

На правах рукописи

Климачкова Татьяна Сергеевна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
И ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ УПРАВЛЯЕМЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ,
управление и обработка информации

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в Российской открытой академии транспорта Московского государственного университета путей сообщения

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
профессор О.В. Дружинина

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор В.В. Дикусар,
доктор физико-математических наук
профессор А.П. Колесников

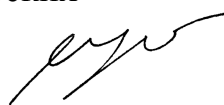
Ведущая организация: Московский государственный институт
электроники и математики
(технический университет)

Защита состоится « 11 » июня 2009 г. в 14.00 на заседании совета по защите докторских и кандидатских диссертаций Д 002.017.03 при Учреждении Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН по адресу: 119991, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук.

Автореферат разослан « » 2009 г.

Ученый секретарь совета по защите докторских
и кандидатских диссертаций Д 002.017.03
кандидат физико-математических наук



А.В. Мухин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время предъявляются повышенные требования к проектированию, эксплуатации сложных технических объектов и технологических процессов, а также к управлению ими. В связи с указанным обстоятельством разрабатываются новые математические модели динамических процессов, описываемые векторными нелинейными дифференциальными уравнениями. При этом возникает необходимость в дальнейшем развитии теории нелинейных динамических систем, расширении понимания целей управления, возрастании практического значения учета параметрических и постоянно действующих возмущений.

Во многих технических задачах структура управляемых динамических систем и ее параметры известны с некоторой погрешностью. Следовательно, необходимым требованием к управляемым динамическим системам является их устойчивость (в том или ином смысле) по отношению к структурным и внешним возмущениям. Построение алгоритмов исследования устойчивости позволяет проводить анализ влияния различных проектных параметров на качество функционирования сложного технического объекта.

Практические задачи, связанные с необходимостью оценки движения на конечном промежутке времени, повлекли многочисленные обобщения и стимулировали развитие понятия устойчивости, учитывающее те или иные специфические особенности процесса функционирования систем. Одной из разновидностей такого рода устойчивости является понятие технической устойчивости.

Начиная с работ Н.Г. Четаева и Н.Д. Моисеева, вопросы технической устойчивости и задачи стабилизации до технической устойчивости различных типов управляемых систем рассматривались в работах К.А. Карачарова и А.Н. Пилютника, Г.В. Каменкова, А.А. Мартынюка, К.А. Абгаряна, А.А. Лебедева, Н.Ф. Кириченко, Вань Дань-чжи, С.Я. Степанова, В.В. Семенова, А.П. Тарасова, Л. Вейса, Е. Инфанте и других ученых.

Изучение технической устойчивости систем и управления технической устойчивостью оказывается плодотворным в системном анализе динамических процессов, когда другие понятия устойчивости не соответствуют постановке задачи системного анализа. Как известно, в ряде случаев не представляется возможным рассматривать движение на бесконечных промежутках времени или особенности структуры фазовых множеств требуют использования понятия технической устойчивости относительно совокупности параметров, возникающих в прикладной задаче.

Важной задачей в исследовании качества функционирования динамической системы является получение количественных оценок, обеспечивающих наличие технической устойчивости, причем движение изучаемой системы оценивается на некотором заранее заданном промежутке времени при учете ограниченных возмущающих сил, начальные и последующие возмущения которых являются ограниченными величинами.

Эффективным методом исследования качественных свойств неавтономных динамических систем является метод предельных уравнений в сочетании с методом функций Ляпунова. Метод предельных уравнений позволяет использовать свойства предельной системы, сопоставляемой с исходной неавтономной системой, и исследовать предельную систему с помощью приемов топологической динамики. Значительные результаты по изучению предельных свойств динамических систем получены, начиная с работ А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре, в работах Дж. Селла, З. Артштейна, Дж. Като, А.С. Андреева, А.А. Мартынюка, А.А. Шестакова, В.Н. Щенникова, И.Г. Башмакова, А.М. Матвиенко, А.И. Багровой и других ученых. Особенно важным и эффективным оказался метод предельных уравнений для изучения управляемых систем, что вытекает из результатов А.А. Шестакова, А.А. Мартынюка, Дж. Като, А.С. Андреева, И.Г. Башмакова.

Актуальность темы диссертации обусловлена также тем, что результаты исследований по управлению технической устойчивостью и по методу предельных уравнений находят эффективное применение при решении разнообразных прикладных задач, возникающих при исследовании

технических и промышленных систем. В частности, к указанным задачам можно отнести задачи динамики подвижного состава железнодорожного и автомобильного транспорта, задачи оценки безопасности, устойчивости и обеспечения надежности функционирования систем.

В диссертации рассмотрены управляемые динамические системы, описываемые обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями, и предметом исследования является имеющая важное значение для разработки сложных систем промышленной эксплуатации задача получения условий технической устойчивости, стабилизации до технической устойчивости управляемых гироскопических систем, изучения предельных циклов и автоколебаний непрерывных динамических систем, а также исследования предельных свойств нелинейных управляемых систем.

Целью работы является разработка эффективных условий управления технической устойчивостью динамических систем, описываемых многомерными дифференциальными уравнениями, решение задач системного анализа динамических процессов, возникающих при промышленной эксплуатации объектов, а также получение условий устойчивости состояний равновесия, предельных циклов динамических систем и анализ предельных свойств управляемых динамических процессов.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории управления, системного анализа, качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости движения.

