Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук

На правах рукописи

Докукин Александр Александрович

Синтез полиномов над экстремальными алгоритмами вычисления оценок

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2008г

Работа выполнена на кафедре математических методов прогнозирования факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и в отделе математических проблем распознавания и методов комбинаторного анализа ВЦ РАН.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН Журавлев Юрий Иванович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. РАН Матросов Виктор Леонидович
	кандидат физико-математических наук, зам. директора НИИ СИ РАН Кольцов Пётр Петрович
Ведущая организация:	Московский физико-технический институт

Защита диссертации состоится «___» _________ 2008 г. в ______ на заседании диссертационного совета Д002.017.02 Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук (119333, г.Москва, ул. Вавилова, 40, конференц-зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан «___» _________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д. ф.-м. н., профессор Рязанов В.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория распознавания является важной областью прикладной математики. Это обусловлено наличием прикладных областей, таких как медицина, социология, биология, химия, геология, экономика, в которых невозможно строить классические математические модели. Тем не менее, задачи из этих областей успешно решаются на основе прецедентного описания систем и процессов.

Под прецедентами понимается набор значений параметров, характеризующих состояние объекта, и соответствующих им зависимых параметров, полученных экспериментально. Требуется восстановить значение зависимых переменных в новых, не измеренных ранее, точках. При этом ключевой особенностью задач распознавания является малое число прецедентов и большая размерность.

В общем виде обучение метода распознавания состоит в поиске оптимального относительно заданного функционала качества алгоритма в некотором параметрическом семействе. Значение функционала вычисляется на множестве прецедентов. Сами параметрические семейства алгоритмов сформировались уже к концу 50-х годов прошлого века. Среди них можно выделить класс алгоритмов вычисления оценок (АВО), разработанный Ю.И. Журавлевым. Наряду с практическими приложениями, АВО использовался как некий теоретический язык описания методов распознавания.

Важным этапом развития теории распознавания стало создание Ю.И. Журавлевым алгебраического подхода, что позволило строить достаточно богатые и просто устроенные семейства алгоритмов как алгебраические замыкание параметрических семейств. В частности, было показано, что среди полиномов над АВО для любой регулярной задачи существует корректный (безошибочный) алгоритм.

Этот факт вызвал интерес к использованию полиномиальных конструкций при решении прикладных проблем. При этом возникают новые задачи, среди которых основной является уменьшение сложности корректного полинома. Значительное количество работ посвящено оценке его степени и числа слагаемых. Этой задачей занимались: Ю.И. Журавлёв, И.В. Исаев, В.Л. Матросов, Т.В. Плохонина, К.В. Рудаков, А.С. Дьяконов. Важные результаты о связи сложности полиномиальных алгоритмов с устойчивостью распознавания также получены Ю.И. Журавлёвым и В.Л. Матросовым.

Целью настоящей работы в рамках указанной проблематики является создание новой процедуры оптимизации АВО, пригодной для получения качественных слагаемых распознающего полинома, и разработка на её основе собственно алгоритма распознавания, включая программную реализацию.

Методика исследования. В диссертации используются методы алгебраической теории распознавания образов, дискретной оптимизации, элементы комбинаторного анализа.

Научная новизна. В настоящей диссертации предложена новая схема оптимизации АВО, для которой разработан оптимальный метод и получены оценки сложности. Схема включает использование нового функционала качества, а именно, высоты алгоритма (разности минимума правильных оценок и максимума неправильных), в отличие от доли правильно распознанных прецедентов. Также использован новый набор параметров для оптимизации — пороги функции близости.

Кроме того, разработан и реализован программно новый метод распознавания в классе полиномов второй степени над АВО, принципиальной особенностью которого является использование быстрого приближённого метода поиска слагаемых максимальной высоты.

Практическая ценность. Одним из результатов диссертационной работы является программная реализация разработанного метода распознавания «АВО-полином», продемонстрировавшего высокое качество работы на ряде реальных прикладных задач в сравнении с другими методами.

Также в рамках исследования разработан и реализован вспомогательный метод генерации достаточно разнообразных тестовых выборок с заданным по построению АВО максимальной высоты, что позволяет проводить дальнейшее исследование различных приближённых схем оптимизации.

