На правах рукописи

Садыков Руслан Равильевич

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ПРИБОРА С КРИТЕРИЯМИ $L_{\max}$ И $\sum w_j U_j$

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2006

Работа выполнена на кафедре экономической кибернетики Казанского государственного университета имени В. И. Ульянова – Ленина.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент А. А. Лазарев

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор И. Х. Сигал,

кандидат физико-математических наук, в.н.с. Я. М. Шафранский

Ведущая организация: Институт проблем управления РАН

Защита диссертации состоится "___"___________ 2006 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д.002.017.02 при Вычислительном Центре имени А.А. Дородницина Российской академии наук (119991, г. Москва, ул. Вавилова, 40, конф.зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан "___"___________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, д.ф.-м.н. В. В. Рязанов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертационная работа посвящена исследованию классических задач теории расписаний для одного прибора.

Теория расписаний берет свое начало в 50-е годы 20-го века с работ Джексона[1] и Джонсона[2]. В связи с бурным развитием автоматизации производства данное направление прикладной математики приобрело большое значение. В наше время задачи теории расписаний возникают во многих сферах человеческой деятельности: образовании, транспорте, управлении, информатике, производстве, сельском хозяйстве и т.д.

Классические приборные задачи теории расписаний являются схематичными теоретическими моделями многих задач, встречающихся на практике. Исследование приборных задач помогает изучить фундаментальные свойства и структуру практических задач, что способствует построению эффективных алгоритмов их решения.

Рассмотрим постановку одноприборной задачи теории расписаний. Множество требований $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ должно быть обслужено без прерываний на одном приборе, который может обслуживать не более одного требования в каждый момент времени. Время обслуживания требования $j \in N$ обозначается как p_j. Момент, когда требование j становится доступным для обслуживания, задается временем поступления r_j. Требование j также может иметь директивный срок d_j (время, до которого желательно завершить обслуживание требования), вес w_j (значимость требования).

В любой приборной задаче теории расписаний целью является построение оптимального расписания по определенному критерию. Для представления различных критериев нам необходимы следующие определения. Времена начала и окончания обслуживания требования j в расписании π обозначаются как, соответственно, $s_j(\pi)$ и $c_j(\pi)$. Определим $L_j(\pi) = c_j(\pi) - d_j$ как *временное смещение* требования j в расписании π, а $T_j(\pi)$ — как его *запаздывание.* $U_j(\pi)$ обозначает запаздывает

[1]Jackson J.R. Scheduling a production line to minimize maximum tardiness// Los Angeles, CA: University of California, 1955.– Manag. Sci. Res. Project. Research Report N 43.

[2]Johnson S.M. Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included// Naval Res. Logistics Quat.– 1954.– V. 1. P. 61 – 68.

ли требование j в расписании π или нет. $U_j(\pi) = 1$ если j *запаздывает* $(c_j(\pi) > d_j)$, иначе $U_j(\pi) = 0$ (требование j *обслуживается вовремя*).

Классическими критериями в приборных задачах теории расписаний являются: $C_{\max}$ — минимизация максимального времени окончания обслуживания, $L_{\max}$ — минимизация максимального временного смещения, $\sum(w_j)C_j$ — минимизация (взвешенного) суммарного времени окончания обслуживания, $\sum(w_j)T_j$ — минимизация (взвешенного) суммарного запаздывания, $\sum(w_j)U_j$ — минимизация (взвешенного) числа запаздывающих требований.

Заметим, что классические критерии являются *регулярными*, то есть данные функции являются неубывающими по отношений к временам обслуживания требований. При наличии регулярного критерия мы можем ограничиться рассмотрением только *ранних расписаний*. Каждое раннее расписание π_τ однозначно определяется перестановкой τ требований множества N. Если $\tau = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, тогда $\pi_\tau = (s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_n})$, где

$$s_{j_1} = r_{j_1}, \ \ s_{j_k} = \max\{s_{j_{k-1}} + p_{j_{k-1}}, r_{j_k}\}, \ k = 2, \ldots, n.$$

Множество всевозможных расписаний обслуживания требований множества N обозначается как $\Pi(N)$.