Научная новизна. В диссертационной работе доказаны новые, а также обобщены, дополнены и уточнены известные результаты в теории управления и в теории технической устойчивости управляемых динамических процессов. Дано развитие метода функций Ляпунова и метода предельных уравнений, причем ослаблены требования как на правые части управляемой динамической системы, так и на производную обобщенной функции Ляпунова. Получены новые условия технической устойчивости динамических систем, изучены качественные свойства управляемых систем, доказаны необходимые и достаточные условия существования предельных циклов и автоколебаний в динамических системах, а также достаточные

условия существования предельного уравнения для управляемых процессов. Полученные результаты служат основой нового подхода к изучению устойчивости, обеспечению надежности и безопасности сложных технических систем.

Достоверность и обоснованность полученных результатов основана на корректности постановок задач, строгом использовании методов теории управления и качественного анализа динамических процессов. Все полученные результаты имеют строгие доказательства.

Практическая ценность. Областью применения установленных в диссертации условий технической устойчивости на конечном интервале времени являются задачи теории управления, задачи динамики подвижного состава железнодорожного и автомобильного транспорта, а также задачи оценки безопасности и надежности функционирования систем промышленности. Методы предельного анализа управляемых динамических процессов находят применение при качественном изучении динамических процессов естествознания и техники, а также при разработке и проектировании инженерных систем с управлением. Разработанный в диссертации подход к решению задач стабилизации до технической устойчивости применен для исследования гироскопического маятника, стабилизируемого в окрестности верхнего неустойчивого состояния равновесия моментом, приложенным к наружной рамке.

Работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ Российской открытой академии транспорта Московского государственного университета путей сообщения, а также в рамках программы Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МД-1199.2005.1).

Личный вклад автора в проведенное исследование. В диссертацию включены только те результаты, которые получены лично автором. В совместно опубликованных работах научному руководителю принадлежат постановки задач, соавторам – рассмотрение технических деталей, кроме работы [1], в которой результаты принадлежат авторам в равных долях.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались: на Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии (Москва, РУДН, 2005, 2006, 2008 гг.); на международном семинаре «Applications of the «Mathematica» system to social processes and mathematical physics» (Брест, 2003 г.); на Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Н. Новгород, 2006 г.); на Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Иркутск, 2007); на Международном конгрессе «Нелинейный динамический анализ–2007» (Санкт-Петербург, СПбГУ, 2007 г.); на Всероссийской научно-практической конференции «Инженерные системы–2008» (Москва, РУДН, 2008 г.); на Международном семинаре им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, ИПУ РАН, 2008 г.); на XX межвузовской конференции «Актуальные проблемы естествознания» (Н. Новгород, РГОТУПС, 2008); на семинаре кафедры «Физика и химия» в Российской открытой академии транспорта Московского государственного университета путей сообщения (Москва, 2009).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 23 печатных работах, список которых приведен в конце автореферата. Четыре работы из этого списка опубликованы в научных изданиях, рекомендованных ВАК России, в том числе статья в журнале «Доклады РАН».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 141 страница, список литературы включает в себя 178 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обоснование актуальности темы диссертации и характеристику области исследований. Дан обзор научных результатов исследований по теме диссертации, формулируется основная цель исследования, охарактеризованы методы исследования, отмечается научная

новизна и практическая ценность работы. Приводятся сведения об апробации результатов диссертации и публикациях.

Глава 1 посвящена постановке задачи о технической устойчивости динамической системы и получению условий технической устойчивости, имеющих прикладное значение при изучении управляемых систем.

В главе дан сравнительный анализ различных современных модификаций понятия технической устойчивости, указана специфика использования определений в различных прикладных задачах. Термин «техническая устойчивость» введен в науку Н.Д. Моисеевым – одним из основоположников теории технической устойчивости. Ряд ученых употребляет вместо этого термина термин «практическая устойчивость».

Известно большое число различных определений понятия технической устойчивости, однако при всем их разнообразии указанные определения имеют одни и те же предпосылки. А именно, в каждой постановке задачи о технической устойчивости: 1) рассматривается дифференциальное уравнение $\dot{x} = g(x)$ или $\dot{x} = g(t, x)$, где $x \in R^n$; 2) вводится некоторое множество $M_0(t) \subset R^n$ начальных возмущений $x_{i0} = x_i(t_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, и рассматриваются траектории, исходящие из точек $x_0 \in M_0(t_0)$; 3) задается определенный интервал T значений времени t ; 4) вводится некоторое множество $M_1(t)$ допустимых значений возмущений $x(t)$ на T .

Понятие технической устойчивости принимает конкретное содержание в зависимости от выбора множеств $M_0(t)$, $M_1(t)$ на T , и этот выбор имеет существенное значение в отличие от постановки задачи об устойчивости по Ляпунову.

Рассмотрена неавтономная динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = g(t, x), \quad (1)$$

где $g(t, x)$ – заданная вектор-функция от входящих аргументов, где $t \in T ::= [t_0, t_0 + \tau)$, $\tau < +\infty$, $x \in R^n$ – вектор состояния. Предполагается, что уравнение удовлетворяет условиям существования и единственности решения.

