

На правах рукописи

ФЛЁРОВА АННА ЮРЬЕВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИПОТЕЗЫ КОУЗА

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена в отделе математического моделирования экономических систем Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Шананин Александр Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Бекларян Левон Андреевич**

кандидат физико-математических наук,
Рублёв Илья Вадимович

Ведущая организация: Санкт-Петербургский Экономико-
Математический институт РАН

Защита состоится 22 мая 2008 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 002.017.04 в Вычислительном Центре имени А.А. Дородницына Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д.40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН

Автореферат разослан 17 апреля 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

Н.М. Новикова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Известный американский экономист нобелевский лауреат Рональд Коуз (Ronald Coase) предположил¹, что, монополист, производящий товары длительного пользования теряет свою монопольную власть и вынужден продавать товары по конкурентной цене. Согласно Коузу, товар, проданный вчера, является совершенным заменителем товара, купленного сегодня, т.е. производимый сейчас товар конкурирует с товаром, произведённым и проданным ранее. Конкуренция может возникнуть, даже если существует только один поставщик. Конкурентом монополиста оказывается он сам.

Р. Коуз указал две стратегии возвращения монопольной власти:

1. особые договорные и институциональные соглашения. Например, монополист обязуется не продавать товар сверх количества, соответствующего монопольной цене, или принимает решение не продавать товар, а сдавать его в аренду (монополистический лизинг), что позволяет закрепить товар за покупателем;

2. снижение срока службы товара.

Действительно, монополистический лизинг «ликвидирует» вторичный рынок товаров длительного пользования, и единственным продавцом товара остаётся монополист. А снижение долговечности товара заставляет потребителей чаще приобретать товар, что увеличивает объёмы продаж и доходы монополиста.

Гипотеза Коуза превратилась в аргумент юридической практики. Вот какие выводы делает американский судья Ричард Познер: «Профессор Коуз доказал, что политика монополистического лизинга такого монополиста товара длительного пользования, как United Machinery Corporation,

¹ Coase R.H. Durability and monopoly // Journal of Law and economics. 1972. V. 15. P. 143-149.

может быть предназначена для преодоления трудностей, встречающихся при попытке назначить монополистическую цену за товар длительного пользования... Возможно, монополистический лизинг следовало бы запретить на этом основании».

Компания «Белл» в 1877 г. приняла решение не продавать телефонные аппараты, а сдавать их в аренду. Компания United Machinery Corp., производившая оборудование для изготовления обуви, не продавала своё оборудование, а сдавала в аренду сроком на 17 лет. К монополистическому лизингу прибегали корпорации IBM и Хегох. В декабре 2005 года компания Honda представила свою новую разработку: робота – помощника в офисе, согласно заявлениям компании, робот не поступит в продажу, но в скором времени его можно будет взять в лизинг.

Под влиянием работ Коуза были внесены поправки в федеральное антимонопольное законодательство США, запрещающие монополистический лизинг товаров длительного пользования.

Актуальным является анализ механизмов восстановления монопольной власти на рынке товаров длительного пользования, проведённый на языке математических моделей.

Целью работы является проверка гипотезы Коуза, исследование границ её применимости, а также исследование предложенных Коузом способов возвращения монопольной власти (монополистический лизинг и снижение долговечности товара) с помощью математической модели рынка товаров длительного пользования, различных по характеристикам выбытия.

Методы исследования. Математическая модель рынка товаров длительного пользования описывается экстремальными задачами, для решения которых использовались принцип максимума для задач импульсного

управления, теория оптимального управления с запаздываниями, методы функционального анализа.

Научная новизна. Коуз основывал свою теорию на интуитивных предположениях, тогда как полный анализ данной гипотезы требует математической чёткости. Достаточно обширный класс работ, посвященных анализу гипотезы Коуза, основан на простых двухпериодных моделях. В литературе встречаются попытки построить и динамические модели рынка товаров длительного пользования. В числе наиболее известных и широко цитируемых из таких работ можно назвать работы Кана (Kahn С., 1986), Тепо (Thepot J., 1998), М.С. Осадчего (2002) и некоторых других авторов, основывающих свои исследования на результатах этих трудов. В диссертации показано, что формализация задач, описывающих модели, предложенные в этих работах, проведена некорректно².

