На правах рукописи

Андреев Михаил Юрьевич

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕЖВРЕМЕННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ С КАПИТАЛОМ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре инновационной экономики Московского физико-технического института (государственного университета)

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Поспелов Игорь Гермогенович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Данилов Владимир Иванович
	кандидат физико-математических наук, доцент Меньшиков Иван Станиславович
Ведущая организация:	Государственный Университет – Высшая Школа Экономики

Защита состоится “ 8 “ ноября 2007 г. в 13.00 час.
на заседании диссертационного совета Д 002.017.04 при Вычислительном центре им. А.А. Дородницына Российской академии наук
по адресу: 119991, г. Москва, ул. Вавилова, д.40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан “ “ ______________________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Н.М. Новикова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. С бурным развитием вычислительной техники широкое распространение получили вычислимые модели общего равновесия (CGE models). Вычислимые модели общего равновесия являются имитациями реальной экономической среды, которые комбинируют в себе абстрактную структуру общего равновесия, формализованную в моделях Эрроу-Дебре, с описаниями реальных экономических механизмов с целью численного нахождения равновесного спроса, предложения, цен, реализующихся на определенных рынках. CGE модели в настоящее время являются стандартным инструментом эмпирического анализа и широко используются для исследования многих вопросов: изменения внутри национальной экономики, анализ последствий глобализации и увеличения объемов внешней торговли, проблемы экологии и долгосрочного развития.

Наиболее подробные из CGE моделей служат, во-первых, описанием того уровня экономических отношений, который достигнут в стране. Во-вторых, во многих случаях позволяют указать ту причину, по которой произошел спад или кризис в прошлом, или на какой проблеме в будущем споткнутся существующие экономические отношения и на что нужно обращать более пристальное внимание экономистам и органам власти.

В России в Вычислительном центре имени А.А. Дородницына Российской академии наук вычислимые модели общего равновесия начали разрабатываться с 1975 года в рамках нового направления исследований САРЭ[1] (системный анализ развивающейся экономики). Это направление синтезирует методологию математического моделирования сложных систем, развитую в естественных науках и достижения современной экономической теории. Перед направлением была поставлена цель научиться строить замкнутые математические модели, которые описывали бы механизмы развития во времени макроэкономических структур и правильно воспроизводили совокупность основных качественных особенностей эволюции изучаемой экономической системы.

Был создан целый ряд моделей, образующих своеобразную «летопись» советских и российских экономических реформ[2]. Каждая из моделей была основана на системе гипотез относительно характера тех экономических отношений, которые складывались в соответствующий период в России. С помощью моделей удалось понять внутреннюю логику развития экономических процессов, скрывшуюся за видимой, часто, казалось бы, парадоксальной, картиной экономических явлений, которая не укладывалась в известные теоретические схемы. Опыт применения моделей показал, что они служат надежным инструментом анализа макроэкономических закономерностей, а

---

[1] Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.

[2] Автухович Э.В., Бурова Н.К., Дорин Б.Л., Панов С.С., Петров А.А., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Ташлицкая Я.М., Чуканов С.В., Шананин А.А., Шапошник Д.В. Оценка потенциала роста экономики России с помощью математической модели. М.: ВЦ РАН, 2000.

также прогноза последствий макроэкономических решений при условии сохранения сложившихся отношений.

Одной из последних моделей является разработанная в 2002-2004 годах по заказу Агенства по налогам и сборам РФ модель экономики России с учетом теневого оборота. Модель позволила

1. Восстановить и спрогнозировать несглаженные квартальные временные ряды основных макроэкономических показателей экономики России: темпа инфляции, реального ВВП, реальных инвестиций и др.
2. Восстановить динамику и оценить изменение собираемости четырех типов налогов в зависимости от изменения различных налоговых ставок и управляемых параметров экономики
3. Оценить размер теневого оборота, уровень теневых заработных плат

Главной особенностью этой модели было описание взаимодействия фирмы и ее собственника, как процесса управления финансовым капиталом фирмы. В рамках модели определялся капитал двух секторов: финансового и реального. Величина капитала в каждом из этих секторов могла быть либо нулевая, либо положительная, что давало четыре различных возможных режима. Согласно расчетам, развитие экономики России лучше описывалось режимом, в котором собственники вкладывают капиталы только в финансовый сектор. Для реального сектора это означает, что активы создаются не за счет прибыли, а за счет привлечения средств в виде кредитов. Таким образом, расчеты показали, что, несмотря на кажущееся улучшение финансового состояния предприятий с момента кризиса 1998 года, в экономике сохранилось преобладание средств в финансовом секторе. Как долго такой режим будет продолжаться – использованная детерминированная модель ответить не смогла ввиду своих принципиальных внутренних свойств.

Причиной неоднозначности определения режимов явилось постоянство цены капитала в каждом секторе, что характерно для детерминированной модели. Постоянство цены приводит к равной доходности капитала в каждом секторе. Собственникам безразлично вкладывать ли капитал в один сектор, либо в другой сектор, либо вовсе сохранить благосостояние в денежной форме. Постоянство цены капитала и существенная неоднозначность в определении самого капитала могла быть разрушена введением случайности в модель.

Разрешение неоднозначности и возможность придания стоимости капитала нетривиальной динамики посредством введения стохастики представляется актуальным вопросом, в противном случае затруднительно описывать переходные процессы в указанных секторах экономики.

Цель работы. Целями настоящей диссертационной работы стали:

1. Постановка стохастической модели с капиталом и аналитическое разрешение задачи
2. Исследование особенностей и свойств стохастических задач, основанных на основополагающей схеме Эрроу-Дебре, которые интересны с теоретической точки зрения или должны быть учтены при применении стохастической модели с капиталом или ее результатов в более подробной конструкции описания экономики страны

3. Построение и проведение численного эксперимента со стохастической моделью с капиталом для случая конкретной производственной функции, оценка сложности вычисления стохастической модели

Методы и объект исследования. В диссертации используются методы теории оптимального управления; теории случайных процессов; элементы теории игр; аппарат работы с бесконечными ценами, разработанный В.И. Даниловым и А.И. Сотсковым[3], близкий к нестандартному анализу; элементы теории матриц.

Основным объектом исследования служит стохастическая модель чистого обмена и стохастическая модель с управлением капиталом, построенные на основе преобразованной И.Г.Поспеловым модели Эрроу-Дебре в детерминированную модель с управлением капиталом[4].

Научная новизна. Научная новизна работы состоит:

1. В создании новой стохастической модели чистого обмена с актуально бесконечно большими ценами. Предложена трактовка дефолтов экономики как естественного результата планирования действий агентами экономики. Показана Парето оптимальность равновесий с дефолтами в подавляющем большинстве экономик чистого обмена.
2. В создании модели межвременного равновесия с капиталом для стохастического случая. Найдены необходимые и достаточные условия существования и эффективности равновесий. Описано множество начальных условий стохастической модели равновесия, при которых существует решение. Показано, что дефолт в модели равновесия с капиталом ведет не только к несопоставимому росту цен продуктов, но и цен капитала. Показано независимость стоимости фирмы от текущих цен на выпускаемые товары.
3. Введено и обосновано дополнительное ограничение на деятельность фирмы, связывающее назначаемые фирмой стоимости капитала в разные периоды времени. Предложена теоретико-игровая конструкция, которая позволяет интерпретировать дополнительное ограничение как результат деятельности банка, функционирующего в условиях совершенной конкуренции и максимизирующего приведенную прибыль от операций заимствования и предоставления средств.

