

*На правах рукописи*

БЕРЕЗКИН Вадим Евгеньевич

**МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ГРАНИЦЫ ПАРЕТО В  
НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ  
ОПТИМИЗАЦИИ**

Специальность 05.13.18

Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена в Вычислительном центре им. А.А.Дородницына Российской академии наук, отдел математического моделирования экономических систем.

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник Каменев Георгий Кириллович

**Официальные оппоненты:**

доктор технических наук,  
профессор Подиновский Владислав Владимирович

кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник Голиков Александр Ильич

**Ведущая организация:**

Факультет Вычислительной математики и кибернетики МГУ  
им. М.В.Ломоносова

Защита состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2008 г. в \_\_\_ часов на заседании диссертационного совета Д 002.017.04 в Вычислительном центре им. А.А. Дородницына Российской академии наук по адресу: 119333 г. Москва, ул. Вавилова, д.40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2008 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Н.М. Новикова

## **Общая характеристика работы**

**Актуальность темы диссертации.** При анализе математических моделей в процессах планирования и проектирования важную роль играют многокритериальные методы, позволяющие учесть противоречивые требования, предъявляемые к рассматриваемым планам, проектным и конструкторским решениям. Среди таких методов важнейшую роль играют методы многокритериальной оптимизации, в которых заранее известно направление улучшения значений отдельных (частных) критериев. В рамках этих методов изучается множество решений, эффективных по Парето, и соответствующая недоминируемая (паретова) граница множества достижимых критериальных векторов. Один из главных подходов в современной многокритериальной оптимизации представлен методами, направленными на аппроксимацию паретовой границы множества достижимых критериальных векторов и на дальнейшее информирование лица, принимающего решение, о недоминируемых критериальных векторах (работы школ академиков П.С.Краснощечекова, А.А.Петрова, Ю.Г.Евтушенко и др.)

Одним из методов, основанных на аппроксимации паретовой границы, является метод достижимых целей, разрабатываемый в ВЦ РАН начиная с 70-х годов группой исследователей под руководством А.В. Лотова. Этот подход базируется на идее, сформулированной в работах академиков Н.Н. Моисеева и Г.С. Поспелова: для поддержки выбора наиболее перспективных вариантов в задачах проектирования сложных систем следует использовать визуализацию множества реализуемых характеристик объекта проектирования. Компьютерная визуализация этих многомерных множеств должна помочь конструкторам и проектировщикам оценить потенциальные возможности объекта проектирования, выявить связь различных характеристик объекта и найти его перспективные варианты. В методе достижимых целей описанная идея реализуется с использованием предварительной аппроксимации оболочки Эджворта-Парето (ОЭП) и интерактивной визуализации и анимации паретовой границы. Результаты, полученные ранее,

были основаны на использовании полиэдральной аппроксимации выпуклых ОЭП. В то же время, использование метод достижимых целей в нелинейном невыпуклом случае до последнего времени не имело широкого распространения, что, в первую очередь, связано с недостаточной развитостью методов аппроксимации ОЭП множества достижимых критериальных векторов в нелинейном случае, для которого эти множества обычно являются невыпуклыми. В то же время, потенциально важной областью применения МДЦ является его использование в процессе проектирования и анализа сложных технических систем, описываемых, как правило, нелинейными математическими моделями, в том числе технических и производственных систем, а также при анализе нелинейных экономических моделей. Этот факт определяет актуальность данной диссертационной работы, посвященной разработке вычислительных методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето множества достижимых критериальных векторов с целью дальнейшей визуализации паретовой границы в нелинейных невыпуклых задачах многокритериальной оптимизации с числом критериев от трех до семи.

**Целью диссертационной работы** является разработка и изучение методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации, а также их реализация и практическое применение.

**Научная новизна.** Результаты диссертации, полученные автором, являются новыми. Основные из этих результатов следующие:

- 1) В рамках метода достижимых целей предложены новые методы аппроксимации оболочки Эджворта-Парето для нелинейных задач многокритериальной оптимизации.
- 2) Теоретически изучены свойства предложенных многофазных методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето, доказана их сходимость, исследована скорость сходимости и оценена их эффективность.
- 3) Осуществлено экспериментальное изучение предложенных методов, выявлены их варианты, пригодные для практического применения.

**Результаты, выносимые на защиту,** состоят в следующем.

1. В рамках метода достижимых целей предложен комплекс методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето для нелинейных многокритериальных задач принятия решений с 3–7 критериями, в том числе:

- а) однофазный метод, сочетающий случайный поиск с оценкой качества аппроксимации
- б) двухфазные методы, в которых случайный поиск дополняется локальной оптимизацией рассматриваемых решений;
- в) трехфазные методы, основанные на неравномерных выборках, определяемых прообразами точек недоминируемой границы и оценками их значимых окрестностей, построенных на основе использования экстремальных статистик;
- г) генетический метод, отличающийся своей направленностью на улучшение достаточно точной аппроксимации оболочки Эджворта-Парето;
- д) гибридные методы, интегрирующие многофазные методы и генетический метод.