Фазовое множество $M_0(t)$ технически устойчиво на временном конечном промежутке T относительно множества $M_1(t)$, если все полутраектории, начинающиеся в момент времени $t = t_0$ во множестве $M_0(t_0)$, при всех значениях t из заданного промежутка T содержатся в множестве $M_1(t)$. Если же хотя бы одна полутраектория, начинающаяся при $t = t_0$ в множестве $M_0(t_0)$, выходит в какой-то момент t^* из множества $M_1(t)$, то фазовое множество $M_0(t)$ технически неустойчиво на T относительно фазового множества $M_1(t)$. Совокупность $\{M_0, M_1, T\}$ и ее модификации названы в работе определяющими совокупностями. В главе 1 методом функций Ляпунова получены признаки технической устойчивости фазового множества относительно заданной определяющей совокупности, причем отдельно рассмотрен случай, когда фазовые множества определяющей совокупности являются шарами в фазовом пространстве. Получена теорема о технической устойчивости фазового шара относительно заданной определяющей совокупности при постоянно действующих возмещениях.

Кроме того, в главе разработан метод исследования технической устойчивости при постоянно действующих возмущениях неавтономной динамической системы, базирующийся на свойствах логарифмической нормы, матрицы первого приближения и метода оценок В.М. Алексеева.

Наряду с уравнением (1) рассмотрено возмущенное уравнение

$$\dot{y} = g(t, y) + \Phi(t, y). \quad (2)$$

Предполагается, что вектор-функция $g(t, x)$ и ее производная $g'_x(t, x)$ непрерывны в некоторой области $G(t, x)$ пространства R^{n+1} , возмущение $\Phi(t, x)$ удовлетворяет в области G условию Липшица относительно x .

Обозначим через $\frac{\partial x}{\partial y}$ матрицу $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)$, φ_t^x – решение уравнения (1), для

которого $\varphi_t^x \equiv x$, $J(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} g(t, x)$, $A(x, \tau, t) = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_t^x)$. Рассматривается

логарифмическая норма $\mu(A) ::= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(|I + hA| - 1)}{h}$ матрицы A , где I – единичная $(n \times n)$ -матрица. Получены следующие теоремы.

Теорема 1. Решение $\varphi_{t_0}^t x$ дифференциального уравнения (1) технически устойчиво относительно заданной определяющей совокупности при постоянно действующих возмущениях, если для функций $\Phi(t, x)$, $A(x, t_1, t)$ и $\delta(x)$ выполнены условия: 1) $|\Phi(t, x)| \leq F(t)$ для всех $\forall (t, x) \in [t_0, \tilde{t}] \times D_t$; 2) для всех $x \in D_t$ и для всех t_1 и t таких, что для $t_0 < t_1 < t < \tilde{t}$ решение $\varphi_{t_0}^t x_0$ удовлетворяет условию $|A(x, t_1, t)| = \left| \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{t_1}^t x \right| \leq R(t_1, t)$, где D_t – нормальное семейство на $[t_0, \tilde{t}]$; 3) $N(\varphi_{t_0}^t x_0, \delta(t)) \subseteq D_t \quad \forall t \in [t_0, \tilde{t}]$, где $N(x, \delta)$ – δ -окрестность точки x ; 4) $|y_0 - x_0| \leq \delta(t_0)$, где

$$\delta(t) = R(t_0, t)\delta(t_0) + \int_{t_0}^t R(s, t)F(s)ds.$$

Установлено, что при выполнении условий 1) – 4) теоремы 1 решение $\varphi_{t_0}^t y$ возмущенного дифференциального уравнения (2) определено для всех $t \in [t_0, \tilde{t}]$, причем $|\varphi_{t_0}^t y - \varphi_{t_0}^t x| \leq \delta(t)$, т.е. решение $\varphi_{t_0}^t x$ уравнения (1) технически устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Теорема 2. Решение $\varphi_{t_0}^t x$ дифференциального уравнения (1) технически устойчиво относительно заданной определяющей совокупности при постоянно действующих возмущениях, если выполнены условия: 1) $q(t) \geq 0, F(t) \geq 0, \mu(t)$ – непрерывные функции, а $f(t)$ – дифференцируемая функция; 2) $|\Phi(t, y)| \leq F(t)$, $y \in N_t$, где $N_t = N(\varphi_{t_0}^t x_0, f(t))$ – окрестность вокруг решения радиуса $f(t)$; 3) $\{(t, x) : t_0 \leq t \leq \tilde{t}, x \in N_t\} \subset G$, где $G = [t_0, t_1] \times D$; 4) $|J(t, y) - J(t, \varphi_{t_0}^t x_0)| \leq q(t)|y - \varphi_{t_0}^t x_0|, y \in N_t$; 5) $\mu(J(t, \varphi_{t_0}^t x_0)) \leq \mu(t)$; 6) $q'(t) \geq F(t) + \mu(t)f(t) + \frac{1}{2}q(t)f^2(t)$; 7) $|y_0 - x_0| \leq f(t_0)$.