В работе Грэхэма и др.[3] была введена классификация для приборных задач теории расписаний. В данной классификации каждой задаче соответствует обозначение $\alpha \mid \beta \mid \gamma$, где α обозначает число и тип доступных приборов, β описывает дополнительные ограничения задачи (например, обозначение r_j указывает на наличие неодинаковых времен поступления требований), γ представляет собой критерий задачи.

Одноприборные задачами теории расписаний являются важным классом приборных задач. Исследование задач с одним прибором во многих случаях помогает в разработке алгоритмов решения многоприборных задач, более приближенных к практике. Например, алгоритмы решения одноприборных задач могут использоваться для получения нижних оценок оптимального значения целевой функции некоторых многоприборных задач. В отдельных случаях алгоритмы решения одноприборных задач могут быть достаточно простым образом обобщены для решения многоприборных задач.

[3] Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey// Ann. Discrete Math.– 1979.– V. 5.– P. 287 – 326.

Многие задачи теории расписаний являются NP-трудными[4]. Для решения таких задач существуют три основных класса алгоритмов: эвристические, приближенные и алгоритмы сокращения перебора. Эвристические алгоритмы позволяют получить "хорошее"решение за небольшое время, однако они не могут дать оценок качества полученного решения. Приближенные алгоритмы[5] гарантируют оценку качества полученного решения (погрешность), которое будет ими найдено за полиномиальное время. Приближенные алгоритмы для задач теории расписаний разработаны, например, в работах Ковалева[6], Севастьянова[7]. Однако, во многих случаях гарантируемая погрешность не является достаточной. Более того, для некоторых NP-трудных задач вообще нельзя постоить приближенные алгоритмы. Алгоритмы сокращения перебора используются для оптимального решения NP-трудной задачи. Однако, получение оптимального решения может занять длительное время. Поэтому, если за некоторое приемлемое время оптимальное решение не было найдено, исполнение алгоритма прекращается. В этом случае пользователю доступно некоторое приближенное решение задачи и оценка его качества. Подчеркнем, что оценка полученного решения здесь известна после решения, тогда как при использовании приближенного алгоритма оценка качества известна до начала решения. Обычно, алгоритм сокращения перебора дает лучшее решение поставленной задачи, чем приближенный алгоритм, но за более длительное время. Наиболее распространенным подклассом алгоритмов сокращения перебора являются алгоритмы, построенные по методу ветвей и границ[8].

В зависимости от требований пользователя, предпочтительным может оказаться использование алгоритмов как первого, так и второго или

[4]Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи// Пер. с англ.– М.: Мир, 1982.– 416 с.

Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М. Теория расписаний. Одностадийные системы// М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.– 384 с.

[5]Корбут А.А., Финкельщтейн Ю.Ю. Приближенные методы дискретного программирования// Изв. АН СССР. Техн. кибернет.– 1983.– N 1.– С. 165 – 176.

[6]Ковалев М. Я. Интервальные ϵ-приближенные алгоритмы решения дискретных экстремальных задач// Дис. канд. физ.-мат. наук.– Минск: 1986, 110 с.

[7]Севастьянов С.В. Геометрические методы и эффективные алгоритмы в теории расписаний// Дис. док. физ.-мат. наук.– Новосибирск: 2000.– 280 с.

[8]Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование// М.: Физматлит, 2002.– 240 с.

третьего типов. Поэтому постоение эвристических, приближенных и алгоритмов сокращения перебора представляется одинаково важными направлениями исследования в теории расписаний.

Цель работы

Целью работы является разработка новых алгоритмов, как приближенных так и алгоритмов сокращения перебора, для решения двух NP-трудных одноприборных задач теории расписаний: $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ и
$1 \mid r_j \mid \sum w_j U_j$.

Методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, в частности понятия и утверждения теории расписаний и математического программирования. Достоверность результатов диссертации подтверждается приведенными доказательствами всех теорем и лемм, сформулированных в работе.

Научная новизна

Результаты работы являются новыми. Основными являются следующие.

