В целях простоты изложения рассмотрим одну из распространенных явных схем

$$\begin{aligned}
R_4[f_n] &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad x_{n+1} = x_n + R_4[f_n], \\
k_1 &= f(x_n, t_n) \Delta t, \quad k_2 = f(x_n + 0,5k_1, t_n + 0,5\Delta t) \Delta t, \\
k_3 &= f(x_n + 0,5k_2, t_n + 0,5\Delta t) \Delta t, \quad k_4 = f(x_n + k_3, t_n + \Delta t) \Delta t.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Для каждого приближения в систему (3.7) введем параметр α_n из условия

$$x_{n+1} = x_n + R_4[f_n] \alpha_n \frac{x_{n+1}}{x_n}, \quad \frac{\alpha_n x_{n+1}}{x_n} = 1.$$

В результате получим

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n - R_4[f_n] \alpha_n}, \quad \alpha_n = \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Окончательно имеем

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3}{x_n^2 - R_4[f_n] x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x(0) = x_0. \tag{3.8}$$

Для $n = 1$ значение x_1 можно получить по формуле (3.6).

Замечание 3. Схему типа (3.8) можно также применить и к системе дифференциальных уравнений.

Сингулярно возмущенные уравнения

Рассмотрим систему из двух уравнений

$$\dot{y} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{x} = g(x, y), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.9}$$

Система (3.9) является жесткой при малых значениях параметра ε .

К системе (3.9) применим схемы (3.7), (3.8). В результате получим

$$y_{n+1} = y_n + R_4[f_n], \quad x_{n+1} = \frac{\varepsilon x_n^3}{\varepsilon x_n^2 - R_4[g_n] x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.10}$$

Основная трудность при применении формул (3.10) состоит в оценке x_1 (x_0 — задано).

Для получения упомянутой оценки рассмотрим следующую систему:

$$\varepsilon \dot{x} = g(x, y), \quad \varepsilon \dot{z} = h(z) = -az^2, \quad a > 0, \quad z(0) = z_0 \neq 0. \quad (3.11)$$

Применяя к системе (3.11) явный метод Эйлера, получим

$$x_1 = x_0 + (z_1 - z_0) \frac{g(x_0, y_0)}{-az_0^2}. \quad (3.12)$$

Интегрирование уравнения $\varepsilon \dot{z} = -az^2$ приводит к результату

$$\frac{1}{z} = \frac{at}{\varepsilon} + c, \quad c = \frac{1}{z_0}, \quad z = \frac{\varepsilon z_0}{\varepsilon + atz_0}, \quad z_1 = \frac{\varepsilon z_0}{\varepsilon + a\Delta t u_0}, \quad \Delta t = t_1. \quad (3.13)$$

Из (3.12), (3.13) следует

$$x_1 = x_0 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + a\Delta t z_0} - 1 \right) \frac{g(x_0, y_0)}{-az_0} = x_0 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + a\Delta t z_0} \right) \frac{g(x_0, y_0)}{az_0}. \quad (3.14)$$

Примечание. В формуле (3.10) y_1 вычисляется по формуле

$$y_1 = y_0 + R_4[f_0].$$

Замечание 4. Формула (3.14) позволяет рассматривать произвольно число сингулярных уравнений с различными малыми параметрами.

Линейная задача и метод решения

Рассмотрим задачу

$$J = \int_{t_0}^T (\vec{x}^T Q \vec{x} + \vec{u}^T R \vec{u}) dt \rightarrow \min_{\vec{u}(t) \in U} \quad (3.15)$$

при условиях

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + B(t)\vec{u} + H(t), \quad (3.16)$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (3.17)$$

Будем считать фазовые координаты n -мерными векторами $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, управление $\vec{u}(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$. Матрицы Q , R неотрицательно определенные для любого $t \in [t_0, T]$: $Q(t) \geq 0$, $R(t) \geq 0$. Для решения задачи синтеза оптимальной системы с обратной связью (3.15) поделим отрезок $[t_0, T]$ на отрезки вида $[t_1, t_2]: |t_2 - t_1| < \varepsilon_0$. Величина ε_0 характеризует точность приближенных решений задачи. Рассмотрим отрезок $[t_1, t_2]$, предполагая, что задача решена описанным ниже методом для всех предшествующих интервалов. Пусть $t \in [t_1, t_2]$. Поскольку подынтегральное выражение в (3.15) неотрицательное, может быть применен следующий метод решения. Положим $\vec{x}(t_1) = \vec{x}_1$. Изменим условие (3.16) на интервале $[t_1, t_2]$ на приближенное соотношение

$$\dot{\vec{x}}(t) = U(t)\vec{u}(t) + V(t). \quad (3.18)$$

Для того чтобы найти вектор $V(t)$, примем $u(t) \equiv 0$ и решим вспомогательное уравнение

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + H(t), \quad \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1. \quad (3.19)$$

В результате получим решение $\vec{x}(t) \equiv V(t)$.

