МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Танг Тхань Лам

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ ПОЛЕТА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
д. т. н., профессор Нгуен Куанг Тхыонг

Научный консультант:
к. т. н., доц. Супруненко Станислав Николаевич

Москва – 2015

Содержание

Введение

Актуальность темы диссертации

Вьетнам - аграрная страна с развивающейся промышленностью и экономикой. Быстрый рост численности населения и соответствующий рост уровня потребления диктует необходимость индустриализации и модернизации производства с внедрением современных технологий, обеспечивающих высокую производительность труда, повышение качества и объема выпускаемой продукции. Как показывает опыт экономически развитых стран, эффективное решение многих вопросов в сфере промышленного производства связано с использованием авиации.

Спектр применения авиации в производственных задачах включает:

- перевозку продуктов и грузов (особенно в условиях больших расстояний и срочности) ;
- перевозку специальных негабаритных грузов;
- участие в уникальных строительно-монтажных работах;
- аэрофотосъемочные и геофизические работы, разведку полезных ископаемых;
- инспекцию технических систем (например, линий электропередач) с воздуха;
- экологический мониторинг и контроль за рациональным использованием природных ресурсов;
- устранение природных и техногенных загрязнений, в том числе в прибрежных водах (дезактивация зараженных зон, обработка разливов нефти);
- тушение лесных пожаров и биологическую защиту лесов;
- воздействие на метеорологическую обстановку (засев облаков для образования осадков) ;
- поиск и спасение (людей);
- разведку рыбных запасов в интересах рыболовства;

- воздушную работу в сельском хозяйстве (обработку посевов средствами химической защиты, внесение удобрений, выполнение авиасева и др.)

Применение летательных аппаратов в промышленном производстве имеет следующие преимущества:

- большая скорость решения задачи с высокой производительностью труда;
- мобильность и оперативность, гарантирующие широкий радиус действия и обеспечивающие выполнения воздушных работ на больших площадях;
- возможность воздушных работ в труднодоступных местах;
- воздушные работы выполняются при любом состоянии земной поверхности, не повреждая грунт и растущую на нем флору.

Следует отметить значительную роль авиации в агропромышленном комплексе, который для Вьетнама является очень важной отраслью экономики.

В настоящее время существует большое число образцов авиационной техники, способной решать специальные задачи промышленности. Всю эту технику можно разделить на три больших класса – летательные аппараты самолетной схемы (обычные самолеты), винтокрылы (вертолеты), а также аэростатические аппараты (дирижабли). Каждый класс обладает своими достоинствами и недостатками, что обуславливает преимущественные области применения. Если вопрос касается больших расстояний и больших площадей с требованием быстрого реагирования и выполнения нужной воздушной работы, то предпочтение отдается самолетам. Особенность территории Вьетнама – ее значительные размеры с большими площадями лесных массивов, сельскохозяйственных угодий и морских акваторий. Следовательно, использование самолетов здесь оправданно и необходимо. Разумеется, это не отрицает особую важность применения и вертолетной техники, достоинством которой является возможность зависания и пространственного перемещения в любых направлениях и способность обходиться без аэродромов.

Для промышленных целей могут использоваться специализированные летательные аппараты, но в огромном числе случаев используется авиация общего назначения. В последнее время для проведения воздушных работ наметилась тенденция использования малой авиации, удобной для удовлетворения потребностей небольших предприятий. Проводятся исследования по использованию беспилотной авиации. Естественно, что такая техника должна быть надлежащим образом адаптирована к решаемым производственным задачам. Это предполагает не только оборудование борта специальными дополнительными технологическими устройствами, но также обеспечение необходимых пилотажных характеристик и безопасное управление полетом летательного аппарата в специфических условиях применения. Не менее важны и экономические аспекты применения.

В сравнении с наземными средствами, авиация “работает” в 10–12 раз производительнее. Использование самолёта в промышленном производстве имеет ряд очевидных преимуществ, а в некоторых случаях является единственным способом решения задачи (например, искусственное осаждение облачности).

Хотя достоинства воздушных работ были очевидны уже с момента зарождения авиации, но по настоящему широкое применение летательных аппаратов в народном хозяйстве началось только после Второй мировой войны, что объясняется достигнутым достаточно высоким уровнем производства авиационной техники, ее удешевлением и доступностью (для воздушных работ могла также использоваться списанная военная техника). Например, по данным [2], в 1952 г. в СССР объем авиахимических работ (АХР) превысил уровень 1940 года в 5 раз. Во Франции [1] ежегодно при помощи сверхлегких самолётов обрабатывается более 500 тыс.га фермерских угодий, а в США ежегодно около 8 тысяч сверхлегких летательных аппаратов обрабатывают до 100 млн.га.

Без сомнения, объемы воздушных работ в промышленном производстве будут постоянно расти. Это означает дальнейшее расширение парка специализированных самолетов, увеличение летных часов и дополнительные эксплуатационные расходы.

Но говоря об эффективности использования авиации для индустриализации и модернизации производственного процесса надо учитывать как высокую стоимость оплаты высококвалифицированного труда летчиков и обслуживающего персонала, так и стоимость затрачиваемого топлива, которая в 2-3 раза выше стоимости топлива, расходуемого обычной наземной техникой при выполнении аналогичных работ. Поэтому выявление оптимальных экономичных режимов полета для производственной авиации является важной задачей в плане снижения общей себестоимости промышленной продукции. Вполне очевидно, что решение задач оптимизации режимов полета летательного аппарата требуется не только для отдаленной перспективы, но уже и для сегодняшнего дня.

Следует отметить, что задачи оптимального управления и оптимизации режимов полета ставились с самого начала зарождения авиации. Но задачи этого типа очень сложны, и более или менее полезные для практики решения были получены в сравнительно ограниченном числе случаев. Здесь уместно упомянуть достижения таких учёных, как И.В. Остославский, И.В. Стражева [25], А.А. Красовский [6], Е. В. Тарасов [17], Л.П. Федоров [12], В. Т. Тараненко [28, 29, 30], В.Ф. Кротов [14, 15, 16], С.Ю. Скрипниченко [18], A.E. Bryson [7],[73÷76], J.T. Betts [85, 86] и др.

В принципе, вопросы об экономической эффективности стоят перед любой авиацией [18], но в промышленном производстве имеются свои особенности, которые могут и должны быть учтены. В частности, при длительных полетах и полетах с эмиссией рабочей массы (задачи тушения пожаров, опыления) требуется учитывать изменение текущей массы самолета. Соответствующих исследований в этом направлении сравнительно немного. Здесь уместно упомянуть исследования Л.П. Федорова [12], в которых плодотворно рассмотрена оптимизация режимов полета сельскохозяйственного самолета. Полученные результаты учитывают изменение массы самолета за счет распыления химического вещества при выполнении АХР. Но отмечая работу [12], следует все же отметить ряд сделанных в ней допущений и упрощений, снижающих возможность более глубокой оптимизации режимов полета самолета с изменяющейся массой. Малоизученными остаются также вопросы оптимизации маневров, которые должны выполняться на малых скоростях вблизи земной поверхности, что типично для многих воздушных работ в промышленности.

В связи с указанными обстоятельствами возникает необходимость исследования, разработки и предложения оптимальных режимов полета самолета для повышения эффективности и экономичности воздушных работ.

Целью диссертационной работы является исследование, разработка и предложение оптимальных режимов полета летательного аппарата самолетной схемы (самолета) в производственном процессе с учетом изменения массы самолета в полете.

Объектом исследования является оптимизация и оптимальное управление летательным аппаратом.

Задачи исследования: В соответствии с поставленной целью решаются следующие задачи:

- Вариационная задача минимизации расхода топлива самолета в горизонтальном полете. Учитывается изменение полной массы самолета в полете и сложный характер зависимости удельного расхода топлива силовой установки от режима полета.
- Задачи формирования траектории движения самолета при выполнении пространственного маневра.
- Задачи оптимизации маневров: Минимизация расхода топлива и времени выполнения пространственного маневра самолета. Учитываются ограничения на переменные состояния и управления.
- Задача автоматического поддержания экономичного режима полёта средствами адаптивного управления (экстремальное регулирования по критерию минимума коэффициента удельной дальности). Построение соответствующих структурных схем и моделирование систем автоматического управления самолётом, обеспечивающих минимизировать коэффициент удельной дальности

Методы и предмет исследования: При решении задач диссертационного исследования использовались теории оптимального управления; теории оптимизации; теории автоматического управления; прямые вариационные методы; численные методы; математическое моделирование; пакет вычислительных программ MATLAB и его специальные наборы инструментов (Toolboxes).

Теоретическая значимость результатов работы: Получены новые расчетные формулы и даны рекомендации для оптимизации режимов полета самолета с учетом изменения его массы в производственном процессе.

Научная новизна результатов:

- Представлены новые решения задач по оптимизации характерных режимов полета самолета.

- Для участков горизонтального полета с учетом изменения массы самолёта в диссертационной работе получены новые расчетные формулы, позволяющие численно определить оптимальное решение в виде зависимости оптимальной скорости полета от массы самолета. Оптимизационная задача здесь решена в рамках классического вариационного метода с вырожденным функционалом. В отличие от уже известных решений, эти расчетные формулы позволяют получить пригодный для практического использования результат без введения существенных упрощений относительно топливо-расходных характеристик двигателя и несущих свойств планера самолета.

Практическая значимость результатов работы:

- Результаты диссертационного исследования могут быть применены для повышения эффективности и экономичности выполнения воздушных работ.
- Полученные результаты работы могут быть использованы для оптимизации режимов полёта не только производственных летательных аппаратов, но и летательных аппаратов более широкого класса. Использованные в диссертации методы оптимального управления позволяют решить многочисленные актуальные задачи оптимизации в промышленности, и в этом плане изложенный в диссертации материал может иметь методическую значимость.

- Отдельные результаты диссертационной работы могут быть использованы в программе индустриализации и модернизации производственных процессов Вьетнама.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Решение задачи оптимизации на участках горизонтального полёта.
- Решение задачи планирования траектории пространственного маневра самолета.
- Решения задач оптимизации набора высоты в вертикальной плоскости по критерию времени и топлива со сложными ограничениями на фазовые переменные и на управления.
- Решения задач оптимизации разворота самолёта в горизонтальной плоскости по критерию времени и топлива со сложными ограничениями на фазовые переменные и на управления.
- Решения задач оптимизации разворота в пространстве по критерию времени и топлива со сложными ограничениями на фазовые переменные и на управления.
- Структурные схемы для автоматической системы, реализующей оптимальный режим для экономии топлива (максимума дальности).

Достоверность результатов, полученных в диссертации, подтверждается:

- корректным использованием математических моделей движения самолета; моделированием с различными математическими моделями.
- совпадением полученных оптимальных решений с решениями, полученными численным методом Рунге-Кутта четвёртого порядка.
- сравнением решений, полученных в диссертации с решениями, полученными другими методами с получением непротиворечивых результатов.

Апробация работы и публикации

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научно-технической конференции по аэродинамике ЦАГИ, Жуковский, 2013; на 56-й всероссийской научной конференции МФТИ “Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе”, Жуковский, 2013 а так же на международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения выдающегося ученого, генерального конструктора ракетно-космических систем, академика В.Ф. Уткина “Фундаментальные проблемы системной безопасности”, Елец, 2014.

Результаты работы опубликованы в 3-х изданиях из перечня, рекомендованного ВАК-ом Минобрнауки России.

Диссертационная работа содержит следующие основные разделы:

- В первой главе рассматриваются проблемы использования летательных аппаратов для индустриализации и модернизации производственного процесса, задачи оптимизации режимов полёта самолёта, в том числе большое внимание уделяет использованию самолёта в агропромышленном производстве.
- Во второй главе рассматривается вариационная задача минимизации расхода топлива самолета в горизонтальном полете. Учитывается изменение полной массы самолета в полете и сложный характер зависимости удельного расхода топлива силовой установки от режима полета. Предлагается метод определения экстремали вариационной задачи, основанный на уточнении более простого квазистационарного решения, получаемого исходя из условия равенства силы тяги двигательной установки аэродинамическому сопротивлению самолета.
- Третья глава состоит из трёх разделов. В разделе А представлены результаты решения краевых задач формирования траектории движения и разворота самолёта при выполнении пространственного маневра. Использован метод на основе решения обратных задач. Показано, что в этой задаче необходимость ввода в постановку задачи ограничения на переменные состояния и управления. В разделе Б представлены результаты решения задач оптимизации режимов полёта самолета по критерию времени и по критерию расхода топлива. Здесь рассмотрен и использован псевдоспектральный метод Гаусса. Приведены исследования, сравнения и расчеты экономической эффективности. На расчетных примерах анализируется влияние изменения массы самолёта на режимы полёта. В

разделе В представлены результаты решения задачи оптимизации движении самолёта на заданной траектории.

- Четвертая глава посвящена задачам реализации оптимальных режимов полёта. Представлены результаты моделирования системы экстремального управления, обеспечивающей минимизацию коэффициента удельной дальности. Предложена структурная схема системы автоматического управления полётом по заданной траектории с учётом изменения массы самолёта.

- В заключении представлены основные выводы и результаты диссертационной работы.

- Приложение содержит основные обозначения, уточнение модели движения самолета в горизонтальном полёте и некоторые вопросы, связанные с решением задач оптимизации динамики полёта.

1. Особенности использования летательных аппаратов для индустриализации и модернизации производственного процесса

В данной главе рассматриваются проблемы использования летательных аппаратов для индустриализации и модернизации производственного процесса, задачи оптимизации режимов полёта самолёта, в том числе большое внимание уделяет использованию самолёта в агропромышленном производстве.

1.1. Летательные аппараты, используемые в производственном процессе

Во Вьетнаме процесс индустриализации и модернизации связывается с развитием промышленности и использованием средств механизации и автоматизации труда. Он заключается в использовании современных средств в производственных процессах, широком внедрении достижений науки, технологий промышленного типа. Для Вьетнама использование летательных аппаратов в производственном процессе является новым направлением, эффективно решающим задачу повышения производительности труда, улучшения качества и увеличения объема выпускаемой продукции.

Летательные аппараты, используемые в производственном процессе, могут быть разделены на следующие группы:

- **Вертолёт:** Это винтокрылый летательный аппарат со способностью вертикального взлета и посадки. Поэтому вертолёт может приземляться и взлетать в любом месте, где есть ровная площадка размером в полтора диаметра винта. Вертолёты способны маневрировать в тесном пространстве, зависать в воздухе и совершать полёт в обратном направлении без разворота («задом наперёд»). Вертолёты могут решать множество самых разных производственных задач на транспорте, в строительстве, в сельском хозяйстве. Эти аппараты могут перевозить различные грузы как в грузовой кабине, так и на внешней подвеске. В настоящее время вертолеты широко используются для выполнения строительно-монтажных работ, а также в агропроизводстве для распыления удобрений и ядохимикатов с целью подкормки и защиты растений. Общеизвестна высокая эффективность вертолетов при тушении лесных пожаров.

При использовании в производственном процессе, вертолёт имеет следующие недостатки:

- Повышенный удельный расход топлива. Это приводит к высокой стоимости полёта на единицу массы перевозимого груза.
- Высокий шум, вибрация, тряска.
- Сильное влияния воздушного винта, аэродинамические возмущения, вызываемые винтом. При использовании вертолёта в агропромышленном производстве, необходимо учитывать существенное влияние аэродинамических (вихревых) возмущений на равномерность покрытия обрабатываемой поверхности распыляемым веществом.

- **Самолёт:** Самолёт предназначен для многих целей. Можно сказать, что на сегодняшний день большинство применений самолёта в производственном процессе касается сельскохозяйственного производства. В сельском хозяйстве в последнее время большое внимание уделяется прогрессивным наукоемким технологиям с высоким уровнем механизации и автоматизации. При таком подходе процесс производства сельскохозяйственной продукции по сути превращается в процесс промышленного производства. И не случайно, что в последнее время вместо слов «сельское хозяйство» все чаще употребляется обозначение «агропроизводство». По сравнению с вертолетом у самолета есть свои преимущества – это более высокая скорость полета и меньший расход топлива, способность пролетать большие расстояния без посадки. В следующей части диссертационной работы внедрение самолёта в промышленном производстве будут подробно рассмотрены.

- **Беспилотный летательный аппарат (БПЛА)**: В настоящее время мировой интерес к этому классу летательных аппаратов непрерывно растет. БПЛА по обычному пониманию являются легкими или сверхлегкими летательными аппаратами без экипажа на борту. Кроме военных областей, использование БПЛА в производстве оправданно и перспективно.

- **Мотодельтаплан (дельталет):** Мотодельтаплан относится к сверхлёгким моторным летательным аппаратам, выполненным по схеме бесхвостка с дельтавидным гибким крылом и балансирным управлением. Масса мотодельтаплана не превышает 500 кг. Мотодельтаплан может иметь колесное шасси, поплавковое, лыжное [109]. В настоящее время большое внимание уделяется перспективе использования таких аппаратов в производстве, в частности – в агропризводстве, где они могут иметь следующие преимущества [38, 39].

- Сравнительно невысокая стоимость. Использование обычного самолёта в агропроизводстве стоит достаточно дорого и зачастую не по карману небольшим предприятиям, так что применение малой авиация и, в частности, мотодельтаплана – возможный выход из положения. Существенно низкая стоимость этих аппаратов делает их доступными для приобретения и эксплуатации небольшими фермами.
- Экономическая выгода, обусловленная низкими эксплуатационными затратами (низкая себестоимость летного часа, минимальные затраты на обслуживание). Использование мотодельтаплана, оснащенного системой спутниковой навигации (GPS), не требует сигнальщиков, специальных взлетных площадок, вылета за пределы обрабатываемого участка.
- Хорошие взлетно-посадочные характеристики, высокая мобильность, технологичность, ремонтопригодность. Возможность выполнения воздушных работ, свойственных только таким сверхлегким летательным аппаратам (например, биологические способы защиты растений).
- Высокий уровень безопасности. Пилотирование упрощенное, которое может выполняться пилотом-любителем не очень высокой квалификации. Это означает снижение расхода средств на заработную плату.
- Возможность выполнения воздушных работ, которые обычно убыточны или нерентабельны для применения других типов летательных аппаратов.

При использовании летательных аппаратов в производственном процессе необходимо ставить и решать следующие технико-экономические задачи.

- Задачи оптимизации технических критериев полёта: снижения расхода топлива, оптимизации времени полёта, максимальной дальности, максимальной продолжительности полёта, и др.

- Задачи оптимизации экономических критериев, обеспечивающих рост общей экономической эффективности (снижение эксплуатационных расходов и себестоимости летного часа).

- Задачи управления полётом летательного аппарата с целью обеспечения нормального и безопасного режима полета в соответствии с требуемой производственной функцией. Одновременно с ручным управлением летчика целесообразно использование систем автоматического управления, позволяющих улучшить характеристики устойчивости и управляемости летательного аппарата, повысить его маневренность, безопасность и экономичность.

- Задачи обеспечения надежности и безопасности. Ввиду особого характера деятельности авиации, требования к надежности и безопасности полета являются первостепенными. Решение задач безопасности даёт правила и рекомендации, которые должны тщательно и неукоснительно выполняться при выполнении производственных воздушных работ.

1.2. Особенности использования летательных аппаратов в производстве

Как и в любой другой области применения авиации, первейшим требованием к полету самолета, выполняющего воздушную работу, является безопасность. Но здесь есть свои особенности, диктуемые условиями выполнения промышленных работ. Например, воздушная работа часто выполняется на малых высотах и малых скоростях. И если, например, для убыстрения процесса разгона обычного самолёта лётчик может применить тактику разгона “по волне вниз”, то для воздушных работ на малых высотах такая тактика запрещена. Необходимо также поддерживать определенный запас по скорости полета во избежание попадания в режим сваливания, которое в условиях маловысотного полета ведет к катастрофе.

Для задач анализа и проектирования системы управления производственным самолётом важны следующие особенности.

- В отличие от других типов самолетов (пассажирских, грузовых, спортивных, транспортных и истребительных), производственные самолеты – это в основном лёгкие конструкции с поршневыми или турбовинтовыми двигателями. Например, в настоящее время выпускается довольно большой парк специальных самолетов для нужд агропромышленного комплекса: АТ- 300, 400, 500, 600, 800 (Air Tractor), Cessna 188 Ag Wagon (Cessna), G-164 Agcat (Grumman), А-31, 35 Спектр (Авантаж), Фермер-2 (МВЕН), Ил-103СХ (Ильюшин), и др. Существует также уникальная конструкция биплана с турбореактивным двигателем - Мелец М-15 (советско-польская разработка). В СССР широко использовался среднеразмерный самолет Ан-2, на основе которого был выполнен специализированный сельскохозяйственный вариант Ан-2СХ.

- Наличие эксплуатационных ограничений самолета по скорости, по высоте, по перегрузке, по углам крена, атаки и наклона траектории, которые отличаются от ограничений для других типов самолетов. Производственные самолеты часто работают с малыми скоростями, на малых высотах, поэтому в расчётах можно не учитывать зависимость аэродинамических характеристик от числа М полета, а также зависимость тягово-расходных характеристик двигателя от высоты.

- При выполнении воздушных работ, связанных с интенсивной эмиссией рабочей массы (задачи опыления, опрыскивания, тушения пожаров), полная масса самолета в полете сравнительно быстро уменьшается. Скорость такого уменьшения оказывается гораздо больше, чем скорость сжигания топлива двигателем самолета.

- При полёте самолёта образуются вихри (спутный след), сбегающие с концов крыльев. Вихревая система от несущих поверхностей вместе с потоком от вращающегося винта возмущает воздушную среду за самолетом и, тем самым, существенно влияет на процесс распыления и осаждения частиц распыляемого вещества. А это может влиять на качество воздушной работы. В [4] изложены результаты исследований возмущенного поля скоростей потока и влияния возмущений на процессы опыления и опрыскивания. Показано, что процессы довольно сложные и зависят от ряда факторов, включая характеристики самолета и параметры режима полета.