1. Для произвольного исходного примера задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ получена оценка абсолютной погрешности для оптимального расписания другого примера, имеющего одинаковые времена обслуживания требований с исходным примером.

2. На основе предыдущего результата предложена схема приближенного решения задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ с гарантированной абсолютной погрешностью, где заданный пример сводится к примеру из полиномиально разрешимого класса. Для двух таких классов примеров построены полиномиальные алгоритмы для нахождения принадлежащего классу примера, оптимальное расписание которого имеет наименьшую гарантированную абсолютную погрешность для заданного примера.

3. Экспериментально показано, что процент оптимально решенных примеров задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ полиномиальными алгоритмами стремится к 100% при увеличении размерности. Также экспериментально установлено, что фактическое значение абсолютной погрешности решения, полученного при помощи обоих вариантов предложенной схемы нахождения приближенного решения, в среднем не превосходит половины теоретического значения абсолютной погрешности.

4. Для задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ предложен новый точный алгоритм ветвей и границ, включающей в себя элементы существующих алгоритмов для данной задачи, а также алгоритмы метода программирования в ограничениях. Экспериментальное исследования на множестве тестовых примеров показало преимущество предложенного алгоритма над алгоритмами, существующими в литературе.

5. Для модифицированного варианта разрешимости проблемы $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ разработан алгоритм, который определяет допустимо ли заданное множество требований и в случае недопустимости находит некоторое недопустимое подмножество. Разработанный алгоритм используется для решения задачи с критерием минимизации взвешенного числа запаздывающих требований.

6. Для задачи $1 \mid r_j \mid \sum w_j U_j$ предложен точный алгоритм ветвей и отсечений. Преимущество предложенного алгоритма над наилучшим алгоритмом для данной задачи, представленном в литературе, на множестве общедоступных тестовых примеров подтверждено численными экспериментами.

Теоретическая и практическая значимость

Исследуемые в диссертации задачи являются схематичными теоретическими моделями практических задач. Однако алгоритмы для решения этих задач используются как вспомогательные для решения более сложных задач теории расписаний, более приближенных к практике. Предложенные методы также могут быть использованы для разработки алгоритмов решения других похожих теоретических задач теории расписаний. Результаты работы могут быть полезны специалистам Вычислительного центра им. А.А. Дородницина РАН, Казанского Государственного Университета, Новосибирского Государственного Университета, Омского Государственного Университета, Минского Государственного Университета.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на VII Международном семинаре “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 2001 г.), XL Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс” (Москва, 2002 г.), Российской конференции “Дискретный анализ и исследование операций” (Новосибирск, 2002, 2004 гг.), X Международной конференции по оптимизации FGI-2000 (Монтпелье, Франция, 2000 г.), I Международной конференции по интеграции методов исследования операций и искусственного интеллекта в программировании в ограничениях для решения комбинаторных задач CP-AI-OR’04 (Ницца, Франция, 2004 г.), VII Международном семинаре по методам и алгоритмам для задач календарного планирования и теории расписаний MAPSP’05 (Сиена, Италия, 2005 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, в том числе одна из них в центральной печати, четыре в материалах и четыре в тезисах на международных и всероссийских конференциях. Список публикаций автора по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы (81 наименование). Общий объем — 131 страница.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, приводится обзор литературы и кратко излагается содержание работы.

В **первой главе** предлагаются полиномиальные алгоритмы приближенного решения задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$. Данные алгоритмы основаны на доказанной нами теореме об абсолютной погрешности.

В разделе 1.1 рассматривается постановка задачи, а также дан краткий исторический обзор задачи, приведены основные результаты, существующие в литературе. В разделе 1.2 вводятся обозначения и определения, используемые далее в работе.

В разделе 1.3 доказывается теорема об абсолютной погрешности (Теорема 1). Для формулировки теоремы требуется следующие определение и обозначение. Пусть задан пример A на множестве требований N. Будем говорить, что пример B на том же множестве требований *наследует* у примера A параметр x, если $x_j^B = x_j^A$, $\forall\, j \in N$. Будем обозначать через $L^I(\pi)$ максимальное временное смещение расписания π для примера I с параметрами требований $\{r_j^I, p_j^I, d_j^I\}$.

