На правах рукописи

Таханов Рустем Серикович

Предикатное описание дополнительных ограничений в задачах распознавания образов

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена в Вычислительном центре им. А. А. Дородницына Российской Академии наук

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор **Рудаков Константин Владимирович.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Леонтьев Владимир Константинович,**

кандидат физико-математических наук **Дьяконов Александр Геннадиевич.**

Ведущая организация: Московский Государственный Педагогический Университет.

Защита диссертации состоится «____»___________ 2007 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д002.017.02 в Вычислительном центре им. А. А. Дородницына Российской Академии Наук по адресу: 119333, Москва, ул. Вавилова, 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан «____»___________ 2007 г.

Учёный секретарь диссертационного совета — доктор физико-математических наук, профессор В.В. Рязанов

Актуальность темы исследования

Интенсивное развитие технологий хранения информации, произошедшее за последние 30 лет, послужило стимулом для нового витка исследований по классической тематике—проблемам связанным с автоматизацией ее интеллектуального анализа. Одним из важных инструментов для решения этой задачи являются алгебраические методы распознавания образов, развиваемые с конца 70-х годов прошлого века школой академика Ю.И.Журавлева.

Центральным в алгебраическом подходе к задачам распознавания образов является понятие универсальных ограничений, предъявляемых как к конечным функциям, так и функциям возникающим на промежуточных этапах построения классификатора — алгоритмическим операторам, корректирующим операциям, решающим правилам. При этом важное значение приобретают такие языки описания данных ограничений, которые удовлетворяют условию сохранения структурных свойств при всевозможных суперпозициях. Одним из таких языков и является предикатное задание.

Примером такого задания служат монотонные функции, которые можно определить как множество функций, которые сохраняют некоторые частичные порядки на множествах значений и определения. В общем случае, задаются два предиката одинаковой арности, и функция должна каждый набор, удовлетворяющий первому предикату, переводить в набор, удовлетворяющий второму.

Для всякого способа(языка) описания дополнительных ограничений возникают свои чисто математические вопросы, которые в распознавании образов в первую очередь связаны либо с дискриптивными(какие множества отображений можно задать посредством предикатных пар) и сложностными аспектами(то есть трудоемкость работы с этим языком), либо с обобщающей способностью(качество получаемых алгоритмов). В данной работе мы разносторонне исследуем аппарат предикатного задания и, в основном, концентрируемся на первом аспекте.

Проблемная ситуация заключается в том, что богатство языка предикатных пар для описания дополнительных ограничений подразумевает серьезную проблему — согласование обучающей выборки с такими ограничениями, как правило, NP-трудная задача. Отсюда и возникает стремление четко очертить области эффективной разрешимости. Решению данной проблемы и посвящена большая часть работы.

Цель работы

Основной целью работы является разработка математического аппарата методов распознавания образов основанных на идее задания дополнительных ограничений в виде предикатных пар. Изучаются дискриптивные и сложностные аспекты предикатных моделей, ставится вопрос о классификации предикатных ограничений с эффективно-разрешимой задачей согласования с обучающей выборкой.

Основные задачи

- Исследование возможности выделения такого подмножества пар предикатов, которое обладало бы той же описательной силой для определения множеств отображений, что и все множество пар.
- Характеризация предикатных ограничений с эффективно-разрешимой задачей согласования с обучающей выборкой.
- Построение алгоритмов согласования с обучающей выборкой для наиболее часто встречающегося типа предикатных ограничений — ограничений монотонности. Исследования теоретической сложности данной задачи.

Методы исследований

В процессе работы использовались методы теории сложности вычислений, NP-трудности, максимизации супермодулярных функций. Активно использовался аппарат универсальной алгебры, а именно теории замкнутых классов функций многозначной логики, предикатного описания таких классов, классификация Поста.

Научная новизна

• Из множества всех возможных предикатных описаний выделены максимальные и получены необходимые и достаточные условия максимальности. Показана связь условий максимальности слева с алгебраическим подходом. Условия максимальности исследованы на примере отношения частичного порядка и предикатного описания множества выполняющих наборов 2-КНФ. Исходя из требований максимальности слева, для отношения «между» предложена аксиоматика и рассмотрены примеры подобных отношений.