Практическая ценность. Практическая ценность работы состоит в обнаруженных особенностях стохастических моделей, которые должны быть учтены при построении вычислимых моделей общего равновесия. А именно следует:

1. Учитывать необходимость введения элементов монетарной политики и управления денежной массой как способа устранения проблемы множественности равновесий в стохастической модели
2. Рассматривать появление дефолтов в модели не как недостаток конструкции, а как, возможно, оптимальную траекторию развития экономики

[3] Danilov V.I., Sotskov A.I. A generalized economic equilibrium. Journal of Mathematical Economic, Vol. 19, Issue 4, pp. 341-356, 1990.

[4] Поспелов И.Г. Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов // ВЦ РАН, Москва, 2003.

3. Включать уравнение на связь стоимостей капитала в тех конструкциях, когда стоимость капитала определяется не из равновесия спроса и предложения капитала, а напрямую назначается производителем
4. Принять во внимание сложность численного вычисления равновесия стохастической модели. Как альтернатива прямому вычислению следует проводить декомпозицию задачи благосостояния в задачу равновесия и вычислять только более простую задачу благосостояния. В противном случае следует рассматривать детерминированную модель, а от стохастической модели взять выражения на связи стоимостей капиталов, полученных в рамках подхода CCAPM моделей.
5. Учитывать возможность получения ставок дисконтирования финансовых потоков изнутри модели как отношение двойственных переменных в противовес заданию ставок дисконтирования экзогенно

Апробация работы. Результаты диссертации и материалы исследований докладывались, обсуждались и получили одобрение на ряде конференций:

1. "Tikhonov and Contemporary Mathematics", 19-26 июня 2006 г., Москва.
2. 49-я научная конференция МФТИ, 24-25 ноября 2006 г., Москва.
3. "New Developments in Macroeconomic Modelling and Growth Dynamics", September 7-9, 2006, University of Algarve, Faro Portugal.
4. Вторая Международная конференция «Математическое моделирование социальной и экономической динамики» (MMSED-2007), 20-22 июня, 2007 г., Москва.
5. Вторая всероссийская научная конференция с молодежной научной школой «Математическое моделирование развивающейся экономики» (ЭКОМОД-2007), 9-15 июля, Киров.

Ряд результатов диссертации использовался в работе по проектам РФФИ № 07-01-00563, РГНФ № 05-01-02113а, 07-02-00362а.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 7 печатных работ, в том числе 1 работа в рецензируемом журнале из списка ВАК и одна монография в соавторстве.

Результаты, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Доказано существование множества собственных равновесий в стохастической модели чистого обмена. Введено понятие равновесия с дефолтами. Исследована структура собственных равновесий и равновесий с дефолтами, показано, что равновесия с дефолтами оказываются типичными среди недоминируемых равновесий. Доказано существования равновесий с дефолтами.
2. Сформулирована стохастическая модель с управлением капиталом. Введено определение регулярного равновесия регулярной модели. Доказано существование и эффективность регулярных равновесий. Дано описание множества регулярных равновесий. Показано, что в рамках модели с капиталом может быть получен аналог CAPM-модели как в ценовой, так и в бета-форме.

3. Показано, что альтернативная постановка модели с капиталом – без управления стоимостью капитала – имеет то же самое регулярное решение, что и модель с капиталом. Обоснована необходимость присутствия в формулировке модели условия на связь стоимостей капитала. Показана неединственность стохастических трендов стоимостей капиталов в общем случае и их равенство в среднем.
4. Предложена теоретико-игровая интерпретация условия регулярности динамики курсов фирмы

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения, 4 приложений и списка литературы из 68 наименований. Общий объем работы – 129 страниц, включая 13 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, формулируется цель исследования, характеризуется научная новизна и практическая ценность проведенных исследований.

Первая глава посвящена обзору литературы, в том числе описанию детерминированной модели с капиталом и принципам построения стохастической модели чистого обмена и стохастической модели с капиталом.

Описана детерминированная модель Эрроу-Дебре без ресурсов. Показано, как на основе этой модели профессором И.Г.Поспеловым получена детерминированная модель межвременного равновесия с капиталом.

Рассмотрена стандартная постановка наиболее известных стохастических моделей: модель Эрроу с условными товарами, модель Раднера со спот-рынками и ограниченным числом условных товаров, модель с активами, в рамках которой представлена теория полных и неполных рынков. Освещен вопрос эффективности равновесий этих моделей. Под эффективностью понимается совпадение (по общим компонентам) равновесия с решением задачи благосостояния. В рамках модели с активами представлены модель формирования цены капитала (CAPM) и модель формирования цены капитала на основе потребления (CCAPM) в ценовой и бета-форме.

Рассмотрены различные формы принципа рациональных ожиданий и указано, что в диссертации используются рациональные ожидания в форме полного предвидения. Это связано с тем, что в диссертации принцип рациональных ожиданий трактуется феноменологически: мы не требуем, чтобы любые оптимальные при равновесных ценах решения агентов образовывали в совокупности разумную траекторию развития экономики. Мы хотим лишь убедиться, что какая-то из разумных с макроэкономической точки зрения, траекторий цен, курсов и реальных показателей будет самосогласованной с точки зрения агентов.

Сформулирована проблема неоднозначности равновесий. Эта проблема связана с выполнением тождества Вальраса в стохастических моделях, неопределенностью терминальных цен и, как результат, существованием множества равновесий в модели, каждое из которых отвечает своему набору терминальных цен. Приводится описанный в литературе один из способов преодоления данной проблемы: введение монетарной политики и определение свободных цен посредством денежной массы. Но в диссертации монетарные модели не исследуются, поэтому существование равновесий оправдывается принципом, на котором строятся модели с sunspot-равновесиями: все агенты имеют согласованную веру относительно терминальных цен. Такой подход отвечает приведенной выше феноменологической трактовкой рациональных ожиданий.

В конце обзорной главы изложен критерий определения «правильности» функционала производителя в моделях равновесия, в том числе стохастических: функционал правильный, если все собственники «единогласны» относительно принимаемого фирмой производственного плана. В рассматриваемых в работе моделях условие единогласия выполняется.

<u>**Во второй главе**</u> рассматривается стохастическая модель чистого обмена и свойства описываемых ей равновесий.