Апробация работы. В основу диссертационной работы положены результаты, полученные автором в ходе исследований, проводимых в рамках НИР по проектам:

1. Российский фонд фундаментальных исследований

- проект 02-01-00558-а «Индуктивные методы построения корректных или высокоточных алгоритмов распознавания в алгебраических и логических моделях»,
- проект 03-07-06141-мас «Программа поддержки молодых ученых (для проекта 02-07-90134)»,
- проект 03-01-00580-а «Разработка и исследование методов поиска систем устойчивых закономерностей в эмпирических данных»,
- проект 04-01-08045-офи_а «Мультиалгоритмическая поддержка принятия решений в задачах распознавания и прогнозирования»,
- проект 05-01-00332-а «Конструирование и исследование иерархии моделей типа вычисления оценок и алгебр над ними»;

2. Международная ассоциация содействия сотрудничеству с учёными из новых независимых государств бывшего Советского Союза (ИНТАС), проект YSF 03-55-1969 «Developement of fast methods for construction of correct algorithms of minimal complexity (optimal correct algorithms) in context of algebraic approach for pattern recognition».

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

1. 11-й всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов (ММРО-11)», 2003, Пущино.
2. 12-й всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов (ММРО-12)», 2005, Звенигород.
3. 7-й международной конференции «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии», 2004, Санкт-Петербург.
4. 13-й всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов (ММРО-13)», 2007, Санкт-Петербург.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ, в их числе: 4 статьи в журналах, входящих в перечень, рекомендованный ВАК России; 4 статьи в других российских и иностранных журналах; 6 статей в сборниках трудов международных и всероссийских конференций. В списке публикаций автореферата приведено 10 работ, отражающих основное содержание диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Объем основного текста работы – 102 страницы, список литературы включает 38 наименований.

Личный вклад автора. Все новые теоретические результаты работы, в частности, разработка схемы и методов оптимизации высоты АВО и метода распознавания «АВО-полином», верхние оценки сложности, получены лично автором. При формулировке и доказательстве утверждений раздела 4.5 автор активно консультировался с В.К. Леонтьевым.

Практические результаты, а именно программная реализация всех методов, включая вспомогательные, также получены автором самостоятельно.

Результаты, выносимые на защиту:

- схема оптимизации алгоритмов вычисления оценок, основанная на максимизации высоты АВО по порограм функции близости;
- оптимальный алгоритм максимизации высоты АВО, оценка его сложности;
- метод генерации тестовых выборок для проверки качества приближённых алгоритмов оптимизации высоты АВО;
- быстрый приближённый алгоритм оптимизации высоты АВО;
- схема конструирования и минимизации степени корректного полинома на основе оптимальных слагаемых;
- метод распознавания «АВО-полином».

Краткое содержание работы

Во введении обозначена тема исследования, обоснованы её актуальность, новизна, практическая значимость; даны краткие сведения о методах исследования, структуре работы.

Глава 1 является вводной. В ней приводятся определения задачи распознавания образов и алгоритма вычислений оценок (АВО), вводится новое определение обобщённого АВО.

Рассматриваются две выборки векторов из n-мерного признакового пространства: обучающая и контрольная. Для определенности предполагается, что первая содержит m объектов: $S_1, ..., S_m$, а вторая – q: $S^1, ..., S^q$.

Предполагается также, что множество допустимых объектов разбито на l классов. Классификация объекта S задается информационным вектором $\alpha(S) = (\alpha_1(S), ..., \alpha_n(S))$ по системе предикатов $P_j(S)$–«$P(S) = S \in K_j$». Классификация всех объектов известна – требуется построить алгоритм, который, используя информацию об обучающей выборке $I_0 = \{S_1, ..., S_m, \alpha(S_1), ..., \alpha(S_m)\}$, восстанавливал бы классификацию контрольной.

Таким образом, задача распознавания Z определяется совокупностью из начальной информации и контрольных объектов $Z = Z(I_0, S^1, ..., S^q)$.

В работах Ю.И. Журавлёва семейство алгоритмов вычисления оценок (АВО) определяется следующим образом:

1. Каждому признаку приписывается некоторый вес p_i, $i = 1, ..., n$.