Теорема 1 *Пусть пример C наследует у примера A длительности обслуживания требований ($p_j^A = p_j^C,\ j \in N$) и пусть π^A и π^C — оптимальные расписания для этих примеров. Тогда*

$$0 \le L^A(\pi^C) - L^A(\pi^A) \le \rho(A, C),$$

где $\rho(A,C) = \max_{j\in N}\{d_j^A - d_j^C\} + \max_{j\in N}\{d_j^C - d_j^A\} + \max_{j\in N}\{r_j^A - r_j^C\} + \max_{j\in N}\{r_j^C - r_j^A\}$.

Заметим, что функция $\rho(A, C)$ удовлетворяет свойствам псевдометрики в пространстве примеров задачи с одинаковыми временами обслуживания, и ее можно рассматривать, как *расстояние* между примерами A и C.

На основе Теоремы 1 в разделе 1.4 предлагается схема приближенного решения задачи. Идея схемы состоит в построении по заданному примеру A такого примера C с такими же временами обслуживания требований, который бы, во-первых, принадлежал некоторому известному полиномиально разрешимому классу примеров, и во-вторых, отличался от примера A минимальным образом (в псевдометрике $\rho(A, C)$). Применив полиномиальный алгоритм для решения примера C, мы найдем оптимальную перестановку его требований и применим ее в качестве приближенного решения примера A. Из теоремы 1 следует, что абсолютная погрешность полученного решения не будет превосходить $\rho(A, C)$.

В подразделе 1.4.1 представлен алгоритм, работающий по схеме приближенного решения задачи. В алгоритме пример C ищется в классе Лазарева. Пример принадлежит данному классу, если существует нумерация требований $\{1, 2, \ldots, n\}$, для которой выполняются соотношения

$$d_1^C \leq \ldots \leq d_n^C; \quad \Delta_1^C \geq \ldots \geq \Delta_n^C,$$

где $\Delta_j^C = d_j^C - r_j^C - p_j^C$ обозначает *временной запас* требования j. Затем доказывается Теорема 2, которая дает аналитическую формулу для абсолютной погрешности $\rho(A, C)$ для первого варианта схемы.

Теорема 2 *Для любого примера A задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$, не принадлежащего классу Лазарева, и для любого примера C, наследующего длительности обслуживания примера A и принадлежащего классу Лазарева*[9]*, справедлива оценка расстояния между A и C:*

$$\rho(A, C) \geq \rho^L(A) = \max_{i,j \in N} \min\{d_j^A - d_i^A, \Delta_j^A - \Delta_i^A\}. \tag{1}$$

Оценка (1) достигается на некотором примере C, который может быть найден за время $O(n \log n)$.

В подразделе 1.4.2 представлен другой алгоритм, работающий по схеме приближенного решения задачи. В алгоритме пример C ищется в классе Хогевена[10]. Пример принадлежит данному классу, если выполняется условие

$$r_j \in [d_j - p_j - \beta, d_j - \beta] \qquad \forall j \in N, \qquad \beta - \text{const}.$$

Затем доказывается Теорема 3, которая дает аналитическую формулу для абсолютной погрешности $\rho(A, C)$ для второго варианта схемы.

[9] Лазарев А.А. Эффективные алгоритмы решения некоторых задач теории расписаний для одного прибора с директивными сроками обслуживания требований// Дис. канд. физ.-мат. наук.– Казань: 1989.– 108 с.

[10] Hoogeveen J. A. Minimizing maximum promptness and maximum lateness on a single machine// Math. Oper. Res.– 1996.– V. 21.– P. 100 – 114.

Теорема 3 *Для любого примера A задачи $1|r_j|L_{\max}$, не принадлежащего классу Хогевена, и для любого примера C, наследующего длительности обслуживания примера A и принадлежащего классу Хогевена, справедлива оценка расстояния между A и C:*

$$\rho(A,C) \geq \rho^H(A) = \max_{i,j\in N}\{d_j^A - r_j^A - p_j^A - d_i^A + r_i^A\}. \tag{2}$$

Оценка (2) достигается на некотором примере C, который может быть найден за время $O(n)$.

