

На правах рукописи

Поспелов Алексей Игоревич

**Методы многокритериальной целочисленной
оптимизации, основанные на аппроксимации
границы Парето**

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Лотов Александр Владимирович

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Сигал Израиль Хаимович

кандидат физико-математических наук,
доцент
Морозов Владимир Викторович

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Центральный экономико-математический
институт РАН

Защита состоится “___” _____ 2010 года в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 002.017.04 Учреждения Российской академии наук Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН по адресу: 119333 Москва, улица Вавилова, дом 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан “___” _____ 20__ года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор

Новикова Н. М.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. При моделировании сложных систем важным моментом является оценка стратегий с точки зрения различных критериев. При большом числе решений сравнение их критериальных оценок и выбор подходящего решения становится крайне трудной задачей для лица, принимающего решение (ЛПР). Важную роль в таких случаях играют методы поддержки принятия решений, основанные на многокритериальной оптимизации.

Одним из основных подходов, используемых в многокритериальной оптимизации, является аппроксимация границы Парето множества достижимых критериальных точек (т.е. множества всех недоминируемых по Парето критериальных точек) и представление этой информации ЛПР (работы академика П. С. Краснощёкова и его учеников В. В. Морозова, Н. М. Попова, В. В. Федорова и других, а также иностранных специалистов М. Зелены, Р. Штойера, По-лунг Ю). Как показывает практика, наиболее удобным способом представления информации о границе Парето является ее визуализация. Такой подход развивается исследованиях многокритериальных задач школы академика А. А. Петрова, проводимых под руководством А. В. Лотова и Г. К. Каменева. Для реализации подобного подхода при более чем двух критериях необходимо предварительно решать задачу аппроксимации многомерной границы Парето в форме, удобной для последующей визуализации. В зависимости от структуры задачи для этого применяются разные методы. Так, для непрерывных задач были разработаны методы, основанные на аппроксимации множества достижимых критериальных точек с помощью относительно простых фигур (многогранников, объединения конечного числа конусов и т.д.).

В прикладных задачах множество допустимых решений часто является дискретным. Такая ситуация встречается, например, в транспортных задачах, задачах составления расписаний, телекоммуникационной маршрутизации, зада-

чах планирования инвестиций и производства и многих других задачах. В настоящей диссертационной работе рассматривается случай, когда множество решений является подмножеством целочисленного куба. К такому случаю могут быть сведены многие прикладные задачи дискретные оптимизации.

Проблема поиска или аппроксимации множества решений, эффективных по Парето, и соответствующей совокупности критериальных точек в многокритериальных дискретных задачах изучалась ранее в работах И. Х. Сигала, И. И. Меламеда, М. Эргодта. Был предложен широкий спектр методов, использующих комбинаторную специфику рассматриваемых задач или сведение их к решению серии однокритериальных задач оптимизации, для каждой из которых можно найти решение.

В ряде прикладных задач дискретной оптимизации (в том числе многокритериальных) возникает необходимость решать комбинаторные задачи, которые не относятся к изученным классам. К таким задачам, в частности, относятся проблемы, в которых модель задана вычислительным модулем с закрытым кодом (черным ящиком), предоставляющим возможность только для расчета значений критериев по заданным решениям. В подобных случаях можно применять, например, методы случайного поиска и методы, основанные на термодинамических и биологических аналогиях. Для многокритериальных дискретных задач эти методы получили развитие в работах К. Деба, Е. Цитцлера и его коллег. В указанных методах число критериев не превосходит двух или трех, а оценки точности аппроксимации границы Парето отсутствуют (обычно качество алгоритма оценивается на основе сравнения аппроксимации с заранее известной точной границей Парето, которую удастся построить лишь в простейших случаях), так что эти методы, по существу, являются эвристическими.

Эффективным подходом к решению задач многокритериального выбора из конечного числа вариантов (альтернатив) является метод разумных целей

(МРЦ), разработанный А. В. Лотовым и Д. В. Гусевым. МРЦ основан на сведении многокритериальной задачи выбора к анализу границы Парето выпуклой оболочки критериальных точек — образов рассматриваемых альтернатив. В рамках МРЦ происходит визуализация границы Парето этой выпуклой оболочки (или более простого множества — оболочки Эджворта-Парето выпуклой оболочки), на которой ЛПР выбирает цель, отвечающую его интересам; далее компьютер находит оптимальные по Парето альтернативы, результаты выполнения которых близки к цели, выбранной ЛПР. Практическое использование МРЦ продемонстрировало его удобство при поддержке многокритериального выбора из конечного, но относительно небольшого числа альтернатив при числе критериев от трех до восьми. Ограничение на применение МРЦ по числу альтернатив обусловлено необходимостью их явного представления в критериальном пространстве, что оказывается затруднительным для большого числа альтернатив.