- Ветер и метеорические условия оказывают влияние на выбор режимов и процедур воздушной работы самолёта. Скорость и траектория полёта вместе с направлением и силой ветрового воздействия оказывают значительное влияние на распределение распыляемого вещества по обрабатываемой поверхности, что должно учитываться при выполнении воздушной работы.

- Самолёт при выполнении воздушной работы специальное дополнительное оборудование. В случае воздушных работ типа АХР сюда входят распылитель, штанга, бак химикатов, опрыскиватель. Размещение этого оборудования вне самолёта ухудшает аэродинамические характеристики самолета и влияет на процессы пилотирования и полет самолета.

1.3. Задачи оптимизации режимов полёта

Типичное выполнение воздушной работы заключается в том, что самолет делает многократные пролеты над обрабатываемой (исследуемой) поверхностью. При этом может производиться эмиссия рабочей массы (опыляющего вещества). Переход к каждому очередному пролету над обрабатываемой поверхностью требует смены курса на 180^o. С этой целью на границах обрабатываемой поверхности самолет выполняет маневры разворота. Маневр разворота может быть плоским (на постоянной высоте) или в пространственным (рис. 1.1.).

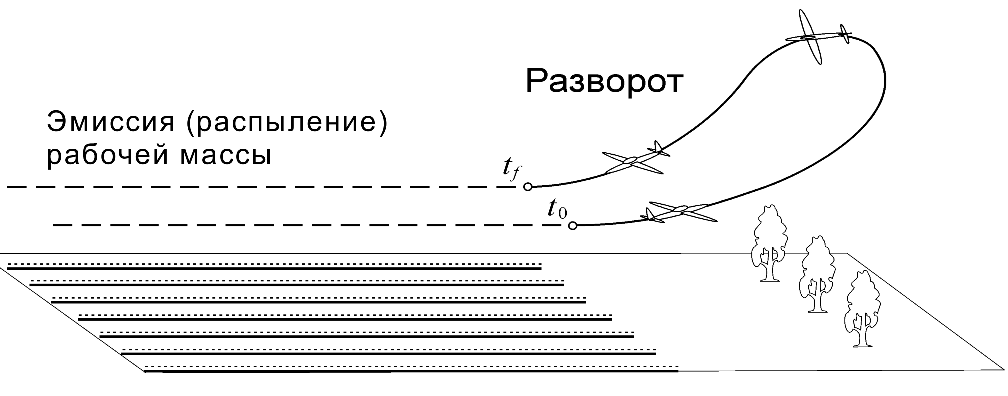


Рис. 1.1. Типичная воздушная работа (на примере АХР)

Очевидно, что для повышения эффективности воздушной работы и, в конечном итоге, снижения себестоимости всей выполняемой работы, маневр разворота должен быть соответствующим образом оптимизирован.

В данной работе рассматриваются задачи оптимизации режимов полёта в следующих вариантах: для участков с эмиссией массы - по критерию минимума расхода топлива, для участков разворота - по критериям минимума времени (задача быстродействие) и минимума расхода топлива. Рассмотрение критерия быстродействия для участков с эмиссией массы навряд ли целесообразно, т.к. решением соответствующей вариационной задачи оказывается максимальное граничное значение скорости полета из эксплуатационного диапазона, неприемлемое для режима эмиссии массы. В принципе, можно рассматривать составной критерий из затрат топлива и времени, как это сделано в [12]. Но целесообразность такого подхода тоже сомнительна, т.к. расчетные формулы усложняются, а уменьшение времени полета при необходимости можно достичь простым увеличением скорости полета, соответствующей оптимальному решению задачи на минимум расхода топлива.

В задачах оптимизации по критерию минимума времени функционал имеет вид:

$$J = t_f \quad ,$$

где t_f - длительность полета на рассматриваемом участке.

В задачах оптимизации по критерию минимального расхода топлива используется функционал следующего вида:

$$J = -\int_0^{t_f} \dot{m}(t)dt = \int_0^{t_f} (C_e P / 3600)dt \quad ,$$

где m - масса самолета; P, C_e - тяга двигателя и коэффициент удельного расхода топлива.

Следует отметить, что топливная экономичность и быстродействие являются, как правило, критериями антагонистами в том смысле, что снижение затрат топлива на маневр ведет к увеличению времени выполнение маневра, и наоборот.

Хотя задачи быстродействия и на минимум расхода топлива ставились уже давно и решались неоднократно, но применительно к производственной авиации исследований немного. Известные решения задачи оптимизации режимов полета получены с упрощающими предположениями по моделям самолета и его тягово-расходным характеристикам, а также с небольшим числом ограничений на переменные управления и состояния. Это приводит к снижению точности решения, и даже к ошибочным результатам, непригодным для использования.

Многие работы, посвященные оптимизации маневра самолета, как правило посвящены боевым самолетам типа истребителя, обладающим высокой маневренностью и тяговооруженностью со способностью включать форсаж (см. например [28],[73÷77]). Естественно, что при оптимизации маневра таких самолетов в качестве критерия оптимальности бралось быстродействие. Оптимизация по расходу топлива почти не рассматривалась.

Большая часть времени выполнения воздушной работы для затрачивается на участки горизонтального полёта, на которых происходит эмиссия рабочей массы. При интенсивной эмиссии масса самолёта может сравнительно быстро уменьшаться. Поэтому решение задачи на минимум расхода топлива здесь должно выполняться с учётом изменения массы самолёта. Решение задачи в такой постановке уже рассматривалось в [12]. Однако при получении решения в этой работе сделан ряд допущений и упрощений, снижающих возможность более глубокой оптимизации режима полета. В частности, при решении вариационной задачи удельный расход топлива принимался постоянным, а сам расчет оптимального режима получился, по сути, графо-аналитическим, требующим тщательного анализа промежуточных результатов. Поэтому в настоящей диссертационной работе сделана попытка дать более точное решение вариационной задачи, а процесс получения конечного результата максимально формализовать за счет алгоритмизации расчетов с опорой на использование современных компьютерных технологий.

При выполнении воздушной работы самолету часто требуется выполнять как плоские и пространственные маневры разворота , так и маневры в вертикальной плоскости с набором высоты и снижением (например, для облета препятствия). Ввиду многократности повторения маневра дополнительные расходы времени и топлива могут быть довольно ощутимы в общей стоимости воздушной работы. А т.к. на участках разворота эмиссия рабочей массы обычно не производится, то эти дополнительные расходы являются, по сути, издержками технологического процесса. Для оптимизации маневренных режимов полёта можно поставить следующие задачи:

- Задачи оптимизации набора высоты
- Задачи оптимизации разворота самолёта в горизонтальной плоскости
- Задачи оптимизации разворота в пространстве

Эти задачи могут рассматриваться по критерию расход топлива и (или) по критерию минимума времени.

1.4. Выводы по главе

На основании рассмотрения специфики выполнения типичных воздушных работ в данном разделе поставлены оптимальные задачи, решение которых должно повысить экономичность выполнения полетов в интересах снижения общей себестоимости воздушной работы. Конкретно предложена оптимизация по затратам топлива на участках с эмиссией рабочей массы, а также оптимизация по затратам топлива и по быстродействию на участках маневров разворота.

2. Оптимизация на участках горизонтального полёта

В данной главе рассматривается вариационная задача минимизации расхода топлива самолета, выполняющего эмиссию рабочей массы в горизонтальном полете. Учитывается изменение полной массы самолета в полете и сложный характер зависимости удельного расхода топлива двигателя самолета от режима полета. Предлагается метод определения экстремали вариационной задачи, основанный на уточнении более простого квазистационарного решения, получаемого исходя из условия равенства силы тяги двигательной установки аэродинамическому сопротивлению самолета.

2.1. Уравнения движения и минимизируемый функционал

На режиме прямолинейного горизонтального полета без эмиссии рабочей массы уравнения движения самолета имеют вид

$$m\dot{V} = P - X_a\,,\ Y_a = mg\,,\ \dot{m} = -c_e P\,,\ \dot{L} = V\,, \tag{2.1}$$

где m – масса самолета; V – скорость полета; L – координата дальности; P – тяга двигателя; X_a – сила аэродинамического сопротивления; Y_a – аэродинамическая подъемная сила; c_e – удельный расхода топлива ($c_e P$ – секундный расход топлива). Аэродинамические силы зависят от скоростного напора:

$$X_a = c_x qS\,,\ Y_a = c_y qS\,,$$

где $q = \rho V^2/2$ – скоростной напор (ρ – плотность атмосферы), S – площадь крыла. Второе уравнение (2.1) – это условие поддержания горизонтального полета. Из него следует необходимая величина аэродинамического коэффициента подъемной силы:

$$c_y = mg/qS \equiv c_{y\,\text{Г.П}}(m,V)\,.$$

Таким образом, в горизонтальном полете этот коэффициент является функцией массы самолета и скорости полета.

Коэффициент лобового сопротивления зависит от коэффициента подъемной силы, т.е. $c_x = c_x(c_y)$. Для получения аналитических результатов обычно берется квадратичная зависимость (квадратичная поляра), но для численно-ориентированных расчетов в этом нет необходимости – зависимость может быть любой. Для расчетного примера в диссертационной работе использованы данные, соответствующие сельскохозяйственному самолету с турбореактивным двигателем [12]. Соответствующие зависимости по аэродинамическим характеристикам планера (коэффициент подъемной силы c_y в зависимости от угла атаки α и поляра $c_x(c_y)$) и топливо-расходным характеристикам двигателя (коэффициент удельного расхода топлива c_e в зависимости от тяги двигателя P и скорости полета V на высоте $h = 0$) приведены на рис. 2.1.

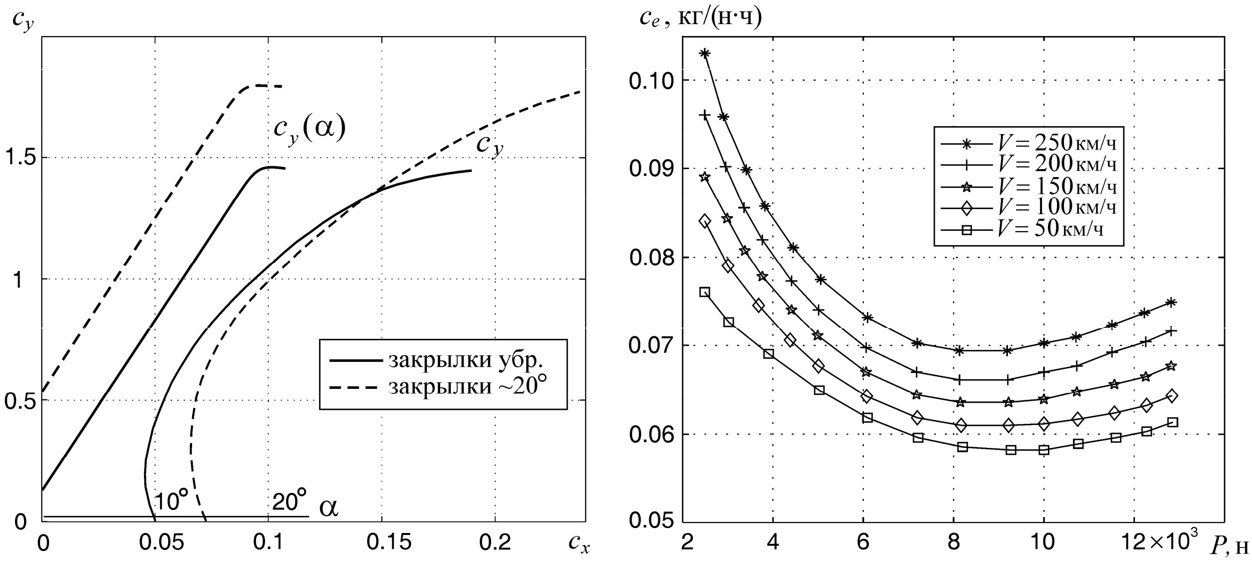


Рис. 2.1. Характеристики самолета [12].

В горизонтальном прямолинейном полете значение коэффициента аэродинамического сопротивления определяется по зависимости $c_x(c_y)$ при условии, что $c_y = c_{y\text{Г.П}}$, т.е.

$$c_x = c_x(c_{y\text{Г.П}}(m,V)) \equiv c_{x\text{Г.П}}(m,V).$$

Таким образом, текущее значение c_x является функцией массы самолета и скорости полета.

При выполнении разворотов в горизонтальной плоскости самолет летит с некоторым углом крена γ. В этом случае значение коэффициента подъемной силы, необходимое для горизонтального полета, определяется формулой

$$c_{y\,\text{Г.П}}(m,V) = mg/(qS\cos\gamma)\,.$$

Для снижения радиуса разворота значение угла крена берется максимально допустимым, дополнительно могут выпускаться закрылки. В криволинейном полете переменная L будет определять пройденный путь. Очевидно, что участки такого разворота можно рассматривать точно так же, как и прямолинейные участки. Необходимо только увеличить величину $c_{y\,\text{Г.П}}$ в соответствии с приведенной формулой для компенсации уменьшения вертикальной составляющей подъемной силы из-за крена.

Следует отметить, что простая модель (2.1) не учитывает наличия нормальной составляющей и снижения тангенциальной составляющей тяги из-за отклонения вектора тяги двигателя от вектора скорости полета. Но для решаемой задачи эти эффекты не имеют принципиального значения и при необходимости могут быть приближенно учтены без изменения структуры уравнений (2.1) (см. Приложение 2).

Удельный расход топлива c_e зависит от высоты, скорости полета и тяги P, но при полете на постоянной высоте это будет функция только скорости и тяги, $c_e = c_e(V,P)$. В общем случае эта зависимость достаточно сложная, что является проблемным моментом рассматриваемой задачи, препятствующим получению точного аналитического решения. Поведение этой зависимости для двигателя самолета [12] приведено на правом графике рис. 2.1.

При рассмотрении эффективности выполнения воздушной работы только по расходу топлива время полета не фиксируется. В этом случае дифференциальные уравнения удобно преобразовать к форме с независимой переменной пути L:

$$dV/dL = (P - X_a)/(mV)\,, \quad dm/dL = -c_e P/V\,. \qquad (2.2)$$

Здесь $X_a = c_{x\text{Г.П}}(m,V)qS \equiv X_a(m,V)$ – функция от V и m, а величина $c_e P/V$ определяет путевой расход топлива. На практике (см. например [13]) оптимизация полета по топливной экономичности обычно выполняется посредством статической минимизации путевого расхода топлива по скорости полета для каждого фиксированного значения массы m самолета в предположении, что тяга двигателя уравновешивает аэродинамическое сопротивление, т.е. принимается $P = X_a$. В этом случае $dV/dt = 0$ и $V = const$, благодаря чему определение оптимальной скорости полета в виде зависимости $V_{opt} = \overline{V}_0(m)$ требует выполнения сравнительно простой операции

$$c_e(V, X_a(m,V))X_a(m,V)/V \to \min_V .$$

Полученное решение можно назвать квазистационарным, так как по мере расходования топлива масса самолета m непрерывно уменьшается и оптимальная скорость полета на самом деле оказывается переменной. Но его можно назвать также и квазиоптимальным, поскольку, давая неплохие результаты, оно все же не использует полностью потенциальный резерв снижения тяги за счет учета ускорения dV/dt. Для обычной авиации этот резерв незначителен, так как уменьшение массы происходит медленно и соответствующие этому изменению величины ускорения $dV/dt = (dV_{opt}/dm)(dm/dt)$ оказываются довольно малыми.

При выполнении воздушной работы, связанной с эмиссией массы (например, распыление ядохимикатов при выполнении АХР), величины ускорения dV/dt могут оказаться более заметными, так как изменения полетной массы самолета происходит не только из-за расходования топлива, но также из-за эмиссии рабочей массы. В этом случае скорость изменения полной массы самолета определяется соотношением:

$$\frac{dm}{dt} = -c_e P - \frac{dm_c}{dt} = -c_e P - \frac{dm_c}{dL} V ,$$

где dm_c/dt – скорость расходования массы рабочего вещества, а $dm_c/dL = m_c'$ – величина расхода массы рабочего вещества на единицу расстояния (размерность кг/м). Параметр m_c' можно связать с нормой распределения рабочего вещества по площади обрабатываемой поверхности, η [кг/м^2]. Если Δl [м] – ширина полосы покрытия поверхности в однократном пролете, то $m'_c = \eta \cdot \Delta l$. Как правило, норма расхода рабочего вещества для каждой конкретной воздушной работы – постоянная величина, определяемая характером требуемой АХР. Поэтому в дальнейшем путевой расход m'_c принимается тоже постоянной величиной. Таким образом, вместо уравнений (2.2) следует рассматривать уравнения

$$dV / dL = (P - X_a)/(mV), \quad dm / dL = -c_e P / V - m'_c. \tag{2.2$'$}$$

Задачу минимизации расхода топлива при заданной дальности полета можно заменить эквивалентной задачей максимизации дальности при заданном расходе топлива. В этом случае рассматривается функционал

$$J = \int_0^{L_1} dL = \int_{m_0}^{m_1} \frac{dL}{dm} dm \to \max_V . \tag{2.3}$$

2.2. Линеаризация

При решении вариационной задачи учтем, что основная часть тяги двигателя идет на компенсацию аэродинамического сопротивления, поэтому примем

$$P = X_a + \Delta P,$$

где ΔP – отклонение силы тяги от значения, идущего на компенсацию X_a. Ввиду малости этого отклонения ($\Delta P << X_a$) зависимость $c_e(V, P)$ можно линеаризовать:

$$c_e = c_e(V, P) = c_e(V, X_a + \Delta P) \approx c_e(V, X_a) + \partial c_e / \partial P \,|_{P = X_a} \, \Delta P = c_{e0} + c_{eP} \Delta P,$$

$$c_e P \approx (c_{e0} + c_{eP} \Delta P)(X_a + \Delta P) \approx c_{e0} X_a + (c_{e0} + c_{eP} X_a) \Delta P.$$

Здесь введены параметры $c_{e0} = c_e(V, X_a)$, $c_{eP} = \partial c_e(V, P) / \partial P \,|_{P = X_a}$, являющиеся функциями V и m. Из (2.2$'$) следует

$$\Delta P = mV \frac{dV}{dL} = mV \frac{dV}{dm} \frac{dm}{dL} = mVV' \frac{dm}{dL},$$

$$\frac{dm}{dL} = \frac{-c_e P}{V} - m'_c \approx -\frac{c_{e0} X_a + (c_{e0} + c_{eP} X_a) \Delta P}{V} - m'_c.$$

Исключая из обоих уравнений ΔP, получим:

$$\frac{dL}{dm} = \frac{-V}{c_{e0} X_a + m_c' V}\left[1 + (c_{e0} + c_{eP} X_a) m \frac{dV}{dm}\right],$$

С учетом этого результата функционал J принимает вид

$$J \equiv L = \int_{m_1}^{m_0} \frac{V}{c_{e0} X_a + m_c' V}\left[1 + (c_{e0} + c_{eP} X_a) m \frac{dV}{dm}\right] dm \ . \qquad (2.3')$$

Для краткости записи последующих формул используем обозначения:

$$f_1(V,m) = \frac{V}{c_{e0} X_a + m_c' V} = \frac{1}{m_{P0}'(V,m) + m_c'} \, ,$$

$$f_2(V,m) = \frac{V}{c_{e0} X_a + m_c' V}(c_{e0} + c_{eP} X_a) m = f_1(V,m) f_3(V,m) \, ,$$

$$f_3(V,m) = (c_{e0} + c_{eP} X_a) m \, , \qquad V' = dV/dm \ .$$

Введенная здесь величина $m_{P0}'(V,m) = c_{e0} X_a / V$ - это путевой расход топлива в квазистационарном приближении (при допущении $P = X_a$).

Функционал J теперь приобретает более компактный вид,

$$J = \int_{m_1}^{m_0} \left[f_1(V,m) + V' \cdot f_2(V,m) \right] dm \, . \qquad (2.3'')$$

Характер поведения функций $f_1(V,m)$ и $f_2(V,m)$ для случая $m_c' = 0$ иллюстрируется графиками на рис. 2.2.