В разделе 1.5 построена процедура равномерной генерации примеров из ограниченного множества содержащего всевозможные примеры задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$. С помощью данной процедуры проведено экспериментальное исследование полиномиальных алгоритмов Лазарева и Хогевена для решения соответствующих специальных случаев задачи. Исследование показало число оптимально решенных данными алгоритмами примеров стремится к 100% при увеличении размерности. Также экспериментально было оценена фактическая погрешность решения, полученного с помощью предложенных вариантов схемы приближенного решения задачи. Показано, что среднее отношение фактической погрешности к гарантированной теоретической погрешности возрастает при увеличении размерности и стремится к некоторому значению, не превышащему 1/2.

Вторая глава диссертации посвящена алгоритмам оптимального решения задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$.

В разделе 2.1 рассмотрены существующие подходы к решению задачи, такие как алгоритм Карлье[11] и метод программирования в ограничениях[12] (ПвО). Данный метод близок к методу ветвей и границ. Отличие заключается в том, что для сокращения перебора в ПвО используется пропагация ограничения, которая удаляет несовместимые значения из множеств допустимых значений переменных. Алгоритм Карлье и программирование в ограничениях служат основой для алгоритмов решения задачи, предложенных далее во второй главе диссертации.

[11] Carlier J. The one-machine sequencing problem// European J. of Oper. Res.– 1982.– V. 11, N 1.– P. 42 – 47.

[12] Baptiste Ph., Le Pape C., Nuijten W. Constraint-based scheduling: applying constraint programming to scheduling problems// Kluwer Academic Publishers, 2001.– 198 p.

В разделе 2.2 предлагаются два алгоритма оптимального решения задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$. Первый алгоритм построен по методу программирования в ограничениях. На каждом шаге алгоритма для исходной задачи решается задача распознавания с помощью метода ПвО, в котором используется предложенная нами правило ветвления, основанное на следующей теореме.

Теорема 4 *Пусть построено расписание Шража*[13] $\pi_\sigma \in \Pi(N)$ *для данного примера задачи, и требования пронумерованы в том порядке, в котором они упорядочены в* π_σ. *Пусть также* $b \in N$ *— наименьший номер, для которого* $L_b(\pi_\sigma) = L_{\max}(\pi_\sigma)$, *и* $a \in N$ *— наибольший такой номер, что* $a \leq b$ *и*

$$s_a(\pi_\sigma) - \min_{a \leq j \leq b} r_j \leq L_b(\pi_\sigma) - UB,$$

где $UB \leq L_{\max}(\pi_\sigma)$, UB *— верхняя оценка оптимального решения. Примем* $S = \{a, \ldots, b\}$, *тогда:*

- *если не существует такого требования* $c \in S$, *что* $d_c > d_b$, *то для данного примера не существует расписания с максимальным временным смещением, меньшим, чем* UB;

- *иначе, если* $c \in S$ *- последнее требования с директивным сроком* $d_c > d_b$, *то в любом таком расписании* π', *что* $L_{\max}(\pi') < UB$, *требование* c *выполняется или до, или после всех требований из множества* $J = \{c+1, \ldots, p\}$.

Оптимальное решение задачи находится с помощью бинарного поиска (дихотомии). Второй алгоритм построен по методу ветвей и границ. В алгоритме также используется правило ветвления, основанное на теореме 4. Отличительной особенностью алгоритма является использование

[13] Schrage, L. Solving Resource-Constrained Network Problems by Implicit Enumeration: Non-Preemptive Case// Oper. Res.– 1970.– V. 18.– P. 263 – 278.

алгоритмов ПвО на каждом узле дерева поиска. Данный шаг позволяет значительно сократить перебор при решении сложных примеров задачи.