Установлено, что при выполнении условий 1)–7) теоремы 2 на полуинтервале $[t_0, \tilde{t})$ существует решение $\varphi_{t_0}^t y$ возмущенного уравнения (2),

причем $|\varphi_0^t y - \varphi_0^t x| \leq z(t, |y_0 - x_0|) \leq f(t)$, где $z(t, \lambda)$ – решение соответствующего уравнения Риккати.

Во второй главе изучена стабилизация до технической устойчивости линейных и нелинейных управляемых динамических систем.

В главе рассмотрена постановка задачи стабилизации до технической устойчивости и охарактеризованы алгоритмы ее решения. Рассмотрен вопрос о построении алгоритмов стабилизации до обобщенной технической устойчивости для динамических систем некоторых классов. Алгоритм стабилизации сводится к нахождению необходимых и достаточных условий технической устойчивости для линейной системы, размерность пространства состояний которой выше, чем размерность пространства состояний исходной нелинейной системы.

Для системы, задаваемой нелинейным векторным уравнением

$$\dot{x} = F(t, x), \quad (3)$$

где векторная функция $F(t, x(t))$ удовлетворяет условиям существования и единственности решения, рассмотрены замкнутые для всех $t \in [t_0, t_1]$ множества фазового пространства $M_t = \{x : |l_p^*(t)x| \leq 1, p = 1, 2, \dots, N\}$, где $l_p(t)$ – заданные n -мерные векторы. Невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ системы (3) называется технически устойчивым относительно определяющей совокупности $\{\varepsilon, M_t, t_0, t_1\}$, если из выполнения условий для начальных данных $\|x(t_0)\| < \varepsilon$ для траекторий системы следуют соотношения $x(t) \in M_t$, $t \in [t_0, t_1]$. Техническая устойчивость при постоянно действующих возмущениях $R_i(t, x)$ определена как техническая устойчивость относительно определяющей совокупности $\{\varepsilon, M_t, t_0, t_1, \Omega_R\}$, где Ω_R – ограниченное множество, $R_i(t, x) \in \Omega_R$.

Стабилизацией до технической устойчивости движения $x(t) \equiv 0$ управляемой системы

$$\dot{x} = F(t, x(t), u(t, x(t)))$$

называется такой выбор управления $u(t, x(t))$, при котором движение $x(t) \equiv 0$ этой системы технически устойчиво относительно определяющей совокупности $\{\varepsilon, M, t_0, t_1, \Omega_R\}$.

Рассмотрена динамическая система, задаваемая нелинейным векторным управляемым дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u, \quad (4)$$

где $F(x)$, $G(x)$ – известные n -мерные вектор-функции, u – скалярная функция управления, зависимость которой от x требуется определить. На множестве M рассмотрена совокупность функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x), \dots$, обладающая свойствами ограниченности и полноты в некотором смысле.

Функция управления ищется в виде

$$u(x) = (c, \Psi) ::= \sum_{K=1}^S c_K \Psi_K(x),$$

где $\Psi_K(x)$ – заданные функции x , c_K – постоянные, которые необходимо определить из области значений $\|c\|^2 = \sum_{K=1}^S c_K^2 \leq c^2$.

С помощью введения новых переменных $z_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, K$, записана система линейных дифференциальных уравнений относительно z_i :

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^M (a_{ij} + \sum_{k=1}^s \beta_{ij}^{(k)} c_k) z_j + R_i(t), \quad i = 1, \dots, K, \quad (5)$$

где функции $R_i(t)$ описывают постоянно действующие возмущения и удовлетворяют заданным ограничениям. Показано, что задача стабилизации управляемой системы (4) до технической устойчивости сводится к задаче технической устойчивости движения линейной системы (5) относительно заданной определяющей совокупности $\{\varepsilon, M, t_0, t_1, \Omega_R\}$. Переход от системы (4) к системе (5) используется для построения функций Ляпунова $V(z)$ и $V(x)$. С помощью функций Ляпунова получено условие стабилизации до технической устойчивости относительно определяющей совокупности $\{\varepsilon, M, t_0, \infty\}$.

В главе также рассмотрена задача стабилизации управляемого гироскопического маятника до технической устойчивости в окрестности верхнего неустойчивого состояния равновесия моментом u , который приложен к наружной рамке (рис. 1).

Здесь m – масса маховичка, насаженного на стержень длины l , который жестко связан с внутренней рамкой, ω – постоянна угловая скорость маховичка вокруг оси стержня, q_1 и q_2 – углы поворота (обобщенные координаты) соответственно наружной и внутренней рамок, σ_1 и σ_2 имеют смысл соответствующих радиусов инерции, r – расстояние от точки пересечения рамок

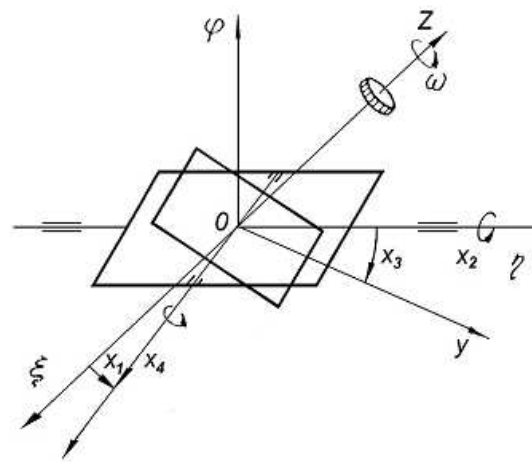


Рис. 1

до центра тяжести маховичка. Если пренебречь массами колец и стержня, то кинетическая и потенциальная энергии примут вид

$$T = \frac{1}{2} [m\sigma_1^2 (q_1 \sin q_2 + \omega)^2 + m\sigma_2^2 q_1^2 \cos^2 q_2 + m\sigma_2^2 q_2^2], \quad \Pi = mgr(\cos q_1 \cos q_2 - 1).$$