• Поставлена задача характеризации предикатных ограничений с эффективно-разрешимой задачей согласования с обучающей выборкой. Предложен подход к ее получению через классификацию пар по свойствам предиката на множестве значений, при произвольном предикате на множестве определения. Показана связь такой постановки с замкнутыми классами предикатов и функций многозначной логики. Поставлена задача полного описания максимальных классов предикатов в общем случае. Дана полная классификация эффективно согласуемых с обучающей выборкой предикатных ограничений в булевом случае. В общем случае введен важный с практической точки зрения порядковый класс предикатов и показана его эффективная разрешимость.

• Рассмотрена задача выделения максимальной подвыборки обучающей выборки, не противоречащей ограничениям монотонности. Показывается, что данная задача является NP-трудной и равносильна задаче о максимальном независимом множестве в специальных орграфах. Подробно рассмотрены очень важные практически случаи последней задачи, когда частичный порядок, заданный на множестве ответов, является полным порядком либо имеет размерность 2. Показывается, что второй случай сводится к максимизации квадратично-выпуклой функции на выпуклом множестве. Для этого случая строится приближенный полиномиальный алгоритм, основанный на выпуклой оптимизации.

• Введена схема определения допустимых категорий алгебраического подхода через аппарат предикатного описания множеств отображений.

Практическая и теоретическая ценность

Совокупность результатов, полученных в диссертации, представляет собой первое исследование по сложности методов распознавания основанных на предикатных ограничениях. Разработанные критерии эффективной разрешимости, а также алгоритмы согласования с выборкой в случае монотонных ограничений, предназначены для непосредственного применения на практике.

Аппробация работы

Положения и выводы, сформулированные в диссертации, получили квалифицированную аппробацию на XII, XIII Всероссийских конференциях «Математические методы распознавания образов» (Москва, 2005-2007 г.), на международной научной конференции «Интеллектуализация обработки информации ИОИ - 2006» (Алушта, Крым, 2006 г.), на научной конференции МФТИ (Москва, 2006 г.).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 7 работ, в том числе 2 статьи в рецензируемых журналах, 3 в трудах конференции, 2 электронные публикации.

Структура и объем диссертационной работы

Диссертация изложена на 70 страницах машинописного текста и состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Список литературы состоит из 51 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ВВЕДЕНИЕ

Во введении дается обоснование актуальности работы, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, определена научная новизна полученных результатов. Описана общая структура диссертации.

ГЛАВА 1. Предикатные пары как язык описания множеств отображений и максимальные предикатные пары

Глава 1 посвящена дискриптивным вопросам аппарата предикатных пар. Рассматривается задача выделения такого подмножества пар предикатов, которое обладает той же описательной силой для определения множеств отображений, что и все множество пар. Глава состоит из пяти параграфов.

1. Основное понятие
2. Максимальность пар предикатов относительно множеств отображений
3. Максимальность пар предикатов
4. Максимальные предикатные пары в примерах
5. Аксиоматика отношения «между»

Первый параграф вводит основное понятие сохранения функцией предикатной пары.

Определение 1. Пусть на множествах A и B заданы m-местные предикаты ρ_A и ρ_B, т.е. $\rho_A \subset A^m$ и $\rho_B \subset B^m$. Тогда будем говорить, что функция $\varphi : A \to B$ сохраняет пару (ρ_A, ρ_B), если для любого набора $(x_1, x_2, ..., x_m) \in \rho_A$ имеем $\langle\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_m)\rangle \in \rho_B$. Множество функций, сохраняющих пару (ρ_A, ρ_B), будем обозначать $H\left(\rho_A, \rho_B\right)$.

Приводится пример множества отображений, которое не может быть задано посредством пар предикатов.

Во втором и третьем параграфах вводятся понятия максимальной пары относительно множества отображений и просто максимальной пары.

Пусть зафиксировано множество отображений $H \subseteq \{f : A \to B\}$ и число $m \in$ N. Рассмотрим множества пар отношений $\mathfrak{A} = \{(\rho_A, \rho_B) \,|\rho_A \subseteq A^m, \rho_B \subseteq B^m\}$ и $\mathfrak{A}_H = \{(\rho_A, \rho_B) \,|\rho_A \subseteq A^m, \rho_B \subseteq B^m, H \subseteq H\left(\rho_A, \rho_B\right)\} \subseteq \mathfrak{A}$. Множество $\mathfrak{A}_H$ непусто, так как пара предикатов (A^m, B^m) сохраняется для любого отображения $f : A \to B$. Будем называть элементы $\mathfrak{A}_H$ допустимыми относительно H парами предикатов.