Сказанное выше обосновывает актуальность разработки новых методов, которые применимы к широкому спектру задач дискретной многокритериальной оптимизации, характеризующихся более чем двумя критериями и большим числом альтернатив, причем позволяют оценивать точность аппроксимации границы Парето.

Цель диссертационной работы. Целью данной диссертации является построение и изучение методов, обобщающих МРЦ на задачи многокритериальной целочисленной оптимизации, характеризующиеся большим числом альтернатив, в том числе заданных вычислительным модулем типа черного ящика.

Методы исследований. В работе используется математический аппарат теории дискретной оптимизации, теории многокритериальной оптимизации и теории адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел.

Достоверность полученных результатов подтверждена доказательствами теорем, экспериментальной проверкой алгоритмов и программ на модельных и реальных данных.

Научная новизна. Предложены два метода решения целочисленных задач многокритериальной оптимизации с монотонными критериями и ограничениями, являющиеся обобщениями МРЦ. Предложенные методы позволяют работать с задачами, в которых исходный МРЦ уже неприменим из-за слишком большого числа альтернатив. Первый из предложенных методов — метод квазиразумных целей, основанный на аппроксимации оболочки Эджворта-Парето релаксированной задачи. Метод может быть использован в том случае, когда критерии и ограничения заданы явно. Второй — метод разумных целей, основанный на непосредственной полиэдральной аппроксимации оболочки Эджворта-Парето выпуклой оболочки множества достижимых критериальных векторов. Метод применим в том случае, когда модель задана в виде черного ящика.

Предложена и изучена схема наполнения, являющаяся обобщением известных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел; полученные результаты использованы для теоретической оценки скорости сходимости метода полиэдральной аппроксимации оболочки Эджворта-Парето выпуклой оболочки критериальных векторов целочисленной задачи оптимизации.

Практическая ценность работы. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для поддержки принятия решений в проблемах, моделируемых целочисленными многокритериальными задачами с монотонными критериями и ограничениями. В диссертации разработанные методы применены в рамках двух проектов улучшения качества воды в больших и малых реках с

числом допустимых альтернатив до 10^{32} и числом критериев до пяти.

Апробация работы прошла на следующих научных конференциях: на Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам “Ломоносов-2004”, секция “Вычислительной математики и кибернетики” (Россия, Москва, 12–15 апреля 2004), на 4-й Московской международной конференции по исследованию операций (Россия, Москва, 21–24 сентября 2004), на XIII Байкальской международной школе-семинаре “Методы оптимизации и их приложения” (Россия, Северобайкальск, 2–8 июля 2005), на 7-й Международной конференции, посвященной многокритериальной оптимизации и целевому программированию (Франция, Тур, 12–14 июня 2006), на V Московской международной конференции по исследованию операций (Россия, Москва, 10–14 апреля 2007), на Всероссийской конференции ЭКОМОД (Россия, Киров, 6–12 июля 2009).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ, в том числе 3 статьи в журналах из списка ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа объемом 150 страниц состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка. Библиографический список содержит 89 источников, из них 37 на иностранных языках.

Содержание работы

Во введении приведены основные понятия многокритериальной оптимизации, используемые в работе, обоснована актуальность рассматриваемой проблемы, введен класс исследуемых в работе задач многокритериальной целочисленной оптимизации, описаны основные особенности МРЦ, приведены важ-

нейшие результаты теории и методы полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел, дано краткое описание диссертации по главам.