2. Выделяются некоторые подмножества множества признаков, которые называются опорными. Их совокупность обозначается Ω_A. Каждому опорному множеству $\omega \in \Omega_A$ приписывается вес, как сумма весов входящих признаков.

3. Вводится функция близости двух объектов по опорному множеству $B_\omega(S, S')$. Если не оговорено особо, везде далее будет использоваться пороговая функция близости, с порогами $\varepsilon_i, i = 1, ..., n$.

4. Свой вес $\gamma(S_j)$ приписывается каждому объекту S_j обучающей выборки $j = 1, ..., m$.

5. Оценка объекта за класс вычисляется по следующей формуле:

$$\Gamma_j(S^i) = x_1\Gamma_1^j(S^i) + x_0\Gamma_0^j(S^i), \tag{1}$$

$$\Gamma_1^j(S^i) = \frac{1}{Q_1}\sum_{S\in\tilde{K}_j}\gamma(S)\sum_{\omega\in\Omega_A}p(\omega)B_\omega(S, S^i), \tag{2}$$

$$\Gamma_0^j(S^i) = \frac{1}{Q_0}\sum_{S\in C\tilde{K}_j}\gamma(S)\sum_{\omega\in\Omega_A}p(\omega)\overline{B}_\omega(S, S^i). \tag{3}$$

Здесь использованы следующие переменные и обозначения:

$\tilde{K}_j = K_j \bigcap\{S_1, ..., S_m\}$ - множество объектов обучающей выборки из j-го класса; $C\tilde{K}_j$ - дополнение j-го класса в обучающей выборке, т.е. $C\tilde{K}_j = \{S_1, ..., S_m\} \setminus \tilde{K}_j$; $\overline{B}(S, S^i) = 1 - B(S, S^i)$; $x_1, x_0 \in \{0, 1\}$ – коэффициенты; Q_0, Q_1 - также коэффициенты, отвечающие за нормировку.

6. Алгоритм вычисления оценок определяется как произведение $A = B \cdot C$, где $B(I_0, S^1, ..., S^q) = \|\Gamma_{ij}\|_{q\times l} = \|\Gamma_j(S^i)\|_{q\times l}$, $C(\|\Gamma_{ij}\|_{q\times l}) = \|\beta_{ij}\|_{q\times l}$, B – распознающий оператор, C – решающее правило, $\beta_{ij} \in \{0, 1, \Delta\}$ – окончательный ответ о принадлежности объекта S^i классу K_j (нет, да, не известно).

В диссертации обобщается эта конструкция. Формально обобщённый АВО определяется следующим образом. Вводится предикат принадлежности объекта классу – $P_1(S, K_j)$, и предикат близости двух объектов объектов – $P_2(S, S')$:

$$P_1(S, K_j) = \begin{cases} 1 & , S \in K_j \\ 0 & , S \notin K_j \end{cases}, \tag{4}$$

$$P_2(S, S') = B_\omega(S, S'). \tag{5}$$

Применительно к каждой тройке (S, S', K_j), такой что $S' \in K_j$, пара предикатов $(P_1(S, K_j), P_2(S, S'))$ может принимать четыре различных значения, каждому из которых сопоставляется коэффициент: $x_{00}, x_{01}, x_{10}, x_{11} \geq 0$.

Формулы оценки объекта за класс из пункта 5 определения АВО можно переписать, воспользовавшись стандартными обозначениями:

$$\Gamma^j(S^i) = \sum_{\alpha=0,1,\beta=0,1} (-1)^{\alpha+\beta} x_{\alpha\beta} \cdot$$
$$\cdot \sum_{S\in\{S_1,\dots,S_m\}} P_1^\alpha(S, K_j)\gamma(S) \sum_{\omega\in\Omega_A} p(\omega) P_2^\beta(S, S^i). \tag{6}$$

Глава 2 также содержит вводные сведения об операциях над АВО и алгебраическом замыкании семейства из трудов Ю.И. Журавлёва.

Любой алгортм распознавания образов A может быть представлен в виде композиции алгоритмов B и C, где $B : (I_0, S^1, ..., S^q) \to \|\beta_{ij}\|_{q\times l}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq q, 0 \leq j \leq l$, $C(\|\beta_{ij}\|_{q\times l}) = \|\alpha_{ij}\|_{q\times l}, \alpha_{ij} \in \{0, 1, \Delta\}$. На множестве распознающих операторов $\{B\}$ вводятся операции сложения, умножения и умножения на скаляр. Рассматривается замыкание $M\{B\}$ множества $\{B\}$ относительно этих операций а также его замыкания конечной степени.