Предполагается, что каждый потребитель n из конечного множества потребителей $\mathcal{N}$ в последовательные периоды времени t, начиная с нулевого, получает запас продукта w_t^n (одного и того же – рассмотрение многих продуктов ничего существенно нового не привносит.) При $t \geq 1$ запасы w_t^n представляют собой случайные величины, реализация которых становится известной потребителям к моменту t, а распределения известны заранее. Точнее, предполагается, что $w_t^n = w^n(\overline{s}_t)$, где $\overline{s}_t$ – отрезок $s_1,...,s_t$ последовательности случайных величин. Каждая случайная величина s_t зависит от предыстории случайных величин $s_t = s_t \big| \overline{s}_{t-1}$. Возможные реализации будущего потребителей, планирующих свою деятельность в начальный период времени $t = 0$, для наглядности можно представить конечным деревом исходов.

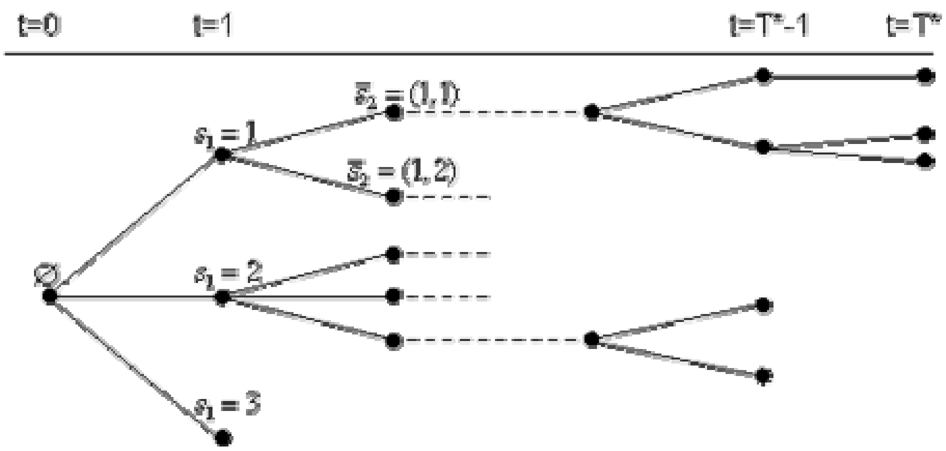


Рис.1. Дерево исходов: возможные варианты реализации будущего потребителей

Узлы дерева назовем *позициями*. Всем нетерминальным позициям $\overline{s}_t = (s_1,...,s_t)$ отвечает своя случайная величина s_{t+1}, реализация которой определяет ветвь дальнейшего движения. Случайные величины, отвечающие разным узлам, независимы, поэтому процесс перехода по дереву – марковский.

Множество всех позиций $\bar{s}_t$ обозначается через S, а множество терминальных позиций – $\bar{s}_{T(i)}, i \in I$.

<u>Определение.</u> *Собственным равновесием* в *модели чистого обмена для собственных равновесий* назовем набор положительных цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{|S|}$, где $\mathbf{p} = \left\langle \bar{p}(\bar{s}_{T(i)}) \,|\, i \in I \right\rangle$, $\bar{p}(\bar{s}_{T(i)}) = \left\langle p(\varnothing), p(\bar{s}_1), ..., p(\bar{s}_{T(i)}) \right\rangle$, и объемов потребления $\mathbf{c}^n \in \mathbb{R}^{|S|}, n \in \mathcal{N}$, где $\mathbf{c}^n = \left\langle \bar{c}^n(\bar{s}_{T(i)}) \Big|_{i \in I} \right\rangle$, $\bar{c}^n(\bar{s}_{T(i)}) = \left\langle c^n(\varnothing), c^n(\bar{s}_1), ..., c^n(\bar{s}_{T(i)}) \right\rangle$, такие, что:

1) вектор потреблений $\mathbf{c}^n$ каждого потребителя является для него одним из лучших элементов на бюджетном множестве.

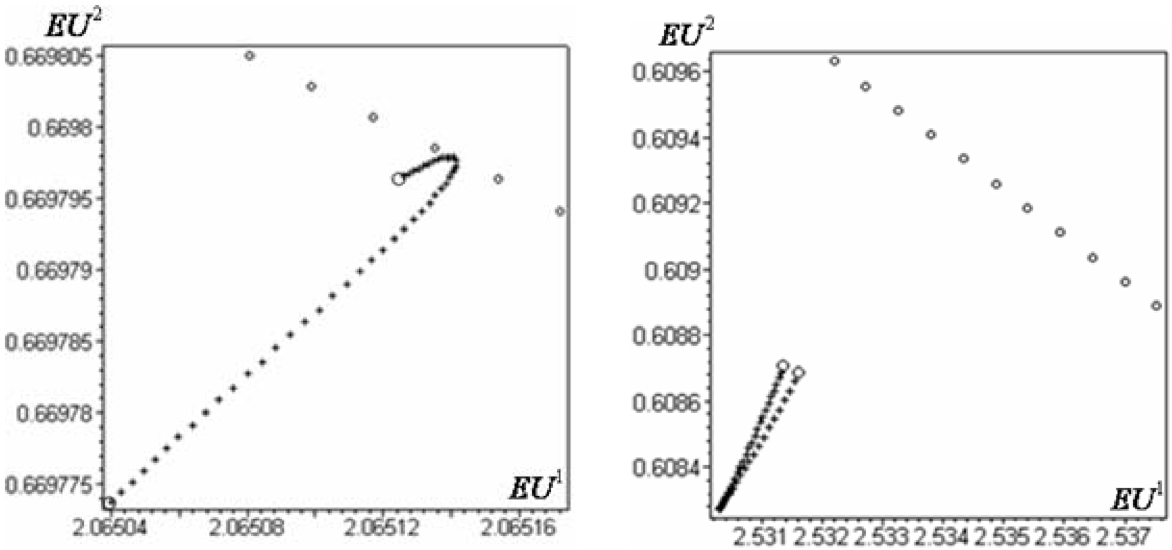
$$B^n(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{c}'^n \,|\, \bar{p}(\bar{s}_{T(i)}) \bar{c}'^n(\bar{s}_{T(i)}) \le \bar{p}(\bar{s}_{T(i)}) \bar{w}^n(\bar{s}_{T(i)}), i \in I \right\}, \tag{1}$$

2) выполнены условия материального баланса

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} w^n(\bar{s}_t) \ge \sum_{n \in \mathcal{N}} c^n(\bar{s}_t), \quad \bar{s}_t \subset S. \tag{2}$$

<u>Утверждение 1</u>. Пусть $\mathbf{p}^{T(I)}$ – произвольный фиксированный набор положительных терминальных цен. Тогда в стохастической задаче чистого обмена существует собственное равновесие такое, что $\mathbf{p} = \mathbf{p}^{T(I) \setminus T(I)} \otimes \mathbf{p}^{T(I)}$.

Множества собственных равновесий в двух конкретных моделях изображены на рис. 2.