Математическая задача целочисленной многокритериальной оптимизации, рассматриваемая в диссертационной работе, формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \\ x &\in X = \{x \in X_0 | w_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $X_0 = \{0, 1 \dots K\}^n$ — целочисленный куб, $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — векторнозначная функция, задающая критерии оценки альтернатив, $w(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ — набор функций, используемых для описания ограничений. Рассматривается случай монотонных критериев, часто встречающийся в прикладных исследованиях — предполагается, что

$$f(\cdot) = (u(\cdot), v(\cdot)),$$

где $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — такие векторнозначные функции, что $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^t$ и $v(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-t}$ для некоторого целого t , $0 \leq t \leq m$, и при этом u и v монотонны в следующем смысле:

$$\begin{aligned} &\text{для } x'_s \geq x''_s, s = 1, 2, \dots, n, \text{ имеем} \\ &u_i(x') \geq u_i(x''), i = 1, 2, \dots, t, \text{ и } v_j(x') \leq v_j(x''), j = 1, 2, \dots, m - t. \end{aligned} \quad (2)$$

Кроме того, предполагается, что ограничения также монотонны, т.е.

$$\begin{aligned} &\text{для } x'_s \geq x''_s, s = 1, 2, \dots, n, \text{ имеем} \\ &w_l(x') \leq w_l(x''), l = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (3)$$

В (1) под записью $f(x) \rightarrow \min$ понимается, что желательным является уменьшение каждого частного критерия f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, при прочих равных условиях (задача многокритериальной минимизации). В этом случае говорят, что решение x' **доминирует** x'' **по Парето**, если $f_i(x') \leq f_i(x'')$, $i =$

$1, 2, \dots, m$, и $f(x') \neq f(x'')$. Критериальная точка $f(x')$ называется **оптимальной по Парето**, а соответствующее ей решение $x' \in X$ — **эффективным по Парето**, если не существует решения $x'' \in X$, доминирующего x' по Парето. Множество всех оптимальных по Парето критериальных точек называется границей Парето. Для удобства визуализации границы Парето в работе рассматривается аппроксимация двух объектов: оболочки Эджворта-Парето (ОЭП), которая может быть определена как $Y^* = f(X) + \mathbb{R}_+^m$, и оболочки Эджворта-Парето выпуклой оболочки (ВОЭП) критериальных точек, которая может быть определена как $Y_C^* = \text{conv}(f(X)) + \mathbb{R}_+^m$, где $\mathbb{R}_+^m$ — неотрицательный конус пространства $\mathbb{R}^m$.

В первой главе описаны некоторые классические задачи целочисленной многокритериальной оптимизации, такие как задача о многокритериальном рюкзаке, задача о покрытии, сводящиеся к рассматриваемым в работе монотонным многокритериальным задачам целочисленной оптимизации. Также описаны некоторые задачи экологического и экономического содержания, моделирование которых приводит к задаче (1)-(3). Таким образом, показывается практическая значимость работы.

Во второй главе предложены методы решения задач типа (1)-(3).

В разделе 2.1 описан метод квазиразумных целей (МКРЦ). Метод предполагает, что имеется возможность вычислять значения критериев и ограничений задачи не только на множестве X_0 , но и на более широком множестве $\tilde{X}_0 = [0, K]^n$. В МКРЦ используется вспомогательная релаксированная задача

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min, \quad x \in \tilde{X} \subset R^n, \\ \tilde{X} &= \{x \in R^n \mid w(x_i) \leq 0, \quad 0 \leq x_i \leq K, \quad i = 1, \dots, n\}, \end{aligned} \tag{4}$$

получаемая из (1)-(3) заменой дискретного множества X на непрерывное $\tilde{X}$ и

продолжением на $\tilde{X}$ критериев и ограничений.

В МКРЦ предлагается аппроксимировать ОЭП релаксированной задачи. Так как релаксированная задача (4) непрерывна, для аппроксимации ее ОЭП могут быть использованы методы, разработанные для непрерывных задач: метод уточнения оценок (УО) в выпуклом случае и гибридные методы — в невыпуклом. Построенная аппроксимация визуализируется с помощью диалогового изображения карт решений — совокупностей двумерных сечений аппроксимации ОЭП. ЛПР предлагается указать желаемую цель $\hat{y}$ (называемую квазиразумной) на границе Парето подходящего сечения аппроксимации ОЭП. Далее, аналогично исходному МРЦ, по цели находится множество $\hat{X}$ альтернатив таких, что множество $\hat{Y} = f(\hat{X})$ близко к $\hat{y}$. Для этого требуется разработать метод поиска $\hat{X}$, применимый в случае большого числа альтернатив.