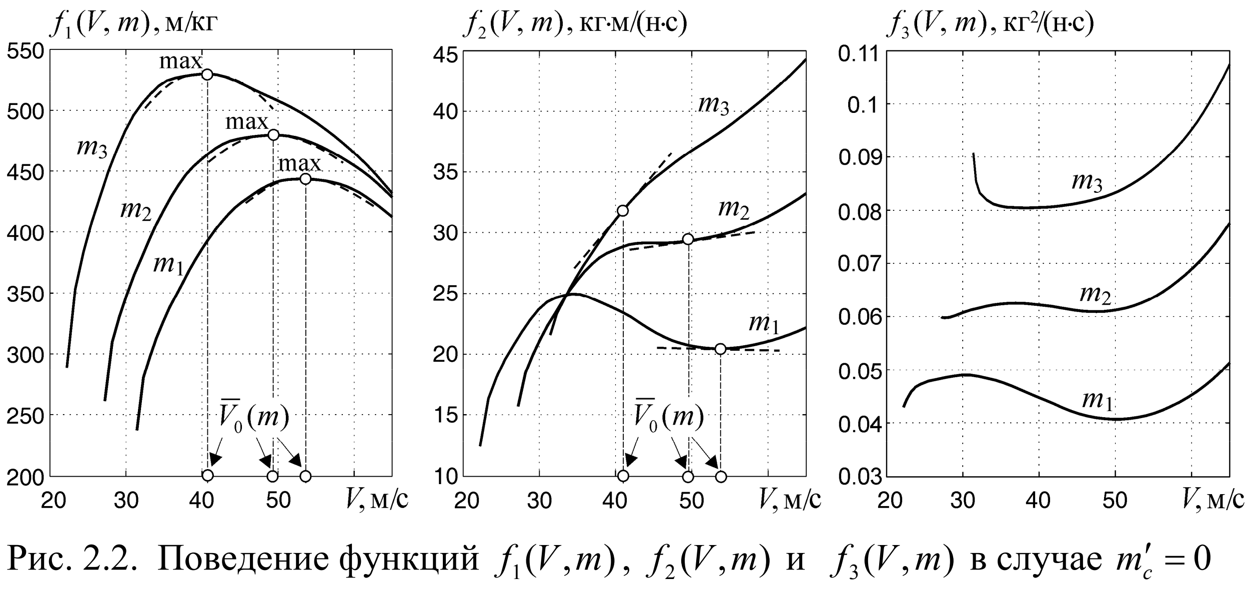


Рис. 2.2. Поведение функций $f_1(V,m)$, $f_2(V,m)$ и $f_3(V,m)$ в случае $m_c' = 0$

($m_1 = 6$т, $m_2 = 4.5$ т, $m_3 = 3$т)

Здесь же приведена и функция $f_3(V,m)$, которая от параметра m'_c не зависит. Характерно, что функция $f_1(V,m)$ выпукла кверху (один максимум), в то время как две других функций демонстрируют более замысловатое поведение. Следует заметить, что функция $1/f_1(V,m)$ – это путевой расход общей массы самолета в квазистационарном приближении:

$$1/f_1(V,m) = m'_{P0}(V,m) + m'_c .$$

Так как параметр m'_c принят постоянным, то минимизатор по аргументу V для функции $1/f_1(V,m)$ и для функции путевого расхода топлива $m'_{P0}(V,m)$ один и тот же, и понятно, что он не зависит от m'_c. С другой стороны, минимизация функции $f_1(V,m)$ и максимизация обратной ей функции $1/f_1(V,m)$ тоже дают одинаковый результат для V. Из этого следует, что операция определения максимума функции $f_1(V,m)$ должна приводить к получению квазистационарного приближения $\overline{V}_0(m)$, которое от параметра m'_c не зависит. Данные рассуждения позволяют заключить, что в подынтегральном выражении функционала (2.3″) слагаемое $f_1(V,m)$ является основным, так как максимизация только этого слагаемого уже дает хорошее приближение для искомого решения. Но одно это слагаемое не обеспечивает учет динамики изменения массы и не дает решения, зависящего от m'_c. Это обеспечивает второй член подынтегрального выражения, $V'f_2(V,m)$. Практические вычисления, связанные с определением зависимости $\overline{V}_0(m)$, несложные. В данном случае переменная m рассматривается как фиксированный параметр и требуется поиск экстремума функции только по одной переменной V в заданном интервале (диапазон возможного изменения V известен).

2.3. Решение вариационной задачи

Формула (2.3″) представляет собой стандартную запись функционала вырожденной вариационной задачи. Необходимым условием экстремума такого функционала будет соотношение [11]

$$\frac{\partial}{\partial V} f_1(V,m) - \frac{\partial}{\partial m} f_2(V,m) = 0\,, \qquad (2.4)$$

которое следует из общего уравнения Эйлера, определяющего экстремаль. Выражение (2.4) представляет собой уравнение вида $F(V,m)=0$ для определения зависимости $V=\overline{V}(m)$, которая задает оптимальное соотношение между скоростью полета и массой самолета.

Характерная особенность вырожденной задачи – экстремаль $\overline{V}(m)$ не проходит через заданные граничные условия по скорости $V_0 = V(m_0)$ и $V_1 = V(m_1)$, и реализуется на режиме промежуточной тяги. Но экстремаль может быть дополнена участками полета с максимальной и минимальной тягой, что позволяет согласовать заданные граничные условия и учесть ограничения на уровень тяги. Возможно включение в экстремаль участков, являющихся дугами границы допустимой области фазовой плоскости (V,m). Для решаемой задачи это означает, что начало и завершение полета выполняется с максимальной и минимальной тягой, а участки выхода кривой $\overline{V}(m)$ за пределы разрешенной области в плоскости (V,m) заменяются границами этой области.

Интересно отметить, что вырожденная вариационная задача может иметь решения и в классе разрывных функций. В частности, В. Ф. Кротовым для задачи максимизации дальности полета получено решение типа "пунктирной тяги" [14]. Являясь интересным в плане выявления абсолютного оптимума, такое решение для обычных самолетов все же мало пригодно, так как оно не учитывает ограничения по эксплуатации и безопасности, запрещающие частые включения-выключения двигателей. Поэтому, ориентируясь на практическую реализацию, здесь мы рассматриваем только непрерывную экстремаль.

Определить экстремаль $\overline{V}(m)$ из (2.4), если функции $f_1(V,m)$ и $f_2(V,m)$ представлены в виде явных формульных зависимостей от аргументов V и m, несложно. В данном случае частные производные этих функций в соотношении (2.4) можно определить тоже в явном виде, а получающееся явное уравнение $F(V,m)=0$ без проблем решается численно (относительно аргумента V для набора значений аргумента m). Но в общем случае получить явные аналитические формулы для функций $f_1(V,m)$ и $f_2(V,m)$ затруднительно, так как эти функции зависят от заданных таблично характеристик самолета и двигателя. В связи с этим ниже рассматривается приближенный метод определения зависимости $\bar{V}(m)$, не требующий предварительного формирования уравнения для экстремали.

2.4. Приближенное определение экстремали

Как уже отмечалось выше, квазистатическое решение, основанное на замене P на X_a в выражении минимизируемого путевого расхода топлива dm/dL, дает неплохое приближение для экстремали. Поэтому примем в качестве исходного нулевого приближения решение $\bar{V}_0(m)$, получающееся из условия

$$\partial f_1(V,m)/\partial V=0,\ \ \partial^2 f_1(V,m)/\partial V^2<0.$$

Зависимость $\bar{V}_0(m)$ – это квазистационарное решение, от параметра m' не зависящее. Это решение удовлетворяет уравнению (2.4) при отсутствии второго слагаемого, т. е. при условии $\partial f_2(V,m)/\partial m=0$. Очевидно, учет этого слагаемого вносит всего лишь небольшую поправку к $\bar{V}_0(m)$. Поэтому при решении уравнения (2.4) относительно аргумента V примем

$$V=\bar{V}_0(m)+\Delta V(m), \tag{2.5}$$

где ΔV – малая величина. Такой подход позволяет использовать разложения функции $f_1(V,m)$ и $f_2(V,m)$ в степенные ряды по аргументу ΔV. Так как поправка ΔV уже сама по себе мала, то для соблюдения баланса порядков малости порядок разложения функции $f_2(V,m)$ по степеням ΔV может быть взят на единицу меньше порядка разложения функции $f_1(V,m)$. Подставляя разложения в (2.4), получим степенное уравнение относительно ΔV. В первом приближении достаточно ограничиться для $f_1(V,m)$ – квадратичной аппроксимацией, а для $f_2(V,m)$ – линейной. В этом случае для искомого значения ΔV получается линейное уравнение.

Однако надо учесть, что для практики обычно требуются расчеты с вариацией значений параметра m'_c. Этот параметр входит в уравнение (2.4) нелинейно (присутствует в знаменателе функции $f_1(V,m)$), поэтому в получаемой формуле расчета ΔV он будет присутствовать неявным образом, что увеличивает общий объем вычислений. Однако, этого можно избежать, т. е. получить расчетные формулы с явным присутствием параметра m'_c, если в (2.4) вместо функции $f_1(V,m)$ использовать обратную ей функцию

$$\varphi_1(V,m) = [f_1(V,m)]^{-1} = c_{e0} X_a / V + m'_c = m'_{P0}(V,m) + m'_c .$$

Здесь, как и ранее, через $m'_{P0}(V,m) = c_{e0} X_a / V$ обозначен путевой расход топлива при полете на квазистационарном режиме. Замена в уравнении (2.4) функции $f_1(V,m)$ на функцию $\varphi_1(V,m)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial \varphi_1(V,m)}{\partial V} - f_3(V,m)\frac{\partial \varphi_1(V,m)}{\partial m} + \varphi_1(V,m)\frac{\partial f_3(V,m)}{\partial m} = 0, \qquad (2.6)$$

или, с учетом $m'_c = \text{const}$:

$$\frac{\partial m'_{P0}(V,m)}{\partial V} - f_3(V,m)\frac{\partial m'_{P0}(V,m)}{\partial m} + [m'_{P0}(V,m) + m'_c]\frac{\partial f_3(V,m)}{\partial m} = 0 . \qquad (2.6')$$

В этом уравнении параметр m'_c присутствует уже линейным образом. Основная часть решения уравнения, т.е. приближение $\overline{V}_0(m)$, определяется первым слагаемым, поскольку это решение удовлетворяет условию $\partial m'_{P0}(V,m) / \partial V = 0$. Поэтому при использовании подстановки (2.5) имеет смысл переписать (2.6′) в виде

$$\frac{\partial m'_{P0}(\overline{V}_0 + \Delta V, m)}{\partial \Delta V} = \left\{ f_3(\overline{V}_0 + \Delta V, m)\frac{\partial m'_{P0}(\overline{V}_0 + \Delta V, m)}{\partial m} - \right.$$

$$\left. - [m'_{P0}(\overline{V}_0 + \Delta V, m) + m'_c]\frac{\partial f_3(\overline{V}_0 + \Delta V, m)}{\partial m} \right\}. \qquad (2.6'')$$

Для определения уточняющей поправки ΔV в первом приближении, в уравнении (2.6″) следует использовать следующие аппроксимации.
Для левой части

$$m'_{P0}(\overline{V}_0+\Delta V,m)=m'_{P0}(\overline{V}_0,m)+\frac{1}{2}\Delta V^2\frac{\partial^2}{\partial V^2}m'_{P0}(V,m)\,|_{V=\overline{V}_0}\,,$$

$$\frac{\partial m'_{P0}(\overline{V}_0+\Delta V,m)}{\partial \Delta V}=\Delta V\frac{\partial^2}{\partial V^2}m'_{P0}(V,m)\,|_{V=\overline{V}_0}\,.$$

Для слагаемых правой части (с точностью до ΔV)

$$f_3(\overline{V}_0+\Delta V,m)\frac{\partial m'_{P0}(\overline{V}_0+\Delta V,m)}{\partial m}\approx f_3(\overline{V}_0,m)\frac{\partial m'_{P0}(\overline{V}_0,m)}{\partial m}+$$

$$+\Delta V\left[\frac{\partial m'_{P0}(\overline{V}_0,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial f_3(V,m)}{\partial V}\,|_{V=\overline{V}_o}+f_3(\overline{V}_0,m)\frac{\partial^2 m'_{P0}(V,m)}{\partial m\partial V}\,|_{V=\overline{V}_0}\right],$$

$$m'_{P0}(\overline{V}_0+\Delta V,m)\frac{\partial f_3(\overline{V}_0+\Delta V,m)}{\partial m}\approx m'_{P0}(\overline{V}_0,m)\left[\frac{\partial f_3(\overline{V}_0,m)}{\partial m}+\Delta V\frac{\partial^2 f_3(V,m)}{\partial m\partial V}\,|_{V=\overline{V}_0}\right],$$

$$m'_c\frac{\partial f_3(\overline{V}_0+\Delta V,m)}{\partial m}\approx m'_c\left[\frac{\partial f_3(\overline{V}_0,m)}{\partial m}+\Delta V\frac{\partial^2 f_3(V,m)}{\partial m\partial V}\,|_{V=\overline{V}_0}\right].$$

Таким образом, для составления уравнения относительно ΔV нужно знать функции и частные производные

$$f_3(V,m),\ \frac{\partial f_3(V,m)}{\partial m},\ \frac{\partial f_3(V,m)}{\partial V},\ \frac{\partial^2 f_3(V,m)}{\partial m\partial V},$$

$$m'_{P0}(V,m),\ \frac{\partial m'_{P0}(V,m)}{\partial m},\ \frac{\partial^2 m'_{P0}(V,m)}{\partial m\partial V},\ \frac{\partial^2 m'_{P0}(V,m)}{\partial V^2},$$

определяемые вдоль квазистационарного решения $V=\overline{V}_0(m)$. Изначально это зависимости от аргументов V и m. Но поскольку аргумент V заменяется на квазистационарное решение $V=\overline{V}_0(m)$, то получаются зависимости только от аргумента m. Для сохранения компактности последующих формул эта функциональная зависимость будет подразумеваться без использования соответствующих обозначений. Например, производная $\partial f_1(V,m)/\partial V\,|_{V=\overline{V}_0(m)}$

записывается как $\partial f_3/\partial V$ и т.д. С учетом этого уравнение (2.6″) с точностью до ΔV включительно можно записать в следующем виде:

$$\Delta V\frac{\partial^2 m'_{P0}}{\partial V^2}=f_3\frac{\partial m'_{P0}}{\partial m}-m'_{P0}\frac{\partial f_3}{\partial m}-m'_c\frac{\partial f_3}{\partial m}+\Delta V\left(\frac{\partial m'_{P0}}{\partial m}\frac{\partial f_3}{\partial V}+f_3\frac{\partial^2 m'_{P0}}{\partial m\partial V}-m'_{P0}\frac{\partial^2 f_3}{\partial m\partial V}-m'_c\frac{\partial^2 f_3}{\partial m\partial V}\right).$$

Отсюда следует искомая формула для определения поправки:

$$\Delta V=\frac{f_3\dfrac{\partial m'_{P0}}{\partial m}-(m'_{P0}+m'_c)\dfrac{\partial f_3}{\partial m}}{\dfrac{\partial^2 m'_{P0}}{\partial V^2}-\dfrac{\partial m'_{P0}}{\partial m}\dfrac{\partial f_3}{\partial V}-f_3\dfrac{\partial^2 m'_{P0}}{\partial m\partial V}+(m'_{P0}+m'_c)\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial m\partial V}}\ . \qquad (2.7)$$

Параметр m'_c присутствует в формуле явно, так что любые изменение этого параметра легко учесть без пересчета других коэффициентов, что существенно сокращает объем требуемых вычислений. Так как числитель и знаменатель (2.7) зависят от m, то (2.7) определяет зависимость $\Delta V(m)$.

Обычно интенсивность расходования распыляемой массы существенно выше, чем интенсивность расходования массы топлива ($m'_c >> m'_{P0}$). Для этих случаев формулу можно упростить

$$\Delta V=\frac{f_3\dfrac{\partial m'_{P0}}{\partial m}-m'_c\dfrac{\partial f_3}{\partial m}}{\dfrac{\partial^2 m'_{P0}}{\partial V^2}-\dfrac{\partial m'_{P0}}{\partial m}\dfrac{\partial f_3}{\partial V}-f_3\dfrac{\partial^2 m'_{P0}}{\partial m\partial V}+m'_c\dfrac{\partial^2 f_3}{\partial m\partial V}}\ . \qquad (2.7')$$

При отсутствии эмиссии рабочей массы ($m'_c=0$) формула расчета будет иметь такой же вид, только вместо m'_c надо взять m'_{P0}.

Полученные формулы позволяют в принципе определить оптимальную зависимость $V=\overline{V}(m)$. Однако реальные расчеты требуют решения еще некоторых дополнительных вопросов. Основная проблема в том, что в приведенном алгоритме требуется довольно точное вычисление производных первого и второго порядка по двум аргументам в условиях, когда исходные данные по топливо-расходным характеристикам двигателя, а также аэродинамические характеристики самолета могут быть заданы в виде графиков или таблиц. Очевидный способ получения решения – использование полиномиальных или сплайн аппроксимаций для функций. Перспективно также последующее привлечение технологии символьных вычислений. Расчетные результаты, представленные в разделе 2.5 данной главы, были получены с использованием процедуры расчета оптимальной скорости путем определения решения для набора фиксированных значений аргумента m. Для определения частных производных, фигурирующих в формуле (2.7), применялось численное дифференцирование. Чтобы улучшить качество дифференцирования, исходные табличные данные по зависимостям $c_x(c_y)$ и $c_e(V,P)$ предварительно аппроксимировались полиномами.

2.5. Дальнейшие вычисления

В дополнение к экстремали $V = \overline{V}(m)$ интерес для практики представляет также расчет и других зависимостей. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Прежде всего для экстремали $\overline{V}(m)$ следует определить зависимость $\overline{P}(m)$, показывающую значения тяги, необходимой для реализации оптимального режима. Используя уравнение для скорости полета (здесь и далее будем полагать, что скорость полета V равна оптимальному значению $\overline{V}$, т.е. $V = \overline{V}(m)$)

$$m\frac{dV}{dt} = P - X_a,$$

запишем

$$m\frac{dV}{dm}\frac{dm}{dt} = P - X_a.$$

Учитывая в этом уравнении, что скорость изменения массы определяется формулой

$$\frac{dm}{dt} = -c_e P - m_c' V,$$

получаем

$$m\frac{dV}{dm}(c_e P + m_c' V) = X_a - P. \tag{2.8}$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$P = X_a - m\frac{dV}{dm}[c_e(V,P)P + m_c'V] \qquad (2.8')$$

Расчеты показывают, что с уменьшением массы m значение оптимальной скорости $V = \overline{V}(m)$ тоже уменьшается, поэтому в уравнении (2.8) имеет место $dV/dm > 0$. Это позволяет записать

$$\Delta P = P - X_a = -m\frac{dV}{dm}[c_e(V,P)P + m_c'V] < 0\,.$$

Неравенство показывает, что требуемая для реализации оптимального режима тяга меньше значения, необходимого для компенсации аэродинамического сопротивления (т.е. меньше тяги квазиоптимального режима). Оптимальная зависимость $\overline{P}(m)$ определяется путем решения уравнения (2.8′) для последовательности значений параметра m. Уравнение нелинейное, и для получения численного решения можно воспользоваться каким либо итерационным методом. В данном случае вполне применим метод последовательных приближений с началом итераций со значения $P = X_a$.

Теперь воспользуемся вторым уравнением (2.2′) для изменения массы. Преобразуем его к виду:

$$dL = -\frac{dm}{m_c' + c_e(V,P)P/V}\,.$$

Интегрированием получаем выражение для пролетаемого расстояния L при уменьшении массы самолета от начального значения $m(0)$ до конечного значения $m(L)$:

$$L = \int\limits_{m(L)}^{m(0)} \frac{dm}{m_c' + c_e(V,P)P/V}\,.$$

Интеграл вычисляется с использованием оптимальных зависимостей $V = \overline{V}(m)$ и $P = \overline{P}(m)$, причем величина $c_e(V,P)P/V = m_P'(m)$ представляет собой путевой расход топлива оптимального режима в зависимости от текущей массы m.

Однако вместо разового вычисления интеграла удобнее использовать процедуру численного решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dL}{dm} = -\frac{1}{m_c' + c_e(V, P)P/V} \tag{2.9}$$

с начальным условием $m = m(0)$, $L = 0$. В этом случае сразу же получается оптимальная зависимость $L = \overline{L}(m)$ для последовательности значений $m \le m(0)$.

Для определения расхода топлива следует учесть, что полная масса складывается из трех составляющих:

$$m = m_0 + m_P + m_c,$$

где m_0 – масса “сухого” самолета, m_P – масса топлива, m_c – масса распыляемого вещества.

В начальный момент распыления

$$m(0) = m_0 + m_P(0) + m_c(0).$$

После пролета расстояния L полная масса самолета уменьшится на величину

$$\Delta m \equiv m(0) - m = m_P(0) - m_P + m_c(0) - m_c = \Delta m_P + \Delta m_c.$$

Здесь $\Delta m_P = m_P(0) - m_P$ – масса израсходованного топлива и $\Delta m_c = m_c(0) - m_c$ – масса израсходованного распыляемого вещества. Поскольку $\Delta m_c = m_c' L$, то можно записать

$$m(0) - m = \Delta m_P + m_c' \overline{L}(m),$$

откуда следует

$$\Delta m_P = m(0) - m - m_c' \overline{L}(m). \tag{2.10}$$

При таком порядке вычислений получается зависимость расхода топлива от полной массы, $\Delta m_P(m)$. Но наиболее наглядной и удобной для практического использования будет зависимость расхода топлива от пройденного пути L. Чтобы ее получить, надо знать оптимальную зависимость $m = \overline{m}(L)$. На этом этапе можно выполнить обращение найденной ранее зависимости $L = \overline{L}(m)$, или же воспользоваться численным интегрированием дифференциального уравнения

$$\frac{dm}{dL} = -c_e P/V - m_c'$$

с начальным условием $L = 0$, $m = m(0)$.

После определения зависимости $m = \overline{m}(L)$, затраты топлива для полета на расстояние L несложно вычислить по формуле (2.10), в которой переменная m заменяется на зависимость $\overline{m}(L)$, а зависимость $\overline{L}(m)$ – на переменную L.

2.6. Пример численных расчетов

Для демонстрации эффективности предложенного решения нами рассмотрен численный пример с использованием данных по сельскохозяйственному самолету [12]. Суммарная площадь двух крыльев $S = 67.2$ м^2, минимальный и максимальный вес самолета – $G_{\min}$=3600 кг и $G_{\max}$=5800 кг. Графики для поляры планера и для топливо-расходных характеристик двигателя по данным [12] приведены на рис. 2.1 (см. раздел 2.1). Максимальная тяга $P_{\max}$ используемого турбореактивного двигателя довольно высокая – на режиме взлета она составляет 1500 кгс. Но у двигатели такого класса большой удельный расход топлива на малых скоростях, на которых производятся воздушные работы типа АХР. Как видно из приведенного на рис. 2.1 графика поляры, минимальное значение коэффициента c_x составляет величину 0.045, по сути в два раза большую, чем у обычной конструкции. Указанные факторы являлись основными причинами повышенного расхода топлива этого самолета при выполнении воздушных работ. Выполненные расчеты показывают, что полет на оптимальном режиме, задаваемом экстремалью $V = \overline{V}(m)$, обеспечивает снижение расхода топлива, которое становится довольно значимым, если распыляемое вещество расходуется интенсивно. Рассмотрим полученные результаты подробнее.