Введем на множестве $\mathfrak{A}$ два частичных порядка $\geq^l, \geq^r$:

$$(\rho'_A, \rho'_B) \geq^l (\rho''_A, \rho''_B) \Leftrightarrow \rho'_A \supseteq \rho''_A, \rho'_B = \rho''_B$$
$$(\rho'_A, \rho'_B) \geq^r (\rho''_A, \rho''_B) \Leftrightarrow \rho'_A = \rho''_A, \rho'_B \subseteq \rho''_B$$

Определение 2. Пара (ρ_A, ρ_B) называется H-максимальной слева, если элемент $(\rho_A, \rho_B) \in \mathfrak{A}_H$ является максимальным в множестве $\mathfrak{A}_H$ с частичным порядком $\geq^l$.

Определение 3. Пара (ρ_A, ρ_B) называется H-максимальной справа, если элемент $(\rho_A, \rho_B) \in \mathfrak{A}_H$ является максимальным в множестве $\mathfrak{A}_H$ с частичным порядком $\geq^r$.

Определение 4. Пара (ρ_A, ρ_B) называется H-максимальной, если она является максимальной справа и слева одновременно.

Введем на множестве $\mathfrak{A}$ частичные порядки $\succ^l, \succ^r$:

$$(\rho'_A, \rho'_B) \succ^l (\rho''_A, \rho''_B) \Leftrightarrow H(\rho'_A, \rho'_B) = H(\rho''_A, \rho''_B), \rho'_A \supseteq \rho''_A, \rho'_B = \rho''_B$$

$$(\rho'_A, \rho'_B) \succ^r (\rho''_A, \rho''_B) \Leftrightarrow H(\rho'_A, \rho'_B) = H(\rho''_A, \rho''_B), \rho'_A = \rho''_A, \rho'_B \subseteq \rho''_B$$

Определение 5. Пара (ρ_A, ρ_B) называется максимальной слева, если элемент $(\rho_A, \rho_B) \in \mathfrak{A}$ является максимальным относительно частичного порядка $\succ^l$.

Определение 6. Пара (ρ_A, ρ_B) называется максимальной справа, если элемент $(\rho_A, \rho_B) \in \mathfrak{A}$ является максимальным относительно частичного порядка $\succ^r$.

Определение 7. Пара (ρ_A, ρ_B) называется максимальной, если она максимальна слева и справа одновременно.

Показывается, что эти 2 понятия связаны следующим предложением.

Предложение 1. Пара $(\rho_A, \rho_B) \in \mathfrak{A}$ максимальна справа(слева) тогда и только тогда, когда она H-максимальна справа(слева), при $H = H(\rho_A, \rho_B)$.

Другая характеризация максимальных слева предикатных пар получается из следующей доказанной теоремы. Введем некоторые определения.

Определение 8. Пусть дано множество $\{x_i\}$, $x_i \in A$, где $i = \overline{1, n}$, причем на A задан m-местный предикат ρ_A. Обозначим $Str(\rho_A, \{x_i\}_{i=1}^n)$ и назовем ρ_A - структурой $\{x_i\}$ следующее подмножество B_n^m, где $B_n = \{1, 2, ..., n\}$: $Str(\rho_A, \{x_i\}_{i=1}^n) = \{(i_1, ..., i_m) : (x_{i_1}, ..., x_{i_m}) \in \rho_A\}$.

Например, в случае, когда $x_i = x$ и $(x, ..., x) \in \rho_A$, $Str(\rho_A, \{x_i\}_{i=1}^n) = B_n^m$.

Определение 9. Пусть на множествах $A_1, ..., A_s$ заданы m-местные предикаты $\rho_{A_1}, ..., \rho_{A_s}$ соответственно. Тогда назовем декартовым произведением этих предикатов и обозначим $\rho_{A_1} \times ... \times \rho_{A_s}$ m-местный предикат на $A_1 \times ... \times A_s$, такой, что $\left\langle \left(a_1^1, ..., a_s^1\right), ..., \left(a_1^m, ..., a_s^m\right) \right\rangle \in \rho_{A_1} \times ... \times \rho_{A_s}$ тогда, и только тогда, когда для любого $i = \overline{1, s}$: $\left(a_i^1, ..., a_i^m\right) \in \rho_{A_i}$.