Задача поиска $\hat{X}$ сводится в диссертации к нахождению всех оптимальных по Парето решений многокритериальной задачи

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &\rightarrow \min, \\ x &\in X, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\hat{f}_i(x) = \max \{f_i(x), \hat{y}_i\}$ для $x \in X_0$. В случае когда мощность X_0 велика, задача (5) не может быть решена прямым перебором, поэтому для ее решения в диссертации предлагается использовать метод, основанный на приложении концепции ветвей и границ к многокритериальным задачам с монотонными критериями. При этом предлагается разбивать множество X_0 на подмножества вида

$$X_s^\alpha = \{x \in X_0 | x_j = \alpha_j, j = 1, 2, \dots, s\}, \tag{6}$$

где $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, а $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ — некоторый элемент целочисленного куба $\{0, 1, \dots, K\}^s$. В качестве вектора нижних оценок подмножеств X_s^α пред-

лагается использовать

$$d(X_s^\alpha) = (\hat{u}(x^0(X_s^\alpha)), \hat{v}(x^K(X_s^\alpha))), \quad (7)$$

а в качестве верхних оценок — векторы из множества

$$\Lambda(X_s^\alpha) = \{x^i(X_s^\alpha), i = 0, 1, \dots, K \mid w(x^i) \leq 0\}, \quad (8)$$

где $x^i(X_s^\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, i, \dots, i)$, $i = 0, 1, \dots, K$.

Предлагаемый метод основан на последовательном разбиении множества X_0 на подмножества вида X_s^α , построении оценок для этих подмножеств, выделении альтернатив, являющихся кандидатами на вхождение в $\hat{X}$, сравнении найденных альтернатив и оценок и исключении подмножеств, заведомо не содержащих альтернатив из $\hat{X}$.

В конце раздела 2.1 приводятся результаты применения МКРЦ для прикладной задачи с числом альтернатив порядка 10^{13} и числом критериев от двух до пяти.

Одним из важных классов проблем многокритериальной целочисленной оптимизации являются линейные задачи. В таких проблемах релаксированная задача (4) представляет собой задачу линейной многокритериальной оптимизации. В линейном случае аппроксимация ОЭП осуществляется в МКРЦ с помощью метода УО. В методе УО при $m > 2$ на каждой итерации обычно приходится решать значительное число задач скалярной оптимизации, которые в рассматриваемом случае являются задачами линейного программирования (ЛП). Решение этих задач может быть решено, в частности, с использованием симплекс-метода. В том случае, когда решение каждой задачи ЛП требует существенных вычислительных затрат, для построения достаточно точной аппроксимации ОЭП может потребоваться значительное время. В разделе 2.2 предложена модификация метода УО, предназначенная для уменьшения трудоемкости построения аппроксимации многогранных множеств, в том числе, в

рамках работы МКРЦ, и основанная на следующих соображениях.

Работа симплекс-метода обычно разбивается на два этапа. Первый состоит в поиске допустимой вершины и соответствующего базисного разложения. Второй — в последовательном переходе от одной вершины к другой до тех пор, пока не будет достигнуто оптимальное решение задачи. Поскольку метод УО требует многократного решения задач ЛП на одном и том же многограннике, оптимальные вершины, найденные при решении предыдущих задач ЛП, можно использовать в качестве начальных при решении последующих задач. Идея использования результатов предыдущих вычислений широко применяется при решении задач линейной оптимизации, в том числе и многокритериальных. Так, в работах Р. Штойера и М. М. Смирнова эта идея использовалась в неадаптивных методах поиска недоминируемых вершин. В методе, предложенном в разделе 2.2, на основе вершин, полученных при решении задач ЛП, формируется база, каждым элементом которой является пара (направление, вершина). При решении новой задачи ЛП на аппроксимируемом теле в качестве начальной вершины используется вершина из базы, ближайшая по направлению. Приведено экспериментальное сравнение трудоемкости исходной УО и указанной его модификации на нескольких специально сгенерированных модельных телах и на ОЭП реальной задачи при использовании различных систем пакетов для решения задач ЛП. Эксперименты показали целесообразность использования подобной модификации. Время построения аппроксимации ОЭП для трудоемких задач сокращалось в три-пять раз.