Для расчета i -го столбца $\vec{u}_i(t)$ матрицы $U(t)$ решим вспомогательное уравнение

$$\dot{\vec{u}}_i = A(t)\vec{u}_i + B(t)\vec{\omega}_i + H(t), \quad \vec{u}_i(t_1) = \vec{x}_1, \quad (3.20)$$

делая замену $\vec{\omega}_i = \vec{e}_i$, где $\vec{e}_i$ — i -й орт.

Далее подставим (18) в (15) и получим легко решаемую задачу:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{u}^T U^T Q \vec{x} + \vec{u}^T R \vec{u}) dt \rightarrow \min_{\vec{u}(t) \in U}.$$

Если $U = \mathbb{R}^m$, то оптимальная система с обратной связью будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{u}(t) = -\frac{1}{2}(R^{-1})^T U^T Q \vec{x}(t). \quad (3.21)$$

Проверка приближения метода

Определение 1. Решение $u^{(\varepsilon)}$ приближенной задачи $L_\varepsilon u = f^{(\varepsilon)}$ приближает точное решение $[u]_\varepsilon$ задачи $Lu = f$ в степени k , если $L_\varepsilon[u]_\varepsilon = f^{(\varepsilon)} + \delta f^{(\varepsilon)}$, где $\|\delta f^{(\varepsilon)}\| \leq C \varepsilon^k$.

Лемма 1 (о локальной аппроксимации управления). Для задачи (3.15) – (3.17) на интервале $[t_1, t_2]$ оценка

$$\|u^{**} - u^*\| \leq C |t_2 - t_1| \quad (3.22)$$

верна. При этом u^* удовлетворяет соотношению (3.21), u^{**} – точное решение задачи (3.15) – (3.17) на интервале $[t_1, t_2]$, C – определенная постоянная.

Рассмотрим возможность расширения применения Леммы 1 на общую задачу: с интервала $[t_1, t_2] \subset [t_0, T]$ на интервал $[t_0, T]$.

Лемма 2 (о локальной аппроксимации фазовых координат). При условиях Леммы 1 оценка

$$\|x^{**} - x^*\| \leq C (t_2 - t_1)^2 \quad (3.23)$$

верна.

Теорема 1 (о глобальной аппроксимации управления). При условиях Леммы 1 метод сходится к точному решению задачи (3.15) – (3.17), то есть $\forall \varepsilon, \forall t_1, t_2 : |t_2 - t_1| = \varepsilon$

$$\sup_{t \in [t_0, T]} |\vec{u}^*(t) - \vec{u}^{**}(t)| \leq C |t_2 - t_1|. \quad (3.24)$$

Устойчивость и сходимость

Определение 2. Решение $u^{(\varepsilon)}$ аппроксимирует задачу $L_\varepsilon u = f^{(\varepsilon)}$ и сходится к решению $[u]_\varepsilon$ задачи $Lu = f$ с k -ой степенью ε , если $\|[u]_\varepsilon - u^{(\varepsilon)}\| \leq C \varepsilon^k$.

Определение 3. Задача устойчива, если

$$\exists \delta, \varepsilon_0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \forall \delta f^{(\varepsilon)} : \|\delta f^{(\varepsilon)}\| \leq \delta L_\varepsilon u^\varepsilon = f^{(\varepsilon)},$$

$$L_\varepsilon z^\varepsilon = f^{(\varepsilon)} + \delta f^{(\varepsilon)} : \|z^\varepsilon - u^\varepsilon\| \leq C \|\delta f^{(\varepsilon)}\|.$$

Лемма 3. Метод, описанный в данном разделе, устойчивый. То есть

$$\exists \delta, \varepsilon_0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \forall \delta f^{(\varepsilon)} : \|\delta f^{(\varepsilon)}\| \leq \delta L_\varepsilon (u^*) x^\varepsilon = f^{(\varepsilon)},$$

$$L_\varepsilon (u^{**}) x^\varepsilon = f^{(\varepsilon)} + \delta f^{(\varepsilon)} : \|u^{**} - u^*\| \leq C \|\delta f^{(\varepsilon)}\|.$$

Пользуясь теоремой Лакса-Рябенского, из Леммы 3 и Теоремы 1 можно сформулировать следующую теорему для задач вида (3.15) – (3.17).