В диссертационной работе предложены модели для корректного исследования гипотезы Коуза. Эти модели формализованы задачами оптимального импульсного управления. С помощью этих моделей было показано, что выполнение гипотезы Коуза зависит от характеристик товара длительного пользования: для товаров с фиксированным сроком службы гипотеза нашла свое подтверждение (при определённых начальных условиях), а в случае экспоненциального выбытия выполнение гипотезы зависит от соотношения нормы выбытия и ставки процента.

Вопреки предположениям Коуза, даже используя монополистический лизинг, монополист может оказаться в условиях конкуренции. В работе показано, что наличие вторичного рынка не оказывает принципиального влияния на поведение монополиста.

Практическая ценность работы. Исследование рынка товаров длительного пользования необходимо для

² Подробнее см. стр. 17.

совершенствования антимонопольного законодательства и формирования политики регулирования государственного вмешательства на этом рынке.

Апробация работы. В основу диссертационной работы положены результаты, полученные автором в ходе исследований, проводимых в рамках научно-исследовательской работы по проектам:

- плана научно-исследовательской работы отдела математического моделирования экономических систем ВЦ РАН № 01.2.007 01866
- аналитической ведомственной целевой программы РНП.2.2.1.1.2467;
- РФФИ (проект № 08-07-00158-а, 07-01-12024-офи, 05-01-00942, 05-01-08045-офи_а, 02-01-00854-а);
- РГНФ (проект № 08-02-00347а, 05-02-02349а),
- программы по поддержке ведущих научных школ НШ 2982.2008.01, НШ-5379.2006.1,
- программы фундаментальных исследований РАН № 16 «Математическое моделирование и интеллектуальные системы», программ фундаментальных исследований ОМН РАН № 3 (п. 3.14), РАН № 14 (п. 1.11).

Научные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- XLVI, научная конференция МФТИ, Москва-Долгопрудный, 2003г.
- XLVII научная конференция МФТИ, Москва-Долгопрудный, 2004г.
- I международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2005, Переславль-Залесский, 2005.
- V Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2007), посвященная 90-летию со дня рождения Н.Н. Моисеева. Москва, 2007.

- Вторая Международная конференция «Математическое моделирование социальной и экономической динамики» (MMSED-2007), Москва, 2007.

- II Всероссийская научная конференция с молодёжной научной школой «Математическое моделирование развивающейся экономики», посвященная 90-летию со дня рождения Н.Н. Моисеева. ЭКОМОД-2007, Киров, 2007.

- Вторая международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2007, Обнинск, 2007.

- I научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», Москва, 2007.

- VII международная конференция «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08. Москва, 2008.

- Вторая ежегодная конференция "Современные подходы к исследованию и моделированию в экономике, финансах и бизнесе". Санкт-Петербург, 2008.

- научный семинар под руководством академика А.А. Петрова в ВЦ РАН им. Дородницына, Москва, 2007.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 печатных работ.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, и списка использованной литературы. Общий объём работы 80 страниц. Список литературы содержит 47 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируется цель и научная новизна полученных результатов, приводится краткое содержание работы. Пусть X - объём выпуска товара, $P(X)$ - обратная функция спроса, убывающая по X . Предположим, что $(XP(X))'' \leq 0$. Будем считать, что

производственные издержки линейно зависят от выпуска, пусть $c > 0$ - издержки по выпуску единицы товара. Пусть $P(0) > c$.

Обозначим X_M - выпуск в условиях монополии – решение уравнения

$$P'_X(X)X + P(X) - c = 0. \quad (1)$$

Уравнение на выпуск в условиях совершенной конкуренции:

$$P(X) = c. \quad (2)$$

Выпуск в условиях совершенной конкуренции обозначим X_C .

В **первой главе** приведено общее описание рынка товаров длительного пользования, выбытие которых происходит согласно заданной функции выбытия. Описывается процесс формирования цены на товар длительного пользования с учётом того, что товар может продаваться не только монополистом, но и на вторичном рынке.