2. Теоретически изучены свойства предложенных многофазных методов, доказана их сходимость и оценена эффективность (совместно с научным руководителем Г.К. Каменевым).

3. Разработаны три системы программного обеспечения на персональном компьютере реализующие метод достижимых целей для нелинейных многокритериальных задач в среде MS Excel, в среде MS Windows на основе Windows API, а также в рамках многомашинного программного комплекса «Метод достижимых целей».

4. Осуществлено экспериментальное изучение предложенных методов, выявлены их варианты, пригодные для практического применения.

5. Разработанные методы применены в процессе решения прикладной задачи поиска разумных вариантов системы охлаждения стали в оборудовании для непрерывной разливки стали.

**Практическая ценность** работы состоит в том, что разработаны три системы программного обеспечения для персонального компьютера, реализующие комплекс методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето для нелинейных задач многокритериальной оптимизации с 3–7 критериями, позволяющий визуализировать паретову границу в прикладных задачах планирования и проектирования, описываемых нелинейными моделями большой размерности. Исследована прикладная задача многокритериального выбора параметров системы вторичного охлаждения стали в процессе ее непрерывной разливки. Результаты диссертации использованы исследованиях, проводимых в рамках проектов РФФИ № 01-01-00530, № 04-01-00662, № 07-01-00472, программы фундаментальных исследований РАН №14 "Фундаментальные проблемы информатики и информационные технологии", программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3 и Государственного контракта «Технологии и программные средства создания систем автоматизации проектирования сложных технических объектов» с Федеральным агентством по науке и инновациям от 15 августа 2005 г. № 02.435.11.1007 (шифр: «ИТ-13.4/003»), а также в рамках сотрудничества РАН и Академии Финляндии.

**Достоверность** полученных результатов подтверждена доказательствами теорем о свойствах предложенных методов, экспериментальной проверкой алгоритмов на модельных и реальных данных.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на 3-й Московской международной конференции по исследованию операций (2001 г.), 4-й Московской международной конференции по исследованию операций (2004 г.), 5-й Московской международной конференции по исследованию операций (2007 г.), на Тихоновской конференции, ВМК МГУ (2006 г.), на Международных семинарах «Практические подходы в многокритериальной оптимизации» (Германия, 2004 и 2006 г.), а также на семинарах в ВЦ РАН, Университета г. Ювяскюля, Университета г. Зиген (Германия).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 14 печатных работ, в том числе две статьи в журналах РАН, три

брошюры, изданные в ВЦ РАН, две статьи в международных журналах, а также три другие публикации за рубежом.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Содержит 185 страниц, включая список литературы из 61 наименований, 168 иллюстраций и шесть таблиц.

### Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели работы, показана научная новизна результатов диссертации и дано краткое описание диссертации по главам. Введение содержит математическую постановку задачи аппроксимации ОЭП. Математически задача многокритериальной оптимизации, рассматриваемая в данной работе, формулируется следующим образом. Пусть заданы  $n$ -мерное линейное пространство решений (параметров объекта)  $R^n$  и  $m$ -мерное линейное пространство  $R^m$  критериальных векторов. Пусть связь между решениями и значениями критериев выбора устанавливается заданным отображением (вектор-функцией)  $f: R^n \rightarrow R^m$ . Пусть  $X \subset R^n$  – заданное множество допустимых решений. Тогда множество достижимых критериальных векторов (также называемое множеством достижимых целей) определяется как  $Y = f(X)$ . Будем для определенности считать, что в задаче представляет интерес увеличение значения каждого из  $m$  критериев при неизменных значениях других (задача многокритериальной максимизации). В этом случае критериальная точка  $y' \in R^m$  доминирует по Парето критериальную точку  $y \in R^m$ , если  $y' \geq y$ , т.е.  $y'_i \geq y_i$ ,  $i=1, \dots, m$ , и  $y' \neq y$ . Недоминируемая по Парето (в дальнейшем, просто недоминируемая или паретова) граница множества  $Y = f(X)$ , определяемая как множество недоминируемых точек  $y \in Y$ , в этом случае имеет вид  $P(Y) = \{y \in Y : \{y' \in Y : y' \geq y, y' \neq y\} = \emptyset\}$ . Под множеством  $P(X)$  парето-эффективных решений понимается подмножество таких решений  $x \in X$ , что  $f(x) \in P(Y)$ . ОЭП определяется как  $Y^* = \{y \in R^m : y \leq f(x), x \in X\}$ . Альтернативное, может быть, более удобное представление ОЭП имеет следующий вид  $Y^* = Y + (-R_+^m)$ , где  $R_+^m$  – неотрицательный конус

пространства  $R^m$ . Аппроксимация ОЭП строится на основе объединения многомерных конусов доминирования  $(-R_+^m)$  с вершинами в точках, близких к паретовой границе. Пусть  $T$  – конечное число точек из множества  $Y=f(X)$  (*база аппроксимации*). Тогда в качестве аппроксимации ОЭП берется множество  $T^* = \bigcup \{y + (-R_+^m) : y \in T\}$ , являющееся объединением конечного числа конусов с вершинами в точках множества  $T$ .