Теорема 2. Приближенное решение, полученное с помощью описанного метода с использованием явных разностных схем, сходится к точному решению задачи (3.15) – (3.17).

Связь с уравнением Риккати

Для оптимального стационарного регулятора найдем функцию Беллмана в форме [4, стр. 331] $s(x) = x^* K x$, где K – постоянная положительно определенная матрица, определяемая из алгебраического уравнения Риккати $-K A_1 A_1^* K + K B_1 R^{-1} B_1^* K - Q = 0$. В этом случае оптимальное управление может быть рассчитано по формуле

$$u_0(x) = -R^{-1} B_1^* K x. \quad (3.25)$$

Приравнявая управления, определенные уравнениями (17) и (20) из [5], получим

$$2K B_1^* K = Q A_0^* + 2F A_1 A_0^* + 2F B_1^*. \quad (3.26)$$

Для нестационарной задачи оптимальное управление может быть представлено следующим образом [4, стр. 329]:

$$u_0(x, t) = -\left(R^{-1}B_1^*Kx + 0.5R^{-1}B_1^*P\right), \quad (3.27)$$

где симметричная матрица K ($K \in \mathbb{R}^{n \times n}$) и вектор P ($P \in \mathbb{R}^n$) могут быть найдены из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{K} &= -KA_1 - A_1K + KB_1R^{-1}B_1^*K - Q, \\ \dot{P} &= KB_1R^{-1}B_1^*P - A_1^*P - 2KH_1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

и граничных условий

$$K(t_1) = F^*, \quad P(t_1) = 0. \quad (3.29)$$

Из соотношений (15) и (22) из [4] следует, что

$$B_1^*P = 2FA_0^*H_1, \quad 2B_1^*K = QA_0^* + 2FA_1A_0^* + 2FB_1^*. \quad (3.30)$$

Это следует из существования и единственности решения задачи синтеза оптимального нестационарного линейного регулятора.

Выводы

1. Разработана методика синтеза программных траекторий для задач оптимального управления для нестационарных линейных систем.
2. Решена новая задача синтеза оптимального регулятора для нестационарных систем с обратной связью и квадратичным критерием качества для линейных систем.
3. В работе представлены постановки модельных задач оптимального управления судном с учетом фазовых ограничений.
4. В работе получены явные численные методы интегрирования жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений и сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при производной.
5. Проведено обоснование предложенных методов.
6. Приведены численные примеры расчета прикладных задач судовождения.

Литература к реферату:

1. R. Gabasov, F. M. Kirillova, P. V. Gaishun, and S. V. Prischepova, J. of Control and Information Theory, 20(6), 409-427 (1991).
2. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б., Оптимальное управление при случайных возмущениях, Москва, 1978.
3. The Riccati Equation, Ed. by S. Bittanti, A. J. Laub, and C. Willems, Springer-Verlag (1991).
4. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. Пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 464 с.
5. V.V. Dikumar, A.V. Zubov, Optimal control of feed-back systems. (Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Evolution, control and stability of dynamical systems. Wydawnictwo WSFiZ, Siedlice, 2009, p. 65)

Основные публикации:

1. T. Grishenkov, V. Koska, A. Figura A problem of optimal feedback system synthesis. Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Evolution, control and stability of dynamical systems. Wydawnictwo WSFiZ, Siedlice, 2009, p. 104
2. Гришенков Т.Е. Задачи оптимального управления движением судна. Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем / Под редакцией Ю.С. Попкова. Т. 42 (2). –М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 220 с., с. 11–15.
3. Дикусар В. В., Гришенков Т.Е. Численные методы интегрирования жестких систем явными схемами. Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем / Под редакцией Ю.С. Попкова. Т. 42 (2). –М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 220 с., с. 147–155.
4. Гришенков Т.Е. Решение задачи оптимального управления на примере модели «хищник-жертва». (Труды ИСА РАН. Динамика нелинейных систем. 17(1), - Спб. «Мобильность плюс», 2005, 275 с.), с. 256 – 263

5. *T.E. Grishenkov*. Implementation of the computer algebra methods in the solution of optimal control problem on the example of the "predator-prey" model. (Fourth International Workshop on Computer Algebra Systems in Teaching and Research (CASTR'2007), Siedlice, Poland, January 31 – February 3, 2007), c. 175 – 182