Математическая модель рынка товаров длительного пользования представляет собой задачу максимизации прибыли монополиста $N(t)$ за конечный период времени $[0, T]$, описанную задачей оптимального управления, где управляющий параметр $u(t)$ – количество продаваемых потребителю товаров в момент времени t .

$$N(T) \rightarrow \max,$$

$$\dot{N}(t) = u(t)(p(t, 0) - c) + rN(t),$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^t a(t-t)u(t)dt,$$

$$\frac{\partial p(t, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(t, t)}{\partial t} = p(t, t) \left(r - \frac{a'(t)}{a(t)} \right) - f_1(X(t)) + f_2(t), \quad \tau > 0;$$

$$\left(\frac{\partial p(t, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(t, t)}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} =$$

$$= p(t, 0) \left(r - \frac{a'(0)}{a(0)} \right) - f_1(X(t)) + f_2(0) - w(t).$$

$$u(t) \geq 0, w(t) \geq 0;$$

$$N(0) = 0, X(0) = X_0, p(0, t) = p_0(t).$$

Здесь $p(t, t)$ - цена товара длительного пользования возраста t в момент времени t . Поведение потребителя описывается с помощью функции полезности, которая зависит не только от объема товара у потребителей, но и от временной структуры товара, и эта зависимость выражается следующим образом: производная функции полезности имеет вид $f_1(X(t)) - f_2(t)$. Изменение запаса товаров у потребителей $X(t)$ происходит за счет выбытия товаров по функции $a(t)$ и покупки новых товаров в размере $u(t)$. Обозначим ставку дисконта r . С помощью управления $w(t)$ монополист может понизить цену на новый товар.

Во **второй главе** рассмотрен случай монополистического лизинга товаров длительного пользования. Цена на товар определяется обратной функцией спроса $P(X)$, убывающей по X , где X - запас товаров в собственности потребителей.

В случае экспоненциального выбытия, рассмотренном в п. 2.1. изменение запаса происходит в результате покупки новых товаров в объеме $u(t)$, а так же амортизации с темпом выбытия $m \geq 0$. Пусть $X(0) = X_0$.

Накопленный доход предприятия $N(t)$ изменяется при продаже товара и зависит от разницы между ценой продажи $P(X(t))$ и себестоимостью c . Полученный доход

хранится на банковском счету с непрерывно начисляемой ставкой процента r . Пусть $N(0) = 0$.

Задача максимизации прибыли монополиста $N(t)$ за период времени $[0, T]$ является задачей оптимального управления, имеющей решение в классе *импульсных управлений*:

$$\begin{aligned} N(T) &\rightarrow \max, \\ \dot{N}(t) &= u(t)(P(X(t)) - c) + rN(t), \\ \dot{X}(t) &= u(t) - mX(t); \\ N(0) &= 0, X(0) = X_0; \\ u(t) &\geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью принципа максимума для импульсных управлений найдено оптимальное решение этой задачи и доказана теорема о магистрали в сильнейшей форме.

Теорема 1. *Оптимальное управление в задаче (3) имеет вид*

$$\begin{aligned} u(t) = & (\hat{X} - X_0)_+ d(t) + m\hat{X}q \left(t - \min \left\{ \left(\frac{1}{m} \ln \left[\frac{X_0}{\hat{X}} \right] \right)_+, T \right\} \right)_+ \\ & + (X_C - \max \{ \hat{X}, X_0 e^{-mT} \})_+ d(t - T), \end{aligned}$$

где $d(t - s_i)$ – дельта-функция Дирака, сосредоточенная в момент времени s_i , $(y)_+ = \max \{0, y\}$.

Соответствующая этому управлению оптимальная траектория имеет магистраль $\hat{X}$ и выглядит следующим образом:

$$X(t) = \begin{cases} X_0, & \text{при } t = 0; \\ X_0 e^{-m t}, & \text{при } 0 < t < \min \left\{ \left(\frac{1}{m} \ln \left[\frac{X_0}{\hat{X}} \right] \right)_+, T \right\}; \\ \hat{X}, & \text{при } \min \left\{ \left(\frac{1}{m} \ln \left[\frac{X_0}{\hat{X}} \right] \right)_+, T \right\} \leq t < T; \\ \max \{ X_C, X_0 e^{-m t} \}, & \text{при } t = T. \end{cases}$$

где $\hat{X}$ - решение уравнения

$$(m + r)(P(X) - c) + mXP'_X(X) = 0.$$

Справедливо неравенство $X_M \leq \hat{X} \leq X_C$. При изменении параметра m/r от 0 до ∞ магистраль $\hat{X}$ монотонно смещается от выпуска при совершенной конкуренции X_C к монопольному выпуску X_M . Это означает, что гипотеза Коуза справедлива, если $m \ll r$.