В главе 3 приводится основная теорема о существовании корректного, т.е. не делающего ошибок на контрольной выборке, алгоритма из алгебраического замыкания АВО, и формулируется обобщённая теорема, расширяющая класс задач, обладающих корректным алгоритмом. Кроме того, вводится новая схема обучения, не требующая построения отдельного оператора для каждого контрольного объекта, что в ряде задач приводит к значительной экономии вычислительных ресурсов.

В работах Ю.И. Журавлёва вводятся следующие условия регулярности задач и доказывается существование для них корректного алгоритма:

1. $\tilde{K}_u \neq \tilde{K}_t$, $u = 1, 2, ..., l$, $t = 1, 2, ..., u-1, u+1, ..., l$ (условие неравенства классов);
2. $S^v \not\approx S^w$, $v = 1, 2, ..., q$, $w = 1, 2, ..., v-1, v+1, ..., q$ (условие попарной неизоморфности контрольных объектов);
3. $\{S_1, ..., S_m\} \cap \{S^1, ..., S^q\} = \emptyset$ (условие отсутствия обучающих объектов в контрольной выборке).

В [1] автором диссертации было показано, что условие регулярности можно ослабить, и рассматривать обобщенные регулярные задачи, удовлятворяющие только пунктам 1 и 2 определения регулярности.

Теорема 1. *Алгебраическое замыкание $M(A)$ подкласса алгоритмов вычисления оценок корректно над множеством обобщённых регулярных задач.*

В работах Ю.И. Журавлёва при ограничениях 1, 2 и 3 явно строится совокупность алгоритмов в линейной алгебре, таких что для каждого контрольного объекта $S^i, i = 1, 2, ..., q$ и для каждого класса $K_j, j = 1, 2, ..., l$ в ней существует распознающий оператор B^{ij}, строящий матрицу оценок $\|\Gamma_{uv}\|_{q \times l}$, в которой $\Gamma_{ij} > N, \Gamma_{uv} < \varepsilon$ при $(u, v) \neq (i, j)$, где N, ε – любые заданные наперёд числа. Необходимо отметить, что это весьма затрудняет применение теоремы в качестве инструмента построения корректного алгоритма для конкретных задач распознавания, поскольку в этом случае надо построить $l(l-1) + lq(q-1)$ элементарных операторов АВО. Здесь $Q_j = l(l-1)$ – количество элементарных операторов, необходимых для построения слагаемых B_j, выделяющих оценку всех объектов за j-й класс, $Q_i^j = lq(q-1)$ – количество элементарных операторов, необходимых для построения слагаемых B_i^j, выделяющих оценку i-го объекта за j-й класс. В реальной задаче известна классификация контрольной выборки, поэтому необходимо выделять только некоторое их подмножество, которое является допустимым. Кроме того, можно выделять допустимые объекты группами.

В качестве дополнения к теореме 1 приводится модифицированная схема построения корректного АВО для заданной задачи, позволяющая существенно упростить процесс. Для новой схемы получены следующие оценки:

- $Q_i^{j\prime} \leq \frac{1}{4}lq^2$, где $Q_i^{j\prime}$ – количество элементарных операторов, необходимых для построения слагаемых при использовании разбиения объектов на допустимые и недопустимые пары;
- $Q_j' = l$, если в контрольной выборке объектов каждый класс содержит хотя бы один объект, не принадлежащий ни одному из остальных классов;
- $Q_i^{j\prime} \leq lq(k+1)$, если в контрольной выборке для любого объекта $S^i = (a_1, ..., a_n)$ существует обучающий объект $S_t = (b_1, ..., b_n)$ и признак u, такие, что в проекции на этот признак не более k контрольных объектов изоморфны относительно данного обучающего объекта.

Вводится определение высоты АВО как разности между минимальной оценкой правильной пары (объект, класс), т.е. пары, объект которой принадлежит соответствующему классу, и максимальной оценкой неправильной пары.