Определение 10. Пусть на множестве A задан m-местный предикат ρ_A. Тогда m-местный предикат $\rho_A \times \cdots \times \rho_A$ на A^s назовем s-ой степенью ρ_A и обозначим ρ_A^s.

Теорема 1. Пусть даны множества $\Im_i$ и $\Im_e$, и на обоих множествах заданы m-местные предикаты ρ_i и ρ_e, и пусть $\mathfrak{M}_0 = H \subseteq H\left(\rho_i, \rho_e\right)$. Обозначим $\mathfrak{M}_0^p = \{R : \Im_i \to \Im_e^p ; R(x) = \left(b_1(x), ..., b_p(x)\right), b_i \in \mathfrak{M}_0\}$. Для того, чтобы пара (ρ_i, ρ_e) была H-максимальна слева необходимо и достаточно, чтобы для всякого натурального n и для любого множества $\{x_j\}, x_j \in \Im_i$, где $j = \overline{1, n}$, существовали такие число p и функция $R \in \mathfrak{M}_0^p$, что $Str(\rho_i, \{x_j\}_{j=1}^n) = Str(\rho_e^p, \{R(x_j)\}_{j=1}^n)$.

В параграфе 4 выясняется смысл максимальности слева предикатных пар в случаях частичных порядков и предикатного описания выполняющих наборов 2-КНФ. Для частичных порядков доказано следующее.

Предложение 2. Пусть заданы множества A, B и пара бинарных предикатов (ρ_A, ρ_B), где ρ_B — частичный порядок, не являющийся тривиальной эквивалентностью. Пара (ρ_A, ρ_B) максимальна слева тогда и только тогда, когда предикат ρ_A удовлетворяет свойствам транзитивности и рефлексивности.

В параграфе 5 исходя из условий максимальности слева предлагается следующая аксиоматика отношения «между».

Определение 11. Тернарный предикат M заданный на множестве X назовем отношением «между», если он удовлетворяет условиям 1-4.

1. $M_k(x, y, z) \Rightarrow M_k(z, y, x)$
2. $M_k(x, x, y) \& M_k(x, y, y)$
3. $M_k(x, y, x) \Rightarrow M_k(y, x, y)$
4. $M_k(x, y, z) \& M_k(x, y', z) \& M_k(y, t, y') \Rightarrow M_k(x, t, z)$

ГЛАВА 2. О предикатных ограничениях с эффективно-разрешимой задачей согласования с обучающей выборкой

Глава 2 посвящена характеризации предикатных ограничений с эффективно-разрешимой задачей согласования с обучающей выборкой. Глава состоит из пяти параграфов.

1. Введение

2. Алгебраическая структура эффективно разрешимых классов предикатов

3. Максимальные классы предикатов в булевом случае

4. Эффективная разрешимость порядкового класса предикатов в общем случае

5. Открытые вопросы

В введении главы даются основные определения.

Определение 12. Пусть задана модель $H = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$, где $P_i^{m_i}$ есть предикат арности m_i, заданный на множестве A. Сигнатурой модели H называется последовательность $(m_1, ..., m_k)$.

Определение 13. Пусть задана конечная модель $H = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$. Назовем задачей $FTS\,(H)$(Fitting to Training Set) оптимизационную задачу, входом для которой является некоторая конечная модель $I = (B, Q_1^{m_1}, ..., Q_k^{m_k})$ (с той же сигнатурой что и H) и конечный набор пар $\Pi = \{(x_i, y_i, w_i)\,|x_i \in B, y_i \in A, w_i \in \mathrm{N}\}_{i=1}^n$. Длиной входа считаем $\sum\limits_{i=1}^{k} |B|^{m_i} + (n+1)\,|B| + n\,|A| + \sum\limits_{i=1}^{n} \lceil \log w_i \rceil$. Требуется найти

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\,[f\,(x_i) = y_i] \to \max_{f \in Hom(I,H)},$$

где $Hom\,(I, H)$ — множество гомоморфизмов из I в H.

Таким образом, параметром всякой задачи являются лишь предикаты на множестве значений, или, иначе говоря, модель множества значений. И под задачей классификации мы подразумеваем задачу перечисления таких моделей H, для которых $FTS\,(H)$ является эффективно разрешимой задачей.