На рис. 2.3 приведены расчетные графики экстремальных зависимостей $V = \overline{V}(m)$ для значений путевого расхода распыляемого вещества m'_c=0.05; 0.10; 0.15 кг/м. При ширине захвата 40 м (ширина обрабатываемой полосы в одном пролете) это эквивалентно нормам расхода по площади соответственно 12.5, 25 и 37.5 кг/га, что достаточно типично для того времени, когда этот самолет [12] эксплуатировался.

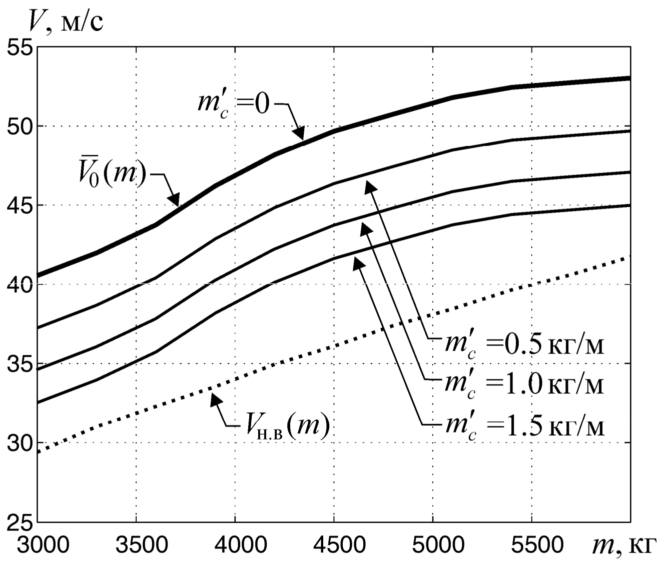


Рис. 2.3. Экстремальные зависимости $\bar{V}(m)$

На этом же рисунке приводятся графики зависимостей для квазиоптимальной скорости $V = \bar{V}_0(m)$ и наивыгоднейшей скорости $V = V_{\text{Н.В}}(m)$. Последняя соответствует полету с минимальным значением аэродинамического сопротивления X_a (по сути с максимальным аэродинамическим качеством) [23]. Зависимость $V_{\text{Н.В}}(m)$ приведена здесь не только для сравнения, но и в качестве границы, отделяющей первые режимы полета от вторых, пилотирование на которых небезопасно из-за неустойчивости самолета по скорости (если речь идет о ручном пилотировании без автомата тяги). Поведение графиков показывает, что для одной и той же массы самолета m оптимальные скорости $\bar{V}$ меньше квазиоптимального значения $\bar{V}_0$. Если распыление не выполняется ($m_c' = 0$), то это отличие очень мало (приведенные графики $\bar{V}(m)$ и $\bar{V}_0(m)$ почти сливаются). Но в случаях с распылением отличие уже заметное. Отклонение графиков тем больше, чем больше параметр расхода m_c'. Необходимо отметить, что с ростом m_c' графики экстремали $\bar{V}(m)$ приближаются к графику $V_{\text{Н.В}}(m)$, но остаются выше него. Т.е. для экстремали соблюдается условие $\bar{V}(m) > V_{\text{Н.В}}(m)$ и, таким образом, экстремаль обеспечивает полет на первых режимах. Для реализации оптимального режима заведомо выполняется $P(m) < P_{\max}$ и проблема недостатка тяги не возникает.

На рис. 2.4 приведены графики расхода топлива m_P, а также графики абсолютной и относительной величин сэкономленного топлива Δm_P и εm_P в зависимости от пролетаемой дистанции L.

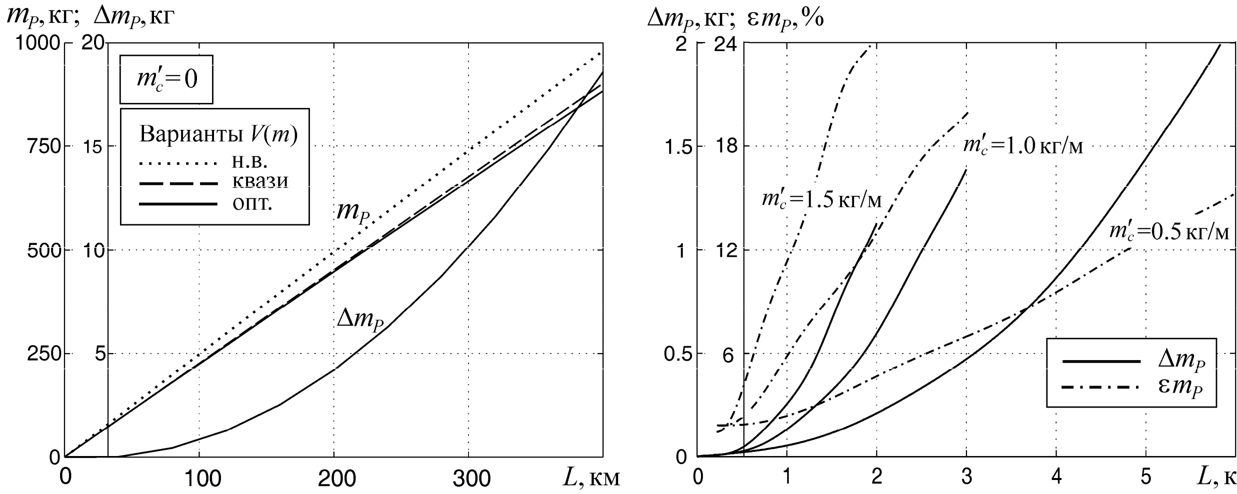


Рис. 2.4. Расход топлива по дистанции и сравнительная экономичность оптимального режима.

Расчеты выполнены для значения начальной массы $m(0) = 6000$ кг. Экономия топлива здесь определяется как величина снижения расхода топлива оптимального режима полета в сравнении с расходом топлива, которое требуется для квазиоптимального режима полета:

$$\Delta m_P = m_{P0} - m_P , \quad \varepsilon m_P = \Delta m_P / m_{P0} \times 100\% ,$$

где m_{P0} - расход топлива для квазиоптимального режима $\overline{V}_0(m)$. Графики в левой части рис. 2.4 иллюстрируют эффективность оптимального режима при отсутствии эмиссии рабочей массы, а в правой части – с эмиссией рабочей массы. Следует обратить внимание, что графики с эмиссией рабочей массы приведены для более коротких дистанций полета, поскольку из-за дополнительной загрузки запас топлива на однократный полет сокращается. В соответствии с полученными расчетными данными для пролета предельной дистанции L=400 км без распыления на квазиоптимальном режиме требуется 780 кг топлива, а на оптимальном режиме всего лишь на 2 кг меньше, т.е. выигрыш очень небольшой. Но в случае полета с эмиссией массы экономия топлива от использования оптимального режима уже более заметна. Характерно, что с возрастанием пролетаемой дистанции относительная экономичность оптимального режима в сопоставлении с квазиоптимальным режимом возрастает, и при больших нормах распыления может достигать порядка 20% и больше. Разумеется, при интенсивной эмиссии запас рабочего вещества уменьшается довольно быстро, соответственно этому длительность полета от взлета до посадки заметно сокращается, поскольку для продолжения воздушной работы требуется пополнение бортовых емкостей рабочего вещества.

2.7. Выводы по главе

В данной главе дано решение задачи минимизации расхода топлива для самолета на участках горизонтального полёта. Метод решения вариационной задачи учитывает изменение массы самолета в полете и основывается на предположении о малости отклонения строго оптимального режима от квазистационарного (квазиоптимального) приближения, использующего предположение о равенстве тяги силовой установки и аэродинамического сопротивления самолета.

Для решения поставленной вариационной задачи предложен метод определения экстремали, основанный на уточнении приближенного квазистационарного решения, получаемого минимизацией километрового расхода топлива при равенстве тяги двигателя аэродинамическому сопротивлению самолета. Так как отклонения точного оптимального решения от квазистационарного приближения невелики, то без заметной потери точности оказывается возможным использовать технологию линеаризации некоторых нелинейных зависимостей, главной из которых в рассматриваемой задаче является зависимость удельного расхода топлива от скорости полета и тяги двигателя.

В рамках принятого подхода минимизируемый функционал оказывается вырожденным, что позволяет свести поставленную вариационную задачу к определению экстремали, не зависящей от граничных условий. Экстремаль в виде оптимальной скорости полета в зависимости от текущей массы самолета определяется путем расчета уточняющих поправок к квазистационарному приближению. Наиболее сложными расчетными элементами предложенной вычислительной процедуры являются частные производные первого и второго порядка для некоторых функций от скорости и массы самолета.

Расчеты с использованием характеристик сельскохозяйственного самолета с ТРД [12] показывают, что уточнение простого квазистационарного решения с целью получения более глубокого минимума по расходу топлива может быть вполне целесообразным, и с ростом интенсивности эмиссии рабочего вещества становится все более выгодным.

3. Оптимизация маневров самолёта

В данном разделе рассматриваются задача планирования траектории движения самолёта и задачи оптимизации маневров самолета, которые могут требоваться при выполнении воздушной работы. Конкретно рассмотрены маневры набора высоты в вертикальной плоскости, а также маневры разворота (плоский и пространственный), необходимые для смены курса полета в производственном процессе.

3-А. Решения задач динамики полёта на основе решения обратных задач

Вначале рассматривается теоретическая основа решения обратных задач, затем ставится задача формирования траектории движения самолёта при выполнении пространственного манёвра. Для решения этой задачи используются два варианта: простое планирование траектории и вариант прямого вариационного метода, предложенный Тараненком [28].

3.1. Краевая задача планирования траектории движения самолёта

Одной из основных задач динамики полёта является определение траектории и управлений, обеспечивающих перевод самолёта из заданной начальной точки в заданную конечную точку в пространстве. По сути это краевая задача. К настоящему времени разработано много методов решения таких задач. Среди них хорошо известны методы пристрелки, конечных разностей, конечных элементов, метод Галёркина-Ритца, методы сведения к интегральным уравнениям Фредгольма и др.

Задача планирования (формирования) траектории движения самолёта ставится следующим образом. Предполагается, что заданы начальное состояние $\mathbf{x}_0 = [V_0\ \ \Theta_0\ \ \Psi_0\ \ x_0\ \ y_0\ \ z_0]^{\mathrm{T}}$ и конечное состояние $\mathbf{x}_\mathrm{f} = [V_\mathrm{f}\ \ \Theta_\mathrm{f}\ \ \Psi_\mathrm{f}\ \ x_\mathrm{f}\ \ y_\mathrm{f}\ \ z_\mathrm{f}]^{\mathrm{T}}$ самолёта, а также начальное и конечное время маневра t_0 , t_f. Еще могут быть заданны начальный и конечный векторы управления $\mathbf{u}_0=[n_{xa0}\ \ n_{ya0}\ \ \gamma_0]^T$, $\mathbf{u}_f=[n_{xaf}\ \ n_{yaf}\ \ \gamma_f]^T$. Требуется построить траекторию полёта и управление, удовлетворяющие указанным краевым условиям. Эту задачу также можно рассматривать как терминальную или как задачу управлением конечным состоянием.

Терминальные задачи определения траектории и управления переводом самолёта из одной точки пространства в другую ставились многократно и решались различными методами.

Например, в [19] рассмотрены задачи конечного управления и предложен простой метод синтеза управлений с обратной связью без особенностей в конечной точке, позволяющий накладывать условия на некоторые или на все фазовые координаты, Также рассмотрен метод стандартных коэффициентов, с помощью которого можно синтезировать линейные системы с заданным качеством переходных процессов.

В [20, 21, 22] рассмотрены задачи планирования (формирования) траектории путем представления траектории движения летательного аппарата в виде полиномов по аргументу времени t [20, 21] или энергии E [22]. Исходными данными являются координаты, скорости и перегрузки самолёта в начальный и конечный моменты времени. Соответствующие этим траекториям функции управления представляют собой программные зависимости от времени t или энергии E.

Наиболее упрощённый подход к решению задачи планирования траектории предполагает отказ от учета ограничений на переменные управления и состояния, а также отказ от выполнения оптимизации по какому либо критерию (по времени, по расходу топлива, и др.). Искомые зависимости для траекторных переменных параметризуются с использованием каких либо базисных функций (часто в виде полиномов) и, таким образом, представляются в явном формульном виде. Неизвестные коэффициенты этих зависимостей определяются исходя из краевых условий. Формулы для определения коэффициентов могут быть достаточно просты, что удобно для расчетов в реальном времени. Однако, без учета ограничений, сгенерированная траектория легко может оказаться физически нереализуемой [112]. Для полетов на малых высотах это очень небезопасно.

Таким образом, для реального планирования траектории ограничения на фазовые переменные и на управляющие функции необходимо обязательно учитывать. Чтобы обеспечить эффективность маневра в каком либо смысле, в задачу можно дополнительно ввести соответствующий критерий оптимальности. Вообще говоря, в этом случае задачу оптимизации маневра можно было бы решать с использованием обычных (классических) методов теории оптимального управления. Например, с помощью принципа максимума Понтрягина, динамического программирования Беллмана, которые позволяют получать решение с разрывами и ограничениями на переменные управления. Однако для сложных краевых задач динамики полёта с ограничениями на переменные состояния и управления получить оптимальное решение такими методами очень сложно, если вообще возможно. Какие либо рекомендации, ведущие к успешному и надежному получению решения, в общем случае отсутствуют [29]. Такие затруднения с практическим применением классических методов оптимального управления могут быть преодолены с помощью прямых методов решения вариационных задач. Это является следствием того, что в прямых методах неизвестными являются не функции, а параметры (коэффициенты). Оптимизация критерия качества по параметрам осуществляется с помощью нелинейного программирования.

3.1.1. Уравнения движения и обратная задача

Одним из направлений, широко применяемым в последнее время к решению различных задач управления, является метод решения на основе концепции обратной задачи динамики. Разработка концепции и многочисленные применения ее для синтеза управления приводятся, в частности, в работах Крутько П.Д. [59, 60] и ряда других исследователей. Чтобы использовать техники решения обратных задач, системе нужно иметь плоскостность [101,102]. При рассмотрении задачи планирования траектории маневра достаточно рассмотреть движение только центра масс самолета. Движения центра масс самолета в пространстве описывается следующей системой уравнений [28]:

$$\begin{cases} \dot{V} = g\left(n_{xa} - \sin\Theta\right) \\ \dot{\Theta} = g\left(n_{ya}\cos\gamma - \cos\Theta\right)/V \\ \dot{\Psi} = -gn_{ya}\sin\gamma/\left(V\cos\Theta\right) \\ \dot{x} = V\cos\Theta\cos\Psi \\ \dot{y} = V\sin\Theta \\ \dot{z} = -V\cos\Theta\sin\Psi \end{cases} \tag{3.1}$$

$$n_{xa} = \frac{P\cos\alpha - X_a}{mg} \qquad n_{ya} = \frac{P\sin\alpha + Y_a}{mg} \tag{3.2}$$

Здесь x, y, z – координаты центра масс самолёта в нормальной земной системе координат, V – скорость полёта, Θ – угол наклона траектории, Ψ – угол курса, α – угол атаки, γ – угол крена, P – тяга двигателя, X_a – аэродинамическое сопротивление, Y_a – аэродинамическая подъемная сила, m – масса самолета, g – ускорение свободного падения, n_{xa} - продольная перегрузка и n_{ya} - поперечная перегрузка (в поточных осях координат). Аэродинамические силы X_a и Y_a зависят от скорости полета V и от плотности атмосферы ρ на высоте полета,

$$X_a = c_x\rho V^2/2, \quad Y_a = c_y\rho V^2/2,$$

где $c_x = c_x(\alpha)$ и $c_y = c_y(\alpha)$ - аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, величины которых зависят от угла атаки α (угол между продольной осью самолета и вектором скорости полета).

В качестве управляющих переменных в (3.1) принимаются перегрузки n_{xa}, n_{ya} и угол крена γ. Пусть координаты траектории движения самолёта являются функциями от времени $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Непосредственно из (3.1) следует:

$$\sin\Theta = \frac{\dot y}{V},\ \cos\Theta = \frac{\sqrt{\dot x^2 + \dot z^2}}{V},\ \sin\Psi = -\frac{\dot z}{\sqrt{\dot x^2 + \dot z^2}},\ \cos\Psi = \frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2 + \dot z^2}}, \tag{3.3}$$
$$V = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}.$$

С помощью дифференцирования этих соотношений находим

$$\dot\Theta = \frac{\dot V \ddot y - V \dot y}{V^2 \cos\Theta},\quad \dot\Psi = \frac{(\dot x \ddot z - \dot z \ddot x)\cos^2\Psi}{\dot x^2},\quad \dot V = \frac{\dot x \ddot x + \dot y \ddot y + \dot z \ddot z}{V}. \tag{3.4}$$

Непосредственно из (3.1) нетрудно также получить выражения для определения перегрузок и угла крена

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\Psi\cos\Theta}{\dot\Theta + g\cos\Theta / V},\quad n_{xa} = \sin\Theta + \frac{\dot V}{g},\quad n_{ya} = \frac{V\dot\Theta + g\cos\Theta}{g\cos\gamma}. \tag{3.5}$$

С другой стороны, дифференцируя три последних уравнения системы (3.1), получаем с учетом первых трех уравнений этой системы следующие соотношения:

$$\begin{cases} \ddot x = n_{xa} g\cos\Theta\cos\Psi - n_{ya} g\cos\gamma\sin\Theta\cos\Psi + n_{ya} g\sin\gamma\sin\Psi \\ \ddot y = -g + n_{xa} g\sin\Theta + n_{ya} g\cos\gamma\cos\Theta \\ \ddot z = -n_{xa} g\cos\Theta\sin\Psi + n_{ya} g\cos\gamma\sin\Theta\sin\Psi + n_{ya} g\sin\gamma\cos\Psi \end{cases} \tag{3.6}$$

Этот результат позволяет записать [20, 21]:

$$\begin{aligned} n_{xa} &= \frac{(\ddot y + g)\sin\Theta + (\ddot x\cos\Psi - \ddot z\sin\Psi)\cos\Theta}{g}, \\ n_{ya} &= \frac{(\ddot y + g)\cos\Theta - (\ddot x\cos\Psi - \ddot z\sin\Psi)\sin\Theta}{g\cos\gamma}, \\ \gamma &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\ddot x\sin\Psi + \ddot z\cos\Psi}{(\ddot y + g)\cos\Theta - (\ddot x\cos\Psi - \ddot z\sin\Psi)\sin\Theta}\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Тягу двигателя и угол атаки можно определить по соотношениям (3.2). Из (3.4), (3.7) вместе с формулами (3.3) следует, что все переменные состояний (V, Θ, Ψ) и переменные управления (n_{xa}, n_{ya}, γ) могут быть представлены в виде функции x(t), y(t), z(t) и их производных по времени. Система (3.1) имеет плоскостность [101, 102, Приложение 3] и можно использовать техники решения обратных задач.

Для решения обратных задач существует множество разнообразных методов. Рассмотрим решение задачи планирования траектории двумя методами. В первом случае используется простой метод планирования траектории без учета ограничений и оптимизации. Во втором случае рассматривается применение более сложного прямого вариационного метода, который учитывает соблюдение ограничений и оптимизацию маневра по критерию быстродействия.