Глава 4 посвящена построению оптимального метода поиска АВО максимальной высоты. Эта задача сводится к поиску таких значений ε-порогов функции близости, которые максимизируют функционал:

$$\varepsilon^* = \arg \max_{\varepsilon \in (0,\infty)^n} \big(\min_{(i,j)\in M_1} \Gamma_j(S^i) - \max_{(u,v)\in M_0} \Gamma_v(S^u) \big). \tag{7}$$

Далее показывается, что исходная задача оптимизации в n-мерном вещественном пространстве может быть сведена к перебору конечного числа элементов этого пространства, и строится процедура такого перебора.

В разделе 4.1 описывается построение вспомогательной выборки, которая позволяет нагляднее интерпретировать перебираемые точки пространства и результаты работы методов [5]. Для каждой пары (S_i, S^u), $1 \leq i \leq m, 1 \leq u \leq q$, объектов из обучающей и контрольной выборки во вспомогательную задачу объект добавляется $|S_i - S^u|$. Модуль в данном случае понимается как покоординатная операция. Каждый объект заносится в один из

2q классов. Если S_i и S^u принадлежат одному классу, то объект относится в класс 1_u, иначе в класс 0_u. В некоторых ситуациях, когда будут не важны различия между объектами, порожденными различными контрольными векторами, вся совокупность классов $1_i, 1 \leq i \leq m$ называется первым классом, а $0_u, 1 \leq u \leq q$ - нулевым.

Области вида $[0, a_1] \times ... \times [0, a_n]$, $a_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n$ называются прямоугольниками. Вводятся определения дополнений и надстроек прямоугольника. Выделяются некоторые специальные виды прямоугольников: прямоугольник называется правильным, если это минимальный по вложению прямоугольник, содержащий заданную совокупность объектов класса 1; прямоугольник называется объемлющим, если это минимальный по вложению прямоугольник, содержащий все объекты задачи Z'.

Рангом прямоугольника называется количество объектов класса 1, содержащихся в нем. Качеством прямоугольника называется высота соответствующего ему АВО. Прямоугольник называется оптимальным для задачи Z, если он имеет максимальное качество среди всех прямоугольников.

Следующая теорема [3] описывает структуру оптимальных порогов близости.

Теорема 2. *Справедливо равенство:*

$$\max_{\varepsilon \in [0,\infty]^n} \left(\min_{(i,j) \in M_1} \Gamma_j(S^i) - \max_{(u,v) \in M_0} \Gamma_v(S^u) \right) = \\ = \max_{\varepsilon \in \Psi} \left(\min_{(i,j) \in M_1} \Gamma_j(S^i) - \max_{(u,v) \in M_0} \Gamma_v(S^u) \right), \quad (8)$$

здесь Ψ – множество всех правильных прямоугольников.

Теорема 2 вместе с переходом к вспомогательной задаче является одним из основных теоретических результатов диссертации и позволяет свести задачу поиска АВО максимальной высоты к перебору правильных прямоугольников вспомогательной задачи.

Сложность метода будет оцениваться через количество необходимых вычислений высоты алгоритма при некоторых порогах близости. Оптимальным будет называться метод, позволяющий перебрать все правильные прямоугольники не более, чем по одному разу.

В разделе 4.2 приводится несколько схем поиска оптимального прямоугольника, включая распространённые методы оптимизации бимонотонных разложений функций и показывается, что они не являются оптимальными в рамках данного определения.

В разделе 4.3 строится алгоритм перебора правильных прямоугольников вспомогательной задачи для n-мерного случая, в предположении доказанности результатов **раздела 4.4**.

Первым шагом к оптимальной процедуре перебора правильных прямоугольников является разделение их совокупности на подмножества разного ранга. Таким образом, перебираются все возможные ранги, начиная с наибольшего, равного количеству объектов w, и на каждом шаге применяется специальный алгоритм, называемый в дальнейшем рекурсивным. Поскольку прямоугольник ранга k не может порождать АВО большей высоты, то перебор мощностей можно останавливать на уровне максимальной найденной к этому моменту высоты.

Итак, пусть зафиксирован ранг правильного прямоугольника k. Это число далее будет также называться размером скользящего окна. Дальнейшая идея метода заключается в последовательном исключении признаков. Зафиксировав те значения ведущего признака, которые позволяют образовать прямоугольник ранга k, можно перейти к проекции вспомогательной задачи меньшей размерности. Повторяя этот процесс, в итоге достигнем размерности 2, для которой разработан специальный алгоритм.