а) б)

Рис. 2. Множества равновесий двух различных стохастических моделей чистого обмена для собственных равновесий (кресты) и решения задачи благосостояния (окружности)

В большинстве случаев у множества собственных равновесий нет Парето границы (см. рис. 2б). Оказывается, что собственные равновесия в пределе, когда какая-то из компонент вектора терминальных цен $\mathbf{p}^{T(I)}$ стремится к бесконечности, переходят в *несобственные*. При стремящейся к бесконечности цене бюджетное ограничение в (1) теряет смысл, но если его поделить на максимальную из входящих в него цен, скажем $p(\bar{s}_{t'})$,

$$\sum_{t\in\mathcal{T}(i)} \frac{p(\bar{s}_t)}{p(\bar{s}_{t'})} w^n(\bar{s}_t) \geq \sum_{t\in\mathcal{T}(i)} \frac{p(\bar{s}_t)}{p(\bar{s}_{t'})} c^n(\bar{s}_t)$$

то все слагаемые в бюджетном ограничении останутся конечными. Для строгого определения несобственных равновесий привлечен аппарат для работы с бесконечно большими ценами, разработанный В.И. Даниловым и А.И. Сотсковым.

Сравнительной ценой $P\left(\bar{s}'_{t'},\bar{s}''_{t''}\right)$ называется неотрицательное число или бесконечность поставленное в соответствие паре позиций $\bar{s}'_{t'} \subset S$, $\bar{s}''_{t''} \subset S$. *Система сравнительных цен* $\mathcal{P}=\left\langle P\left(\bar{s}'_{t'},\bar{s}''_{t''}\right) \mid \bar{s}'_{t'} \subset S,\ \bar{s}''_{t''} \subset S\right\rangle$ по определению должна удовлетворять естественному условию транзитивности $P\left(\bar{s}'_{t'},\bar{s}''_{t''}\right)P\left(\bar{s}'''_{t'''},\bar{s}''_{t''}\right)P\left(\bar{s}''',\bar{s}''_{t''}\right)=1$. При бесконечном значении одной из сравнительных цен это условие считается по определению выполненным тогда и только тогда, когда какая-либо другая сравнительная цена в тройном произведении равна 0. Сравнительные цены $P\left(\bar{s}'_{t'},\bar{s}''_{t''}\right)$ это по своей сути отношения обычных цен $\dfrac{p(\bar{s}_{t'})}{p(\bar{s}_{t''})}$.

Система сравнительных цен порождает отношение порядка на множестве всех позиций: $\bar{s}''_{t''} \succeq^P \bar{s}'_{t'}$ *(не хуже)* тогда и только тогда, когда $P\left(\bar{s}'_{t'},\bar{s}''_{t''}\right)>0$. Отношение $\succeq^P$ является полным порядком. Поэтому соответствующее отношение эквивалентности $\bar{s}'_{t'} \approx \bar{s}''_{t''} \Leftrightarrow \infty > P\left(\bar{s}'_{t'},\bar{s}''_{t''}\right)>0$ разбивает множество позиций на конечное число L непересекающихся *классов эквивалентности* $K_1,...,K_L$ на которых определено индуцированное соотношение порядка. Через $j(\bar{s}_t)$ будем обозначать номер класса позиции $\bar{s}_t$: $\bar{s}'_{t'} \succeq^P \bar{s}''_{t''} \Leftrightarrow j(\bar{s}''_{t''}) \leq j(\bar{s}'_{t'})$, $\bar{s}_t \in K_{j(\bar{s}_t)}$

<u>Определение.</u> *Несобственным равновесием* в *модели чистого обмена для несобственных равновесий* называется набор $\left(\mathcal{P},\mathbf{c}^{\mathcal{N}}\right)$, состоящий из системы сравнительных цен $\mathcal{P}$ и наборов потреблений $\mathbf{c}^n, n\in\mathcal{N}$, таких, что 1) вектор $\mathbf{c}^n$ является одним из лучших элементов в бюджетном множестве $B^n(\mathcal{P})=\left\{\mathbf{c}'^n \,\middle|\, \sum_{t\in\mathcal{T}(i)} P\left(\bar{s}_t,\bar{s}_{t'}\right)\left(w^n(\bar{s}_t)-c'^n(\bar{s}_t)\right)\geq 0,\ j(\bar{s}_{t'})=\min_{\bar{s}_t\subseteq\bar{s}_{T(i)}}\{j(\bar{s}_t)\}, i\in I\right\}$, 2) выполнены условия материального баланса (2). В бюджетном ограничении, согласно определению, все сравнительные цены $P\left(\bar{s}_t,\bar{s}_{t'}\right)$ либо конечны, либо нули.

В модели для несобственных равновесий, так же, как и для собственных, для каждой системы сравнительных цен на парах терминальных позиций $\mathcal{P}^{T(I)}=\left\{P\left(\bar{s}_{T(i)},\bar{s}_{T(h)}\right) \mid i\in I, h\in I\right\}$ существует своё собственное равновесие:

Утверждение 3. Пусть задана система сравнительных цен на парах терминальных позиций $\mathcal{P}^{T(I)}$. Тогда существует несобственное равновесие $\left(\mathcal{P}^{\mathcal{T}(I)\setminus T(I)} \otimes \mathcal{P}^{T(I)}, \mathbf{c}^{\mathcal{N}}\right)$.

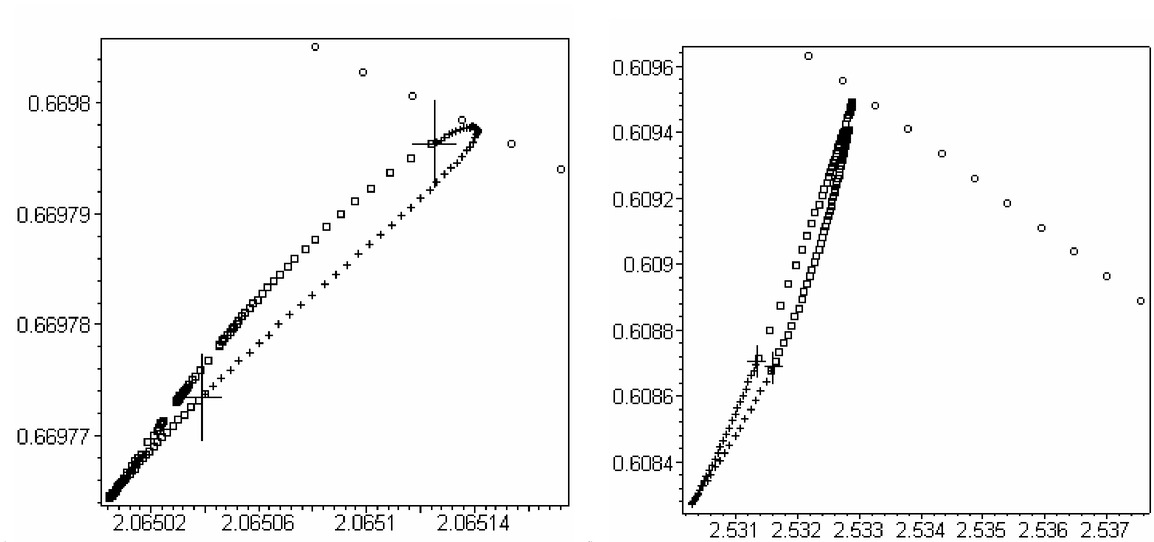
Показано, что сравнительные цены в равновесии устроены определенным образом: 1) для любой реализации процесса $i \in I$ класс позиций $\overline{s}_t$, где $\overline{s}_t \subseteq \overline{s}_{T(i)}$, не увеличивается с ростом t, т.е. с течением времени цены могут оставаться сопоставимыми или прыгать до бесконечности 2) класс позиции $\overline{s}_t$, если $\overline{s}_t \not\subseteq \overline{s}_{T(I)}$, определяется как наибольший класс из всех позиций $\overline{s}_{t+1}$ таких, что $\overline{s}_t \subseteq \overline{s}_{t+1}$. Т.е., если у текущей позиции есть продолжения, то хотя бы в одном продолжении цены будут сопоставимы с ценами в текущей позиции.