В **главе 1** рассматривается проблема поддержки принятия конструкторских решений на предпроектной стадии процесса проектирования и роль многокритериальных методов в этом процессе. Далее приводится пример многокритериальной задачи, которая должна быть решена в процессе проектирования: дается представление о задаче охлаждения стали в процессе разработки и оптимизации установки для ее непрерывной разливки. В главе показывается, что задача выбора параметров системы охлаждения является нелинейной задачей многокритериальной оптимизации, в которой математическая модель реализована в виде вычислительного модуля. Рассматриваемая задача является задачей многокритериальной оптимизации с четырьмя критериями и 325 параметрами решения.

В первой главе дается качественное описание стохастических адаптивных методов аппроксимации ОЭП, предлагаемых в диссертации и включающих в себя однофазный, двухфазные, трехфазные и генетический методы аппроксимации. Рассматривается также их сочетание в форме так называемых гибридных методов.

Показатели качества аппроксимации, предлагаемые в данной работе, базируются на понятии *полноты аппроксимации* (Г.К.Каменев и Д.Л.Кондратьев, 1992). В рассматриваемом случае под *полнотой* некоторой аппроксимации множества  $Y^*$  множеством  $T^*$  будем понимать вероятность того, что из  $x \in X$  следует  $f(x) \in T^*$ . Полноту будем обозначать  $\eta(T^*)$  (или просто  $\eta_T$ ). Условие  $\eta_T \geq \eta$  означает, что в аппроксимации множества  $Y^*$ , задаваемой базой  $T$  представлена не менее чем  $\eta$ -я доля прообраза. Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность  $T^*$ , которую обозначим

$(T^*)_{\varepsilon}$ . Рассмотрим полноту как функцию от  $\varepsilon$ , т.е. рассмотрим функцию  $\eta_T(\varepsilon) = \eta((T^*)_{\varepsilon})$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Проверка условия  $\eta_T \geq \eta$  проводится эмпирически, на основе генерирования случайных точек из  $X$ . Пусть используется выборка  $H_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ , состоящая из  $N$  случайных равномерно распределенных точек множества  $X$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $\eta_H^N(\varepsilon) = n(\varepsilon) / N$ , где  $n(\varepsilon)$  – число таких элементов выборки, для которых выполняется включение  $f(x) \in (T^*)_{\varepsilon}$ . Тогда (Г.К. Каменев, 2001)

$$P(\eta_T(\varepsilon) > \eta_H^N(\varepsilon) - \delta) \geq \chi^*(\delta, N), \text{ где } \chi^*(\delta, N) = 1 - \exp(-2N\delta^2).$$

Величина  $\chi^*(\delta, N)$  – *надежность* оценки полноты  $\eta_T$  величиной  $\eta$ . На практике наиболее удобной характеристикой оказался *радиус полного покрытия* ( $\varepsilon_{\max}$ ) – минимальная величина  $\varepsilon$ , для которой выборочная полнота равна единице (т.е. образы всех сгенерированных точек  $X$  принадлежат этой  $\varepsilon$ -окрестности аппроксимации).

Однофазный метод аппроксимации ОЭП состоит в следующем. На каждой итерации осуществляется оценка качества полученной ранее аппроксимации  $T^*$  на основе построения выборочной функции полноты  $\eta_H^N(\varepsilon)$ , получаемой на основе образов выборки  $H_N$ . При автоматической остановке метода проверяется, например, выполнение требований к радиусу полного покрытия  $\varepsilon_{\max} < \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  – заданное положительное число. В диалоговом режиме пользователю предоставляется график  $\eta_H^N(\varepsilon)$ , после чего он сам решает, останавливать ли процедуру. Если процедура не останавливается, то из совокупности точек исходной базы аппроксимации и критериальных точек, полученных при оценке полноты, формируется промежуточная совокупность точек, из которой путем выделения недоминируемых точек создается новая база аппроксимации.

При аппроксимации ОЭП в задачах большой размерности или со сложным поведением вектор-функции  $f$  оценки качества аппроксимации, полученные в ходе работы однофазного метода, становятся не действенными, т.е. перестают различать «плохие» и «хорошие» аппроксимации. Поэтому вводится новое отображение  $\Phi: X \rightarrow X$ , которое ставит в соответствие случайной

точке  $x \in X$  некоторую такую «улучшенную» точку  $x' \in X$ , что вектор  $f(x')$  «более близок» к  $P(Y)$ , чем  $f(x)$ . Для суперпозиции функций  $f$  и  $\Phi$  аналогичным образом определим *обобщенную выборочную полноту*  $\eta_N^{\Phi, N}(\varepsilon)$ , равную доле точек  $x \in H_N$ , для которых  $f(\Phi(x)) \in (T^*)_\varepsilon$ .