Получены оценки сложности оптимального алгоритма, что является вторым основным теоретическим результатом диссертации.

Теорема 3. *Число вычислений высоты АВО $I(n, w, k)$ для n признаков w объектов и размера окна k удовлетворяет следующей оценке:*

$$I(n, w, k) \leq \frac{(w-k+1)^{n-1}}{(n-1)!} + o((w-k+1)^{n-1}). \tag{9}$$

Сложность алгоритма $I(n, w)$ или общее число вычислений высоты АВО не превосходит

$$I(n, w) \leq \frac{w^n}{n!} + o(w^n). \tag{10}$$

Кроме того, доказывается, что оценка сложности для случая нескольких опорных множеств равна сумме оценок алгоритмов, каждый из которых оперирует с одним опорным множеством. Следовательно, справедливо неравенство:

$$I'(n, w) \leq rI(max_{i=1,\dots,r}|\omega_i|, w).$$

Этот факт позволяет уменьшить сложность вычислений для некоторых специальных видов систем опорных множеств. В частности, к таким видам относится разбиение множества признаков на непересекающиеся подмножества, а такое семейство покрывает все случаи, использованные в первом доказательстве существования корректного полинома.

В разделе 4.4 приводится алгоритм для двумерного случая, доказательство его оптимальности и оценки сложности.

Наконец, **в разделе 4.5** приводятся некоторые соображения о сложности поиска [6].

Вводится отношение частичного порядка на множестве прямоугольников и рассматривается одномерный случай, при котором правильные прямоугольники образуют цепь. Кроме того, рассматривается контрольная выборка из одного элемента. Таким образом, задача поиска оптимального порога сводится к нахождению максимума функции $f(x) = x - g(x)$, заданной на конечном множестве точек $\{1, ..., t\}$, где $g(x)$ – некоторая монотонная функция. Точки $\{1, ..., t\}$ соответствуют правильным прямоугольникам или, что в данном случае равносильно, объектам класса 1 вспомогательной задачи. Функция $g(x)$ определяется количеством объектов класса 0, попадающих между соседними границами. Показывается, что для восстановления функции $f(x)$ необходимо знание ее значений «практически»во всех точках.

Утверждение 1. *Пусть функция $f(x) = x - g(x)$ определена на множестве $T = \{1, ..., t\}$, $g(x)$ монотонна, $0 \leq g(x) \leq G \geq t$, и k - минимальное количество точек, которых достаточно для определения значения $f(x)$ на всем множестве T. Тогда справедливо неравенство*

$$k \geq \frac{t \ln 2}{\ln t} - 2.$$

Это утверждение даёт основание отказаться от поиска точного максимума высоты, который, видимо, требует перебора значительной части правильных прямоугольников, и искать приближенные схемы, позволяющие быстро работать с большими размерностями. Такие схемы будут предложены в **в главе 5**.

Поскольку в общем случае не найдено способа за приемлимое время построить оптимальный алгоритм для заданной выборки, **в разделе 5.1** описывается метод построение достаточно разнообразных тестовых задач с заданным по построению решением.

Построение выборки с заданным оптимальным прямоугольником производится на основании доказанных достаточных условий несокращаемости и неулучшаемости прямоугольников. Прямоугольник называется несокращаемым, если никакой его подпрямоугольник не обладает большим качеством, и неулучшаемым, если не существует прямоугольника большего качества с вершиной, лежащей в дополнении исходного. Строится несокращаемый прямоугольник, который затем пополняется таким образом, чтобы оставаться неулучшаемым.

В разделах 5.2-5.4 приводятся описания приближённых методов поиска АВО максимальной высоты.

Жадный алгоритм. В качестве исходного прямоугольника берётся объемлющий правильный прямоугольник. После этого на каждом шаге рассматриваются все правильные подпрямоугольники максимального ранга, из которых выбирается один, наилучшего качества. Этот прямоугольник выбирается в качестве основного для следующего шага. Метод останавливается, когда качество найденного прямоугольника превышает текущий ранг.