С точки зрения потребителя, последовательно проживающего периоды времени, жизнь в период $t=0$ начинается при конечных ценах. В период $t=1$ цены при некоторых исходах могут подскочить до бесконечности, но в период времени $t=1$ всегда возможен исход, в котором цена будет сопоставима с текущей ценой, и ни в одном исходе цена не может упасть до нуля. Если в период времени $t=1$ цена все-таки возрастает до бесконечности, то «финансовые остатки» потребителей, будь они положительны (при $w^n(\varnothing) - c^n(\varnothing) > 0$) или отрицательны (при $w^n(\varnothing) - c^n(\varnothing) < 0$), обесцениваются. Происходит «дефолт» и финансовая жизнь для потребителей начинается с нуля. Равновесия, являющиеся несобственными и не представимые как собственные, назовем *равновесиями с дефолтами.*

Чтобы придать множеству собственных равновесий (рис.2) завершенный вид, был рассмотрен еще один тип равновесий, экономической интерпретации которым найти не удалось. В этих равновесиях ценам позволено быть отрицательными, а балансовое ограничение потребителя должно быть выполнено как равенство – потребитель обязан потратить все деньги, даже если он этого не хочет.

Определение. *Равновесием со знакопеременными ценами* назовем набор $\left(\mathbf{p}, \mathbf{c}^{\mathcal{N}}\right)$, состоящий из набора ненулевых (быть может, отрицательных) цен $\mathbf{p}$ и наборов потреблений $\mathbf{c}^n, n \in \mathcal{N}$, таких, что 1) вектор потреблений $\mathbf{c}^n$ является одним из лучших элементов на бюджетном множестве $\hat{B}^n(\mathbf{p}) = \left\{\mathbf{c}'^n \mid \overline{p}(\overline{s}_{T(i)})\,\overline{c}'^n(\overline{s}_{T(i)}) = \overline{p}(\overline{s}_{T(i)})\,\overline{w}^n(\overline{s}_{T(i)}), i \in I\right\}$, 2) выполнены условия материального баланса (2).

Взаимное расположение различных типов равновесий, для тех же моделей, для которых сделан рисунок 2, изображено на рисунке 3.



а) б)

Рис.3. Множество равновесий в задаче чистого обмена: кресты – собственные, большие кресты – с дефолтами, квадраты – со знакопеременными ценами.

В утверждении 4 говорится о том, что в простейшей модели чистого обмена – с двумя потребителями, двумя моментами времени и двух исходов единственной случайной величиной – равновесия с дефолтами являются оптимальными (рис. 3б) в определенном смысле: если Парето граница множества равновесий со знакопеременными ценами не включает собственных равновесий, то Парето граница несобственных равновесий состоит из равновесий с дефолтами.

В предположении, что аналогичный факт верен и для более сложных экономик, предложена оценка доли экономик чистого обмена, в которых Парето оптимальная граница множества несобственных равновесий достигается на равновесиях с дефолтами: $1-2^{-(|I|-1)}$, где $|I|$ – число терминальных вершин (рис.1). Согласно данной оценке, при большом числе возможных реализаций процесса $|I|$ вероятность наткнуться на экономику с Парето границей, состоящей из собственных равновесий, крайне мала.

В третьей главе рассматривается стохастическая модель межвременного экономического равновесия с управлением капиталом.

В модели с управлением капиталом рассматривается замкнутая идеализированная экономика с конечным множеством потребителей-собственников $\mathcal{N}$ и фирм-производителей $\mathcal{M}$. В экономике производится и потребляется единственный продукт. Фирмы выпускают продукт и делают капитальные затраты. Остальной продукт они продают на рынке потребителям. Прибыль фирм от продажи продукта, в конечном счете, распределяется между потребителями по праву собственности.

Если рассматривать модель с управлением капиталом в случае неполных рынков, то в ней существует множество равновесий, которые неэффективны. Тогда, как следует из анализа модели чистого обмена, в большинстве случаев равновесия с положительными ценами не имеют Парето границы. Это означает, что, выбрав любое равновесие, мы никогда не сможем обосновать его выбор – всегда будет существовать другое равновесие, доминирующее выбранное. Поэтому имеет смысл искать такие условия, при которых все решения задачи равновесия были бы эффективны (это означает, что рассматривается случай полных рынков). Тогда множество равновесий, разнообразие которых вызвано, опять же, произвольностью терминальных цен, будет занимать область эффективной кривой. При этом любое равновесие с положительными ценами не может доминироваться никаким другим равновесием – все они станут несравнимыми по Парето. Выбор любого равновесия можно обосновать его эффективностью.

В модели с управлением капиталом рассматривается такой процесс (рис.1), когда случайные величины s_t в разные моменты времени *одинаково распределены, независимы и принимают конечное число значений* $s_t \in \{1,...,V\}$, *а все ветви дерева имеют одинаковую длину*.

Потребитель $n \in \mathcal{N}$ *максимизирует ожидаемую полезность потребления*

$$E_{\overline{s}_T}\left(U^n\left(c^n(\varnothing),...,c^n(\overline{s}_T)\right)\right) \tag{3}$$

Здесь $U^n(\cdot)$ – функция полезности, а $E_{\cdot}(\bullet)$ - оператор математического ожидания, нижний индекс которого указывает случайные величины, по которым происходит усреднение.

Оптимизация ожидаемой полезности происходит по управлениям агента-потребителя: объемам потребления $c^n(\overline{s}_T)$, денежным остаткам $\Phi^n(\overline{s}_T)$ и вложениям $K^{n\mathcal{M}}(\overline{s}_T)$ потребителя $n \in \mathcal{N}$ в капитал фирм $m \in \mathcal{M}$. Эти управления подчинены *финансовым ограничениям*

$$\Phi^n(\overline{s}_t) = \Phi^n(\overline{s}_{t-1}) - p(\overline{s}_t)c^n(\overline{s}_t) + \sum_{m\in\mathcal{M}}\theta^m(\overline{s}_t)\left(K^{nm}(\overline{s}_{t-1}) - K^{nm}(\overline{s}_t)\right), \quad t \in \mathcal{T}, \tag{4}$$

$$\Phi^n(\overline{s}_T) \ge 0, \quad K^{\mathcal{N}\mathcal{M}}(\overline{s}_T) \ge 0. \tag{5}$$