В разделе 2.3 приводятся результаты экспериментального сравнения точных алгоритмов решения задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$, предложенных в работе и подходов, существующих в литературе. Исследование показало, что на множестве тестовых примеров второй предложенный алгоритм показал наилучшие результаты.

В разделе 2.4 рассматривает вариант распознавания задачи $1 \mid r_j \mid L_{\max}$. Назовем расписание π *допустимым* по отношению к константе L', если $L_{\max}(\pi) \leq L'$. Множество требований S *допустимо* по отношению к константе L', если существует допустимое расписание $\pi \in \Pi(S)$, и *недопустимо*, если не существует такого расписания. В рассматриваемом здесь варианте задачи требуется определить допустимо ли заданное множество требований N по отношению к заданной константе L'. Если N допустимо, то необходимо найти допустимое расписание. Если же N недопустимо, то требуется найти как можно меньшее недопустимое по отношению к той же константе подмножество требований из множества N. Для данного варианта задачи предлагается алгоритм, который является эвристическим в том смысле, что он находит некоторое недопустимое подмножество требований $S \subseteq N$, не обязательно минимальное, когда множество требование N недопустимо. В тоже время, алгоритм точно определяет, допустимо ли множество требование N. Правило ветвления алгоритма основано на следующей теореме.

Теорема 5 *Пусть дано недопустимое по отношению к константе L' расписание Шража $\pi_\sigma \in \Pi(N)$ и требования пронумерованы в том порядке, в котором они упорядочены в π_σ. Пусть также $b \in N$ — наименьший номер, для которого $L_b(\pi_\sigma) > L'$, и $a \in N$ — наибольший такой номер, что $a \leq b$ и*

$$s_a(\pi_\sigma) - \min_{j \in S} r_j < L_b(\pi_\sigma) - L',$$

где $S = \{a, \ldots, b\}$. Тогда:

1. *если не существует такого требования $c \in S$, что $d_c > d_b$, то множество требований S недопустимо по отношению к L';*

2. иначе, если $c \in S$ - последнее требования с директивным сроком $d_c > d_b$, и существует допустимое расписание $\pi' \in \Pi(N)$, то в данном расписании π' требование c выполняется или до, или после всех требований из множества $J = \{c+1, \ldots, p\}$.

Отличительной чертой модифицированного алгоритма Карлиера является способ построения недопустимого подмножества требований в случае, если алгоритм не нашел допустимого расписания. На каждом узле дерева поиска, где не происходит ветвления, согласно Теореме 5, мы располагаем подмножеством S, недопустимым для задачи с текущими параметрами требований. Данное подмножество передается родительскому узлу дерева поиска. Способ построения недопустимого подмножества для узла, имеющего дочерние узлы, обоснован в Теореме 6. В конце работы алгоритма вершина дерева поиска вернет недопустимое подмножество требований для исходного примера.

Теорема 6 *Пусть в текущей задаче в любом допустимом расписании $\pi' \in \Pi(N)$ требование $c \in N$ может быть обслужено только до или после всех требований из множества $J \subset N$. Пусть также $S_a \subset N$ - недопустимое множество требований для задачи с дополнительным ограничением, согласно которому c обслуживается перед всеми требованиями из множества J, а $S_b \subset N$ - недопустимое подмножество для задачи, где c выполняется после всех требований из J. Тогда:*

1. *если $c \notin S_a$, то множество S_a недопустимо для текущей задачи;*
2. *если $c \notin S_b$, то множество S_b недопустимо для текущей задачи;*
3. *если $c \in S_a$ и $c \in S_b$, то множество $S' = J \cup S_a \cup S_b$ недопустимо для текущей задачи.*

Результаты, полученные в первой и второй главах, частично используются в **третьей главе** диссертации, в которой предлагается точный алгоритм решения задачи $1 \mid r_j \mid \sum w_j U_j$. Алгоритм построен по "гибридному" методу[14] ветвей и отсечений[15], который представлен в разделе 3.1. В этом же разделе сделан обзор работ, внесших вклад в развитие данного метода. Предложенный алгоритм ветвей и отсечений заключается в следующим. Релаксация задачи формулируется как задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и решается методом ветвей и отсечений, который является производным от метода ветвей и границ (метода Лэнд и Дойг). Каждое полученное целочисленное решение формулировки проверяется на допустимость с помощью специально разработанных комбинаторных алгоритмов. В случае недопустимости решения генерируются дополнительные ограничения, добавляемые в формулировку задачи — отсечения.