3.1.2. Простой метод формирования траектории маневра

При рассмотрении траектории $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ физическое время t заменим на относительное время τ в соответствии с формулой преобразования

$$\tau = \frac{t - t_0}{t_f - t_0} = \frac{t - t_0}{\Delta}. \tag{3.8}$$

Здесь $\Delta = t_f - t_0$, так что $\tau = 0$ при $t = t_0$ и $\tau = 1$ при $t = t_f$. В результате должны получиться зависимости

$$x(t(\tau)) = P_x(\tau),\ y(t(\tau)) = P_y(\tau),\ z(t(\tau)) = P_z(\tau).$$

Процедура планирования траектории предполагает задание функций $P_x(\tau)$, $P_y(\tau)$, $P_z(\tau)$ в виде параметризованных зависимостей с использованием базисных функций. Функции $P_x(\tau)$, $P_y(\tau)$, $P_z(\tau)$ имеют следующие виды:

$$P_x(\tau) = \sum_{i=1}^{6} k_i \varphi_{xi}(\tau), \qquad P_y(\tau) = \sum_{i=1}^{6} h_i \varphi_{yi}(\tau), \qquad P_z(\tau) = \sum_{i=1}^{6} w_i \varphi_{zi}(\tau), \tag{3.9}$$

где k_i, h_i, w_i – коэффициенты, а $\varphi_{xi}(\tau), \varphi_{yi}(\tau), \varphi_{zi}(\tau)$, $i = 1,\ldots,6$ – базисные функции, обладающие свойством линейной независимости. Для упрощения вычислений структура базисных функций принимается достаточно простой, требуется лишь, чтобы функции $P_x(\tau)$, $P_y(\tau)$, $P_z(\tau)$ были непрерывными и, как минимум, дважды дифференцируемы. Принято использовать базисные функции [20, 21]:

$$\varphi_{x1}(\tau) = 1,\ \varphi_{x2}(\tau) = \tau,\ \varphi_{x3}(\tau) = \tau^2,\ \varphi_{x4}(\tau) = \tau^3,\ \varphi_{x5}(\tau) = \tau^4,\ \varphi_{x6}(\tau) = \tau^5. \tag{3.9 а}$$

Могут применяться другие варианты, например:

$$\varphi_{x1}(\tau)=1,\ \varphi_{x2}(\tau)=\tau,\ \varphi_{x3}(\tau)=\tau^2,\ \varphi_{x4}(\tau)=\tau^3,\\ \varphi_{x5}(\tau)=\sin(2\pi\tau),\ \varphi_{x6}(\tau)=\cos(2\pi\tau). \qquad (3.9\ \mathrm{b})$$

Дифференцируя зависимости (3.9) по τ , получим производные

$$P'_x(\tau)=\sum_{i=1}^{6}k_i\varphi'_{xi}(\tau),\quad P'_y(\tau)=\sum_{i=1}^{6}h_i\varphi'_{yi}(\tau),\quad P'_z(\tau)=\sum_{i=1}^{6}w_i\varphi'_{zi}(\tau),$$

$$P''_x(\tau)=\sum_{i=1}^{6}k_i\varphi''_{xi}(\tau),\quad P''_y(\tau)=\sum_{i=1}^{6}h_i\varphi''_{yi}(\tau),\quad P''_z(\tau)=\sum_{i=1}^{6}w_i\varphi''_{zi}(\tau).$$

Выражения $P_x(\tau)$, $P_y(\tau)$, $P_z(\tau)$ и их производные должны удовлетворять заданным граничным условиям:

$$P_x(0)=x(t_0)=x_0 \qquad P_y(0)=y(t_0)=y_0 \qquad P_z(0)=z(t_0)=z_0$$
$$P_x(1)=x(t_f)=x_f \qquad P_y(1)=y(t_f)=y_f \qquad P_z(1)=z(t_f)=z_f$$

$$P'_x(0)=\dot{x}(t_0)\Delta \qquad P'_y(0)=\dot{y}(t_0)\Delta \qquad P'_z(0)=\dot{z}(t_0)\Delta$$
$$P'_x(1)=\dot{x}(t_f)\Delta \qquad P'_y(1)=\dot{y}(t_f)\Delta \qquad P'_z(1)=\dot{z}(t_f)\Delta$$

$$P''_x(0)=\ddot{x}(t_0)\Delta^2 \qquad P''_y(0)=\ddot{y}(t_0)\Delta^2 \qquad P''_z(0)=\ddot{z}(t_0)\Delta^2$$
$$P''_x(1)=\ddot{x}(t_f)\Delta^2 \qquad P''_y(1)=\ddot{y}(t_f)\Delta^2 \qquad P''_z(1)=\ddot{z}(t_f)\Delta^2$$

На основании этих соотношений составим три системы уравнений:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{6}k_i\varphi_{xi}(0)=x_0\\ \sum_{i=1}^{6}k_i\varphi'_{xi}(0)=\dot{x}(t_0)\Delta\\ \sum_{i=1}^{6}k_i\varphi''_{xi}(0)=\ddot{x}(t_0)\Delta^2\\ \sum_{i=1}^{6}k_i\varphi_{xi}(1)=x_f\\ \sum_{i=1}^{6}k_i\varphi'_{xi}(1)=\dot{x}(t_f)\Delta\\ \sum_{i=1}^{6}k_i\varphi''_{xi}(1)=\ddot{x}(t_f)\Delta^2\end{cases}\quad \begin{cases}\sum_{i=1}^{6}h_i\varphi_{yi}(0)=y_0\\ \sum_{i=1}^{6}h_i\varphi'_{yi}(0)=\dot{y}(t_0)\Delta\\ \sum_{i=1}^{6}h_i\varphi''_{yi}(0)=\ddot{y}(t_0)\Delta^2\\ \sum_{i=1}^{6}h_i\varphi_{yi}(1)=y_f\\ \sum_{i=1}^{6}h_i\varphi'_{yi}(1)=\dot{y}(t_f)\Delta\\ \sum_{i=1}^{6}h_i\varphi''_{yi}(1)=\ddot{y}(t_f)\Delta^2\end{cases}\quad \begin{cases}\sum_{i=1}^{6}w_i\varphi_{zi}(0)=z_0\\ \sum_{i=1}^{6}w_i\varphi'_{zi}(0)=\dot{z}(t_0)\Delta\\ \sum_{i=1}^{6}w_i\varphi''_{zi}(0)=\ddot{z}(t_0)\Delta^2\\ \sum_{i=1}^{6}w_i\varphi_{zi}(1)=z_f\\ \sum_{i=1}^{6}w_i\varphi'_{zi}(1)=\dot{z}(t_f)\Delta\\ \sum_{i=1}^{6}w_i\varphi''_{zi}(1)=\ddot{z}(t_f)\Delta^2\end{cases} \qquad (3.10)$$

В (3.10) величины x_0, y_0, z_0, x_f, y_f, z_f, Δ, n_{xa0}, n_{ya0}, γ_0, n_{xaf}, n_{yaf}, γ_f, $\varphi_{si}(0)$, $\varphi'_{si}(0)$, $\varphi''_{si}(0)$, $\varphi_{si}(1)$, $\varphi'_{si}(1)$, $\varphi''_{si}(1)$, $s= x, y, z$, i =1,2..6, известны. Значения величин $\dot{x}(t_0)$, $\dot{x}(t_f)$, $\dot{y}(t_0)$, $\dot{y}(t_f)$, $\dot{z}(t_0)$, $\dot{z}(t_f)$ определяются по уравнениям (3.1), а значения $\ddot{x}(t_0), \ddot{x}(t_f), \ddot{y}(t_0), \ddot{y}(t_f), \ddot{z}(t_0), \ddot{z}(t_f)$ – по соотношениям (3.6).

Система (3.10) представляет собой 6×3=18 уравнений относительно 6×3=18 неизвестных коэффициентов (k_1 , k_2,...,k_6), (h_1 , h_2,...,h_6) и (w_1 , w_2,...,w_6). Задача вычисления коэффициентов из системы (3.10) облегчается тем, что эта система разделена на 3 независимые подсистемы.

Получить решение несложно. Например, для первой подсистемы с использованием векторно-матричных обозначений

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_0 & \dot{x}(t_0)\Delta & \ddot{x}(t_0)\Delta^2 & x_f & \dot{x}(t_f)\Delta & \ddot{x}(t_f)\Delta^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varphi_{x1}(0) & \varphi_{x2}(0) & \varphi_{x3}(0) & \varphi_{x4}(0) & \varphi_{x5}(0) & \varphi_{x6}(0) \\ \varphi'_{x1}(0) & \varphi'_{x2}(0) & \varphi'_{x3}(0) & \varphi'_{x4}(0) & \varphi'_{x5}(0) & \varphi'_{x6}(0) \\ \varphi''_{x1}(0) & \varphi''_{x2}(0) & \varphi''_{x3}(0) & \varphi''_{x4}(0) & \varphi''_{x5}(0) & \varphi''_{x6}(0) \\ \varphi_{x1}(1) & \varphi_{x2}(1) & \varphi_{x3}(1) & \varphi_{x4}(1) & \varphi_{x5}(1) & \varphi_{x6}(1) \\ \varphi'_{x1}(1) & \varphi'_{x2}(1) & \varphi'_{x3}(1) & \varphi'_{x4}(1) & \varphi'_{x5}(1) & \varphi'_{x6}(1) \\ \varphi''_{x1}(1) & \varphi''_{x2}(1) & \varphi''_{x3}(1) & \varphi''_{x4}(1) & \varphi''_{x5}(1) & \varphi''_{x6}(1) \end{bmatrix},$$

можно записать $\mathbf{Ak = B}$ и, таким образом, искомая формула вычисления коэффициентов примет вид $\mathbf{k=A^{-1}B}$. Т.к. используемые базисные функции обладают свойством линейной независимости, то матрица $\mathbf{A}$ – не вырождена, следовательно обратная матрица $\mathbf{A^{-1}}$ существует и решение для $\mathbf{k}$ единственно.

Аналогичным образом определяются решения системы (3.10) для остальных коэффициентов (h_1, h_2...h_6) и (w_1 , w_2...w_6).

Следует отметить, что применение разных базисных функций приводит к разным результатам. Правильный выбор базисных функций, учитывающий особенности решаемой задачи, приводит к улучшению качества решения в том смысле, что это решение может быть практически использовано.

На рис. 3.1, 3.2 приведены сравнения между двумя вариантами выбора базисных функций. Графики планирования траектории с базисными функциями (3.9 a) отображены сплошными линиями. Графики планирования траектории с базисными функциями (3.9 b) отображены штриховыми линиями. Для расчётов использованы следующие данные:

Граничные условия:

- начало маневра $t_0 = 0$,

$V_0 = 50$ м/с, $\Theta_0 = 0$ рад, $\Psi_0 = 0$ рад, $x_0 = 0$ м, $y_0 = 50$ м, $z_0 = 0$ м,

$n_{xa0} = 0$, $n_{ya0} = 1$, $\gamma_0 = 0$ рад.

- окончание маневра $t_f = 12$ с,

$V_f = 45$ м/с, $\Theta_f = 0$ рад, $\Psi_f = \pi$ рад, $x_f = 0$ м, $y_f = 70$ м, $z_f = -300$ м,

$n_{xa0} = 0$, $n_{ya0} = 1$, $\gamma_f = 0$ рад.

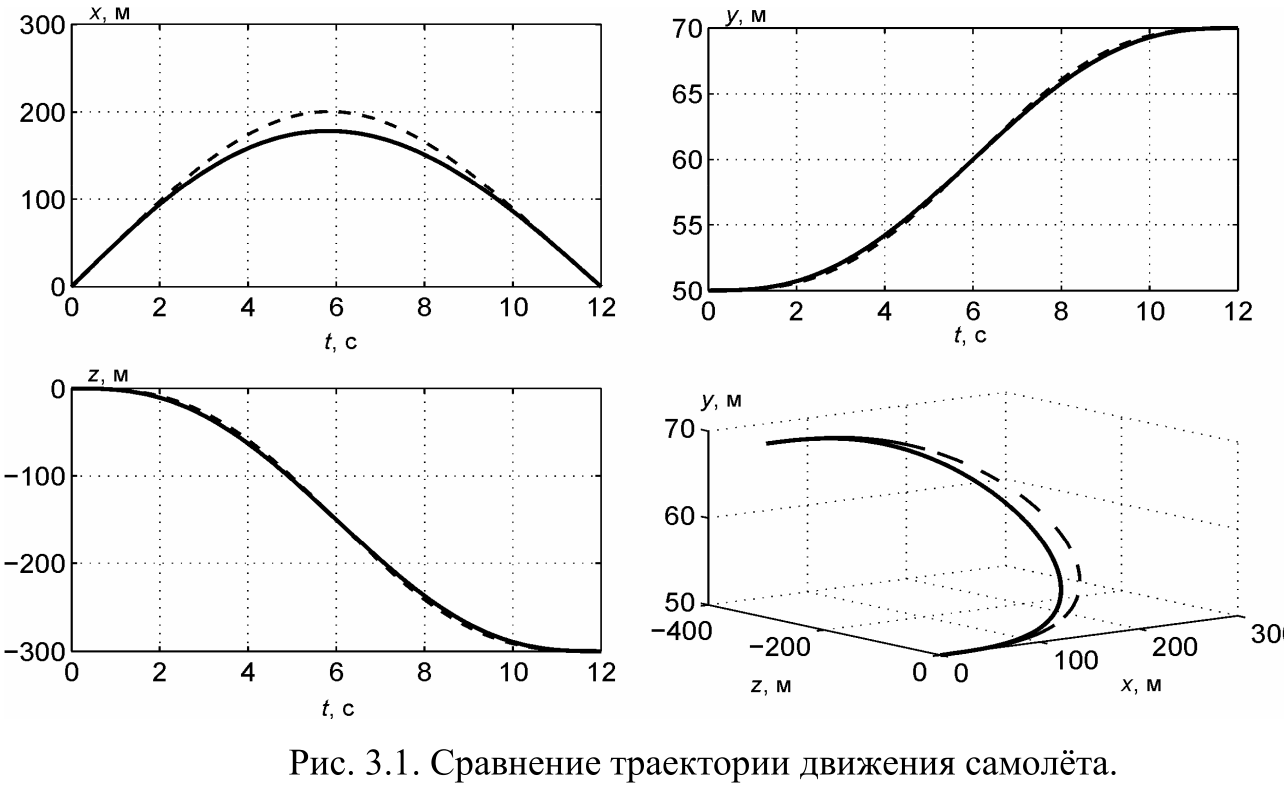


Рис. 3.1. Сравнение траектории движения самолёта.

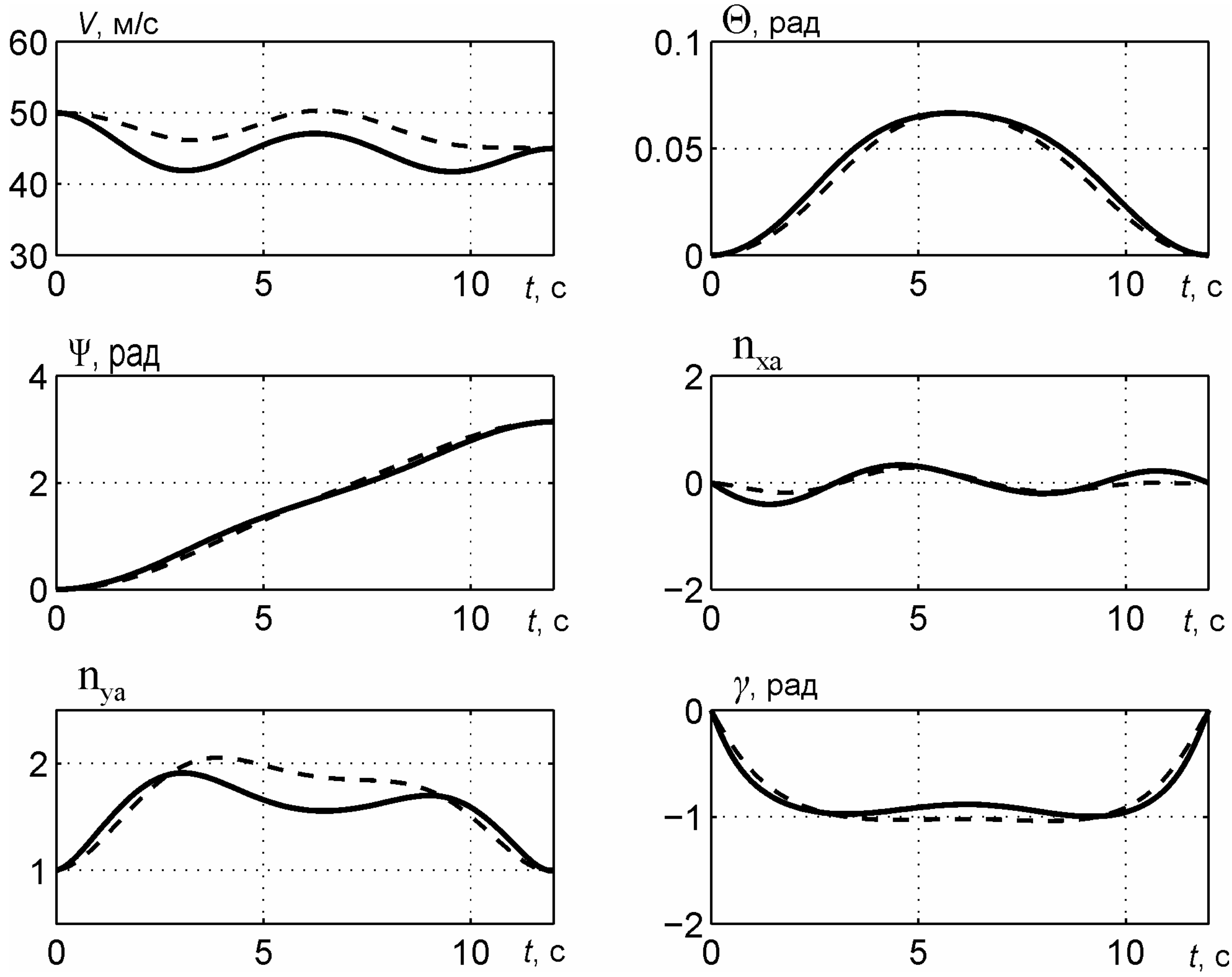


Рис. 3.2. Сравнение переменных управления и состояния.

3.2. Формирование траектории маневра с оптимизацией

В рассмотренном выше простом методе планирования траектории независимым аргументом являлось время или масштабированное время. Существенно, что длительность маневра должна быть задана. Но во многих задачах динамики полёта время может на задаваться. А в задаче быстродействия время маневра является минимизируемым критерием. Если координаты траектории движения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ заданы как функции времени, то скорость и ускорение движения также будут определены как функции временем. Т.е. скорость и ускорение изменяются при изменении координат траектории в процессе движения самолета. В рассмотренном выше простом методе планирования траектории время маневра является фиксированным заданным параметром, поэтому форма траектории полета сильно зависит от конкретного значения этого параметра. Разумеется, можно попытаться величину времени маневра каким либо образом проварьировать и выбрать траекторию, которая больше всего подходит по условиям, например, физической реализуемости.

Однако, в подобных случаях удобнее физическое время заменить на новый аргумент так, чтобы сделать скорость и ускорение движения не зависимыми от формы траектории. В задачах динамики полёта для этой цели может быть использовано преобразование

$$\frac{d\tau}{dt} = V$$

Здесь V - скорость полета, поэтому в данном случае новая независимая переменная τ имеет физический смысл пройденного пути. При этой замене система уравнений (3.1) преобразуется к систему уравнений по переменной τ, так что переменные состояния и их производные становятся функциями от τ:

$x(\tau), y(\tau), z(\tau), x'(\tau), y'(\tau), z'(\tau)\ x''(\tau), y''(\tau), z''(\tau), V(\tau), \Theta(\tau), \Psi(\tau),\ V'(\tau), \Theta'(\tau), \Psi'(\tau)$.

(производные по τ обозначены штрихом сверху).

В [22] предложена замена переменной времени другим параметром - нормированной механической энергией

$$E = H + \frac{V^2}{2g}$$

где *V, H*- скорость и высота самолёта, g – ускорение свободного падения. Но у этого подхода есть определенный недостаток. В общем случае энергия E в процессе маневра может убывать и возрастать, т.е. являться немонотонной функцией вдоль траектории полета. Использование E в качестве нового независимого аргумента оправдано только в тех случаях (или на тех участках маневра), когда по физическому смыслу заведомо известно, что энергия E - монотонная функция времени.

Прямой метод решения вариационных задач известен уже давно, но практическая адаптация его к решению оптимизационных задач динамики полёта была предложена сравнительно недавно в работах В.Т. Тараненка [28, 29]. В этих работах было предложено использовать концепцию обратной задачи динамики для восстановления управлений по известной траектории, а также даны полезные практические рекомендации для параметризации искомых функциональных зависимостей, упрощающие и облегчающие задачу соблюдения граничных условий и ограничений на переменные управления и состояния. Метод Тараненка предполагает замену аргумента физического времени t на некоторый обобщенный аргумент τ в соответствии с уравнением

$$\frac{d\tau}{dt} = \lambda ,$$

где λ – неизвестная функция. Траектория задается соотношениями

$$x(\tau) = x_1(\tau),\ y(\tau) = x_2(\tau),\ z(\tau) = x_3(\tau),\ V(\tau) = x_4(\tau).$$

Здесь функции $x_i(\tau)$, $i = 1 \div 4$, должны быть непрерывными, однозначными и дифференцируемыми на всем интервале значений аргумента τ. Функции $x_i(\tau)$ ищутся в виде комбинаций известных, априорно заданных базисных функций:

$$x_i(\tau) = \varphi_{i0}(\tau) + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \phi_{ij}(\tau),$$

где $\varphi_{i0}(\tau), \phi_{ij}(\tau)$, $i = 1 \div 4$, $j = 1 \div n$, – базисные функции, k_{ij} – неизвестные коэффициенты. Функции $\varphi_{i0}(\tau)$ и $\varphi_{ij}(x)$ выбираются так, чтобы удовлетворять неоднородным и однородным краевым условиям соответственно:

$$\varphi_{i0}(\tau_0) = x_i(\tau_0) = x_{i0}, \quad \varphi_{i0}(\tau_f) = x_i(\tau_f) = x_{if} ,$$

$$\varphi_{ij}(\tau_0) = 0, \quad \varphi_{ij}(\tau_f) = 0.$$

Например, по рекомендациям [28]

$$\varphi_{i0}(\tau) = x_{i0} + \frac{(x_{if} - x_{i0})(\tau - \tau_0)}{(\tau_f - \tau_0)},$$

$$\phi_{ij}(x) = \sin\frac{j\pi(\tau - \tau_0)}{\tau_f - \tau_0} \quad \text{или} \quad \phi_{ij}(x) = (\tau - \tau_0)^j (\tau - \tau_f)^j .$$

Нетрудно видеть, что рекомендуемый выбор базисных функций гарантирует для $x_i(\tau)$ удовлетворение краевых условий при любых значениях параметров k_{ij}. С другой стороны, функции $x_i(\tau)$ зависят от коэффициентов k_{ij} , а следовательно выбором этих коэффициентов можно влиять на траекторию, обеспечивая оптимизацию заданного критерия качества и выполнение ограничений на управления не заботясь о краевых условиях.