На магистрали оптимальное управление $u(t) = \hat{u} = m\hat{X}$. Снижение долговечности (увеличение m) помогает монополисту уйти от конкуренции и увеличить прибыль.

На магистраль траектория может попасть двумя способами. Если $X_0 < \hat{X}$, то в начальный момент продается количество товара $\hat{X} - X_0$, $u(0) = (\hat{X} - X_0)d(0)$, т.е. траектория делает скачок на магистраль. Если $X_0 > \hat{X}$, значит, рынок перенасыщен и торговать не выгодно, пока, за счёт выбытия (т.е. при $u(t) = 0$ и $X(t) = X_0 e^{-mt}$) количество товаров у потребителей не уменьшится до магистрального значения. В конечный момент времени монополист старается продать максимально возможное

количество товаров, поэтому происходит скачок до конкурентного состояния, если это возможно.

В п. 2.2. главы II рассмотрен случай монополистического лизинга для товаров с фиксированным сроком службы a . Такой товар не теряет своих потребительских качеств в течение срока службы. Функция выбытия таких товаров имеет вид $a(t) = q(a - t)$, где

$$q(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

- функция Хевисайда.

Предположим, что в нулевой момент времени монополист начинает продажу нового товара длительного пользования. В этом случае задача максимизации прибыли монополиста становится задачей оптимального импульсного управления с запаздываниями:

$$\begin{aligned} N(T) &\rightarrow \max, \\ \dot{N}(t) &= u(t)(P(X(t)) - c) + rN(t), \\ \dot{X}(t) &= u(t) - u(t - a); \\ N(0) &= 0, \quad X(0) = 0; \\ u(t) &\geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 2. *Оптимальным управлением в задаче (4) является управление $u^*(t) = \sum_{k=0}^{k \leq T/a} X_C d(t - ka)$. Оптимальная траектория, соответствующая этому управлению остаётся на конкурентном уровне: $X^*(t) \equiv X_C$.*

В этом случае оптимальная траектория устроена следующим образом: в начальный момент времени монополист продает максимально возможное количество товара, цены падают до конкурентных, рынок насыщается и торговля не ведется до того момента, пока не кончится срок

службы товара и запасы обнуляться, затем происходит «импульсная» реализация новой партии товара.

В случае товаров с фиксированным сроком службы гипотеза Коуза подтверждается: даже в случае монополистического лизинга количество товаров в собственности потребителей оказывается на уровне, соответствующем совершенной конкуренции. Однако продажи осуществляются не по конкурентной цене.

Снижение долговечности товара не может помочь монополисту избежать конкуренции, но чем меньше срок службы товара, тем быстрее наступает момент новой продажи, т.е. потребители чаще приобретают товар, и тем больше доход монополиста.

Таким образом, предположение Коуза о том, что монополистический лизинг может помочь монополисту избежать конкуренции не подтверждается ни в одном из исследуемых случаев.

В разделе 2.3. второй главы приведен ещё один способ получения условий оптимальности для задач о максимизации прибыли монополиста при условии монополистического лизинга. Т.к. функция издержек линейна, без ограничения общности можем считать издержки нулевыми (или учитывать их в обратной функции спроса).

Доход монополиста за время T составляет

$$N(T) = \int_0^T e^{r(T-t)} P \left(\int_{-\infty}^t a(t-t)v(t) dt \right) v(t) dt .$$

Перед монополистом стоит задача найти оптимальное управление вида $v(t) = u(t) + \sum_{i=0}^k c_i d(t-s_i)$, максимизирующее этот доход.

$$N(T) \rightarrow \max . \quad (5)$$

Составим и исследуем вариацию управления

$$v(t) = u(t) + \sum_{i=0}^n g_i \Phi\left(\frac{t-q_i}{e}\right) + \sum_{i=0}^m (c_i + e d_i) d(t-s_i),$$

$$\text{где } \Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $c_j = 0$ при $j \notin (1, \dots, k)$.