Предложенный подход к классификации предикатных ограничений с эффективно-разрешимой задачей согласования может быть оправдан тем, что множество значений в задачах распознавания является конечным, и реляционная структура на нем бывает достаточно простой, чтобы явно проверить выполнение критериев эффективной разрешимости $FTS\,(H)$. Эффективная же разрешимость $FTS\,(H)$, в свою очередь, гарантирует, что оптимальная функция может быть эффективно найдена для любой конечной модели I (о которой можно думать как об объединении обучающей и контрольной выборок). Уточним понятие эффективной разрешимости.

Определение 14. Пусть задано множество A и на нем задан класс предикатов $S = \{\rho_\alpha^{n_\alpha} \subseteq A^{n_\alpha}\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Если для любой модели $H = (A, P_1^{m_1}, ..., P_k^{m_k})$, где $P_i^{m_i} \in S$, задача $FTS\,(H)$ является разрешимой на машине Тьюринга за полиномиальное от длины входа число шагов, то S называется эффективно разрешимым классом.

Заметим, что эффективно разрешимые классы предикатов образуют частичный порядок по включению. Интерес представляет вопрос о характеризации максимальных элементов данного порядка, то есть таких классов, которые не содержаться ни в каких других. Назовем такие классы максимальными.

В параграфе 2 выявляется алгебраическая структура эффективно разрешимых классов предикатов.

Определение 15. Пусть $\rho \subseteq A^m$ и $f : A^n \to A$. Функция f сохраняет предикат ρ, если для любых $\left(x_1^i, ..., x_m^i\right) \in \rho, i = \overline{1, n}$ справедливо $\left(f\left(x_1^1, ..., x_1^n\right), ..., f\left(x_m^1, ..., x_m^n\right)\right) \in \rho$.

Для множества функций F обозначим $Inv\,(F)$ множество предикатов сохраняющихся для любой функции из F.

Доказывается следующий основной результат.

Теорема 2. Всякий максимальный класс предикатов S определяется некоторым классом функций F, то есть $S = Inv\left(F\right)$. При этом, для любого $f \in F, f : A^n \to A$, справедливо, что $f\left(x_1, ..., x_n\right) \in \left\{x_1, ..., x_n\right\}$, то есть f консервативна.

Ясно, что F можно считать замкнутым относительно суперпозиций и замен переменных классом функций, так как взятие замыкания не изменяет $Inv\left(F\right)$. Параграф 3 посвящен следствиям из этого факта и из широко известной классификации Поста замкнутых классов булевых функций. Напомним стандартные обозначения из теории замкнутых классов булевых функций: T_{01}—функции сохраняющие 0 и 1, M_{01}—монотонные функции сохраняющие 0 и 1, S_{01}—самодвойственные функции сохраняющие 0 и 1. Основной результат таков.

Теорема 3. Классы предикатов $Inv\left(T_{01}\right), Inv\left(M_{01}\right), Inv\left(S_{01}\right)$ и только они, максимальны в булевом случае, то есть когда $A = \{0, 1\}$.

Как известно, в небулевом случае замкнутых классов функций континуальное множество. Потому, подход основанный на рассмотрении каждого замкнутого класса в отдельности неприменим. Представляет интерес описать через отношение сохранения функцией предиката как можно более широкие эффективно разрешимые классы предикатов.

Очевидно, что класс $Inv\left(M_{01}\right)$ соответствует ограничениям монотонности и, как показано, такие ограничения в булевом случае эффективно разрешимы. Обобщению этого факта и посвящен параграф 4.

Пусть на $A = \{0, 1, ..., k-1\}$ задан полный порядок $\leq$. Для простоты будем полагать, что $0 \leq 1 \leq ... \leq k-1$. Положим для $x, y \in A$, $x \wedge y = \min\{x, y\}, x \vee y = \max\{x, y\}$, и введем класс предикатов $Inv\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$.

Теорема 4. Класс $Inv\left(\{x \wedge y, x \vee y\}\right)$ — эффективно разрешимый класс предикатов.

Следствие. Для предиката полного порядка $x \geq^A y \Leftrightarrow x = x \vee y$ справедливо, что $FTS\left(H = \left(A, \geq^A\right)\right)$ — полиномиально разрешимая задача.

В доказательстве этого результата активно использовался аппарат универсальной алгебры и теории максимизации супермодулярных функций.

В параграфе 5 обсуждены некоторые открытые вопросы.