Двухфазные методы аппроксимации ОЭП состоят в следующем. На каждой итерации осуществляется оценка качества полученной ранее аппроксимации  $T^*$  на основе построения выборочной функции полноты  $\eta_N^N(\varepsilon)$ , получаемой на основе *улучшенных с помощью отображения*  $\Phi: X \rightarrow X$  образов выборки  $H_N$ . В остальном двухфазные методы полностью аналогичны однофазному.

Трехфазные методы отличаются от двухфазных тем, что выборка  $H_N$  является объединением двух выборок, одна из которых генерируется на всем допустимом множестве, а вторая – только в окрестностях точек аппроксимации. При этом первая выборка содержит малое число точек, а вторая – большое число.

Помимо многофазных методов построения аппроксимации ОЭП рассматривается генетический метод («оштукатуривание»), который позволяет улучшить уже ранее построенную аппроксимацию. Метод состоит в следующем. Из прообразов имеющейся базы покрытия  $T$  случайно (но с учетом некоторых ограничений) выбираются пары точек («родители»). Между точками каждой такой пары проводится отрезок и на этом отрезке случайным образом выбирается заранее заданное или случайное число  $q > 1$  новых точек множества допустимых решений («популяция наследников»). Для всех точек-наследников вычисляются значения  $f(x)$ . Полученные критериальные точки используются для оценки качества имеющейся аппроксимации и пополнения базы покрытия.

Во **второй главе** осуществляется теоретическое изучение свойств предложенных методов аппроксимации ОЭП. Анализ методов основан на применении теории аппроксимации многомерных тел, разработанной Г.К. Каменевым (2001) и называемой «Метод глубоких ям». Теоретическое изучение свойств методов осуществляется с помощью упрощенных алгоритмов аппроксимации.

Упрощенный однофазный алгоритм A1. Пусть заданы  $T_0$  – конечное подмножество из  $Y$ ,  $N$  – объем контрольной выборки и вероятностная мера  $\mu_X(\cdot)$  на  $\mathcal{B}(X)$ . Рассмотрим  $k$ -ую итерацию алгоритма. Пусть имеется уже построенная база аппроксимации  $T_{k-1}$ .

1) Генерируется выборка  $H_{N^k} \subset X$  в соответствии с мерой  $\mu_X(\cdot)$  и рассчитываются образы  $f(H_{N^k})$ .

2) Ищется точка  $x^k \in \text{Arg max}_{x \in H_{N^k}} \rho(f(x), T_{k-1}^*)$  и

соответствующее ей максимальное отклонение  $\rho_k = \rho(f(x^k), T_{k-1}^*)$

3) Строится новое множество  $T_k = P(T_{k-1} \cup f(x^k))$ .

Упрощенный двухфазный алгоритм A2. Пусть заданы  $T_0$  – конечное подмножество из  $Y$ ,  $\mu_X(\cdot)$  – вероятностная мера на  $\mathcal{B}(X)$ ,  $N$  – объем контрольной выборки. Пусть задано отображение  $\Phi: X \rightarrow X$ . Обозначим  $Y^\Phi = f(\Phi(X))$ . Рассмотрим  $k$ -ую итерацию алгоритма. Пусть имеется уже построенная база аппроксимации  $T_{k-1}$ .

1) Генерируется выборка  $H_{N^k} \subset X$  в соответствии с мерой  $\mu_X(\cdot)$  и рассчитываются их образы  $f(\Phi(H_{N^k}))$ .

2) Ищется точка  $x^{\Phi,k} \in \text{Arg max}_{x \in H_{N^k}} \rho(f(\Phi(x)), T_{k-1}^*)$  и

соответствующее ей максимальное отклонение  $\rho_k^\Phi = \rho(f(\Phi(x^{\Phi,k})), T_{k-1}^*)$

3) Строится новое множество  $T_k = P(T_{k-1} \cup f(\Phi(x^{\Phi,k})))$ .

Упрощенный трехфазный алгоритм A3. Упрощенный трехфазный алгоритм A3 может быть построен на основе усложнения алгоритма A2 модификации метода генерации контрольной выборки  $H_{N^k}$ . Пусть заданы  $T_0$  – конечное подмножество из  $Y$ ,  $\mu_X(\cdot)$  – вероятностная мера на  $\mathcal{B}(X)$ ,  $N$  – объем контрольной выборки. Пусть задано отображение  $\Phi: X \rightarrow X$ . Рассмотрим  $k$ -ую итерацию алгоритма A3. Пусть имеется уже построенная база аппроксимации  $T_{k-1}$ .

1) Генерируется выборка  $H_{N^k} = H_{N_1}^k \cup H_{N_2}^k$ , где выборка  $H_{N_1}^k$  имеет объем  $N_1$  точек и генерируется на всем множестве  $X$  в соответствии с мерой  $\mu_X(\cdot)$ . Выборка  $H_{N_2}^k$  имеет объем  $N_2$  и

генерируется каким-либо определенным образом на подмножествах  $X$ . Считаются их образы  $f(\Phi(H_N^k))$ .