Предложение 1. Если в задаче (5) существует оптимальное управление $v(t) = u(t) + \sum_{i=0}^m c_i d(t-s_i)$, то должны выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} |^q \geq 0, \quad u(q)|^q = 0, \\ |^{s_j} \geq 0 \quad \forall s_j \in [0, T], \\ |^{s_j} = 0 \quad \forall s_j \in (s_1, \dots, s_k); \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} -|^q &= \sum_{j: q < s_j} e^{r(T-s_j)} \int_0^1 \left\{ P' \left(c_j z + \int_{-\infty}^{s_j} a(s_j - t) u(t) dt + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i: s_i < s_j} c_i a(s_j - s_i) \right) a(s_j - q) c_j \right\} dz + \\ &\quad + \int_0^T \left\{ e^{r(T-t)} P' \left(\int_{-\infty}^t a(t - t) u(t) dt + \sum_{j: s_j < t} c_j (a(t - s_j)) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times a(t - q) u(t) \right\} dt + \\ &\quad + e^{r(T-q)} P \left(\int_{-\infty}^q a(q - t) u(t) dt + \sum_{i: s_i < q_j} (c_i a(q - s_i)) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1^{s_j} = e^{r(T-s_j)} \int_0^1 \left\{ P' \left[c_j z + \int_{-\infty}^{s_j} a(s_j - t) u(t) dt + \sum_{i:s_i < s_j} c_i a(s_j - s_i) \right] z c_j + \right. \\
& + P \left[c_j z + \int_{-\infty}^{s_j} a(s_j - t) u(t) dt + \sum_{i:s_i < s_j} (c_i a(s_j - s_i)) \right] \Bigg\} dz + \\
& + \sum_{i:s_i > s_j} \left\{ e^{r(T-s_i)} \int_0^1 \left[P' \left(c_j z + \int_{-\infty}^{s_i} a(s_i - t) u(t) dt + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{k:s_k < s_j} c_k a(s_i - s_k) \right) \times a(s_i - s_j) c_i \right] dz \Bigg\} + \\
& + \int_0^T \left\{ e^{r(T-t)} P' \left(\int_{-\infty}^t a(t - t) u(t) dt + \sum_{i:s_i < t} (c_i a(t - s_i)) \right) a(t - s_j) u(t) \right\} dt.
\end{aligned}$$

Такой приём позволяет исследовать задачу максимизации прибыли монополиста в случае монополистического лизинга и получать необходимые условия оптимальности для различных случаев функции выбытия.

В **третьей главе** построена модель рынка товаров длительного пользования с учётом возможности продажи товаров на вторичном рынке.

Через $p(t)$ обозначим сложившуюся на рынке цену товара длительного пользования в момент времени t . Поведение потребителя будем описывать с помощью убывающей производной функции полезности $f(X)$.

Разделы 3.1.-3.6. главы III посвящены товарам с экспоненциальным выбытием. Такие товары не теряют

своих потребительских качеств, просто их количество экспоненциально уменьшается.

Как же определяется цена товара? Предположим, что мы заняли сумму $p(t)dX$ и приобрели в момент времени t дополнительное количество товара длительного пользования dX . Использовали этот товар в течение периода времени dt , получив услуги, ценностью $f(X(t))dtdX$. Затем продали в момент времени $t + dt$, получив прибыль от продажи $e^{-\mathfrak{m}dt}p(t + dt)dX$, и вернули долг с процентами $e^{rdt}p(t)dX$.

Экономический результат такой операции во избежание арбитража должен быть равен нулю при положительном дополнительном количестве товара dX :

$$f(X(t))dt + (1 - \mathfrak{m} dt)p(t + dt) - (1 + rdt)p(t) = 0,$$

т.е. условие отсутствия арбитража, выглядит следующим образом:

$$\dot{p} = (r + \mathfrak{m})p(t) - f(X(t)).$$

Однако это уравнение некорректно, потому что на ценообразование может влиять и монополист: он всегда может назначить цену меньшую, чем цена на рынке в данный момент. Для того чтобы учесть влияние монополиста, введём дополнительное управление $w(t) \geq 0$, позволяющее монополисту снижать цены. Таким образом, цена на товар длительного пользования в момент времени t определяется из следующего уравнения

$$\dot{p}(t) = (r + \mathfrak{m})p(t) - f(X(t)) - w(t).$$

Пусть в начальный момент времени $p(0) = p_0$, где $p_0 > c$.