В разделе 2.3 предлагается метод, который полностью переносит идеи исходного МРЦ на задачу (1)-(3) и может быть применен и тогда, когда модель задана в виде черного ящика. Для аппроксимации ВОЭП в диссертационной работе предложен метод, основанный на синтезе идей метода ветвей и границ и методов адаптивной полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. Идея пред-

лагаемого метода основана на последовательном разбиении множества X_0 на подмножества X_s^α вида (6), вычислении векторов $d(X_s^\alpha)$ (см. (7)) и множеств $\Lambda(X_s^\alpha)$ (см. (8)), построении на их основе очередных внешних и внутренних полиэдральных аппроксимаций Y_C^* и отсеивании таких подмножеств вида X_s^α , вектор оценок которых $d(X_s^\alpha)$ принадлежит построенной внутренней аппроксимации Y_C^* . Перейдем непосредственно к строгому описанию алгоритма.

На нулевой итерации строим начальные аппроксимирующие Y_C^* внешнее и внутреннее многогранные множества P_0 и Q_0 ; полагаем начальный набор активных подмножеств $\Xi_0 = \{X_0\}$. В общем случае начальные аппроксимации могут быть построены, например, в виде

$$\begin{aligned} P_0 &= \text{conv}(f(\Lambda(X_0))) + \mathbb{R}_+^m, \\ Q_0 &= d(X_0) + \mathbb{R}_+^m. \end{aligned} \quad (9)$$

Построение $\text{conv}(f(\Lambda(X_0)))$ не вызывает трудностей, поскольку число точек $\Lambda(X_0)$ невелико.

Рассмотрим произвольную l -ю итерацию. Перед ее началом должны быть заданы внутренняя аппроксимация P_{l-1} и набор Ξ_{l-1} активных подмножеств X_0 вида X_s^α , порожденный на предыдущих итерациях.

1. Из набора Ξ_{l-1} выбираем множество $X_{s_l}^{\alpha_l}$, для которого оценка $d(X_{s_l}^{\alpha_l})$ наиболее удалена от построенной аппроксимации P_{l-1} , т.е.

$$X_{s_l}^{\alpha_l} \in \underset{A \in \Xi_{l-1}}{\text{Argmax}} \rho(d(A), P_{l-1}).$$

Способ формирования Ξ_{l-1} позволяет гарантировать, что у всех $A \in \Xi_{l-1}$ расстояние до P_{l-1} будет больше нуля.

2. Разбиваем $X_{s_l}^{\alpha_l}$ на $K + 1$ подмножество $X_{s_l+1}^{(\alpha_l, i)}$, $i = 0, 1, \dots, K$.

3. Для каждого $X_{s_l+1}^{(\alpha_l, i)}$ находим множество $\Lambda \left(X_{s_l+1}^{(\alpha_l, i)} \right)$ и вычисляем оценку $d \left(X_{s_l+1}^{(\alpha_l, i)} \right)$.
4. Строим P_l на основе имеющегося многогранного множества P_{l-1} и вычисленных оценок:

$$P_l = \text{conv} \left(\bigcup_{i=0}^K \left\{ f \left(\Lambda \left(X_{s_l+1}^{(\alpha_l, i)} \right) \right) + \mathbb{R}_+^m \right\} \cup P_{l-1} \right).$$

5. Строим набор Ξ_l . Для этого берем объединение $\Xi_{l-1} \setminus \left\{ X_{s_l}^{\alpha_l} \right\}$ и совокупности множеств $X_{s_l+1}^{(\alpha_l, i)}$, для которых $\Lambda \left(X_{s_l+1}^{(\alpha_l, i)} \right)$ непусто; из этого объединения исключаем множества, для которых нижняя оценка $d \left(X_{s_l+1}^{(\alpha_l, i)} \right)$ попадает внутрь построенного многогранного множества P_l . Заметим, что для множеств X_n^α , которые содержат единственный вектор, вектор $d \left(X_n^\alpha \right)$ принадлежит $\Lambda \left(X_n^\alpha \right)$, поэтому для таких множеств $d \left(X_n^\alpha \right)$ всегда будет оказываться внутри P_l , и они будут исключаться из дальнейшего рассмотрения.

6. На основе построенного многогранного множества P_l строим Q_l :

$$Q_l = \text{conv} \left(\bigcup_{A \in \Xi_l} \left\{ d(A) + \mathbb{R}_+^m \right\} \cup P_l \right). \quad (10)$$

7. Если Ξ_l не пусто, переходим к шагу 1 итерации $(l + 1)$. Если Ξ_l пусто, завершаем работу алгоритма.