2) Ищется точка  $x^{\Phi,k} \in \operatorname{Argmax}_{x \in H_N^k} \rho(f(\Phi(x)), T_{k-1}^*)$  и

соответствующее ей максимальное отклонение  $\rho_k^\Phi = \rho(f(\Phi(x^{\Phi,k})), T_{k-1}^*)$

3) Строится новое множество  $T_k = P(T_{k-1} \cup f(\Phi(x^{\Phi,k})))$ .

При исследовании свойств алгоритмов на отображения  $f$  и  $\Phi$  накладываются следующие условия:

Условие (\*). Отображение  $f$  удовлетворяет условию (\*), если для любого конечного множества  $T$  из  $Y$  и для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо  $f^{-1}((T^*)_\varepsilon \cap Y) \in \mathcal{B}(X)$ .

Условие (\*\*). Отображения  $f$  и  $\Phi$  удовлетворяют условию (\*\*), если для любого конечного множества  $T$  из  $Y^\Phi$  и для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо  $\Phi^{-1}[f^{-1}((T^*)_\varepsilon \cap Y^\Phi)] \in \mathcal{B}(X)$ .

Доказаны следующие свойства алгоритмов. Пусть  $\{T_k\}$  – последовательность баз аппроксимации, порождаемая соответствующим алгоритмом.

*Конечность.*

Теорема 2 (для A1). Для любого  $\varepsilon > 0$  существует минимальный номер  $K(\varepsilon)$  такой, что  $\rho_{K(\varepsilon)+1} < \varepsilon$ .

Теорема 9 (для A2 и A3). Для любого  $\varepsilon > 0$  существует минимальный номер  $K(\varepsilon)$  такой, что  $\rho_{K(\varepsilon)+1}^\Phi < \varepsilon$ .

*Сходимость.*

Теорема 3 (для A1). Пусть  $f$  удовлетворяет (\*). Тогда для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \eta < 1$  существует минимальный номер  $K(\varepsilon, \eta)$  такой, что надежность выборочной оценки полноты в виде  $\eta_{T_{K(\varepsilon, N)}}(\varepsilon) > \eta$  не меньше  $\chi^*(\eta, N)$ .

Теорема 10 (для A2 и A3). Пусть  $f$  и  $\Phi$  удовлетворяют (\*\*). Тогда для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \eta < 1$  существует минимальный номер  $K(\varepsilon, \eta)$  такой, что надежность выборочной оценки полноты в виде  $\eta_{T_{K(\varepsilon, N)}}^\Phi(\varepsilon) > \eta$  не меньше  $\chi^*(\eta, N)$ .

*Скорость сходимости.* Пусть  $A$  – произвольное множество.  $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$  – минимальное число точек метрической  $\varepsilon$ -сети для множества  $A$ .  $\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$  – минимальное число множеств диаметра не

более чем  $2\varepsilon$ , покрывающих множество  $A$ .  $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$  – максимальное число точек  $\varepsilon$ -различимого множества  $A$  (т.е. такого множества, точки которого удалены друг от друга не менее, чем на  $\varepsilon$ ) (А.Н.Колмогоров и В.М.Тихомиров, 1959). Пусть

$$\tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A) := \liminf_{v \rightarrow 0+} \mathfrak{M}(\varepsilon - v, A).$$

Теорема 4 (для A1). Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда  $K(\varepsilon) \leq \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y) \leq \mathfrak{M}(\rho_{K(\varepsilon)+1}, Y)$ , где  $K(\varepsilon)$  определена в теореме 2.

Следствие 2 теоремы 4 (для A1). Пусть  $d_Y(y', y'') := \max_i \{|y'_i - y''_i|\}$  и объем  $\text{Vol}(Y) > 0$ , тогда  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} K(\varepsilon)\varepsilon^m \leq \text{Vol}(Y)2^m$ , где  $K(\varepsilon)$  определена в теореме 2.

Теорема 5 (для A1). Пусть  $f$  удовлетворяет условию (\*), тогда для  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \eta < 1$   $K(\varepsilon, \eta) \leq \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y) \leq \mathfrak{M}(\rho_{K(\varepsilon, \eta)+1}, Y)$ , где  $K(\varepsilon, \eta)$  определена в теореме 3.

Следствие 2 теоремы 5 (для A1). Пусть  $d_Y(y', y'') := \max_i \{|y'_i - y''_i|\}$  и объем  $\text{Vol}(Y) > 0$ , тогда  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} K(\varepsilon, \eta)\varepsilon^m \leq \text{Vol}(Y)2^m$ , где  $K(\varepsilon, \eta)$  определена в теореме 3.

Теорема 11 (для A2 и A3). Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда  $K(\varepsilon) \leq \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^\Phi) \leq \mathfrak{M}(\rho_{K(\varepsilon)+1}^\Phi, Y^\Phi)$ , где  $K(\varepsilon)$  определена в теореме 9.

Следствие 2 теоремы 11 (для A2 и A3). Пусть  $d_Y(y', y'') := \max_i \{|y'_i - y''_i|\}$  и объем  $\text{Vol}(Y^\Phi) > 0$ , тогда  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} K(\varepsilon)\varepsilon^m \leq \text{Vol}(Y^\Phi)2^m$ , где  $K(\varepsilon)$  определена в теореме 9.