Получаем следующую задачу максимизации прибыли монополиста:

$$\begin{aligned}
N(T) &\rightarrow \max, \\
\dot{N}(t) &= u(t)(p(t) - c) + rN(t), \\
\dot{X}(t) &= u(t) - mX(t), \\
\dot{p}(t) &= (r + m)p(t) - f(X(t)) - w(t); \\
u(t) &\geq 0, w(t) \geq 0; \\
N(0) &= 0, X(0) = X_0; p(0) = p_0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Подобные модели, с некоторыми дополнениями или упрощениями, встречались в литературе³. Авторы этих работ решали задачи оптимального управления, по сути, аналогичные задаче (6). Однако, справедливо следующее утверждение, доказательство которого приведено в диссертационной работе.

Предложение 2. *Задача оптимального управления (6) не имеет решения.*

В каком случае покупатель захочет приобрести товар?

Если он не будет ничего покупать, а просто положит деньги, на которые можно было бы приобрести единицу товара, в банк, то он за время T получит прибыль в размере pe^{rT} . Если он предполагает, что после момента покупки товар больше не будут продавать, и будет его использовать, то он примет решение о покупке в случае, если

$$p \leq \int_0^{\infty} f(Xe^{-mt})e^{-(r+m)t} dt.$$

Можно рассмотреть и другую гипотезу об ожиданиях потребителя. Например, покупая товар, потребитель

³ *Thepot J.* A direct proof of the Coase conjecture // Journal of Math. Economics. 1998. V.29. P.57-66.

Kahn C. Durable goods monopolist and consistency with increasing costs // Econometrica. 1986. V.54, N 2. P.275-294.

Осадчий М.С. Динамическая монополия и конкуренция на рынке товаров длительного пользования // Сибирский журнал индустриальной математики. Октябрь-декабрь, 2002. том V. № 4 (12). С. 92-109.

предполагает количество товаров «на руках» у всех потребителей неизменным, тогда он примет решение о приобретении товара при следующем условии: $p \leq f(X)/(r + m)$. Принципиального отличия для решения задачи эти гипотезы не имеют, что показано в диссертационной работе. Таким образом, мы получили ограничения на фазовую траекторию. Обозначим фазовое ограничение как $p \leq g(X)$. Задача максимизации прибыли монополиста становится следующей задачей оптимального импульсного управления с фазовыми ограничениями.

$$\begin{aligned} N(T) &\rightarrow \max, \\ \dot{N}(t) &= u(t)(p(t) - c) + rN(t), \\ \dot{X}(t) &= u(t) - mX(t), \\ \dot{p}(t) &= (r + m)p(t) - f(X(t)) - w(t); \\ p &\leq g(X), \\ u(t) &\geq 0, w(t) \geq 0; \\ N(0) &= 0, X(0) = X_0; p(0) = p_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Введём следующие обозначения:

$$1. \quad \int_0^{\infty} f(Xe^{-mt})e^{-(r+m)t} dt = g(X), \quad \text{тогда} \quad \text{фазовое}$$

ограничение примет вид $p \leq g(X)$. Заметим, что $g(X)$ убывает по X .

$$2. \quad \tilde{X} - \text{решение уравнения} \\ (m + r)(g(X) - c) + mXg'_X(X) = 0,$$

а $\tilde{X}_C$ - решение уравнения $g(X) = c$.

$$3. \quad \tilde{p} = g(\tilde{X}).$$

$$4. \quad X^* = \begin{cases} X_1, & \text{при } p_0 < g(X_0); \\ X_0, & \text{при } p_0 \geq g(X_0), \end{cases}$$

где X_1 - решение уравнения $g(X_1) = p_0$.

$$5. \quad u_m(t) = mX_m(t) + \frac{1}{g'(X_m(t))} \left[(r+m)g(X_m(t)) - f(X_m(t)) \right],$$

где $X_m(t)$ - решение дифференциального уравнения

$$\dot{X} = \frac{1}{g'(X)} \left[(r+m)g(X) - f(X) \right],$$

с начальными условиями $X(0) = X^*$.