С учетом этих равенств уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{mgr \sin x_1 \cos x_3 - m\sigma_1^2 \omega x_4 \cos x_3 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) m x_2 x_4 \sin 2x_3 + u_2}{m\sigma_1^2 \sin^2 x_3 + m\sigma_2^2 \cos^2 x_3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Приведенная модель рассматривалась Н.Н. Красовским как пример модели управления. Для системы (6) система линейного приближения имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где $B = (0, 1/m\sigma_2^2, 0, 0)^*$, $u = (0, u_2, 0, 0)$. Определено соответствующее характеристическое уравнение. В качестве значений параметров маятниковой системы приняты значения $m = 0,5$, $g = 9,8$, $r = 0,1$, $\sigma_1 = 0,4$, $\sigma_2 = 2,0$, $\omega = 150$. Управление выбрано в виде $u = c^* x$, где $c^* = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ – вектор коэффициентов усиления, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – фазовый вектор маятниковой системы. Оценки областей стабилизации рассмотрены на множествах

$\{x: |x_i| \leq 1, i = 1, 2, 3, 4\}, \{x: |c^* x| \leq 1\}$, на временном интервале $T = [0; 9]$. Маятниковая система технически устойчива относительно определяющей совокупности $\{\varepsilon, M_1, t_0=0, t_1=9\}$ со следующими характеристиками: $\{0,1862; M_1 = \{x: |x_i| \leq 1, i = \overline{1,4}\}; 0; 9\}; \{0,7255; M_1^{(1)} = \{x: |x_i| \leq 1, i = 1\}; 0; 9\}; \{1; M_1^{(2)} = \{x: |x_i| \leq 1, i = 2\}; 0; 9\}; \{0,1862; M_1^{(3)} = \{x: |x_i| \leq 1, i = 3\}; 0; 9\}; \{0,3587; M_1^{(4)} = \{x: |x_i| \leq 1, i = 4\}; 0; 9\}$.

Третья глава посвящена исследованию качественных свойств состояний равновесия динамических систем. В главе рассмотрен вопрос о существовании амплитуды, фазы и частоты для технических систем, моделируемых линейными неавтономными дифференциальными уравнениями второго порядка. Показано, что множество частот вполне характеризуется определяющим оператором для исходного дифференциального уравнения. Изучен вопрос о существовании первых интегралов для некоторых классов линейных неавтономных систем и даны приложения полученных результатов в классической и релятивистской механике. А именно, проведен анализ дифференциального уравнения второго порядка Синджа и установлено, что дифференциальное уравнение Синджа качественно подобно либо линейному уравнению гармонического осциллятора $\ddot{x} + a^2(s)x = 0$, либо линейному уравнению $\ddot{x} - a^2(s)x = 0$.

В главе доказан также признак асимптотической устойчивости в большом динамической системы, моделируемой дифференциальным уравнением второго порядка специального вида. Кроме того, в главе изучен вопрос устойчивости состояний равновесия неконсервативной динамической системы, описываемой векторно-матричным дифференциальным уравнением второго порядка вида

$$A\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Cx(t) = F(t), \quad (7)$$

где $x(t)$ и $F(t)$ – n -мерные векторы соответственно обобщенных координат и внешних сил; A, B, C – вещественные квадратные асимметрические матрицы размеров $n \times n$ соответственно масс, демпфирования и жесткости. Заданы следующие условия: матрица A является неособой (условие H_1) и матрицы $A^{-1}B$ и $A^{-1}C$ являются симметризуемыми (условие H_2).

По условию H_2 матрицы $A^{-1}B$ и $A^{-1}C$ представимы в виде $A^{-1}B = P_1 P_2$, $A^{-1}C = Q_1 Q_2$, где P_2 и Q_2 – симметричные, а P_1 и Q_1 – симметричные и положительно определенные матрицы. При условиях H_1 и H_2 получены признаки устойчивости и неустойчивости по Ляпунову состояний равновесия системы второго порядка (7). Доказано, что если выполнены условия H_1 и H_2 , $P_1 = Q_1$ и если собственные значения матриц $A^{-1}B$ и $A^{-1}C$ положительны, то состояние равновесия системы (7) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

В четвертой главе исследованы свойства предельных циклов (изолированных замкнутых траекторий) многомерных динамических систем. Как известно, для двумерного случая задача существования предельных циклов решена А. Пуанкаре и И. Бендиксоном. В многомерном случае вопрос о наличии или отсутствии предельных циклов и автоколебаний (устойчивых по Ляпунову предельных циклов) является трудным вопросом, для решения которого в настоящее время не существует общего метода. В главе 4 рассмотрен вопрос о существовании предельных циклов и автоколебаний в нелинейных непрерывных динамических системах

$$\varphi_t : G \rightarrow G, \quad G \subset R^n, \quad \varphi_t(x) ::= \varphi(t, x), \quad t \in J, \quad (8)$$