Теорема 12 (для A2 и A3). Пусть  $f$  и  $\Phi$  удовлетворяют условию (\*\*), тогда для  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \eta < 1$   $K(\varepsilon, \eta) \leq \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^\Phi) \leq \mathfrak{M}(\rho_{K(\varepsilon, \eta)+1}^\Phi, Y^\Phi)$ , где  $K(\varepsilon, \eta)$  определена в 10.

Следствие 2 теоремы 12 (для A2 и A3). Пусть  $d_Y(y', y'') := \max_i \{|y'_i - y''_i|\}$  и объем  $\text{Vol}(Y^\Phi) > 0$ , тогда

$\limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} K(\varepsilon, \eta) \varepsilon^m \leq \text{Vol}(Y^\Phi) 2^m$ , где  $K(\varepsilon, \eta)$  определена в теореме 10.

*Эффективность.* Полученные оценки позволяют сравнить построенные с помощью алгоритмов A1-A3 аппроксимации с аппроксимациями, построенными с помощью любого другого (гипотетического) метода построения метрических  $\varepsilon$ -сетей. Особый случай представляет собой  $Y^\Phi = P(Y)$ , здесь алгоритм A2 позволяет построить не только аппроксимацию ОЭП для  $Y$ , но и аппроксимацию паретовой границы  $P(Y)$ , заданную в виде конечной  $\varepsilon$ -сети точек, принадлежащих  $P(Y)$ . Сравним построенную таким образом с помощью алгоритма A2 аппроксимацию множества  $P(Y)$  с аппроксимацией, построенной с помощью любого другого (гипотетического) метода построения метрических  $\varepsilon$ -сетей для множества  $P(Y)$ .

Теорема 17 (для A2). Пусть  $S$  – произвольная  $\rho^{\Phi_{K(\varepsilon)+1}}$ -сеть для  $P(Y)$ , где  $K(\varepsilon)$  – минимальный номер итерации такой, что  $\rho^{\Phi_{K(\varepsilon)+1}} < \varepsilon$ . Тогда

$$\frac{\text{card } S}{\text{card } T_{K(\varepsilon)}} \geq \frac{\mathfrak{N}^R(\rho^{\Phi_{K(\varepsilon)+1}}, P(Y))}{\mathfrak{M}(\rho^{\Phi_{K(\varepsilon)+1}}, P(Y))}.$$

Следствие 1 теоремы 17 (для A2). Пусть  $\text{Vol}(P(Y)) > 0$  в  $R^{m'}$ ,  $R^m = R^{m'} \oplus R^{m-m'}$ . Пусть  $S$  – произвольная  $\rho^{\Phi_{K(\varepsilon)+1}}$ -сеть для  $P(Y)$ , где  $K(\varepsilon)$  – минимальный номер итерации такой, что  $\rho^{\Phi_{K(\varepsilon)+1}} < \varepsilon$ . Тогда

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\text{card } S}{\text{card } T_{K(\varepsilon)}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{m'}.$$

В завершении главы на основе результатов исследования формулируются практические алгоритмы методов аппроксимации ОЭП, изучаемых в диссертации: однофазного, многофазных и генетического метода «оштукатуривания».

В **третьей главе** описывается программное обеспечение для персональных компьютеров, реализующее метод достижимых целей для нелинейных моделей на основе аппроксимации ОЭП с помощью методов, сформулированных в гл. 2. Рассматриваются три программных системы.

Первая система реализована в среде MS Excel и основана на использовании однофазного метода аппроксимации. Вектор-функция  $f(x)$  здесь задается либо формулой на листе Excel, либо с помощью макроса на встроенном в MS Excel интерпретаторе Visual Basic. Достоинством системы, являющимся следствием ее реализации в среде MS Excel, является простота ее использования для массового пользователя. Система визуализации позволяет осуществить диалоговую визуализацию паретовой границы и дает возможность указать предпочтительную целевую точку нажатием компьютерной мыши.

Вторая система написана на языке C++ и используется в среде Windows XP. Система реализует однофазный, двух- и трехфазные методы. Вектор-функция  $f(x)$  в системе может быть задана несколькими способами: в виде DLL библиотеки или исполняемого EXE файла, а также в среде MatLab. Наиболее простая возможность – реализация вектор функции  $f$  в среде MatLab 6.5 или выше; достоинство такого подхода в том, что с этой задачей может справиться широкий круг пользователей, знакомых со средой MatLab и умеющий использовать мощный математический пакет среды MatLab. Недостатком такой реализации вектор функции  $f$  является невысокая скорость исполнения ее вычислений. Этот недостаток отсутствует, когда вектор-функция  $f(x)$  реализована в виде DLL библиотеки или исполняемого EXE файла. В систему встроен удобный модуль визуализации паретовой границы и спецификации предпочтительной точки на этой границе.