6. t_m - время, за которое траектория $X(t)$ при управлении $u_m(t)$ изменяется от значения X^* до значения $\tilde{X}$, если $X^* > \tilde{X}$. Если $X^* \leq \tilde{X}$, то $t_m = 0$.

Теорема 3. Для задачи (7) оптимальное управление существует и имеет вид:

$$u(t) = (X^* - X_0)d(t) + (\tilde{X} - X^*)_+ d(t) + m\tilde{X}q(t - t_m) + \\ + u_m(t)q(t_m - t) + (\tilde{X}_C - \max\{\tilde{X}, X_m(T)\})_+ d(t - T),$$

а соответствующая ему траектория выглядит следующим образом:

$$X(t) = \begin{cases} X_0, & \text{при } t = 0; \\ X_m(t), & \text{при } 0 < t < t_m; \\ \tilde{X}, & \text{при } \min\{t_m, T\} \leq t < T; \\ \max\{\tilde{X}_C, X_m(T)\}, & \text{при } t = T. \end{cases}$$

Пусть $c < p_0 \leq g(X_0)$. Оптимальная траектория в этой задаче обязательно попадает на ограничение, иначе бы имела решение задача (6) без фазовых ограничений. Задача о наилучшем попадании на ограничение с нефиксированным временем имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t^*} e^{r(T-t)} (p(t) - c) u(t) dt \rightarrow \max \\
& \dot{X}(t) = u(t) - mX(t), \\
& \dot{p}(t) = (r + m)p(t) - f(X(t)) - w(t); \\
& p(t^*) = g(X(t^*)). \\
& u(t) \geq 0, w(t) \geq 0; \\
& X(0) = X_0, p(0) = p_0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство теоремы 3 основано на следующем утверждении.

Лемма. В задаче (8) время выхода на фазовое ограничение $t^* = 0$. Оптимальное управление $u(t) = (X^* - X_0) \delta(t)$, где X^* такое, что $g(X^*) = p_0$.

Т.е. оптимальная траектория попадает на ограничение скачком.

Отклоняться от ограничения монополисту не выгодно, так как $p = g(X)$ - это максимальная цена, которая возможна за данное количество товара X , понижать ее убыточно, а повышать ее нельзя из-за ограничения. Удерживать цену p на уровне $g(X)$ позволяет управление w . В этом случае мы попадаем в условия задачи (3), решение которой найдено в главе 1.

Оптимальные траектории для задач с учётом вторичного рынка и без него очень похожи: при достаточно небольшом начальном запасе товара у потребителей в начальный момент времени происходит скачок на магистраль, где траектория остаётся до последнего момента времени.

РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

■ Построена модель рынка товаров длительного пользования, позволяющая описывать поведение

монополиста. При различных предположениях о товаре и ситуации на рынке модель представляет собой задачу оптимального импульсного управления, оптимального импульсного управления с запаздываниями, оптимального импульсного управления с ограничениями на фазовую траекторию. Найдены оптимальные решения этих задач, доказана теорема о магистрали в сильнейшей форме.

■ Исследование модели показало, что справедливость гипотезы Коуза зависит от характера выбытия товаров длительного пользования. Для товаров, описываемых экспоненциальным законом выбытия, справедливость гипотезы Коуза зависит от соотношения коэффициента выбытия m и банковской процентной ставки r . При изменении параметра m/r от 0 до ∞ магистраль $\hat{X}$ монотонно смещается от выпуска при совершенной конкуренции X_C к монопольному выпуску X_M . Гипотеза Коуза справедлива, если $m \ll r$. Для товаров с фиксированным сроком службы при нулевом начальном запасе товаров у потребителей гипотеза подтверждается. Для совершенно долговечных товаров, какие и рассматривал Коуз, гипотеза подтверждается: монополист оказывается в условиях конкуренции.

■ Снижение долговечности товара может помочь монополисту избежать конкуренции в случае товаров с экспоненциальным выбытием, но не в случае товаров с фиксированным сроком службы. Однако, и в том и в другом случае, монополист увеличивает свою прибыль, снижая долговечность товаров.