для которых выполнены свойства: а) $\varphi(0, x) = x$, $x \in G$; б) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, $t, s \in J$, $x \in G$; в) отображение $(t, p) \rightarrow \varphi(t, p)$ непрерывно, где J означает или $R^+ = [0, \infty)$, или $Z^+ ::= \{0, 1, 2, \dots\}$. Случай $J = R^+$ соответствует непрерывной динамической системе, а случай $J = Z^+$ – дискретной динамической системе. Рассматриваются положительно устойчивые по Лагранжу полутраектории $C^+(x) ::= \bigcup_{t \geq 0} \varphi(t, x)$, а также омега-предельные множества $\Omega(x)$ и замыкания $\overline{C^+(x)} ::= C^+(x) \cup \Omega(x)$.

Полученные результаты базируются на ослаблении требования об асимптотической устойчивости по Ляпунову и замене этого требования менее жестким требованием о фазовой асимптотической прочности полутраектории – устойчивости по Ляпунову в результате линейной репараметризации движения по полутраектории. Понятие асимптотической

фазы, известное из теории устойчивости, рассмотрено как для периодических траекторий, так и для множеств непериодических траекторий.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть полутраектория $C^+(p_0)$ динамической системы (8) является фазово притягивающей. Тогда замыкание $\overline{C^+(p_0)}$ полутраектории $C^+(p_0)$ также является фазово притягивающим, а предельное множество $\Omega(p_0)$ есть фазово притягивающий предельный цикл.

Показано, что теорема 3 обратима. Необходимые и достаточные условия наличия фазово асимптотически прочного предельного цикла даются следующими предложениями.

Теорема 4. Пусть полутраектория $C^+(p_0)$ динамической системы (8) фазово асимптотически прочна. Тогда замыкание $\overline{C^+(p_0)}$ полутраектории $C^+(p_0)$ также является фазово асимптотически прочным, а предельное множество $\Omega(p_0)$ есть фазово асимптотически прочный предельный цикл.

Теорема 5. Пусть множество $\Omega(p_0)$ есть фазово асимптотически прочный предельный цикл динамической системы (8), а замыкание $\overline{C^+(p_0)}$ фазово асимптотически прочно. Тогда полутраектория $C^+(p_0)$ фазово асимптотически прочна.

Из теорем 4 и 5 вытекает эквивалентность следующих свойств: 1) полутраектория $C^+(p_0)$ фазово асимптотически прочна; 2) каждая омега-предельная точка $\omega \in \Omega(p_0)$ фазово асимптотически прочна; 3) замыкание $\overline{C^+(p_0)}$ полутраектории $C^+(p_0)$ фазово асимптотически прочно и множество $\Omega(p_0)$ является фазово асимптотически прочным.

Теоремы 3–5 являются обобщением и распространением на многомерный случай классической теоремы Пуанкаре–Бендиксона, а также теоремы Андронова–Витта об автоколебаниях. Из теорем 3, 4 вытекают как частные случаи условия наличия автоколебания в динамических системах непрерывного и дискретного типа.

В главе также установлена оценка числа предельных циклов двумерной динамической системы, описываемой двумерным нелинейным автономным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2), \quad x \in A \subset R^2, \quad (9)$$

на основе свойств дивергенции векторного поля $g = (g_1, g_2)$. Показано, что если область определения A вектор-функции, задающей правую часть, является p -связным открытым подмножеством плоскости R^2 и выполнены соответствующие дивергентные условия, то система (9) не может иметь в A более p предельных циклов. Установленный признак оценки числа предельных циклов содержит в качестве частного случая известный признак Бендиксона–Дюлака.

Пятая глава посвящена исследованию предельных свойств и инвариантности управляемых динамических систем методом предельных уравнений. Рассмотрены неавтономные динамические системы, определенные дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (t, x) \in R^+ \times R^n, \quad (10)$$

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad (t, x) \in R^+ \times R^n. \quad (11)$$

Динамической системе (10) сопоставляется система вида (11), называемая предельной, и ставится задача: по свойству устойчивости состояния равновесия предельной системы (11) вывести заключение о свойстве устойчивости состояния равновесия системы (10). Различные типы предельных систем были предложены Н.Г. Четаевым, Дж. Селлом, А.С. Андреевым и другими учеными. В основе определения Дж. Селла лежит сходимость по времени сдвигов $f(t+s, x)$ правых частей системы (10) к вектор-функции $g(t, x)$ в соответствующем функциональном пространстве $F::=\{f(t, x)\}$ правых частей (10), а в основу определения Н.Г. Четаева о предельных системах кладется обычная сходимость по времени при $t \rightarrow +\infty$ в евклидовом пространстве возмущающей функции. Понятие предельной в смысле Селла системы существенно зависит от выбранной топологии (метрики) в пространстве F .