В разделе 3.2 приведена постановка задачи, сделан обзор литературы по существующим методам ее решения.

В разделе 3.3 задача $1 \mid r_j \mid \sum w_j U_j$ формулируется как задача ЦЛП. Пусть булева переменная x_j принимает значение 1, если требование $j \in N$ обслуживается вовремя и 0 - если требование $j \in N$ запаздывает. Тогда в компактном виде формулировка записывается следующим образом.

$$\min \sum_{j \in N} w_j(1 - x_j) \tag{3}$$

$$\mathcal{R}_{D(x)} \tag{4}$$

$$\texttt{disjunctive}(x) \tag{5}$$

$$x \in \{0,1\}^n \tag{6}$$

Здесь ограничение $\texttt{disjunctive}(x)$ выполняется тогда и только тогда, когда множество требований $J = \{j : x_j = 1\}$ может быть обслужено на одном приборе без прерываний и с соблюдением времен поступления и директивных сроков, (4) — релаксация ограничения `disjunctive`. Ограничение (5) моделируется линейными ограничениями достаточно громоздко и неэффективно, что делает невозможным решение задачи ЦЛП достаточно большой размерности за приемлемое время. Поэтому в предлагаемом алгоритме ветвей и отсечений ограничение (5) исключается из

[14] Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельщтейн Ю.Ю. Гибридные методы в дискретном программировании// Изв. АН СССР. Техн. кибернет.– 1988.– N 1.– С. 65 – 77.

[15] Финкельщтейн Ю.Ю. Метод отсечения и ветвления для решения задач целочисленного линейного программирования// Изв. АН СССР. Техн. кибернет.– 1971.– N 4.– С. 34 – 38.

формулировки.

В разделе 3.4 рассматриваются различные варианты релаксации (4). Существующие в литературе варианты не являются достаточно эффективными, поэтому в качестве ограничений (4) предлагаются следующие неравенства. Обозначим $\alpha_{li} = (r_i - r_l)^+$ и $\beta_{jl} = (d_l - d_j)^+$.

Утверждение 1 *Пусть для двух требований $i, j \in N$ выполняется $r_i < d_j$. Если вектор x удовлетворяет ограничению* `disjunctive`*, тогда x также удовлетворяет ограничению*

$$\sum_{l \in N} \min[d_j - r_i, (p_l - \max\{\alpha_{li}, \beta_{jl}\})^+] x_l \leq d_j - r_i. \tag{7}$$

Раздел 3.5 посвящен вопросу проверки на допустимость решения $\bar{x}$ задачи ЦЛП (3), (7), (6), а также вопросу построения отсечений в случае недопустимости $\bar{x}$. Предлагаются два семейства отсечений. Отсечение первого семейства может быть построено при помощи алгоритма, предложенного в разделе 2.4. Алгоритм выполняется для множества требований $\bar{J} = \{j : \bar{x}_j = 1\}$, и в случае его недопустимости находится недопустимое подмножество $S \subseteq \bar{J}$, для которого строится ограничение

$$\sum_{j \in S} x_j \leq | S | - 1. \tag{8}$$

Следующее утверждение представляет отсечения второго вида.

Утверждение 2 *Пусть заданы такие множество требований $\Omega \subset N$ и требование $k \in N \setminus \Omega$, что k может быть обслужено только с момента времени r_k^{Ω}, $r_k^{\Omega} > r_k$, если все требования из Ω выполняются вовремя. Положим также $\alpha_{lk}^{\Omega} = (r_k^{\Omega} - r_l)^+$. Тогда вектор x, удовлетворяющий ограничению* `disjunctive`*, удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} &\sum_{l \in N \setminus \Omega \setminus \{k\}} \min\left[d_j - r_k^{\Omega}, (p_l - \max\{\alpha_{lk}^{\Omega}, \beta_{jl}\})^+\right] x_l + \\ &(p_k - \beta_{jk})^+ x_k \leq d_j - r_k^{\Omega} + (r_k^{\Omega} - r_k)(| \Omega | - \sum_{o \in \Omega} x_o), \end{aligned} \tag{9}$$

для каждого требования $j \in N \setminus \Omega$, $d_j > r_k^{\Omega}$.