В данном методе на каждой итерации может быть получена оценка достигнутой точности:

$$\delta^H \left(Y_C^*, P_l \right) \leq \varepsilon_l = \max_{A \in \Xi_l} \rho \left(d(A), P_l \right),$$

где $\delta^H(\cdot, \cdot)$ — метрика Хаусдорфа. Для метода аппроксимации ВОЭП показана корректность и монотонность $(P_{l-1} \subset P_l \subset Y_C^* \subset Q_l \subset Q_{l-1})$, проведено экспериментальное изучение работы метода на модельных и прикладных задачах,

показывающее возможность использовать метод для задач с числом вариантов порядка $10^9 - 10^{13}$ и числом критериев от двух до пяти.

После построения аппроксимации ВОЭП, дальнейшая работа метода аналогична исходному МРЦ, т.е. построенная аппроксимация ВОЭП визуализируется с помощью карт решений и ЛПР предлагается указать желаемую разумную цель на границе Парето подходящего сечения аппроксимации ВОЭП. Далее, с помощью метода, предложенного в разделе 2.1, находится множество таких альтернатив $\hat{X}$, что множество $\hat{Y} = f(\hat{X})$ близко выбранной цели.

В третьей главе рассматриваются теоретические вопросы скорости сходимости. Раздел 3.1 посвящен разработке методики, предназначенной для теоретического анализа скорости сходимости метода полиэдральной аппроксимации ВОЭП, предложенного в разделе 2.3. Как обычно, методика разрабатывается для задачи аппроксимации выпуклых компактных тел; далее она переносится на методы аппроксимации ВОЭП. В разделе 3.1 предложена *схема наполнения* — итерационная схема аппроксимации, порождающая для тела C из множества всех выпуклых компактных тел $\mathcal{C}$ в пространстве R^m последовательность многогранников $\{P_l\}$, удовлетворяющих свойству

$$P_{l-1} \subset P_l \subset C, \quad l = 1, 2, \dots$$

Эта схема является обобщением изученной Г. К. Каменевым схемы восполнения, отличаясь от нее тем, что вершины многогранника могут располагаться не только на границе, но и внутри аппроксимируемого тела. Необходимость рассмотрения новой схемы связана с тем, что метод полиэдральной аппроксимации ВОЭП порождает многогранные множества, вершины которых не обязательно лежат на границе аппроксимируемой ВОЭП.

На основе схем наполнения по аналогии с хаусдорфовыми последовательностями восполнения введено понятие хаусдорфовых последовательностей на-

полнения.

Определение 3.6 Последовательность многогранников $\{P_l\}_{l=0}^\infty$, порождаемая для $C \in \mathcal{C}$ некоторой реализацией схемы заполнения, называется **хаусдорфовой последовательностью заполнения** (или $GH(\gamma, C)$ -последовательностью), если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $l = 0, 1, \dots$ справедливо

$$\delta^H(P_l, P_{l+1}) \geq \gamma \delta^H(P_l, C).$$

В диссертации для хаусдорфовых последовательностей заполнения доказана сходимость.

Теорема 3.1 Пусть $\{P_l\}_{l=0}^\infty$ есть хаусдорфова последовательность заполнения для $C \in \mathcal{C}$. Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \delta^H(P_l, C) = 0.$$

Основными результатами раздела 3.1 являются оценки скорости сходимости хаусдорфовых последовательностей заполнения.

Теорема 3.2 Пусть $\{P_l\}_{l=0}^\infty$ есть $GH(\gamma, C)$ -последовательность для $C \in \mathcal{C}$ и $0 < \gamma \leq 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при $l \geq N(\varepsilon)$ справедливо

$$\delta^H(P_l, C) \leq (1 + \varepsilon) \lambda_2(\gamma, C) l^{1/(1-m)}.$$

Здесь

$$\lambda_2(\gamma, C) = \left\{ \frac{m}{(m-1)\pi_{m-1}} \frac{\sigma(C)}{\gamma^m} \right\}^{1/(m-1)} \omega(C),$$

где π_{m-1} — объем $(m-1)$ -мерного единичного шара, $\omega(C)$ — сферичность тела C , а $\sigma(C)$ — его поверхностный объем.