ГЛАВА 3. Задача монотонизации выборки

В главе 3 рассматривается практически важная задача минимальной коррекции обучающей выборки для построения на основе скоректированной монотонного отображения. Глава состоит из шести параграфов.

1. Постановка задачи монотонизации выборки

2. Задача монотонизации выборки и максимальные независимые подмножества

3. NP-полнота MaxCMS

4. 1-MaxCMS

5. 2-MaxCMS

6. Приближенный алгоритм для 2-MaxCMS

В параграфе 1 поставлена следующая задача, обозначенная как MaxCMS(Maximal Consistent with Monotonicity Set).

MaxCMS. Заданы конечные множества B_n, B_m, где $B_r = \{1, ..., r\}$ и на них частичные порядки $\geq^1, \geq^2$ соответственно и функция $\varphi : B_n \to B_m$. Для каждого элемента $i \in B_n$ задан положительный целочисленный вес w_i. Требуется найти максимальное по весу подмножество $B \subseteq B_n$, такое, что функция φ, ограниченная на B, является монотонной, то есть $\forall i, j \in B \left[i \geq^1 j \to \varphi(i) \geq^2 \varphi(j) \right]$.

Определение 16. Множества $B \subseteq B_n$, такие, что функция φ, ограниченная на B, является монотонной, называются допустимыми.

В параграфе 2 обсуждается связь между данной оптимизационной задачей и максимальным независимым множеством в орграфах специального типа.

Введем на множестве B_n частичный предпорядок (напомним, что так называется транзитивный и рефлексивный бинарный предикат):

$$i \succ j \Leftrightarrow \varphi(i) \geq^2 \varphi(j) .$$

Рассмотрим орграф $G = (V, E)$, где $V = B_n$, а $E = \left\{(i,j)\,|i \geq^1 j, \varphi(i) \ngeq^2 \varphi(j)\right\}$. Орграф G также может быть задан равенствами: $V = B_n$ и $E = \geq^1 \cap \overline{\succ}$, где $\overline{\succ}$ — дополнение бинарного предиката.

Определение 17. Всякий орграф, множество дуг которого может быть представлено как пересечение некоторых частичного порядка и дополнения частичного предпорядка на вершинах орграфа называется специальным.

Предложение 3. Максимальное допустимое множество равно максимальному независимому множеству специального орграфа G.

Предложение 4. Пусть произвольный специальный орграф G' задается множеством вершин $V' = B_n$ с весами w_i' и дуг $E' = \geq' \cap \overline{\succ'}$, причем заданы по отдельности $\geq'$ и $\overline{\succ'}$ (то есть множество дуг E' не нужно декомпозировать). Тогда задача нахождения максимального независимого множества в таком орграфе полиномиально сводится к MaxCMS.

В параграфе 3 доказана NP-трудность MaxCMS. Параграф 4 посвящен подзадачам MaxCMS — d-MaxCMS. Введем это понятие.

Всякий частичный порядок на конечном множестве можно представить как пересечение полных порядков на нем.

Определение 18. Пусть на конечном множестве M задан частичный порядок $\geq$. Размерностью частичного порядка $\geq$ назовем минимальное число d полных порядков $\geq_1, ..., \geq_d$, что $\geq = \geq_1 \cap ... \cap \geq_d$.

Рассмотрим задачу MaxCMS с входом $\left(\geq^1, \geq^2, \varphi, w\right)$ для случая, когда размерность частичного порядка $\geq^2$ равна d. В этом случае $\geq^2 = \geq_1 \cap ... \cap \geq_d$. Для соответствующего этой задаче специального орграфа $G = (V, E)$ будет справедливо: $V = B_n$ и $E = \geq^1 \cap \overline{\succ}$, где $i \succ j \Leftrightarrow i \succ_1 j \& ... \& i \succ_d j$ и $i \succ_s j \Leftrightarrow \varphi(i) \geq_s \varphi(j)$. И тогда,

$$E = \geq^1 \cap \overline{\succ_1 \cap ... \cap \succ_d} = \geq^1 \cap \left(\overline{\succ_1} \cup ... \cup \overline{\succ_d}\right) = \left(\geq^1 \cap \overline{\succ_1}\right) \cup ... \cup \left(\geq^1 \cap \overline{\succ_d}\right).$$

Так как каждый из предикатов $\overline{\succ_s}$ является транзитивным, то E можно представить как объединение d транзитивных предикатов.