■ Вопреки предположениям Коуза, используя монополистический лизинг, монополист всё равно может оказаться в условиях конкуренции. Более того, наличие торговли на вторичном рынке не оказывает принципиального влияния на поведение монополиста.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Флёрова А.Ю., Шананин А.А.* Задача оптимального управления производством товаров длительного пользования. Труды XLVI научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук»: Часть VII. Управление и прикладная математика. Москва-Долгопрудный: МФТИ, 2003г. с. 138-139.
2. *Флёрова А.Ю.* Модели вторичного рынка товаров длительного пользования. Труды XLVII научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук»: Часть VII. Управление и прикладная математика. Москва-Долгопрудный: МФТИ, 2004г. с. 165-167.
3. *Флёрова А.Ю., Шананин А.А.* Анализ динамической модели рынка товаров длительного пользования. Первая международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2005 (12-16 сентября 2005 г., Переславль-Залесский, Россия): Труды конференции. Т.1. – М.: КомКнига, 2005. - с. 343-347.
4. *Флёрова А.Ю.* Исследование влияния вторичного рынка на поведение монополиста, производящего товары длительного пользования. М.: ВЦ РАН, 2006.
5. *Флёрова А.Ю.* Товары длительного пользования с фиксированным сроком службы. Труды V Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2007), посвященная 90-летию со дня рождения Н.Н. Моисеева. М.: МАКС Пресс, 2007. с.105-106.
6. *A.Y. Flerova* Mathematical modeling of monopolist's behavior on durable goods market. Труды 2-ой Международной конференции «Математическое

моделирование социальной и экономической динамики» (MMSED-2007). М.: РУДН, 2007. С. 266-268.

7. *Флёрова А.Ю.* Управление производством товаров длительного пользования с учётом монополистического лизинга. Известия РАН: Теория и системы управления, № 6, 2007. С.167-176.
8. *A. Yu. Flerova* Control of Production of Durable Goods with Account of Monopolistic Leasing // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2007, Vol. 46, No. 6, pp. 1001–1010.
9. *Флёрова А.Ю.* Математическая модель рынка товаров длительного пользования с различными характеристиками выбытия. II Всероссийская научная конференция с молодёжной научной школой «Математическое моделирование развивающейся экономики», посвященная 90-летию со дня рождения Н.Н. Моисеева. ЭКОМОД-2007, г. Киров, 9-15 июля 2007/Тезисы докладов. – Киров, изд-во. ВятГУ, 2007. С.43.
10. *Флёрова А.Ю.* Математическая модель рынка товаров длительного пользования с различными характеристиками выбытия. II Всероссийская научная конференция с молодёжной научной школой «Математическое моделирование развивающейся экономики», посвященная 90-летию со дня рождения Н.Н. Моисеева. ЭКОМОД-2007, г. Киров, 9-15 июля 2007/Труды конференции. – Киров, изд-во. ВятГУ, 2007. С.43.
11. *Флёрова А.Ю.* Поведение монополиста на рынке товаров длительного пользования в зависимости от вида товаров. Вторая международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2007 (10-14 сентября 2007 г., Обнинск, Россия):

Труды конференции. В 2 т. Т.2. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. С.139-141.

12. *Флёрова А.Ю.* Математическая модель вторичного рынка товаров длительного пользования с различными характеристиками выбытия. Труды 50-ой научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук»: Часть VII. Управление и прикладная математика. Том 1. – М.: МФТИ, 2007. С.94-96.
13. *Флёрова А.Ю.* Задачи оптимального управления, возникающие при исследовании гипотезы Коуза. Труды VII международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08. Москва, 28-31 января 2008 г. Институт проблем управления им. А.В. Трапезникова РАН. М.: Институт проблем управления им. А.В. Трапезникова РАН, 2008. С.1292-1295.

Основные результаты диссертации представлены в работах [4, 7, 10]. В совместных работах задачи поставлены и направление их решений выбрано совместно с профессором А.А. Шананиным, автору принадлежит реализация выбранных направлений исследования: формулировка и доказательство утверждений, изучение свойств оптимальных траекторий.