В работе предлагается алгоритм сложности $O(n^3)$, который проверяет существование отсечения вида (9), которое нарушается заданным вектором $\bar{x}$.

В разделе 3.6 рассматриваются различные варианты предложенного алгоритма ветвей и отсечений. В заключительном разделе 3.7 представляются результаты экспериментального исследования предложенного алгоритма на множестве общедоступных тестовых примеров. Показанно, что разработанный алгоритм для задачи $1 \mid r_j \mid \sum w_j U_j$ является более эффективным, чем лучший алгоритм для данной задачи, существующий в литературе[16].

В **заключении** перечислены основные результаты диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

1. Лазарев А.А., Садыков Р.Р. Эффективность полиномиального алгоритма $O(n^3 \log n)$ для решения NP-трудной проблемы минимизации максимального временного смещения $1 \mid r_j \mid L_{\max}$// Материалы VII Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения", 29 января – 2 февраля.– М.: Изд-во центра прикладных исследований при мех.-мат. факультете МГУ, 2001.– С. 381 – 383.

2. Лазарев А.А., Садыков Р.Р. К исследованию проблемы теории расписаний $1 \mid r_j \mid L_{\max}$// Материалы российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций", 24 июня – 28 июня.– Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.– С. 219.

3. Лазарев А.А., Садыков Р.Р. Схема приближенного решения проблемы $1 \mid r_j \mid L_{\max}$// Материалы российской конференции "Дискретный анализ и исследование операций", 28 июня – 2 июля.– Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004.– С. 173.

4. Лазарев А.А., Садыков Р.Р., Севастьянов С.В. Схема приближенного решения проблемы $1 \mid r_j \mid L_{\max}$// Дискретный анализ и исследование операций.– 2006.– Сер. 2.– Т. 13, N 1.– С. 57 – 76.

[16]Peridy, L., Pinson E., Rivreau D. Using short-term memory to minimize the weighted number of late jobs on a single machine// European J. Oper. Res.– 2003.– V. 148. P. 591 – 603.

5. Садыков Р.Р. Экспериментальное исследование проблемы теории расписаний для одного прибора минимизации максимального временного смещения// Материалы XL Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс", 16 апреля – 18 апреля.– Новосибирск: Изд-во НГУ, 2002.– С. 126 – 127.

6. Lazarev A.A., Sadykov R.R. A polynomial approximation scheme for the $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ scheduling problem with guaranteed absolute error// Arias Estrada M., Gelbukh A. (eds.) Avances en la Ciencia de la Computación: Proceedings of Fifth Mexican International Conference ENC'04, 20 – 24 september.– Colima, Mexico: 2004.– P. 465 – 473.

7. Sadykov R. A hybrid branch-and-cut algorithm for the one-machine scheduling problem // Régin, J.-C., Rueher M. (eds.) Proceedings of the First International Conference CPAIOR'04, 20 – 22 april.– Springer-Verlag, LNCS, V. 3011, 2004.– P. 409 – 414.

8. Sadykov R.R., Lazarev A.A. Experimental comparison of branch-and-bound algorithms for the $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ problem// Proceedings of the Seventh International Workshop MAPSP'05, 6 – 10 june.– Siena, Italy: 2005.– P. 239 – 241.

9. Sadykov R.R., Lazarev A.A., Kvaratskhelia A.G. Research of absolute error for NP-hard scheduling problem minimizing maximum lateness// Proceedings of the Tenth Franch-German-Italian Conference on Optimization FGI'00, 4 – 8 september.– Montpelier, France: 2000.– P. 56 – 57.