В главе приведены теоремы, характеризующие метод предельных в смысле Селла уравнений для исследования нелинейных динамических систем. Развита комбинированный метод на основе обобщенных функций Ляпунова и предельных уравнений. Доказаны теоремы, являющиеся обобщениями теорем А.А. Шестакова о предельных уравнениях. Получена следующая теорема.

Теорема 6. Пусть выполнены условия: 1) для системы (10) множество $\Omega(f)$ компактно, где $\Omega(f) ::= \{g \in C(R^+ \times W, R^n) : \exists \{\tau_n\} \subset R^+, \tau_n \rightarrow \infty, \{f_{\tau_n}\} \rightarrow g \text{ в компактно открытой топологии}\}$; 2) существуют обобщенная функция Ляпунова $V(x)$ и окрестность W состояния равновесия $x=0$ системы (10) такие, что $V(0)=0, V(x)>0 \forall (x \neq 0) \in W$; 3) для любого $x \in W$ существует выпуклое компактное множество $K(x) \subset R^n$ такое, что а) $f(t, x) \in K(x) \forall t \geq t_0 \geq 0$, б) из включения $y \in K(x)$ следует одно из двух условий: $(D^+V(x))^T y < 0$ или $y=0$, где D^+V – правая верхняя производная Дини; 4) для любого $\delta > 0$ существуют числа $a > 0$ и b такие, что $\int_{t_0}^t \|f(s, x)\| ds \geq a(t - t_0) + b$ для любого $x \in W$ при $\|x\| \geq \delta$. Тогда состояние равновесия $x=0$ системы (10) равномерно асимптотически устойчиво.

Рассмотрены предельные свойства динамической системы, описываемой нелинейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in U, \quad (12)$$

где отображение f непрерывно по совокупности (x, u) и измеримо по t , а семейство U всех допустимых управлений состоит из всех измеримых по Лебегу функций $u: R \rightarrow M$, где M – локально компактное метрическое пространство. Предполагается, что для каждого допустимого управления $u(t) \in U$ и каждой пары $(t_0, x_0) \in R \times R^n$ начальная задача

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (13)$$

имеет единственное решение $x(t, t_0, x_0, u)$, определенное для всех $t \in R^+$.

Исследованы предельные свойства и инвариантность относительно семейства допустимых управлений. Для управляемых систем рассмотрен

вопрос существования предельных уравнений и установлены условия несмещенности относительно релаксированных управлений. Сдвигом f^τ функции f на величину τ называется функция $f^\tau(t, x, u) = f(t + \tau, x, u)$.

Управляемое уравнение

$$\dot{x} = g(t, x, u) \quad (14)$$

называется предельным в смысле Селла для уравнения (12), если существует последовательность $\{\tau_j\}$, $\tau_j \rightarrow \infty$, такая, что для любых t, x, u имеет место

$$\int_0^t g(\mu, x, u) d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^t f^{\tau_j}(\mu, x, u) d\mu.$$

Если семейство предельных уравнений замкнуто относительно сдвигов, т.е. если уравнение (14) – предельное уравнение, то уравнение $\dot{x} = g^\tau(t, x, u)$ – предельное уравнение для любого $\tau \in R$.

Доказано, что если $S(t, 0, z; r, g)$ – динамическая система, порожденная уравнением вида (12), $x = x(t)$ – решение задачи (13), u – допустимое управление, то для каждого $z \in \Omega(x)$ существуют предельное в смысле Селла уравнение (14) и релаксированное управление r такие, что $S(t, 0, z; r, g) \in \Omega(x) \forall t \in R^+$.

В заключении диссертации перечислены следующие результаты, выносимые на защиту.

1. Дано развитие метода обобщенных функций Ляпунова и метода предельных уравнений исследования управляемых неавтономных динамических систем.

2. Получены необходимые и достаточные условия наличия предельных циклов и автоколебаний в нелинейных динамических системах непрерывного и дискретного типов.

3. Получены достаточные условия технической устойчивости фазового множества относительно определяющих совокупностей для нелинейной автономной динамической системы.

4. Доказаны признаки технической устойчивости на конечном интервале времени решения нелинейной неавтономной системы при постоянно действующих возмущениях на основе логарифмической нормы и оценок В.М. Алексеева.

5. Разработан алгоритм стабилизации до технической устойчивости нелинейных управляемых динамических систем и исследована техническая устойчивость управляемого гироскопического маятника на заданном интервале времени.

6. Получены достаточные условия устойчивости в смысле Ляпунова состояния равновесия динамических систем, описываемых векторно-матричным уравнением второго порядка с несимметрическими матрицами.

7. Исследованы предельные свойства и получены условия существования предельного уравнения и релаксированного управления для управляемых динамических систем.

Публикации по теме диссертации

а) в научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Дружинина О.В., Мулкиджан¹ Т.С. О существовании предельных циклов и автоколебаний в нелинейных динамических системах // Доклады РАН. 2006. Т. 409. № 3. С. 328–332.

2. Дружинина О.В., Захарова М.В., Мулкиджан Т.С. Оценка безопасности функционирования динамической системы на основе технической устойчивости // Наукоемкие технологии. 2007. № 10. С. 32–40.

3. Дружинина О.В., Климачкова Т.С. О методе предельных уравнений исследования управляемых динамических процессов // Труды института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. 2008. Т. 32 (1). С. 54–57.