В методе покоординатного подъема множеством прямоугольников, перебираемых на каждом шаге, служит множество правильных прямоугольников, отличающихся значением одной границы. В качестве стартового прямоугольника также рассматривается объемлющий правильный прямоугольник. Далее все признаки перебираются циклически. На каждом шаге фиксируются значения всех границ прямоугольника, кроме соответствующей текущему признаку, и перебираются все правильные прямоугольники, которые можно образовать с этим набором границ. Для следующего шага выбирается

Таблица 1: Качество работы методов.

Метод	Количество совпадений	Отношение высот > 90%
Жадный	3	8
Покоординатный	9961	10000
Генетический 1	45	1737
Генетический 2	4555	9602
Генетический 3	3565	9843

Таблица 2: Время работы методов.

Метод	Время обработки 10000 задач, с
Жадный	22
Покоординатный	42
Генетический 1	108
Генетический 2	2228
Генетический 3	236

один, обладающий максимальной высотой. Метод останавливается, если за количество шагов равное количеству признаков подряд не произошло увеличение качества.

Генетический алгоритм оперирует небинаризованными векторами границ прямоугольников, с естественными операциями скрещивания и мутации.

Раздел 5.5 посвящён сравнительному тестированию методов. Проводился следующий тест: были сгенерированы 10000 таблиц с заданным оптимальным прямоугольником. К каждой из таблиц применялись по очереди жадный алгоритм, метод покоординатного подъема и три генетических алгоритма с разным набором параметров. В таблицах 1, 2 приводится количество задач, на которых произошло точное совпадение найденного результата с оптимальной высотой; количество задач, на которых отношение высот составило более 90%; и время обработки.

Метод покоординатного подъёма лидирует с большим отрывом.

Глава 6 посвящена реализации метода распознавания на базе элементарных оптимальных АВО.

В **разделе 6.1** описывается возможная схема уменьшения степени корректного полинома для конкретной задачи. Схема основана на точном методе максимизации высоты, и поэтому практически не реализовывалась. Вместо неё в **разделе 6.2** предлагается другой, быстрый, метод построения полинома, не являющегося корректным, но демонстрирующего хорошее качество на реальных задачах.

Метод построения корректного полинома над АВО должен последовательно построить базовый набор алгоритмов и собственно полином, минимальной, по возможности, степени. В **разделе 6.1** рассматривается специальный класс АВО, состоящий из всех возможных разностей двух операторов $\{A-B\}$, где A, B - АВО. Показано, каким образом точный метод можно модифицировать для поиска алгоритма максимальной высоты в $\{A-B\}$. Поскольку Ю.И. Журавлёвым доказано, что в этом классе существует набор базисных операторов, они будут найдены точным методом.

Далее к полученному набору применяется жадный метод оптимизации по вектору степеней слагаемых полинома

$$\sum_{i=1}^{q}(c_iB_i)^{k_i}.$$

Здесь B_i – найденные элементарные слагаемые, c_i – нормирующий коэффициент, однозначно определяемый по слагаемому B_i, k_i – степень слагаемого, которую надо найти.

В работе Ю.И. Журавлёва и И.В. Исаева, показано, что имея базис, корректный полином можно построить, взяв достаточно большие степени слагаемых. Оптимизация проводится по переменным $(k_1, ..., k_q) \in Z^q$, $k_i > 0$. Необходимо минимизировать величину $\sum_i k_i$ (либо $max_i(k_i)$), при этом должны быть выполнены неравенства, обеспечивающие корректность полинома, а именно:

$$\|\sum_{i=1}^{q}(c_iB_i)^{k_i}(S_j)\|_{K(S_j)} > \|\sum_{i=1}^{q}(c_iB_i)^{k_i}(S_j)\|_d, j = 1, ..., q; d \neq K(S_j);$$

где $K(S_j)$ – номер класса, которому принадлежит j-й контрольный объект, $\|B(S)\|_d$ – оценка объекта S за класс K_d оператором B. Взяв в качестве начального решения полином первой степени, и последовательно увеличивая на единицу одну из степеней таким образом, чтобы исключить максимум неправильных неравенств, получим в итоге корректный полином (аналогичная схема используется для второго функционала).