Преобразуем систему (3.1), перейдя к новой независимой переменной τ. В результате получим следующую систему уравнений [28]:

$$\begin{cases} V' = g\left(n_{xa} - \sin\Theta\right)/\lambda \\ \Theta' = g\left(n_{ya}\cos\gamma - \cos\Theta\right)/\left(\lambda V\right) \\ \varPsi' = -gn_{ya}\sin\gamma/\left(\lambda V\cos\Theta\right) \\ x' = V\cos\Theta\cos\Psi/\lambda \\ y' = V\sin\Theta/\lambda \\ z' = -V\cos\Theta\sin\Psi/\lambda \\ t' = 1/\lambda \end{cases} \tag{3.11}$$

Действуя так же, как описано в 3.1.1., из уравнений (3.11) нетрудно получить следующие кинематические соотношения:

$$\lambda = \frac{V}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \sin\Theta = \frac{\lambda y'}{V}, \quad \mathrm{tg}\,\Psi = -\frac{z'}{x'},$$

$$\lambda' = \frac{V'\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) - V\left(x'x'' + y'y'' + z'z''\right)}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}},$$

$$\Theta' = \frac{y''\left(x'^2 + z'^2\right) - y'\left(x'x'' + z'z''\right)}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}\cos\Theta},$$

$$\Psi' = -\frac{\cos^2\Psi\left(x'z'' - x''z'\right)}{x'^2}.$$

Для управляющих переменных получаются формулы:

$$\gamma = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\lambda\Psi\cos\Theta}{\lambda\Theta' + g\cos\Theta/V}\right), \quad n_{xa} = \sin\Theta + \frac{\lambda V'}{g}, \quad n_{ya} = \frac{\lambda V\Theta' + g\cos\Theta}{g\cos\gamma}.$$

Приведенные формулы показывают, что все переменные управления и состояния выражаются через *x(τ), y(τ), z(τ), V(τ)* и их производные, но в отличие от формул (3.1) здесь дополнительно присутствует масштабирующая функция λ. Выбор свободных коэффициентов k_{ij} подчиним оптимизации функционала $J(p)$, который зависит от цели задачи (здесь p - вектор коэффициентов k_{ij}). Таким образом, формирование оптимальной траектории, которая удовлетворяет заданным граничным условиям, сводится к задаче нелинейного программирования:

$$\min_{p \in C} J(p) \quad \text{или} \quad \max_{p \in C} J(p), \tag{3.12}$$

где C – область допустимых значений параметров p, обеспечивающая выполнение требуемых ограничений на управления и переменные состояния.

3.3. Примеры решения задач планирования траектории

Рассмотренные выше варианты планирования траектории были проверены численными расчетами для ряда типичных маневров. Результаты вычислений для двух примеров представлены графиками на рисунках 3.3÷3.6. Графики простого планирования траектории (вариант 1) отображены штриховыми линиями, а графики планирования траектории прямым вариационным методом (вариант 2) с оптимизацией по критерию быстродействия отображены сплошными линиями. В обоих случаях краевые условия одинаковые.

Пример 1 (разворот на 180° с набором высоты)

Граничные условия:

- начало маневра $t_0 = 0$,

$V_0 = 35$ м/с, $\Theta_0 = 0$ рад, $\Psi_0 = 0$ рад, $x_0 = 0$ м, $y_0 = 50$ м, $z_0 = 0$ м,

$n_{xa0} = 0$, $n_{ya0} = 1$, $\gamma_0 = 0$ рад.

- окончание маневра $t_f = 14.5$ с,

$x_f = 0$ м, $y_f = 80$ м, $z_f = -270$ м, $V_f = 35$ м/с, $\Theta_f = 0$ рад, $\Psi_f = \pi$ рад,

$n_{xa0} = 0$, $n_{ya0} = 1$, $\gamma_f = 0$ рад.

В расчётах варианта 2 учитываются ограничения на управления и переменные состояния:

$$35 \text{ м/с} \le V \le 80 \text{ м/с}, \quad |\Theta| \le 60°, \quad -90° \le \Psi \le 270°,$$

$$-0.1 \le n_{xa} \le 0.6, \quad -0.1 \le n_{ya} \le 2, \quad |\gamma| \le 60°.$$

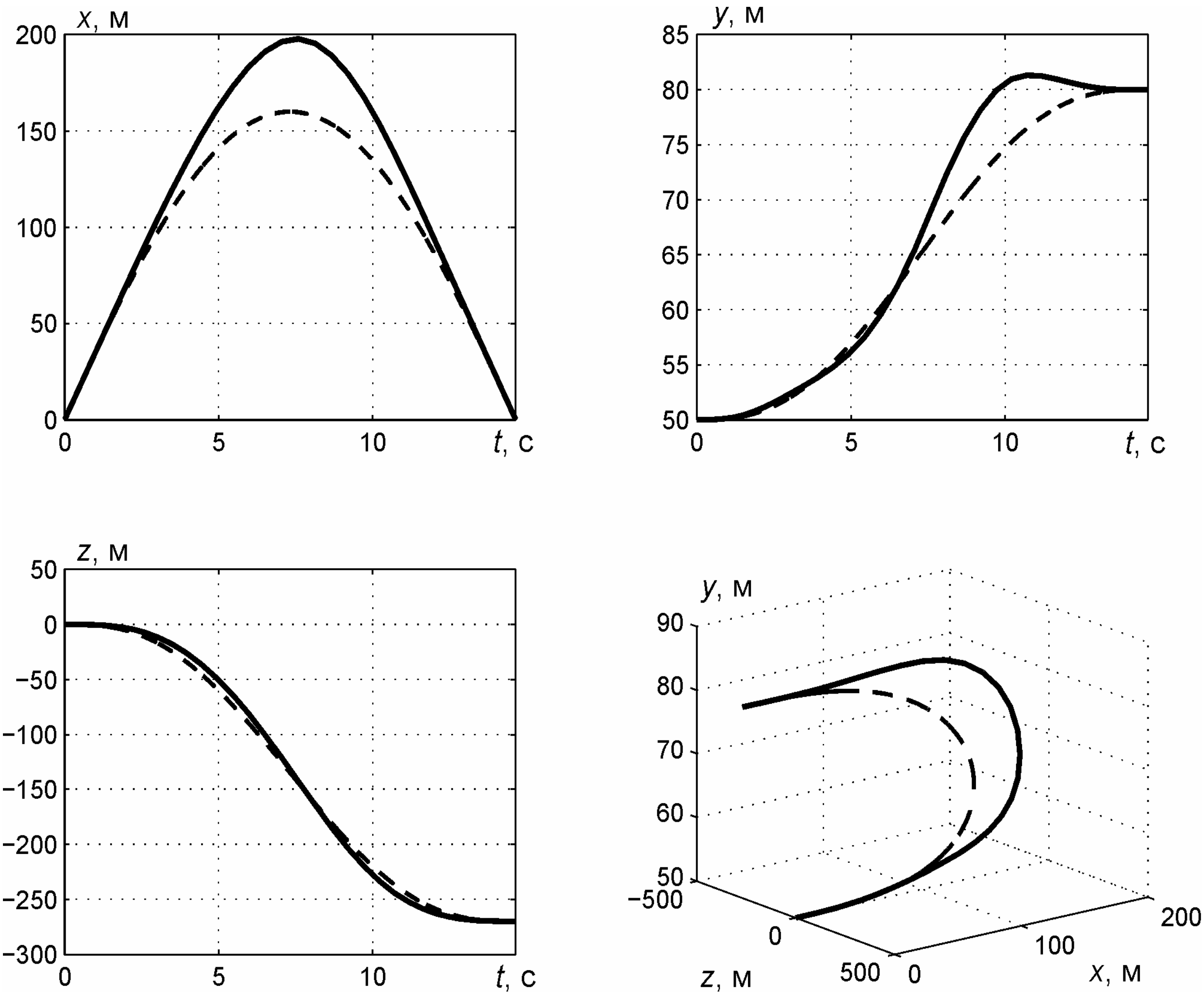


Рис. 3.3. Траектории движения самолёта (Пример 1).

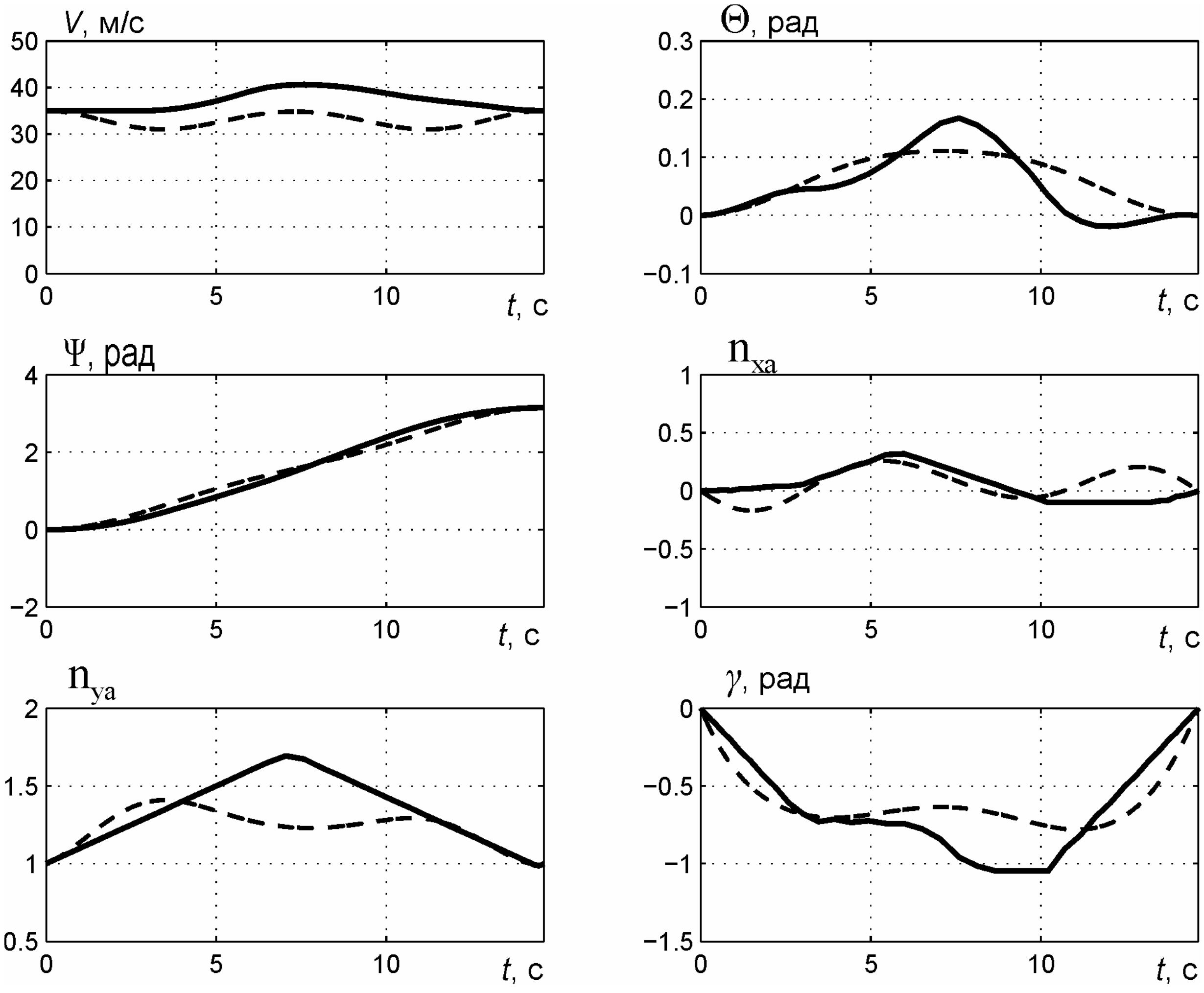


Рис. 3.4. Поведение переменных управления и состояния (Пример 1).

В этом примере разворот происходит с достаточно большим радиусом. Кривизна траектории невелика, поэтому изменения переменных состояния и управления медленны и плавны. Графики показывают, что результаты двух вариантов имеют отличия, но они не слишком большие. Можно сделать вывод, что в данном случае оба варианта дают приемлемые для практики решения.

Пример 2 (разворот на 180° с возвратом на исходную высоту)

Граничные условия:

- начало маневра $t_0 = 0$

$V_0 = 35$ м/с, $\Theta_0 = 0$ рад, $\Psi_0 = 0$ рад, $x_0 = 0$ м, $y_0 = 50$ м, $z_0 = 0$ м,

$n_{xa0} = 0$, $n_{ya0} = 1$, $\gamma_0 = 0$ рад.

- окончание маневра t_f = 22.5 с

V_f = 35 м/с, Θ_f = 0 рад, $\Psi_f = \pi$ рад, x_f = 0 м, y_f = 50 м, z_f = -80 м,

n_{xa0} = 0, n_{ya0} = 1, γ_f = 0 рад.

В расчётах варианта 2 учитываются ограничения на переменные управления и состояния:

35 м/с $\le V \le$ 80 м/с, $|\Theta| \le 60°$, $-90° \le \Psi \le 270°$, $-0.1 \le n_{xa} \le 0.6$, $-0.1 \le n_{ya} \le 2$, $|\gamma| \le 60°$.

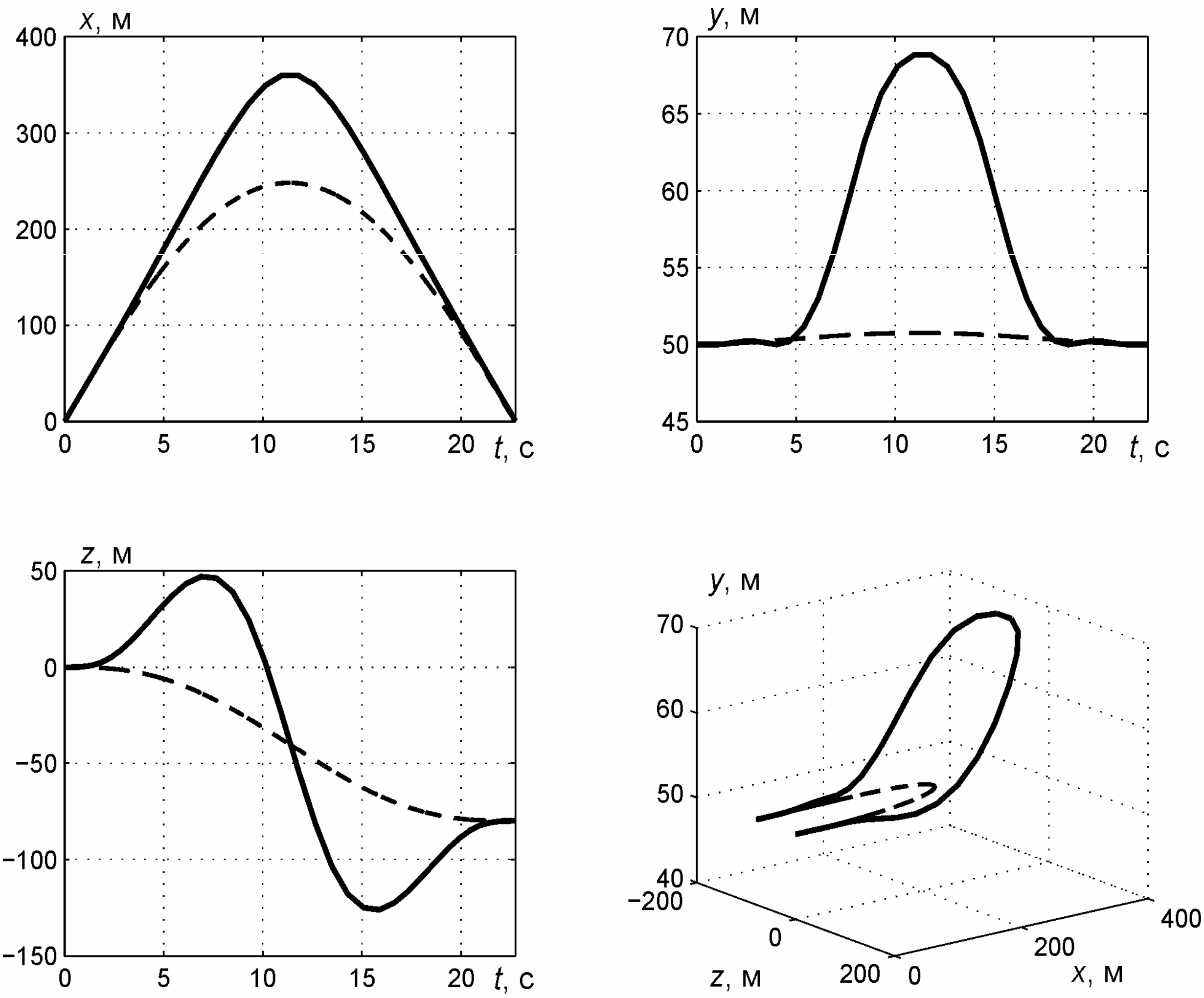


Рис. 3.5. Траектории движения самолёта (Пример 2).

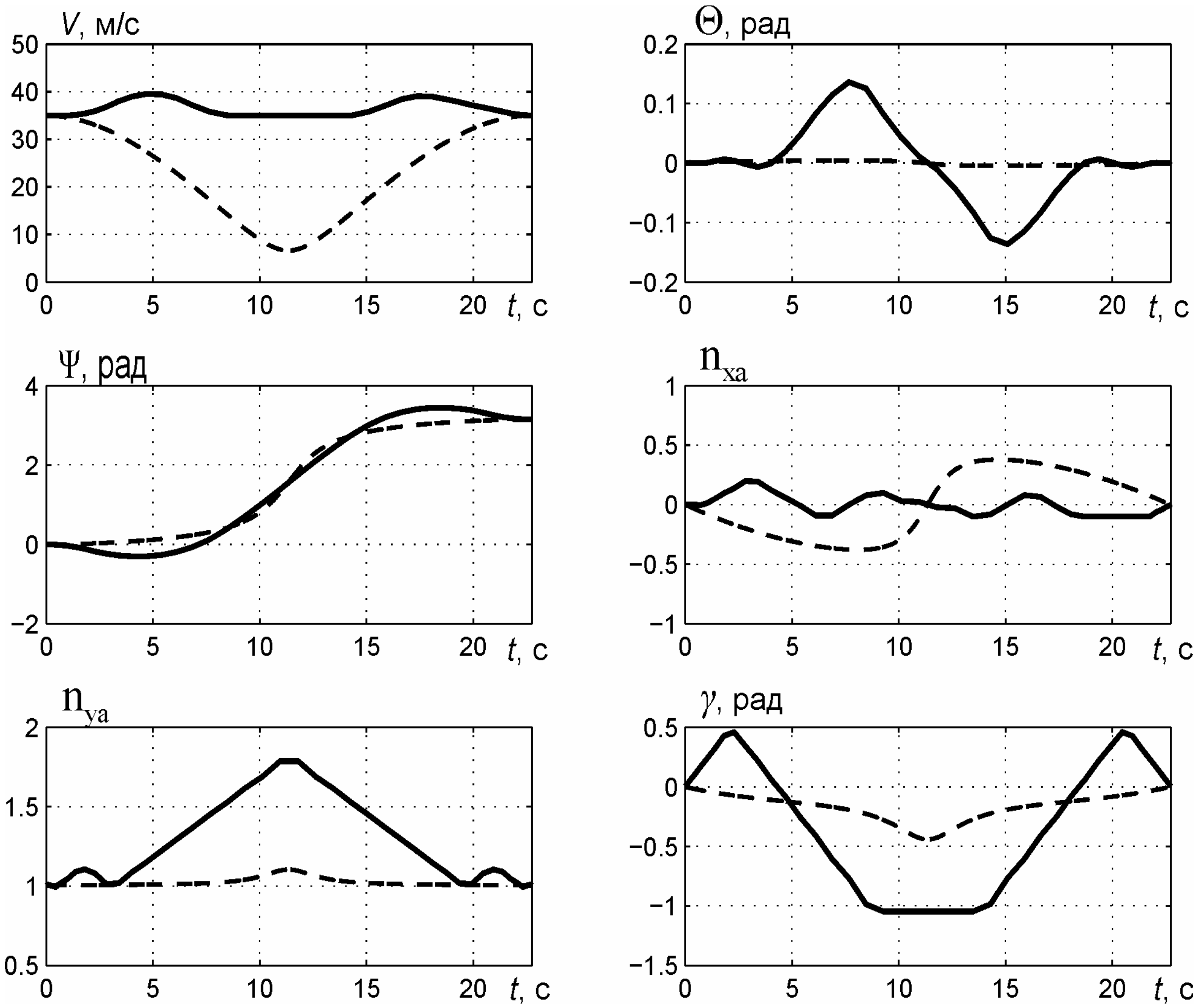


Рис. 3.6. Поведение переменных управления и состояния (Пример 2).

В этом примере вариант 1 дает траекторию разворота с очень малым радиусом. Кривизна траектории велика, поэтому изменения переменных управления и состояния происходили быстрее и резче чем в первом примере. Результаты вариантов 1 и 2 отличаются очень сильно. Анализ поведения зависимостей $V(t)$ и $n_{ya}(t)$ для варианта 1 (рис. 3.6) показывает, что перегрузка n_{ya} сохраняется на уровне ~1 в условиях очень малых скоростей V, что для обычного самолета совершенно нереально. Минимум скорости достигает величины ~7 м/с (на 11-ой секунде), что существенно меньше скорости сваливания и недопустимо по условиям безопасности полета. В окрестности этой точки график зависимости $\Psi(t)$ (рис.3.6) демонстрирует резкое увеличение угла разворота. Но это вполне естественно, т.к. в соответствии с кинематикой движения (см. 3-е уравнение (1)) ситуация $V \to 0$ в условиях $n_{ya} \neq 0$ приводит к получению $\dot{\Psi} \to \infty$. На рис. 3.7

показаны результаты проверки решения варианта 1. После интегрирования систем уравнений движения (3.1) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с переменными управления, вычисленными по формулам (3.7), проведено сравнение между динамикой системы (3.1) и решением варианта 1. Результаты хорошо совпадают, что указывает на согласованность решения варианта 1 с динамикой рассматриваемой системы. Однако, как уже указано выше, расчетная траектория этого варианта не реализуема (обычным самолетом). Неприемлемость варианта 1 обусловлена отсутствием учета ограничений на переменные состояния и управления. А в варианте 2 нужные ограничения учитываются и решение здесь получается реализуемым.