Третья система реализована в рамках проекта по созданию программного комплекса «Метод достижимых целей». Система позволяет пользователю подобрать сочетание методов аппроксимации и их параметров, наиболее пригодное для конкретного типа задач. Говоря иначе, пользователь задает свой многофазный или гибридный метод. В этой системе гибридный метод тестируется и, в случае трудоемкости задачи, создается промежуточный файл (скрипт), который передается на кластер или суперкомпьютер, где расчет будет осуществлен с использованием параллельных вычислений. В систему встроен тот же самый модуль визуализации, что и во второй системе.

В четвертой главе описано экспериментальное исследование методов аппроксимации ОЭП в задачах разной размерности. Исследование проводится на основе изучения специально подобранных задач, имеющих различные свойства. В начале главы приводится методика проведения экспериментов, в том числе описывается новый метод сравнения двух аппроксимаций паретовой границы, предложенный в данной работе. Далее проводится эксперимент с многокритериальными задачами.

Первый класс задач сформулирован с использованием функции Шекеля, широко применяемой при тестировании методов нелинейной оптимизации:  $s(x)=1/\{(x-a)^2+c\}$ . Эти модели характеризуются простым видом ОЭП, причем с помощью варьирования параметра  $c$  можно регулировать высоту и крутизну «пиков» критериальных функций, воздействуя тем самым на форму паретовой границы, что дает возможность сравнивать работу изучаемых методов аппроксимации в различных условиях. Рассматривались задачи разной размерности (от  $n=2$  и  $m=2$  до  $n=12$  и  $m=5$ ). Далее методы аппроксимации ОЭП изучаются на многокритериальной задаче, построенной с использованием экспоненциальной функции

$$s(x_1, x_2) = 3(1 - x_1)^2 e^{-x_1^2 - (x_2 + 1)^2} - 10 \left( \frac{1}{4} x_1 - x_1^3 - x_2^5 \right) e^{-x_1^2 - x_2^2} - \frac{1}{3} e^{-(x_1 + 1)^2 - x_2^2} + 10.$$

Задача имеет размерность  $n=2$  и  $m=5$ , а паретова граница – довольно сложную форму. Последние эксперименты проводятся на задачах, построенной с использованием функции типа

$$s(x) = e^{-ax} \sin \frac{1}{x}, \quad a > 0, \quad x \geq \delta, \quad \text{где } \delta - \text{малое положительное число.}$$

Эта функция ведет себя сложным образом в окрестности нуля. Данный эксперимент показывает, как ведут себя различные методы аппроксимации с «неудобными» критериальными вектор-функциями.

Из основных результатов, полученных в результате проведения экспериментов, можно выделить следующие:

- Трехфазные методы обычно строят более качественную аппроксимацию, чем двухфазные или однофазный.

- Трехфазный метод в большинстве задач оказался менее экономичным по числу расчетов вектор-функции  $f$  по сравнению с двухфазным.
- Трехфазные методы сами по себе часто имеют медленную сходимость. Причиной этого может оказаться медленное выявление новых точек, в окрестностях которых также следует искать эффективные решения. Комбинирование двух- и трехфазных методов позволяет устранить этот недостаток.

В **пятой главе** описываются эксперименты с многофазными методами аппроксимации ОЭП в многокритериальной задаче выбора параметров вторичного охлаждения стали в процессе ее непрерывной выплавки. Как было уже сказано, задача имеет 325 управлений и 5 критериев ( $J_1$ – $J_5$ ), первый из которых ( $J_1$ ) не учитывается при решении задачи.

Исследовались следующие проблемы:

- Сравнение аппроксимации паретовой границы с использованием двух- и трехфазных методов.
- Изучение комбинаций двухфазных и трехфазных методов
- Применение генетического метода.
- Поиск разумных решений в задаче выбора параметров процесса охлаждения стали.

Наилучший результат дало следующее сочетание методов.

1. Двухфазный метод: проделано 4 итерации с объемом выборки  $N=149$  точек.
2. Трехфазный метод с  $N=149$ . Метод сошелся уже на третьей итерации.
3. В заключение к построенной аппроксимации были применены две итерации генетического метода.

Найденные с помощью построенной аппроксимации приемлемые сочетания критериев сравниваются с достижимой точкой, полученной финскими специалистами, также исследовавшими данную задачу:

$$J_1 = 2.11708, J_2 = 0, J_3 = 0, J_4 = 0, J_5 = 0.20727.$$

Применение МДЦ позволило найти набор альтернатив, показанных в таблице

|                | $J_1$  | $J_2$ | $J_3$   | $J_4$ | $J_5$  |
|----------------|--------|-------|---------|-------|--------|
| <i>m. 2374</i> | 2.1734 | 0     | 0       | 0     | 0.1525 |
| <i>m. 3242</i> | 2.1624 | 0     | 0.00001 | 0     | 0.0994 |
| <i>m. 150</i>  | 2.1742 | 0     | 0.0002  | 0     | 0.0933 |
| <i>m. 47</i>   | 2.4226 | 0     | 0.0219  | 0     | 0.0431 |
| <i>m. 3626</i> | 2.4051 | 0     | 0.0145  | 0     | 0.0488 |

Как можно видеть, точка 2374 доминирует точку, найденную финскими учеными. Кроме того, приводятся некоторые разумные альтернативы, позволяющие за счет маленького послабления критерия  $J_3$  в полтора раза улучшить значение  $J_5$ . Приводится обсуждение одного из полученных нами решений.