Определение 19. Задача MaxCMS с входом $\left(\geq^1, \geq^2, \varphi, w\right)$ для случая, когда размерность частичного порядка $\geq^2$ равна d, называется d-MaxCMS.

Фактически доказано

Предложение 5. d-MaxCMS сводится к нахождению максимального независимого множества в орграфе $G = (V, E)$, где $E = \succ^1 \cup ... \cup \succ^d$, и предикаты $\succ^s$ транзитивны, причем в G нет циклов.

Из предложения следует, что 1-MaxCMS сводится к нахождению максимального независимого множества в орграфе $G = (V, E)$ без циклов, удовлетворяющему условию транзитивности дуг: если $(u, v), (v, t) \in E$, то $(u, t) \in E$. Эта задача имеет полиномиальный алгоритм решения, так как граф, получаемый из орграфа G преобразованием дуг в неориентированные ребра, является графом сравнимости некоторого частичного порядка, то есть совершенным. Далее в параграфе приведен один из алгоритмов ее решения, следуя Мохрингу.

Параграфы 5 и 6 посвящены задаче 2-MaxCMS. Показано, что задача сводится к квадратично-вогнутому программированию. Кроме того, для нее строится приближенный полиномиальный алгоритм решения.

ГЛАВА 4. Предикатное задание универсальных ограничений алгебраического подхода

В главе 4 вводится схема определения допустимых категорий алгебраического подхода через аппарат предикатного описания множеств отображений.

Рассмотрим некоторый класс множеств I. Пусть на каждом множестве $A \in \mathrm{I}$ задан m-местный предикат ρ_A и пусть дана категория $\Psi(\mathrm{I}, \rho)$, объектами которой являются множества A и их декартовы степени A^s, s=1,2,3,..., а множества морфизмов для любых $A, B \in \mathrm{I}$ и $s, r \in \mathrm{N}$ определяются равенством $Hom(A^s, B^r) = H(\rho_A^s, \rho_B^r)$. Скажем, что категория $\Psi(\mathrm{I}, \rho)$ порождена классом всех таких пар $\langle A, \rho_A \rangle$.

Доказан следующий результат.

Теорема 5. Ранее введенные симметрические, функциональные категории допускают подобное описание.

ВЫВОДЫ

• Из множества всех возможных предикатных описаний выделены максимальные и получены необходимые и достаточные условия максимальности. Как видно из полученных критериев для случаев описания монотонных функций и выполняющих наборов 2-КНФ, при заданном предикате на множестве значений, условие максимальности слева позволяет сделать выводы о некоторых алгебраических свойствах соответствующего предиката на множестве определения.

• Алгебраическая структура позволяет дать полную классификацию эффективно согласуемых с обучающей выборкой предикатных ограничений в булевом случае. В общем случае введен важный с практической точки зрения порядковый класс предикатов и показана его эффективная разрешимость.

• Рассмотрена задача выделения максимальной подвыборки обучающей выборки, не противоречащей ограничениям монотонности. Показывается, что данная задача является NP-трудной и равносильна задаче о максимальном независимом множестве в специальных орграфах.

• Введена схема определения допустимых категорий алгебраического подхода через аппарат предикатного описания множеств отображений. В рамках предлагаемой схемы показано, что ранее изученные монотонные, симметрические и функциональные категории допускают предикатное описание.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Таханов Р.С. Предикатное задание универсальных ограничений в алгебраическом подходе к задачам распознавания // ЖВМ и МФ, 2007, 47, № 3, 527–532.

[2] Таханов Р.С. Максимальные предикатные задания множеств отображений // ЖВМ и МФ, 2007, 47, № 9, 1669–1681.

[3] Таханов Р.С. О классах функций, сохраняющих отношения, в алгебраическом подходе к проблеме распознавания // Труды 49 конференции МФТИ, 264–265.

[4] Таханов Р.С. Предикатное описание множеств отображений и максимальные предикатные пары // Искусственный интеллект, 2006, № 2.

[5] Таханов Р.С. Задача монотонизации выборки // Доклады Всероссийской конференции ММРО-13, 2007.

[6] Takhanov R. On the monotonization of the training set // Available online: http://arxiv.org/abs/0705.2765

[7] Takhanov R. On predicate constraints with efficiently solvable task of fitting to training set // Available online: http://arxiv.org/abs/0708.3226