4. Климачкова Т.С. Условия устойчивости на конечном интервале времени // Нелинейный мир. 2009. Т. 7. № 2. С. 58–64.

б) в других научных изданиях и сборниках научных трудов:

5. Мулкиджан Т.С. Об основном определении понятия технической устойчивости одного фазового множества относительно другого фазового

¹ Примечание. Мулкиджан – девичья фамилия автора диссертации Климачковой Т.С.

множества // Математическое моделирование транспортных динамических систем: устойчивость и качественный анализ. Межвуз. сб. научн. трудов. М.: РГОТУПС, 2004. С. 41–45.

6. *Мулкиджан Т.С.* Об асимптотической устойчивости в большом механической системы, моделируемой дифференциальным уравнением второго порядка специального вида // Математическое моделирование транспортных динамических систем: устойчивость и качественный анализ. Межвуз. сб. научн. трудов. М.: РГОТУПС, 2004. С. 78–82.

7. *Мулкиджан Т.С.* Исследование устойчивости состояний равновесия динамической системы, описываемой уравнением с несимметрическими матрицами // Устойчивость и качественный анализ математических моделей динамических систем транспорта. Межвуз. сб. научн. трудов. М.: РГОТУПС, 2005. С. 45–48.

8. *Мулкиджан Т.С.* Фазовый портрет траекторий трехмерной нелинейной системы // Качественное и численное исследование математических моделей динамических систем. Межвуз. сб. научн. трудов. М.: РГОТУПС, 2006. С. 41–43.

9. *Дружинина О.В., Мулкиджан Т.С.* О частичной прочности состояния равновесия динамической системы, обладающей первыми интегралами // Качественное и численное исследование математических моделей динамических систем. Межвуз. сб. научн. трудов. М.: РГОТУПС, 2006. С. 64–68.

10. *Дружинина О.В., Мулкиджан Т.С.* Структура некомпактного минимального множества непрерывной динамической системы // Качественное и численное исследование математических моделей динамических систем. М.: РГОТУПС, 2007. С. 92–95.

11. *Масина О.Н., Дружинина О.В., Мулкиджан Т.С.* О предельных свойствах и инвариантности управляемых динамических процессов // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. М.: ВЦ РАН, 2008. Вып. 10. С. 55–63.

12. *Дружинина О.В., Климачкова Т.С.* О дивергентном методе оценки числа предельных циклов динамической системы // Известия РАЕН. Дифференц. уравнения. 2008. № 13. С. 82–84.

13. *Климачкова Т.С.* О проблеме исследования технической устойчивости управляемой динамической системы // Избранные вопросы современного естествознания. Межвуз. сб. научн. трудов. М.: МИИТ, 2009. С. 135–139.

в) публикации в сборниках трудов научных конференций:

14. *Мулкиджан Т.С.* О технической устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Proc. of the International workshop «Applications of the

«Mathematica» system to social processes and mathematical physics». Wyssza szkola finansow i zarzadzania w Siedlcach, Polska; Брестский гос. ун-т, 2003. С. 152–154.

15. Мулкиджан Т.С. О характере устойчивости состояния равновесия неконсервативной динамической системы // Тез. докл. XLI Всероссийской конф. по проблемам математики, информатики, физики и химии. М.: РУДН, 2005. С. 13–14.

16. Мулкиджан Т.С. О нахождении амплитуды, фазы и частоты для математической модели, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка // Тез. докл. XLII Всероссийской конф. по проблемам математики, информатики, физики и химии. М.: РУДН, 2006. С. 66.

17. Дружинина О.В., Мулкиджан Т.С. О прочности траекторий динамических систем по отношению к части фазовых переменных // Тез. докл. IX Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Н. Новгород: ННГУ, 2006. С. 49.

18. Мулкиджан Т.С. Качественное исследование механических систем, моделируемых линейными неавтономными дифференциальными уравнениями второго порядка // Труды Международной Четаевской конференции. Иркутск: ИДСиТУ СО РАН, 2007. Т. 2. С. 156–164.

19. Мулкиджан Т.С. Об условиях наличия предельных циклов и автоколебаний для нелинейных динамических систем непрерывного и дискретного типов // Тез. докл. Международного конгресса «Нелинейный динамический анализ-2007». СПб.: СПбГУ, 2007. С. 232.

20. Мулкиджан Т.С. Об условиях устойчивости на конечном интервале времени // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления. Тез. докл. X Международного семинара им. Е.С. Пятницкого. М.: ИПУ РАН, 2008. С. 210–212.

21. Мулкиджан Т.С. Об алгоритмах исследования технической устойчивости математических моделей динамических систем // Тез. докл. XLIV Всероссийской конф. по проблемам математики, информатики, физики и химии. М.: РУДН, 2008. С. 48.

22. Мулкиджан Т.С. О методе предельных уравнений изучения управляемых динамических процессов // Тез. докл. Всероссийской научно-практической конф. «Инженерные системы–2008». М.: РУДН, 2008. С. 148–149.

23. Кузьмина Т.И., Мулкиджан Т.С. Вопросы устойчивости и ограниченности решений динамических систем // Тез. докл. XX межвузовской конф. «Актуальные проблемы естествознания». М.: РГОТУПС, 2008. С. 23.