3.4. Выводы раздела 3-А

В данном разделе рассмотрена задача планирования траектории пространственного маневра самолета с заданными граничными условиями. Для получения решения привлечены два разных по сложности метода, использующих концепцию обратной задачи при расчете управляющих переменных. Первый (простой) метод не учитывает ограничения на переменные состояния и управления. Достоинство этого метода - малый объем требуемых вычислений. Из анализа решений для ряда типичных примеров следует, что первый метод может часто приводить к получению нереализуемых траекторий. И несмотря на привлекательность из-за своей простоты, этот метод навряд ли подходит для расчетов в реальном времени на борту самолета (речь идет о летательных аппаратах обычной самолетной схемы). Второй метод представил более надежные результаты благодаря учету ограничений на переменные состояния и управления. Однако алгоритм расчета по этому методу довольно сложен и объем требуемых вычислений оказывается очень большим.

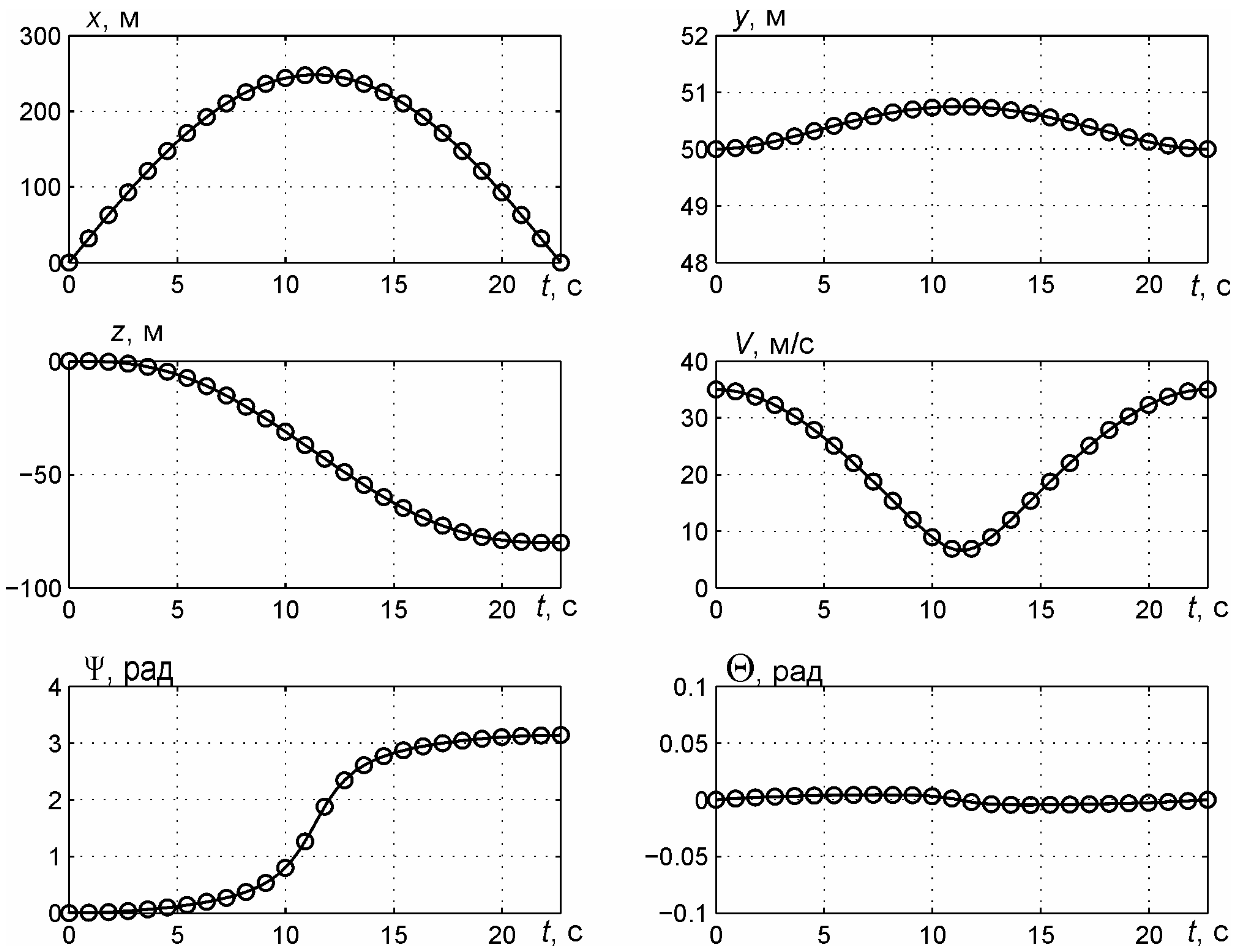


Рис. 3.7. Проверка на согласованность (маркеры “o” – решение задачи планирования траектории, сплошные линии – результат интегрирования).

Приведенные примеры указывают на обязательность ввода в постановку задачи хотя бы основных ограничений на переменные состояния и управления. Для более надежного решения задачи, нужно использовать более сложные методы с более полным учётом ограничений. И в любом случае получаемые решения должны тщательно анализироваться и проверяться с тем, чтобы гарантировать реализуемость и безопасность расчетной траектории маневра.

3-Б. Псевдоспектральный метод в задачах оптимизации маневров

В данном разделе для решения оптимизационной задачи используется псевдоспектральный вариант прямого вариационного метода. Приводятся результаты численного решения задачи применительно к легкому самолету.

3.5. Псевдоспектральный метод решения задач оптимизации

Суть псевдоспектральных методов состоит в аппроксимации непрерывных функций, которыми являются переменные состояния и переменные управления, интерполяционными полиномами с конечным числом узловых точек (точек коллокации). В этих условиях дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы управления превращаются в систему уравнений связи между значениями переменных состояния и управления в узловых точках. В эту систему легко встраиваются граничные условия, которым должно удовлетворять решение вариационной задачи. Дополнительные ограничения в виде равенств и неравенств для управлений и переменных состояния также трансформируются в соответствующие параметрические ограничения. В конечном итоге исходная задача поиска оптимальных функций превращается в задачу поиска оптимальных значений параметров, которая решается численно методами нелинейного программирования.

Существенно, что псевдоспектральные методы обеспечивают получение решения системы дифференциальных уравнений одновременно во всех узлах, а не последовательно через численное интегрирование уравнений. Вследствие этого не возникает проблем с устойчивостью прямого и обратного интегрирований, как это имеет место в методах “пристрелки”, применяемых при решении двухточечной краевой задачи в случае применения традиционных методов теории оптимального управления.

К настоящему времени разработан ряд вариантов псевдоспектрального метода. Названия методов отражают принятые способы задания множеств точек коллокации (получаются из корней полиномов Лежандра и/или линейных комбинаций полиномов Лежандра и их производных). По вычислительным характеристикам эти методы могут отличаться, но получаемые результаты, как правило, достаточно близки. Поэтому в диссертационной работе для решения задач оптимизации маневров самолета рассмотрено использование псевдоспектрального метода Гаусса (ПМГ) [81÷84].

Пусть решается вариационная задача с функционалом в форме Больца:

$$J = S(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t)dt\,. \tag{3.13}$$

Требуется определить векторы управления $u(t)$ и состояния $x(t)$, доставляющие минимум функционалу (3.13) с учетом связей в виде обыкновенных дифференциальных уравнений движения системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), u(t), t)), \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{3.14}$$

Имеются ограничения:

- на переменные управления $\quad u_L \le u(t) \le u_H \qquad t \in [t_0, t_f]$

- на переменные состояния $\quad x_L \le x(t) \le x_H \qquad t \in [t_0, t_f]$

- на начальное и конечное время

$$t_{0L} \le t_0 \le t_{0H}$$

$$t_{fL} \le t_f \le t_{fH}$$

- на левый и правый концы фазовой траектории:

$$e_{0L} \le e_0(x(t_0), t_0) \le e_{0H}$$

$$e_{fL} \le e_f(x(t_f), t_f) \le e_{fH}$$

- на переменные управления и состояния вдоль траектории:

$$h_L \le h(x(t), u(t), t) \le h_H \qquad t \in [t_0, t_f]$$

В записанных выражениях индексы ‘0’ и ‘f’ соответствуют началу и окончанию процесса, а индексы ‘L’ и ‘H’ обозначают ограничения снизу и сверху.

Важным моментом является масштабирование физического времени t и переход к независимой переменной τ с помощью преобразования

$$t = \frac{t_f - t_0}{2}\tau + \frac{t_f + t_0}{2} \quad .$$

В результате интервал $[t_0, t_f]$ изменения исходной переменной t превращается в нормированный интервал [-1,1] для новой переменной τ.

С введением переменной τ функционал (3.13) и уравнения (3.14) принимают вид:

$$J = S(x(\tau_0), x(\tau_f), t_0, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2}\int_{-1}^{1} V(x(\tau), u(\tau), \tau, t_0, t_f)d\tau,$$

$$\dot{x}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} f(x(\tau), u(\tau), \tau, t_0, t_f), \quad \tau \in [-1,1]. \qquad (3.15)$$

Теперь вариационная задача решается при дополнительных ограничениях:

- на переменные управления: $u_L \le u(\tau) \le u_H$, $\tau \in [-1,1]$,
- на переменные состояния: $x_L \le x(\tau) \le x_H$, $\tau \in [-1,1]$,
- на начальное и конечное времена:

$$t_{0L} \le t_0 \le t_{0H},$$

$$t_{fL} \le t_f \le t_{fH},$$

- на левый и правый концы фазовой траектории:

$$e_{0L} \le e_0(x(\tau_0), \tau_0) \le e_{0H},$$

$$e_{fL} \le e_f(x(\tau_f), \tau_f) \le e_{fH},$$

- на переменные управления и состояния вдоль траектории:

$$h_L \le h(x(\tau), u(\tau), \tau) \le h_H, \quad \tau \in [-1,1].$$

Для переменных состояния вводятся аппроксимации с использованием N+1 базисных функций в виде интерполяционных многочленов Лагранжа:

$$x(\tau) \approx X(\tau) = \sum_{i=0}^{N} L_i(\tau)x(\tau_i), \qquad (3.16)$$

где $L_i(\tau) = \prod_{j=0, j\ne i}^{N} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}$.

Аналогичным образом аппроксимируются и управления, однако число базисных функций берется равным N, т.е. на 1 меньше:

$$u(\tau) \approx U(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{L}_i(\tau) u(\tau_i),$$

где $\widetilde{L}_i(\tau) = \prod_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}$.

При вычислении интеграла используются квадратурные формулы Гаусса:

$$\int_{-1}^{1} f(\tau) d\tau \approx \sum_{k=1}^{N} w_k f(\tau_k), \qquad (3.17)$$

где коэффициенты w_k и τ_k (k = 1,2 ... N) подбираются так, чтобы формула была точной для всех многочленов наивысшей возможной степени N. Значения узлов по τ являются корнями полинома Лежандра степени N:

$$P_N(\tau) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{d\tau^N} \left[(\tau^2 - 1)^N \right].$$

Значения весов вычисляются по формуле

$$w_k = \int_{-1}^{1} L_k(\tau) d\tau = \frac{2}{(1-\tau_k^2)[\dot{P}_N(\tau_k)]^2},$$

где $\dot{P}_N(\tau)$ - первая производная полинома Лежандра.

Дифференцируя выражение (3.16) по аргументу τ, нетрудно получить производную $\dot{x}(\tau)$ в виде зависимости от производных полиномов Лежандра. В соответствии с этим в узловых точка τ_k можно записать систему соотношений:

$$\dot{x}(\tau_k) \approx \dot{X}(\tau_k) = \sum_{i=0}^{N} \dot{L}_i(\tau_k) X(\tau_i) = \sum_{i=0}^{N} D_{ki} X(\tau_i), \quad k=1,2,...N. \qquad (3.18)$$

Здесь D_{ki} - $N \times (N+1)$ дифференциальная матрица [82]:

$$D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k) = \begin{cases} \dfrac{(1+\tau_k)\dot{P}_N(\tau_k) + P_N(\tau_k)}{(\tau_k - \tau_i)[(1+\tau_i)\dot{P}_N(\tau_i) + P_N(\tau_i)]}, & i \neq k, \\ \dfrac{(1+\tau_i)\ddot{P}_N(\tau_i) + 2\dot{P}_N(\tau_i)}{2[(1+\tau_i)\dot{P}_N(\tau_i) + P_N(\tau_i)]}, & i = k. \end{cases}$$

На основании (3.15), (3.17), (3.18) получим:

$$\sum_{i=0}^{N} D_{ki} X(\tau_i) = \frac{t_f - t_0}{2} f(X(\tau_k), U(\tau_k), \tau_k, t_0, t_f), \quad k=1,2,...N,$$

$$X(\tau_f) = X(\tau_0) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=0}^{N} w_k f(X(\tau_k), U(\tau_k), \tau_k, t_0, t_f).$$

Достоинство метода Гаусса заключается в том, что он позволяет повысить алгебраический порядок точности методов на основе интерполяционных формул путём специального выбора узлов интегрирования без увеличения числа используемых значений подынтегральной функции. Этот метод имеет высокую точность даже при сравнительно малом числе узлов интегрирования. В общем случае метод Гаусса позволяет точно проинтегрировать полином степени ($2N$–1). Это самое многое, чего можно достичь, используя N узлов подынтегральной функции. Поэтому метод Гаусса называют методом наивысшей алгебраической точности. В тех случаях, когда подынтегральная функция сложна и на вычисление её значений в каждом узле интегрирования требуется много времени, применение формулы Гаусса особенно выгодно. Однако надо учесть, что τ_k, вообще говоря, иррациональные числа, что в некоторых случаях может быть неудобным.

Следует отметить, что для выбора N нет определенных расчетных формул. Одно лишь очевидно: при слишком малых N аппроксимирующие формулы могут оказаться недостаточно точны, а слишком большие N необоснованно увеличивают время вычислений без значимого повышения точности расчетов. В этих условиях метод последовательного наращивания N с контролем получающихся результатов является достаточно адекватным способом выявления подходящего значения этого параметра. Численные эксперименты показывают, что для рассматриваемого в статье типа маневров приемлемое значение N лежит в диапазоне 20÷100.

После проведенной трансформации остается только обратиться к задаче нелинейного программирования. Существует много практических алгоритмов и реально доступно уже готовое программное обеспечение для решения этой задачи (например, инструментарий Optimization Toolbox из системы MATLAB, пакеты NAG, SOPT, SNOPT, KNITRO). С использованием таких программ в конечном итоге могут быть найдены оптимальные узловые значения для переменных состояния и управления. Чтобы удостовериться, насколько полученное аппроксимирующее решение $u_{\text{opt}}(t)$, $x_{\text{opt}}(t)$ удовлетворяет исходным дифференциальным уравнениям движения, обычно делается проверка на согласованность. С этой целью найденная оптимальная программа $u_{\text{opt}}(t)$ подставляется в рассматриваемые уравнения движения и производится численное интегрирование этих уравнений с получением решения $x_{\text{int}}(t)$ (решается задача Коши каким либо достаточно точным численным методом интегрирования). Считается, что согласованность обеспечивается, если зависимости $x_{\text{int}}(t)$ и $x_{\text{opt}}(t)$ оказываются достаточно близкими.

3.6. Задача оптимизации набора высоты в вертикальной плоскости

Одним из базовых маневров является набор высоты. При проведении воздушной работы потребность в таком маневре может возникнуть, например, в связи с облетом препятствия (деревья, холмы, здания, высоковольтные линии). В общем случае маневр набора высоты является неустановившимся криволинейным движением, причем, наиболее интенсивный подъем самолета происходит в случае, когда траектория располагается в вертикальной плоскости. Для практики важно выявление оптимальных режимов выполнения этого маневра, например, по критериям быстродействия или минимума затрат топлива.

Следует отметить, что решение задачи оптимизации маневра набора высоты в вертикальной плоскости уже многократно рассматривалось в различных публикациях, отличающихся постановочными условиями и методами решения. Для более или менее полной модели движения (с учетом реальных характеристик аэродинамики самолета и его двигателя) получение решения оптимизационной задачи достаточно затруднено. Поэтому, для формирования маневра обычно используются упрощающие подходы, позволяющие получить пригодные для практики приближенные (квазиоптимальные) решения с применением, в том числе, классических вариационных методов [25]. Полученные таким образом программы по выполнению набора высоты проверяются в летном эксперименте, упрощаются, обобщаются, и приводятся в инструкциях лётчикам в виде стандартных рекомендаций.

Важное место в этих подходах принадлежит энергетическому методу [76, 77], который позволяет приближенно решать большой класс задач динамики полёта, не прибегая к громоздким вычислениям, связанным с численными интегрированием систем дифференциальных уравнений. Недостаток метода – игнорирование кинематики движения, т.е. рассматривается только перевод самолета с одного уровня энергии на другой, что не решает задачу соблюдения граничных условий для траектории полета. Но для производственного самолета, выполняющего воздушную работу, важно именно соблюдение этих условий. Кроме того, диапазон изменения высоты при выполнении воздушной работы обычно мал, поэтому нет особой необходимости специально вводить переменную E, т.к. изменение энергии в данном случае происходит главным образом за счет изменения скорости полета при изменении тяги и угла наклона траектории.

3.6.1. Постановка задачи

Рассматриваются задачи минимизации времени полёта и минимизации расхода топлива при наборе высоты в вертикальной плоскости. Движения центра масс самолета в вертикальной плоскости описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V} = \left(P\cos\alpha - X_a - mg\sin\Theta\right)/m \\ \dot{\Theta} = \left(P\sin\alpha + Y_a - mg\cos\Theta\right)/\left(mV\right) \\ \dot{m} = -C_e P/3600 \\ \dot{x} = V\cos\Theta \\ \dot{y} = V\sin\Theta \end{cases} \qquad (3.19)$$

Граничные условия:

Начальные и конечные условия:

- начало набора высоты: $y_0 = 10$ м, $x_0 = 0$ м, $\Theta_o = 0°$, $V_0 = 40$ м/с.
- окончание набора высоты: $y_f = 50$ м, $x_f = 100$ м, $\Theta_f = 0°$, $V_f = 30$ м/с.

Ограничения на переменные состояния:

$$|\Theta| \le 60°,\ 30\text{ м/с} \le V \le 120\text{ м/с};$$

Ограничения на переменные управления:

200 н $\le P \le$ 4500 н , -2° $\le \alpha \le$ 19.5°, $|dP/dt| \le$ 1500 н/с , $|d\alpha/dt| \le$ 32.5 °/с,

3.6.2. Решение и анализ:

а. Задача минимизации времени:

На рис. 3.8, 3.9 показаны решения задачи оптимизация набора высоты в вертикальной плоскости по критерию минимума времени. На рис. 3.8 показано поведение переменных управления и состояния. В данном случае время полёта составляет 3.1516 с, а расход топлива 0.0303 кг.

На рис. 3.9 представлена проверка на согласованность переменных управления и состояния оптимального решения с системой уравнений (3.19). Хорошее совпадение графиков указывает на согласованность полученного оптимального решения с динамикой рассматриваемой системы.

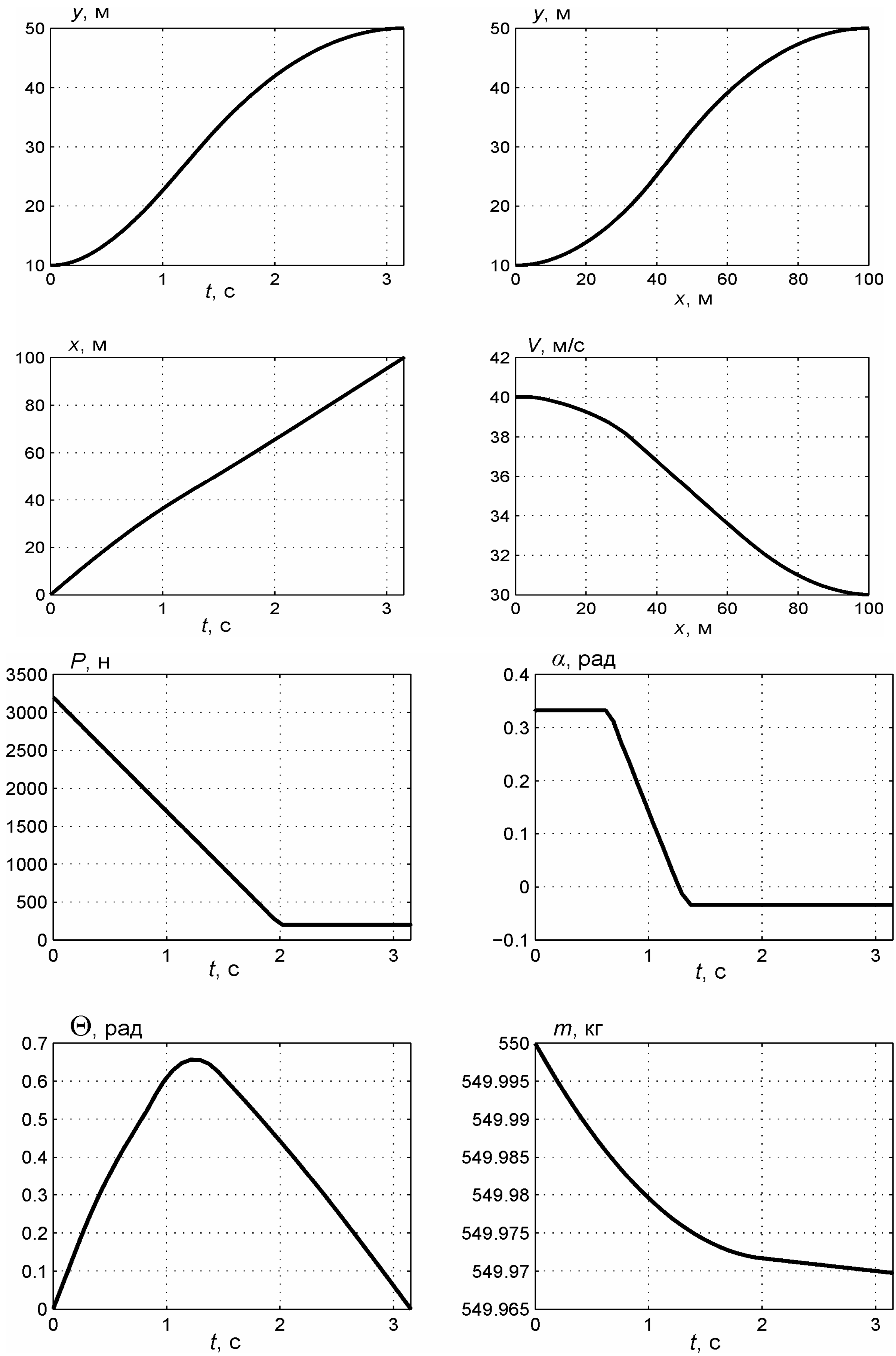


Рис. 3.8. Поведение переменных управления и состояния.