Таким образом, в пятой главе была решена прикладная задача с большим числом параметров на основе гибридного метода аппроксимации, использующего последовательное применение двухфазного и трехфазного методов. Также было показано, что генетический метод позволил существенно обогатить вид паретовой границы, и как следствие найти на ней новые точки, дающие хорошие сочетания значений критериев.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

#### **Основные результаты диссертации опубликованы в работах**

1. *Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В.* Реализация метода достижимых целей для нелинейных моделей в MS Excel, М: ВЦ РАН, 2000
2. *Miettinen K, Beriozkin V., Kamenev G., and Lotov A.* (2000) Graphical and interactive decision support tool for nonlinear multiobjective optimization. Reports of Dept. of Math. Information Technology, N B15/2000, Jyvaskyla, Finland: University of Jyvaskyla, 2000, 16p.
3. *Lotov A.V., Kamenev G.K., Bereskin V.E.* (2001) Conceptual Design of Future Aircrafts Using New Graphic Method for Mathematical Model Analysis // Working Paper N33, Fachbereich

- Wirtschaftswissenschaften, Institute fuer Wirtschaftsinformatik  
University of Siegen, Germany, 2001, 23 p.
4. *Berezkin V.E., Kamenev G.K., Lotov A.V.* (2001) Experimental Software of Nonlinear Feasible Goals Method // Тез. докл. 3-й Моск. междун. конф. по исследованию операций. М.: ВЦ РАН, 2001. С. 17-18.
  5. *A. Lotov, G. Kamenev, V. Berezkin* Software for Visualization of the Feasible Set in Criterion Space in Nonlinear MCDA Problems // European Working Group "Multicriteria Aid for Decisions", Series 3, n4, Fall 2001
  6. *Лотов А.В., Каменев Г.К., Березкин В.Е.* Аппроксимация и визуализация паретовой границы для невыпуклых многокритериальных задач // Доклады Академии наук, 2002, том 386, N 6, с. 738-741
  7. *Березкин В.Е.* Анализ и реализация методов аппроксимации паретовой границы для нелинейных систем, М: ВЦ РАН, 2002
  8. *Miettinen K., A. Lotov, G. Kamenev, and V. Berezkin* Integration of Two Multi-objective Optimization Methods for Nonlinear Problems. Optimization Methods and Software. V.18, no 1, 63-80 (2003).
  9. *Berezkin V., Kamenev G., Lotov A., Miettinen K.* (2003) Application of Pareto Frontier Visualization for Analysing Cooling Strategies in Continuous Casting of Steel. Reports of Dept. of Math. Information Technology, N B 8/2003, Jyvaskyla, Finland: University of Jyvaskyla, 22 p.
  10. *V.E.Berezkin and A. V. Lotov* (2004) Two-phase Method for Approximating the Edgeworth-Pareto Hull for Non-linear Models, Proc. of the 4th Moscow International Conference on Operations Research (ORM2004), Maks Press, Moscow, 34-38.
  11. *A.Lotov, V. Berezkin, G. Kamenev, Miettinen K.* (2005) Optimal Control of Cooling Process in Continuous Casting of Steel Using a Visualization-Based Multi-Criteria Approach // Applied Mathematical Modelling, 29(7), 653-672.
  12. *Березкин В.Е.* (2005) Эксперименты по аппроксимации паретовой границы для нелинейных систем. М.: ВЦ РАН, 52 стр.
  13. *Березкин В. Е., Каменев Г. К., Лотов А. В.* (2006) Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой

многомерной паретовой границы // ЖВМиМФ. 2006. Т. 46(11). С. 2009-2023

14. *Березкин В.Е.* (2007) Экспериментальный анализ аппроксимации оболочки Эджворта-Парето для нелинейных моделей // Труды V Московской межд. конф. по исследованию операций (Москва, 10-14 апреля 2007), М: изд. МАКС Пресс, 2007, стр. 138-139.

Основные результаты диссертации представлены в работах [6, 7, 9, 11, 12, 13]. В работе [6, 13] концепции одно- и двухфазной оценки качества аппроксимации разработаны совместно с зав. сектором д.ф.-м.н. А.В.Лотовым и научным руководителем д.ф.-м.н. Г.К. Каменевым. Разработка и реализация алгоритмов и проведение экспериментов проведены автором самостоятельно. Трехфазный и генетический методы разработаны, реализованы и экспериментально исследованы автором самостоятельно. Теоретический анализ одно- и двухфазных методов осуществлены совместно с научным руководителем Г.К. Каменевым. В работах [2, 8, 9, 11] разработка модели в задаче непрерывной выплавки стали принадлежит финским ученым, разработка двухфазного метода – совместно с А.В. Лотовым и Г.К. Каменевым, реализация и проведение расчетов осуществлены автором самостоятельно. Работы [7, 12] выполнены автором самостоятельно.