Производитель $m \in \mathcal{M}$ *максимизирует капитализацию* в начальный момент времени

$$\theta^m(\varnothing)\sum_{n\in\mathcal{N}} K_0^{nm} \to \max, \tag{6}$$

по ценам капитала во все моменты времени $\theta^m(\overline{s}_T)$, финансовым остаткам $\Phi^m(\overline{s}_T)$, чистым продажам

$$y^m(\overline{s}_T) \in Y^m. \tag{7}$$

Финансовые ограничения производителя имеют вид

$$\Phi^m(\overline{s}_t) = \Phi^m(\overline{s}_{t-1}) + p(\overline{s}_t)\, y^m(\overline{s}_t) - \theta^m(\overline{s}_t) \sum_{n\in\mathcal{N}} \left(K^{nm}(\overline{s}_{t-1}) - K^{nm}(\overline{s}_t) \right), \quad t\in\mathcal{T}, \tag{8}$$

$$\Phi^m(\overline{s}_T) \ge 0. \tag{9}$$

Основное предположение модели состоит в том, что фирмы назначают цены капитала в рамках следующего ограничения при $t\in\mathcal{T}/T$:

$$\theta^m(\overline{s}_t) = E_{s_{t+1}} \theta^m(\overline{s}_{t+1})\, f(\overline{s}_{t+1}), \tag{10}$$

где $f(\overline{s}_{t+1}) > 0$ – некий общий стохастический тренд цен капитала.

<u>Определение.</u> *Равновесием* в *модели с управлением капиталом* назовем набор

$$\left\langle c^{\mathcal{N}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), \Phi^{\mathcal{N}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), K^{\mathcal{N}\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), y^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), \Phi^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), I^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), \theta^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), f(\overline{s}_{\mathcal{T}/0}), p(\overline{s}_{\mathcal{T}}) \right\rangle \tag{11}$$

такой, что

1) набор $\left\langle c^{\mathcal{N}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), \Phi^{\mathcal{N}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), K^{\mathcal{N}\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}) \right\rangle$ является решением *задачи собственника* (3)-(5),
2) набор $\left\langle y^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), \Phi^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), I^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), \theta^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}) \right\rangle$ является решением *задачи производителя* **(6)-(10)**,
3) цены неотрицательны $p(\overline{s}_t) \ge 0$, $t\in\mathcal{T}$ и выполнен материальный баланс $\sum_{n\in\mathcal{N}} c^n(\overline{s}_t) \le \sum_{m\in\mathcal{M}} y^m(\overline{s}_t)$, $t\in\mathcal{T}$.

Исследование модели с управлением капиталом проведено при некоторых упрощающих предположениях – *условиях регулярности*. Условия регулярности это правила отбора «хороших» равновесий модели. Условия оправдываются с феноменологической точки зрения: *мы не требуем, чтобы любые оптимальные при равновесных ценах решения агентов образовывали в совокупности разумную траекторию* развития экономики. Мы хотим лишь убедиться, что *какая-то из регулярных, т.е. разумных с макроэкономической точки зрения, траекторий цен, курсов и реальных показателей будет самосогласованной.*

Среди условий *регулярности модели* следует выделить условие *полноты рынков*

$$|\mathcal{M}| \ge S,$$

а также условие $\sum_{n\in\mathcal{N}} \Phi_0^n + \sum_{m\in\mathcal{M}} \Phi_0^m = 0$, означающее, что наиболее распространенным и естественным видом денег являются обязательства других агентов. Равновесие (11) в регулярной модели называется *регулярным*, если оно удовлетворяет ряду условий, наиболее важными из которых являются следующие: 1) решения задач потребителя **(3)**-(5) и производителя **(6)**-(10) удовлетворяют достаточным условиям оптимальности из теоремы Куна-Таккера с единичными множителями Лагранжа при целевых функциях, 2) представления агентов о рынке капитала согласованны в том смысле, что стохастические тренды $f(\overline{s}_t)$, $t \in \mathcal{T}/0$, с помощью которых производители связывают цены капитала **(10)**, совпадают с отношениями множителей Лагранжа к ограничению (4) задачи потребителя

$$f(\overline{s}_t) = \frac{\lambda^n(\overline{s}_t)}{\lambda^n(\overline{s}_{t-1})}, \quad t \in \mathcal{T}/0. \tag{12}$$

Регулярные равновесия (11) сравниваются с решениями *задачи благосостояния.* Задача благосостояния – задача максимизации функционала $\sum_{n\in\mathcal{N}} a_n\, E_{\overline{s}_T} U^n\left(\hat{c}^n(\varnothing),...,\hat{c}^n(\overline{s}_T)\right)$ по управлениям $\hat{c}^{\mathcal{N}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), \hat{y}^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}})$ при заданном неотрицательном наборе весовых коэффициентов $\left(a_1,...,a_{|\mathcal{N}|}\right)$ при технологических ограничениях $\hat{y}^m(\overline{s}_{\mathcal{T}}) \in Y^m$ и ограничениях материального баланса $\sum_{n\in\mathcal{N}} \hat{c}^n(\overline{s}_t) \le \sum_{m\in\mathcal{M}} \hat{y}^m(\overline{s}_t)$, $t \in \mathcal{T}$. Решения задачи благосостояния образуют *эффективную кривую (множество)* и показывают тот максимальный уровень ожидаемой полезности потребления, который в принципе не могут превзойти потребители в результате торговли в рамках модели равновесия.

Определение. *Условиями согласованности* начальных значений модели с управлением капиталом и решения задачи благосостояния называются следующие условия: для начальных значений $\left\langle K_0^{\mathcal{N}\mathcal{M}}, \Phi_0^{\mathcal{N}}, \Phi_0^{\mathcal{M}} \right\rangle$ и терминальных цен $p(\overline{s}_{\mathcal{T}})$ модели с управлением капиталом и решения задачи благосостояния $\left\langle \hat{c}^{\mathcal{N}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}), \hat{y}^{\mathcal{M}}(\overline{s}_{\mathcal{T}}) \right\rangle$, соответствующее некоторому вектору $\left(a_1,...,a_{|\mathcal{N}|}\right), a_n > 0$, существуют числа $\sigma^{\mathcal{M}} > 0$ такие, что выполнено

$$\sigma^m \sum_{n\in\mathcal{N}} K_0^{nm} = \Phi_0^m + \left(E_{\overline{s}_T} \frac{\hat{p}(\overline{s}_T)}{p(\overline{s}_T)} \right)^{-1} E_{\overline{s}_T} \sum_{t\in\mathcal{T}} \hat{p}(\overline{s}_t)\, \hat{y}^m(\overline{s}_t), \quad m \in \mathcal{M}, \tag{13}$$

$$\sum_{m\in\mathcal{M}} \sigma^m K_0^{nm} = -\Phi_0^n + \left(E_{\overline{s}_T} \frac{\hat{p}(\overline{s}_T)}{p(\overline{s}_T)} \right)^{-1} E_{\overline{s}_T} \sum_{t\in\mathcal{T}} \hat{p}(\overline{s}_t)\, \hat{c}^n(\overline{s}_t), \quad n \in \mathcal{N}. \tag{14}$$

Если производственные множества $Y^m, m \in \mathcal{M}$ представлены линейной моделью производства, то верно следующие утверждения

Утверждение 8. Если существует регулярное равновесие регулярной модели (11), то оно эффективно и выполнены условия согласованности (13)-(14)
.