Основным недостатком схемы является низкая скорость при использовании точного метода, либо невозможность гарантировать положительность высоты слагаемых, при использовании приближённых аналогов. Поэтому для решения практических задач применяется другой метод, не приводящий, вообще говоря, к построению корректного полинома. Метод «АВО-полином»был реализован программно, его описание и результаты работы представлены в пунктах **6.2, 6.3**.

Если рассмотреть контрольную выборку, состоящую из одного объекта, то полученный покоординатным подъёмом локально экстремальный АВО, как показывает решение прикладных задач, будет обладать хорошим качеством распознавания в его окрестности. По-видимому, это связано с тем, что выделенный объект получит максимальную разность оценок за свой и чужие классы. В дальнейшем вклад каждого из построенных операторов делится на расстояние до соответствующего контрольного объекта, т.е. финальные оценки вычисляются по формуле:

$$\Gamma_j(S) = \sum_{i=\overline{1,n}} \Gamma_j^i(S)/d(S, S^i),$$

где d – евклидово расстояние.

Метод «АВО-полином»реализован программно. В **разделе 6.3** приводятся результаты его сравнительного тестирования с одиночным алгоритмом вычисления оценок, методом «логические закономерности», линейной машиной. Тестирование проводилось с использованием семи реальных задач, взятых из «UCI Repository of Machine Learning Databases»: Abalone, Breast-canser, Ionosphere, Echocardiogram, Hepatitis, Image, Credit. Все таблицы были заранее разбиты на обучающую и тестовую выборки. Последняя использовалась для проверки качества работы алгоритма и в обучении не участвовала.

Результаты численных экспериментов представлены в таблице 3.

Можно утверждать, что построенный метод «АВО-полином»показал отличный результат.

Таблица 3: Результаты сравнительного тестирования.

Задача	Простой АВО	ЛЗ	ЛМ	АВО-полином
Abalone	57.3	-	**65.5**	62.3
Breast-canser	**96.3**	94.1	95.5	96.1
Ionosphere	81.9	89.6	85.2	**98.7**
Echocardiogram	76.1	59.2	70.4	**77.4**
Hepatitis	79.5	83.1	78.3	**88.0**
Image	89.0	**93.2**	92.7	89.4
Credit	**86.2**	77.9	85.9	**86.2**

Список основных публикаций по теме диссертации

[1] Докукин А.А. *О построении в алгебраическом замыкании одного алгоритма распознавания* // Ж. Выч. Мат. Мат. Физ, 2001, т. 41, №12, стр. 1873–1877.

[2] Докукин А.А. *Индуктивный метод построения корректного алгоритма в алгебрах над моделью вычисления оценок* // Ж. Выч. Мат. Мат. Физ, 2003, т. 43, №8, стр. 1311–1315.

[3] A.A. Dokukin. *One Approach for the Optimization of Estimates Calculating Algoritms* // International Journal „Information Theoris & Applications“, 2003, vol. 10, pp. 465–467.

[4] Докукин А.А. *Об одном подходе к оптимизации АВО* // Доклады 11-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов (ММРО-11)», 2003, стр. 68–70.

[5] Dokukin A.A. Optimal method for constructing of AEC of maximal height in the context of pattern recognition // Pattern Recogn. and Image Analys. V. 15. No. 1. 2005. pp. 49–51.

[6] Докукин А.А. *О сложности поиска оптимального в некотором смысле АВО* // Доклады 12-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов (ММРО-12)», 2005, стр. 299–302.

[7] Докукин А.А. *Об одном методе построения оптимального алгоритма вычисления оценок* // Ж. Выч. Мат. Мат. Физ, 2006, т. 46, №4, стр. 754–760.

[8] Докукин А.А. *О построении выборок для тестирования приближённых методов оптимизации алгоритмов вычисления оценок* // Ж. Выч. Мат.

Мат. Физ, 2006, т. 46, №5, стр. 978–983.

[9] Dokukin A.A. Generilization of the Method for Constructing Maximum-Height Estimate-Calculating Algorithms to Recognition Problems // Pattern Recogn. and Image Analys. V. 16. No. 4. 2006. pp. 689–694.

[10] Докукин А.А. *Индуктивный поиск оптимального алгоритма вычисления оценок* // Доклады 13-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов (ММРО-12)», 2007, стр. 122–124.