Теорема 3.3 Пусть $\{P_l\}_{l=0}^{\infty}$ есть $GH(\gamma, C)$ -последовательность для $C \in \mathcal{C}$, $0 < \gamma \leq 1$ и пусть r, R и z таковы, что $B_r(z) \subset P_0 \subset C \subset B_R(z)$. Тогда для любого $l \geq 1$ справедливо

$$\delta^H(P_l, C) \leq \lambda_2^0(\gamma, C, P_0) l^{-1/m},$$

где

$$\lambda_2^0(\gamma, C, P_0) = \frac{m\delta^S(C, P_0)}{\gamma\pi_{m-1}} \left(\frac{R + \delta^H(C, P_0)}{r} \right)^{(m-1)/m},$$

$B_s(z)$ — m -мерный шар с центром в z и радиусом s , $\delta^S(\cdot, \cdot)$ — метрика объема симметрической разности.

В разделе 3.2 результаты, полученные для схем наполнения, применены для анализа метода полиэдральной аппроксимации ВОЭП в монотонных многокритериальных задачах. Введена экономичная модификация, особенностью которой является то, что шаг 4 метода полиэдральной аппроксимации ВОЭП разбивается на подшаги, на каждом из которых выбирается очередная точка p из множества верхних оценок всех имеющихся на итерации подмножеств, на которые разбито X_0 . Для этой точки p проверяется условие

$$\rho(p, P'_l) \geq \tau \max_{X_s^\alpha \in \Xi_l} \rho(P'_l, d(X_s^\alpha)),$$

где $0 < \tau \leq 1$ — заданный параметр, P'_l — многогранное множество, полученное из P_l на предыдущих подшагах. Если условие выполнено, то точка p присоединяется к P'_l , тем самым улучшая аппроксимацию.

Доказано, что для экономичной модификации метода полиэдральной аппроксимации выпуклой оболочки Эджворта-Парето с параметром $0 < \tau \leq 1$ справедливы оценки аналогичные оценкам теорем 3.2 и 3.3 не только по числу итераций, но и по числу вершин аппроксимирующих многогранников. При этом константы, входящие в соответствующие оценки, могут быть выражены через τ , размерность m и диапазон изменения критериев на множестве X .

Четвертая глава посвящена использованию методов, предложенных в диссертации, при решении прикладных задач.

В разделе 4.1 описаны принципы функционирования программного комплекса, разработанного диссертантом для реализации МРЦ в задачах многокритериальной целочисленной оптимизации. Программный комплекс реализован на основе предложенных методов и состоит из трех компонентов: компонента аппроксимации ВОЭП, компонента визуализации ВОЭП в виде карт решений, компонента выделения малого числа альтернатив по выбранной цели. Комплекс рассчитан на работу под управлением ОС семейства Windows.

Для работы с комплексом пользователь должен представить интересующую его задачу многокритериальной оптимизации в виде динамически подключаемой библиотеки. Библиотека подгружается программным комплексом и должна осуществлять вычисление значений критериев и ограничений для передачи их значений в программный комплекс. В разделе описаны программные интерфейсы, которые необходимо реализовать для создания такой библиотеки. Описана организация работы компонента аппроксимации ВОЭП, графического интерфейса, позволяющего вводить описание задачи, компонентов осуществляющих визуализацию ВОЭП и поиск альтернатив по цели, выбранной пользователем.

В разделе 4.2 приводится использование предложенных в диссертации методов для решения задачи поиска стратегии улучшения качества воды в бассейне крупной реки. В конкретной рассматриваемой задаче изучается бассейн реки Ока. Бассейн разбит на 14 участков, в каждом из которых возможно установить одну из 9 технологий очистки различной интенсивности и стоимости. Таким образом, в задаче около 10^{13} различных вариантов. В задаче изучается взаимосвязь между затратами и экологической обстановкой для различных решений, задаваемых набором технологий, установленных на участках. Мо-

дель была описана в виде системы уравнений, что позволило применить как МРЦ, так и МКРЦ. В диссертации описано решение этой задачи для трех и пяти критериев, приведены карты и матрицы карт решений, а также результаты, получаемые при выборе различных точек на границах Парето. Проведено сравнение использования МРЦ и МКРЦ. Оказалось, что МКРЦ позволяет строить аппроксимацию существенно быстрее, однако цели, выбираемые в этом методе, оказываются дальше от достижимых точек задачи, что приводит к существенному замедлению поиска альтернатив, близких к выбранной цели, и увеличению их числа.