Утверждение 12. Если выполнены условия согласованности (13)-(14), то существует регулярное равновесие регулярной модели и оно эффективно.

Условия согласованности (13)-(14) полно описывают множество начальных условий модели, при которых равновесие существует. Множество равновесий модели изображено на рисунке 4: оно занимает некоторую область эффективной кривой.

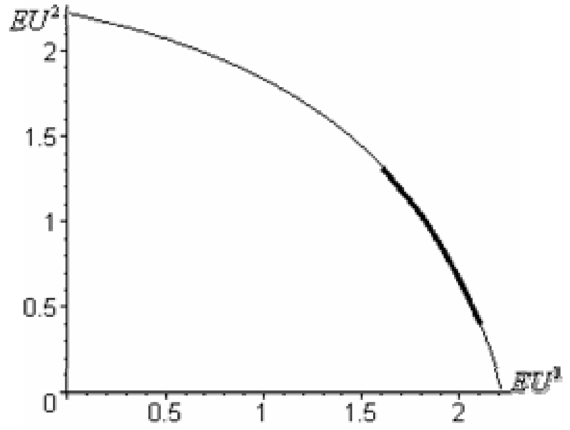


Рис.4. Качественное изображение множества равновесий в стохастической задаче с капиталом (жирная кривая) и эффективная множество (тонкая кривая)

Если равновесие существует, то σ^m это цена капитала $\theta^m(\varnothing)$. Поэтому смысл условия (13) состоит в том, что начальные сбережения фирмы Φ_0^m должны быть не слишком большими отрицательными по модулю числами (не слишком большой долг), чтобы приведенная будущая прибыль от чистых продаж $\left(E_{\bar{s}_T} \dfrac{\hat{p}(\bar{s}_T)}{p(\bar{s}_T)}\right)^{-1} E_{\bar{s}_T} \sum_{t\in\mathcal{T}} \hat{p}(\bar{s}_t)\,\hat{y}^m(\bar{s}_t)$ могла их перекрыть и обеспечить положительную стоимость фирмы $\sigma^m \sum_{n\in\mathcal{N}} K_0^{nm}$. А условие (14) означает, что долги потребителя должны быть не слишком большими, чтобы его начальное благосостояние $\sum_{m\in\mathcal{M}} \sigma^m K_0^{nm} + \Phi_0^n$ могло обеспечить положительное потребление.

Четвертая глава посвящена свойствам модели с управлением капиталом.

Показано, что верна вторая теорема благосостояния: любое решение задачи благосостояния можно реализовать как некоторое равновесие модели с управлением капиталом. Другое естественное свойство заключается в том, что, раз и в модели с управлением капиталом проявляется свойство неоднозначности (множественности) равновесий, то и в ней существуют равновесия с дефолтами. В тех исходах, когда цена товара возрастает до бесконечности, до бесконечности возрастает и цена капитала.

Важно, что эти свойства верны не только для случая линейной производственной функции, рассматривавшейся в главе 3, но и для модели с управлением капиталом при производственном множестве общего вида (7). Для *модели с управлением капиталом при производственном множестве общего вида* остается верным утверждение 8, а утверждение 12 преобразуется в следующее:

Утверждение 15. Пусть выполнены условия согласованности (13)-(14), и матрицы будущих доходов $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{s}}_{\mathbf{t-1}}), t \in \mathcal{T}/0$ невырожденные. Тогда существует регулярное равновесие регулярной модели с управлением капиталом при производственном множестве общего вида, и оно эффективно.

Матрицы будущих доходов $\mathbf{A}(\overline{\mathbf{s}}_{\mathbf{t-1}})$ это матрицы

$$\mathbf{A}(\overline{\mathbf{s}}_{\mathbf{t-1}}) = \left\| \begin{matrix} E_{\overline{s_{t+1}, s_T}} \sum_{\tau=t}^{T} \hat{p}(\overline{s}_\tau)\, \hat{y}^1(\overline{s}_\tau) \Big| s_t = 1 & \ldots & E_{\overline{s_{t+1}, s_T}} \sum_{\tau=t}^{T} \hat{p}(\overline{s}_\tau)\, \hat{y}^{|\mathcal{M}|}(\overline{s}_\tau) \Big| s_t = 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ E_{\overline{s_{t+1}, s_T}} \sum_{\tau=t}^{T} \hat{p}(\overline{s}_\tau)\, \hat{y}^1(\overline{s}_\tau) \Big| s_t = V & \ldots & E_{\overline{s_{t+1}, s_T}} \sum_{\tau=t}^{T} \hat{p}(\overline{s}_\tau)\, \hat{y}^{|\mathcal{M}|}(\overline{s}_\tau) \Big| s_t = V \end{matrix} \right\|.$$

В матрице множители $\hat{y}^m(\overline{s}_t)$ – те же чистые продажи из решения задачи благосостояния, что состоят в условиях согласованности (13)-(14). Множители $\hat{p}(\overline{s}_t)$, которые часто трактуются как цены, но таковыми не являются, – множители Лагранжа в задаче благосостояния при ограничении $\sum_{n\in\mathcal{N}} \hat{c}^n(\overline{s}_t) \le \sum_{m\in\mathcal{M}} \hat{y}^m(\overline{s}_t)$. Элементы матрицы $E_{\overline{s_{t+1}, s_T}} \sum_{\tau=t}^{T} \hat{p}(\overline{s}_\tau)\, \hat{y}^m(\overline{s}_\tau)$ это будущие доходы $E_{\overline{s_{t+1}, s_T}} \sum_{\tau=t}^{T} p(\overline{s}_\tau)\, y^m(\overline{s}_\tau)$ фирм $m \in \mathcal{M}$, деленные на константу, одинаковую для всех фирм.

Для случая линейной производственной функции равновесия модели с управлением капиталом были найдены численно в программе компьютерной алгебры Maple 9.0. Вычислены траектории цены капитала, цена капитала приобрела естественную динамику.

Показано, что в модели с управлением капиталом может быть получено выражение цен капитала, характерное для CCAPM-моделей:

$$\theta^m(\overline{s}_t) = E_{s_{t+1}} \theta^m(\overline{s}_{t+1})\, E_{s_{t+1}} f(\overline{s}_{t+1}) + \operatorname{cov}\left(f(\overline{s}_{t+1}), \theta^m(\overline{s}_{t+1}) \right)$$

– текущая стоимость того актива больше (относительно средней будущей цены $E_{s_{t+1}} \theta^m(\overline{s}_{t+1})$), у которого будущая стоимость сильнее коррелирует с $f(\overline{s}_{t+1})$. Стохастические тренды $f(\overline{s}_{t+1})$ выражают потребность агентов экономики в деньгах.

Модель с управлением капиталом допускает также β-форму CAPM-модели: премия инвестора за риск растет пропорционально β-коэффициенту цены капитала фирмы.