В разделе 4.3 описано использование МРЦ в задаче поиска стратегии улучшения качества воды на основе детального описания бассейна небольшой реки. Изучается бассейн реки Муга (Каталония, Испания). Основным возможным мероприятием по улучшению качества воды является установка очистных сооружений в некоторых из 42-х пунктов выброса загрязнений. Всего рассматривалось 7 различных типов очистных сооружений. С учетом ограничений, общее число вариантов в задаче было порядка 10^{32} . Так как модель была задана в виде вычислительного модуля, способного вычислять значения критериев только в целых точках, применить МКРЦ оказалось невозможно. Поэтому применялся только МРЦ. Была построена аппроксимация ВОЭП для пяти критериев с относительной точностью 0.2 за 200 итераций (50 часов). В работе приведены матрицы карт решений и результаты, получаемые при выборе разумной цели на границе Парето аппроксимации ВОЭП.

Заключение

Результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. Разработаны и исследованы методы решения задач многокритериальной целочисленной оптимизации с монотонными критериями и ограничениями, разработано

программное обеспечение и решены прикладные задачи. В частности:

1. разработан метод квазиразумных целей, позволяющий для случая явного задания критериев и ограничений решать монотонные многокритериальные задачи целочисленной оптимизации с большим числом альтернатив;
2. разработан вариант метода разумных целей, основанный на аппроксимации оболочки Эджворта-Парето выпуклой оболочки критериальных точек и позволяющий решать задачи монотонной многокритериальной целочисленной оптимизации с большим числом альтернатив, заданных вычислительным модулем;
3. разработана и экспериментально изучена модификация метода уточнения оценок, которая может быть использована в рамках метода квазиразумных целей в том случае, когда исследуемая многокритериальная задача линейна;
4. предложена и изучена схема наполнения, являющаяся обобщением известных адаптивных схем полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел; полученные результаты использованы для теоретической оценки скорости сходимости по числу вершин метода полиэдральной аппроксимации оболочки Эджворта-Парето выпуклой оболочки критериальных точек;
5. разработан программный комплекс, реализующий метод разумных целей в задачах многокритериальной целочисленной оптимизации с монотонными критериями и большим числом альтернатив;
6. программный комплекс применен в рамках двух проектов улучшения качества воды в больших и малых реках.

Основные результаты опубликованы в работах

- [1] *А. В. Лотов, А. И. Поспелов.* Метод квазиразумных целей для целочисленных задач многокритериальной оптимизации // *Доклады Акад. наук.* — 2007. — Т. 414, № 3. — С. 317–319.
- [2] *А. В. Лотов, А. И. Поспелов.* Модифицированный метод уточнения оценок для полиэдральной аппроксимации выпуклых многогранников // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2008. — Т. 48, № 6. — С. 990–998.
- [3] *А. И. Поспелов.* Аппроксимация выпуклой оболочки Эджворта-Парето в многокритериальных задачах с монотонными критериями // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2009. — Т. 49, № 10. — С. 1765–1778.
- [4] *А. И. Поспелов.* Аппроксимация выпуклой оболочки Эджворта-Парето в целочисленных задачах многокритериальной оптимизации // *Материалы Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам “Ломоносов-2004”, секция “Вычислительной математики и кибернетики”.* — М.: Издательский отдел ВМиК МГУ, 2004. — С. 25.
- [5] *A. I. Pospelov.* About Polyhedral Approximation of Edgeworth-Pareto Convex Hull for the Special Class of Integer Multicriteria Optimization Problems // *Труды 4-й Московской международной конференции по исследованию операций.* — М.: МАКС Пресс, 2004. — С. 185–188.
- [6] *А. И. Поспелов.* Алгоритм аппроксимации выпуклой оболочки Эджворта-Парето в некоторых задачах целочисленной многокритериальной оптимизации // *Труды XIII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”.* — Т. 1. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. — С. 359–363.

- [7] *A. I. Pospelov, A. V. Lotov.* Application of Convex Pareto Frontier Approximation and Visualization in Integer Multicriteria Optimization Problems. — Loire Valley (old city hall of Tours), France: 2006.
- [8] *A. В. Лотов, А. И. Поспелов.* Метод разумных целей для целочисленных задач многокритериальной оптимизации // Труды V Московской международной конференции по Исследованию операций. — М.: МАКС Пресс, 2007. — С. 149–151.
- [9] *А. И. Поспелов.* Аппроксимация границы Парето выпуклой оболочки критериальных векторов в целочисленных задачах с монотонными критериями // Сборник тезисов IV Всероссийской научной конференции “Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии” ЭКОМОД-2009 (Киров, 6-12 июля). — Киров: ГОУ ВПО “ВятГУ”, 2009. — С. 56.