В пятой главе рассматриваются два важных аспекта модели с капиталом: условия регулярности (12) и уравнение связи цен капитала (10).

Показано, что уравнение связи цен капитала (10) это вполне естественное условие для модели с управлением капиталом, поскольку оно является условием оптимальности в альтернативной формулировке модели, а именно, в модели с рынком капитала. Модель с рынком капитала отличается от модели с управлением капиталом, во-первых, тем, что фирма управляет не ценой $\theta^{\mathcal{M}}(\overline{s}_T)$, а предложением капитала $K^{\mathcal{M}}(\overline{s}_T)$, тогда как цена капитала определяется из условия равновесия на рынке капитала $\sum_{n\in\mathcal{N}} K^{nm}(\overline{s}_t) \le K^m(\overline{s}_t)$. Во-вторых, в модели с рынком капитала отсутствует уравнение связи цен капитала (10). В модели с рынком капитала реализуется содержательно то же самое равновесие, что и в модели с управлением капиталом.

Рассмотрен вопрос единственности стохастических трендов $f(\overline{s}_{t+1})$ в уравнении связи цен капитала (10). Если в задаче производителя множители Лагранжа $\lambda^m(\overline{s}_t)$ к ограничению (8) единственные, то индивидуальных стохастических трендов $f^m(\overline{s}_{t+1})$, отличных от $f(\overline{s}_{t+1})$, не существует. Об этом говорится в утверждении 16. Если множители Лагранжа не единственные, то возможны равновесия с индивидуальными у производителей стохастическими трендами $f^m(\overline{s}_{t+1}) \ne f(\overline{s}_{t+1})$. Для иллюстрации данного факта приведен пример.

Однако в пользу общности для всех агентов стохастических трендов $f(\overline{s}_{t+1})$ говорит, во-первых, то, что равновесия с общими стохастическими трендами $f(\overline{s}_{t+1})$ существуют всегда, а с индивидуальными $f^m(\overline{s}_{t+1}) \ne f(\overline{s}_{t+1})$ не всегда, во-вторых, то, что общность стохастических трендов в теоретико-игровой постановке модели с управлением капиталом интерпретируется как ориентация всех агентов на общие ставки банка по заемным и одолженным средствам.

Банк занимается тем, что принимает от потребителей и производителей положительные финансовые остатки $\Phi^n(\overline{s}_t) > 0, \Phi^m(\overline{s}_t) > 0$ и покрывает отрицательные финансовые остатки агентов $\Phi^n(\overline{s}_t) < 0, \Phi^m(\overline{s}_t) < 0$. Заемные средства банк на следующий период возвращает с процентом $r(\overline{s}_{t+1})$, а одолженные средства получает от заемщиков также с процентом $r(\overline{s}_{t+1})$. Проценты по привлеченным и отвлеченным средствам одинаковы, что в игровой постановке объясняется предположением о совершенной конкуренции среди банков. Проценты $r(\overline{s}_{t+1})$ банк назначает так, чтобы максимизировать приведенный будущий доход от операций заимствования и одалживания средств. В точке Нэша игры проценты $r(\overline{s}_{t+1})$ определяются как обратные величины стохастических трендов $r(\overline{s}_{t+1}) = \left(f(\overline{s}_{t+1})\right)^{-1}$, а сами стохастические тренды приобретают очевидный смысл обратных значений ставок дисконтирования.

<u>В заключении</u> изложены основные результаты диссертационной работы.

<u>В приложениях</u> приведены рисунки множеств равновесий в стохастической модели чистого обмена для случая трех потребителей, изображена структура ящика Эджворта для простейшей стохастической модели чистого обмена, приведено доказательство утверждения 4, приведен пример неединственности стохастических трендов цен капитала в модели с капиталом.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ:

1. Разработана стохастическая модель межвременного равновесия с капиталом. Введено определение регулярного равновесия регулярной модели, доказано существование и эффективность регулярных равновесий. Дано описание множества регулярных равновесий, и доказана вторая теорема благосостояния

2. Найдено отличительное свойство стохастической модели с капиталом и модели чистого обмена – свойство неоднозначности (множественности) равновесий. Показано, что типичным среди Парето оптимальных равновесий являются равновесия с актуально бесконечно большими ценами – равновесия с дефолтами. Доказано существование равновесий с дефолтами

3. Обосновано, что при применении стохастических моделей, в которых выполняется свойство множественности равновесий, наиболее разумно рассматривать такие варианты моделей, в которых дополнительными свойствами, в том числе свойством полноты рынков, обеспечивается эффективность всех равновесий

4. В модели с капиталом для случая линейной производственной функции проведен численный эксперимент. Показано, что наиболее реалистичным способом вычисления равновесия стохастической задачи является вычисление решения задачи благосостояния и декомпозиция решения задачи благосостояния в равновесие модели с капиталом

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. M.Yu. Andreyev, I.G. Pospelov. Ineffective Economic Stochastic Equilibrium and the Model of the Capital Value. Book of Abstracts of International Conference “Tikhonov and Contemporary Mathematics”, section 2, pp.15-16, 2006.
2. М.Ю.Андреев. Подход к проблеме неполных рынков без введения дополнительных инструментов. Труды 49-й научной конференции МФТИ, часть 7 «управление и прикладная математика», с. 108-109 , 2006.
3. M.Yu.Andreyev, I.G.Pospelov. Realizability of the economic growth on the assumption of rational expectations of the agents. Book of Abstracts of International Conference “New Developments in Macroeconomic Modelling and Growth Dynamics”, 2006.
4. М.Ю.Андреев, И.Г.Поспелов. Equilibrium multiplicity in the stochastic model with the capital and sufficient conditions for effectiveness of equilibria. Труды 2й Международная конференция «Математическое моделирование социальной и экономической динамики», с. 14-16, 2007.

5. М.Ю.Андреев. Необходимые и достаточные условия эффективности множества равновесий в стохастической модели с капиталом. Тезисы докладов II Всероссийской научной конференции ЭКОМОД-2007, с. 31, 2007.
6. М.Ю.Андреев, И.Г.Поспелов. Капитал в стохастической динамической модели экономического равновесия // Математическое моделирование, Том 19, № 9, 2007.
7. М.Ю.Андреев, И.Г.Поспелов, И.И.Поспелова, М.А.Хохлов. Новая технология моделирования экономики и модель современной экономики России (монография). М.:МИФИ, 2007. 262 стр.

Основные результаты диссертации представлены в работах [2, 4, 6]. В совместных работах постановка задач принадлежит профессору И.Г. Поспелову, автору принадлежит реализация выбранных направлений исследования: формулировка и доказательство утверждений, изучение свойств равновесий, построение примеров. В монографии [7] М.Ю. Андрееву принадлежат разделы 13.3.4, 14.2, посвященные постановке и решению стохастической задачи менеджера в быстром времени и способу получения производственной функции из решения задачи менеджера. Модель экономики России [7] разрабатывалась и исследовалась научным коллективом отдела ММЭС ВЦ РАН при участии автора.