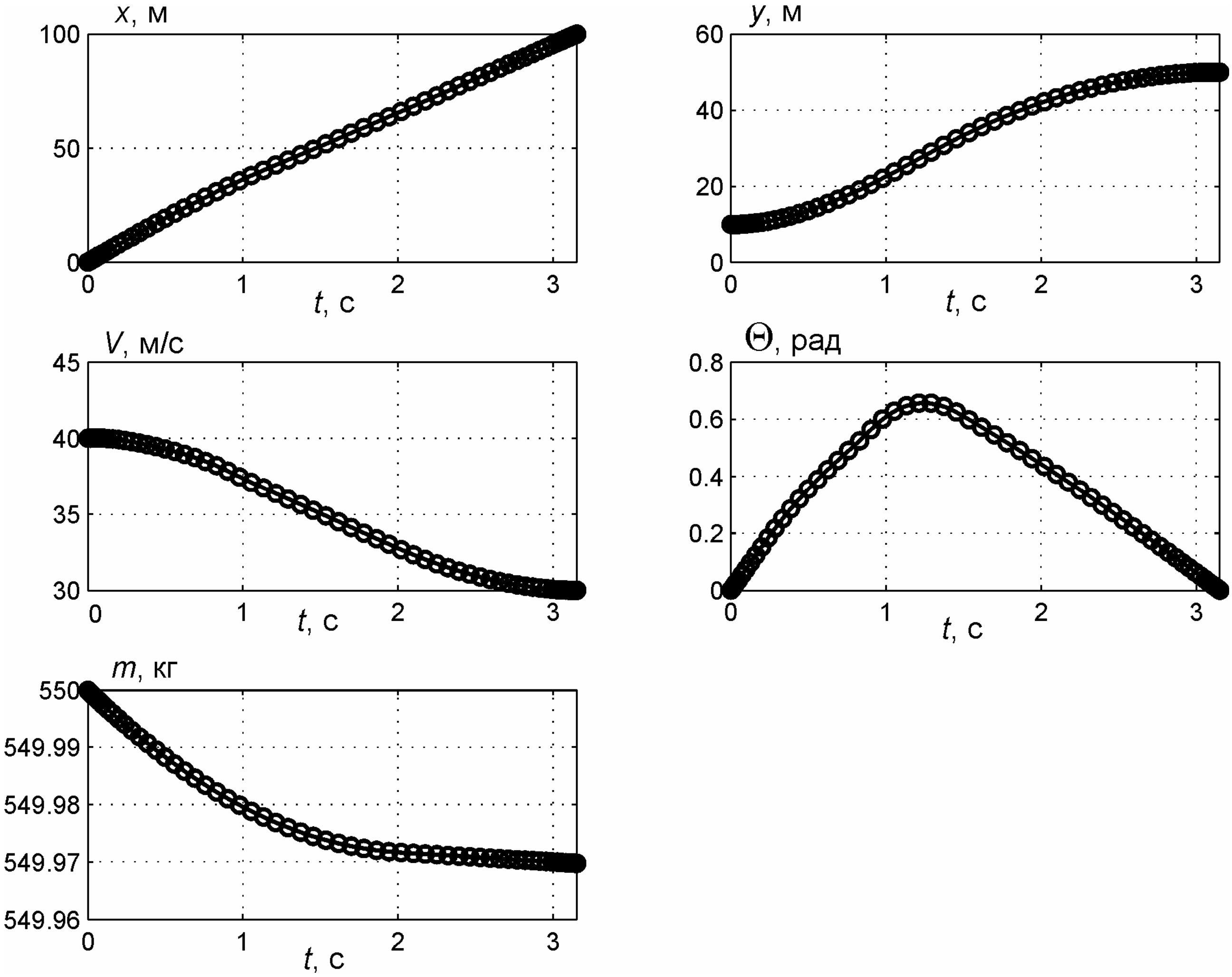


Рис. 3.9. Проверка на согласованность (маркеры “o” – оптимальное решение, сплошные линии – результат интегрирования).

б. Задача минимизации расхода топлива:

На рис. 3.10, 3.11 показаны решения задачи оптимизация набора высоты в вертикальной плоскости по критерию минимума расхода топлива. На рис. 3.10 показано поведение переменных управления и состояния. В этом случае время полёта составляет 3.1531 с, а расход топлива 0.03 кг.

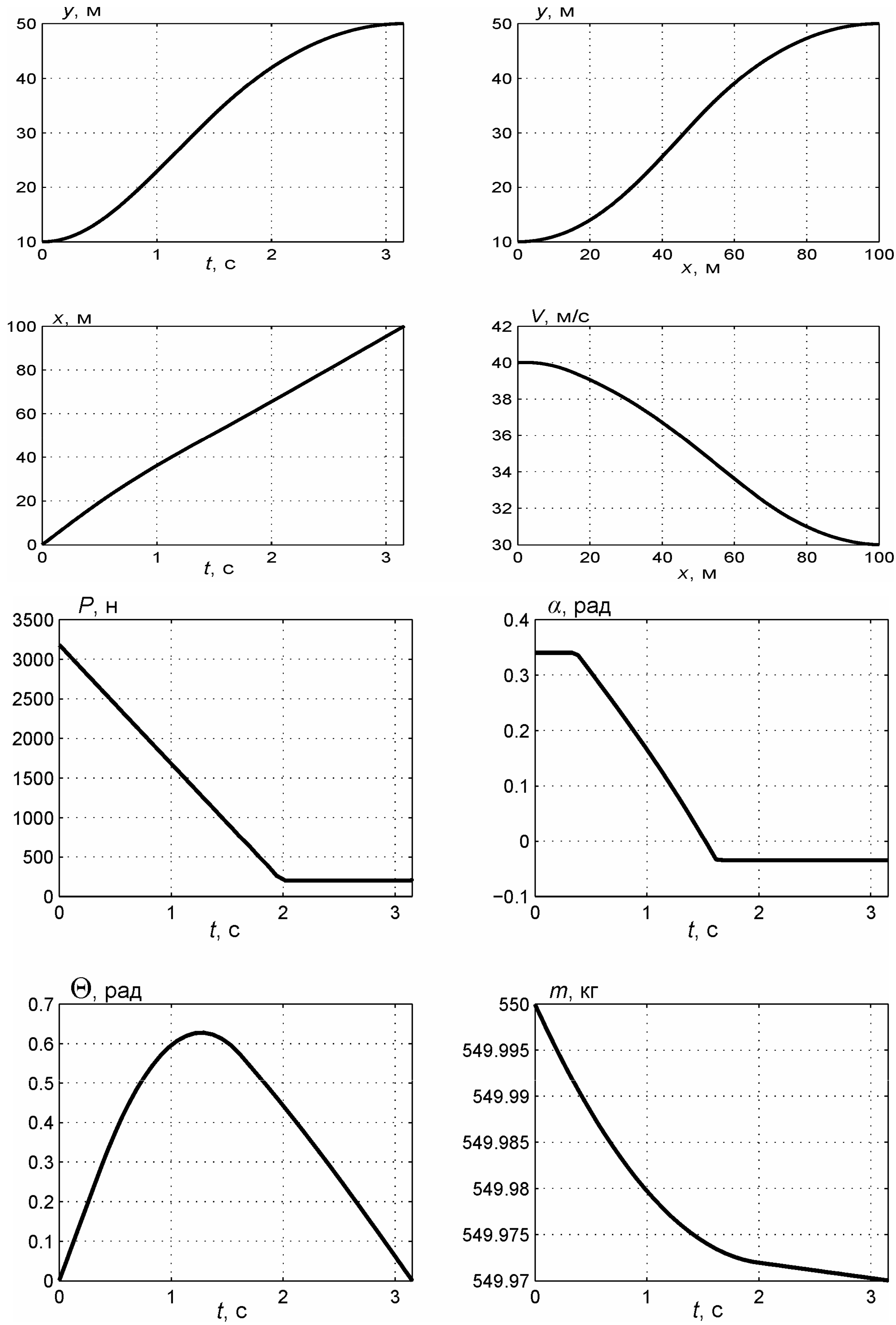


Рис. 3.10. Поведение переменных управления и состояния.

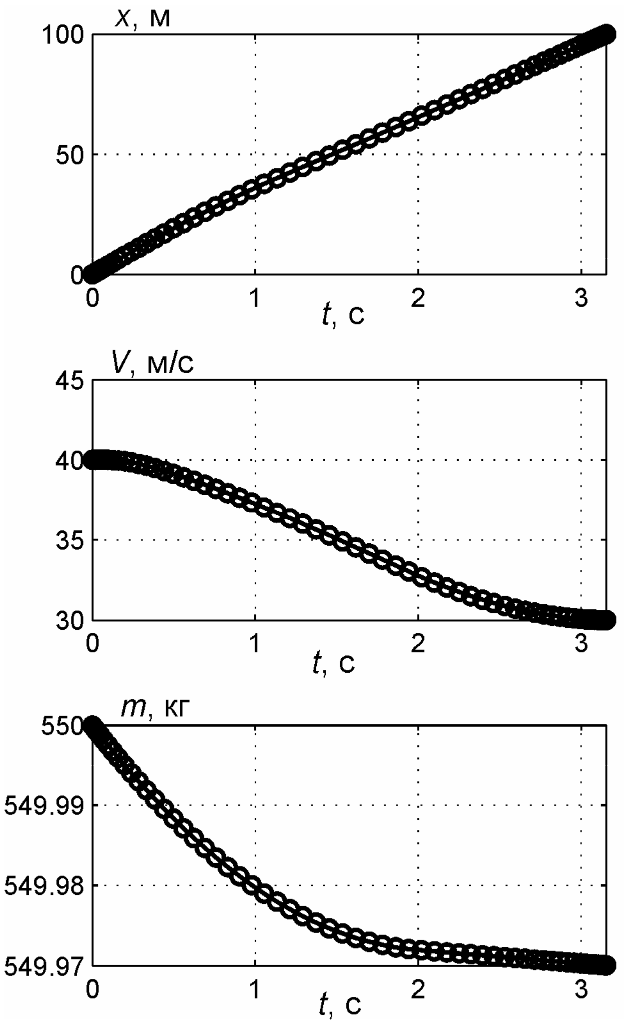


Рис. 3.11. Проверка на согласованность (маркеры “o” – оптимальное решение, сплошные линии – результат интегрирования).

Анализ представленных графиков показывает, что разница в поведении кривых для двух вариантов малы. В обоих случаях высота непрерывно растет по времени, а скорость постепенно уменьшается и подходят к конечному значению. Примерно от t = 0.5 с до t = 1.5 с происходило резкое изменение угла атаки от $\alpha \sim 19°$ до $\alpha \sim -2°$ (от допустимого максимального до минимального значения). В это же время угол наклона траектории достигает максимального значения $\Theta \sim 37°$. Тяга двигателя постепенно уменьшается от большого начального значения до минимального значения.

3.7. Задача оптимизации разворота в горизонтальной плоскости

Разворот самолета в горизонтальной плоскости – наиболее частый вид маневра в ходе воздушной работы, когда требуется повернуть курс полета на обратный. Разворот может быть простой, в виде одной дуги виража, выполняемый без перекладок по крену. Но в этом случае в конце разворота появляется довольно большое боковое смещение (оно равно удвоенному радиусу виража), в результате чего последующий проход над обрабатываемой поверхностью оставит необработанный (“неопыленный”) участок. Для обеспечения непрерывности покрытия разворот на обратный курс выполняют с малым боковым смещением, не превышающем ширину охватываемой в одном проходе полосы. Т.е. в результате маневра самолет должен вернуться почти в ту же точку (с небольшим боковым смещением), из которой маневр начался. На рис. 3.12 представлены два типа разворотов для перехода на обратный курс: Разворот с малым боковым смещением и разворот с большим боковым смещением. Элементарный геометрический анализ показывает, что разворот с малым боковым смещением должен состоять, как минимум, из трех участков. Вначале делается отворот в какую либо сторону, затем делается вираж в противоположную сторону, и затем снова отворот для выравнивания курса в требуемом направлении. Длина траектории такого разворота повышенная, расходы времени и топлива тоже.

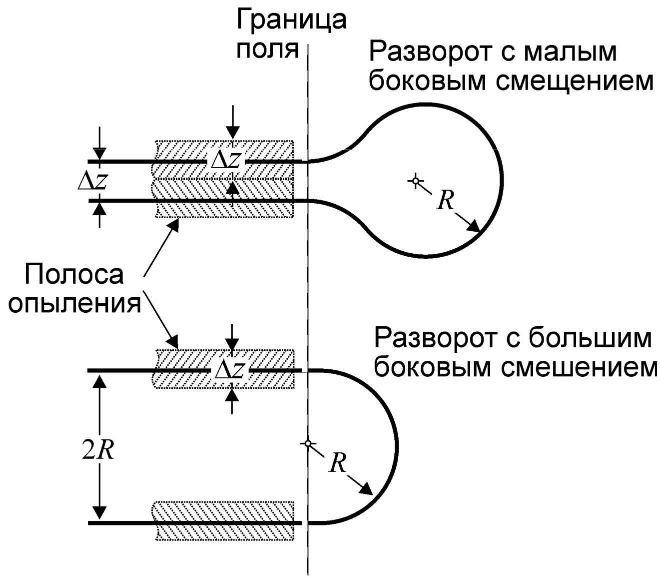


Рис. 3.12. Два типа разворотов для перехода на обратный курс

Если скорость полета выдерживается постоянной, то рассчитать маневр для условий полета в горизонтальной плоскости несложно. Но оптимизация горизонтальной разворота по критерию минимума расхода топлива для режима заданной постоянной скорости дает не всегда приемлемый для практики результат. Оптимальный угол крена и, как следствие, требуемая для поддержания горизонтального полета перегрузка получаются чрезмерно большими [7]. Поэтому для выполнения воздушной работы оптимальное решение целесообразно определять в классе переменных скоростей полета. В данном разделе диссертационной работы дается оптимальное решение с применением квазиспектрального метода.

3.7.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимизации разворота самолёта в горизонтальной плоскости. Движения центра масс самолёта в горизонтальной плоскости описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V} = \left(P\cos\alpha - X_a\right)/m \\ \dot{\Psi} = -\left(P\sin\alpha\sin\gamma + Y_a\sin\gamma\right)/\left(mV\right) \\ \dot{m} = -C_e P/3600 \\ \dot{x} = V\cos\Psi \\ \dot{z} = -V\sin\Psi \end{cases} \tag{3.20}$$

Граничные условия:

Начальные и конечные условия:

- начало разворота

y_0 = 50 м, x_0 = 0 м, z_0 = 0 м, Θ_o = 0, $\Psi_0 = 0$, $\dot{\Psi}_0 = 0$, V_0 = 30 м/с,

- конец разворота

y_f = 50 м, x_f = 0 м, z_f = -20 м, Θ_f = 0, $\Psi_f = 180^{\circ}$, $\dot{\Psi}_f = 0$, V_f = 30 м/с, Ограничения на переменные состояния:

$$y \geq 50 \text{ м}, \ |\Theta| \leq 60°, \ -90° \leq \Psi \leq 270°, \ 30 \text{ м/с} \leq V \leq 120 \text{ м/с};$$

Ограничения на переменные управления:

$$200 \text{ н} \leq P \leq 4500 \text{ н}, \ -2° \leq \alpha \leq 19.5°, \ |\gamma| \leq 60°,$$

$$|dP/dt| \leq 1500 \text{ н/с}, \quad |d\alpha/dt| \leq 32.5 \text{ °/с}, \quad |d\gamma/dt| \leq 74.5 \text{ °/с}.$$

Здесь значение z_f = -20 м взято в предположении, что ширина полосы охвата составляет 20 м. Граничные значения $\dot{\Psi}_0 = \dot{\Psi}_f = 0$ приняты в связи с тем, что маневр разворота начинается и оканчивается на прямолинейных траекториях. Существенно, что в постановке задачи приняты ограничения на скорости изменения управляющих переменных, как этого требует реальная ситуация.

3.7.2. Решение и анализ:

а. Задача на максимальное быстродействие.

На рис. 3.13, 3.14, 3.15 показаны решения задачи оптимизации разворота самолёта в горизонтальной плоскости по критерию минимума времени. На рис. 3.13 показано поведение переменных управления и состояния. В этом случае время полёта составляет 8.9844 с, а расход топлива 0.1821 кг.

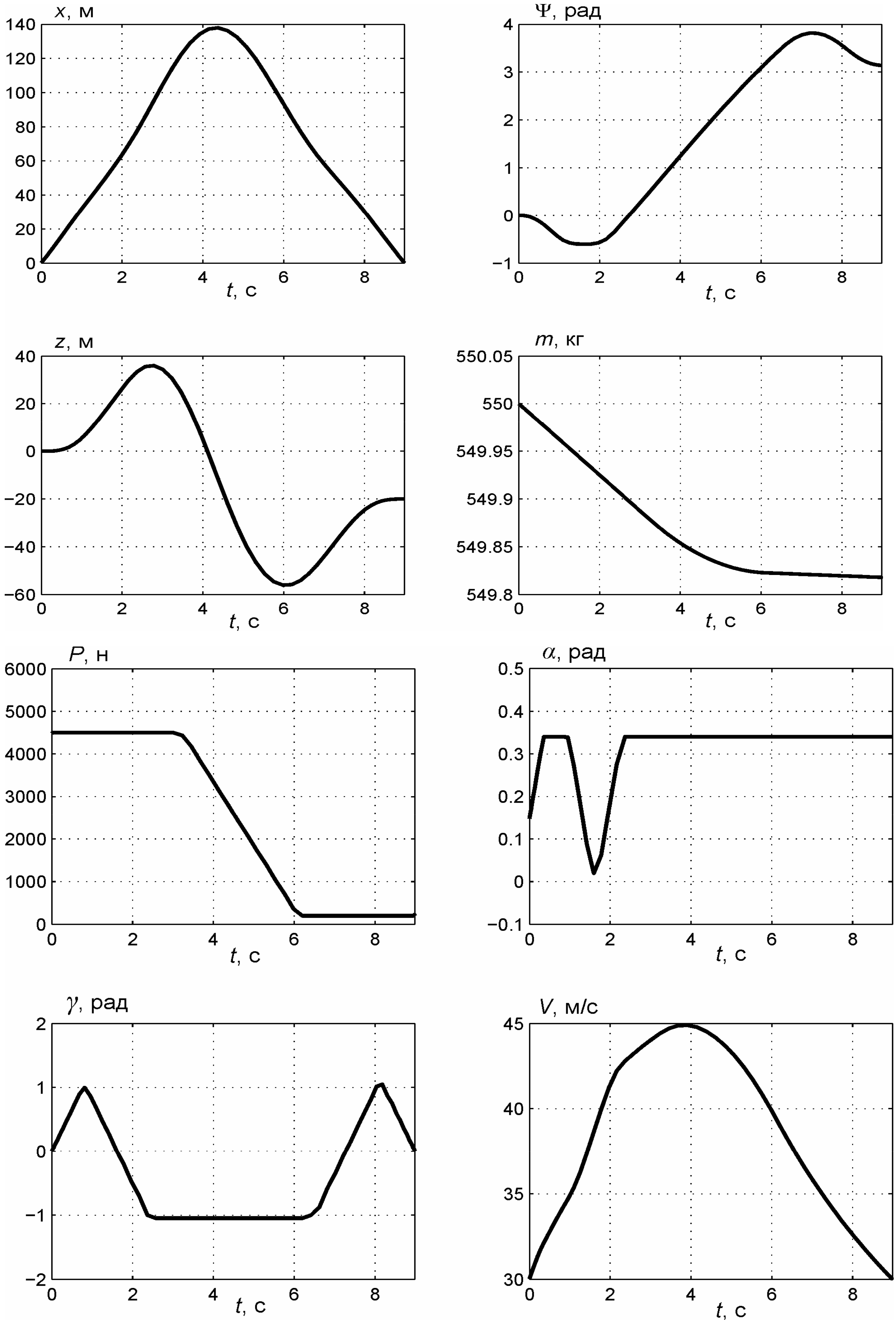


Рис. 3.13. Поведение переменных управления и состояния.

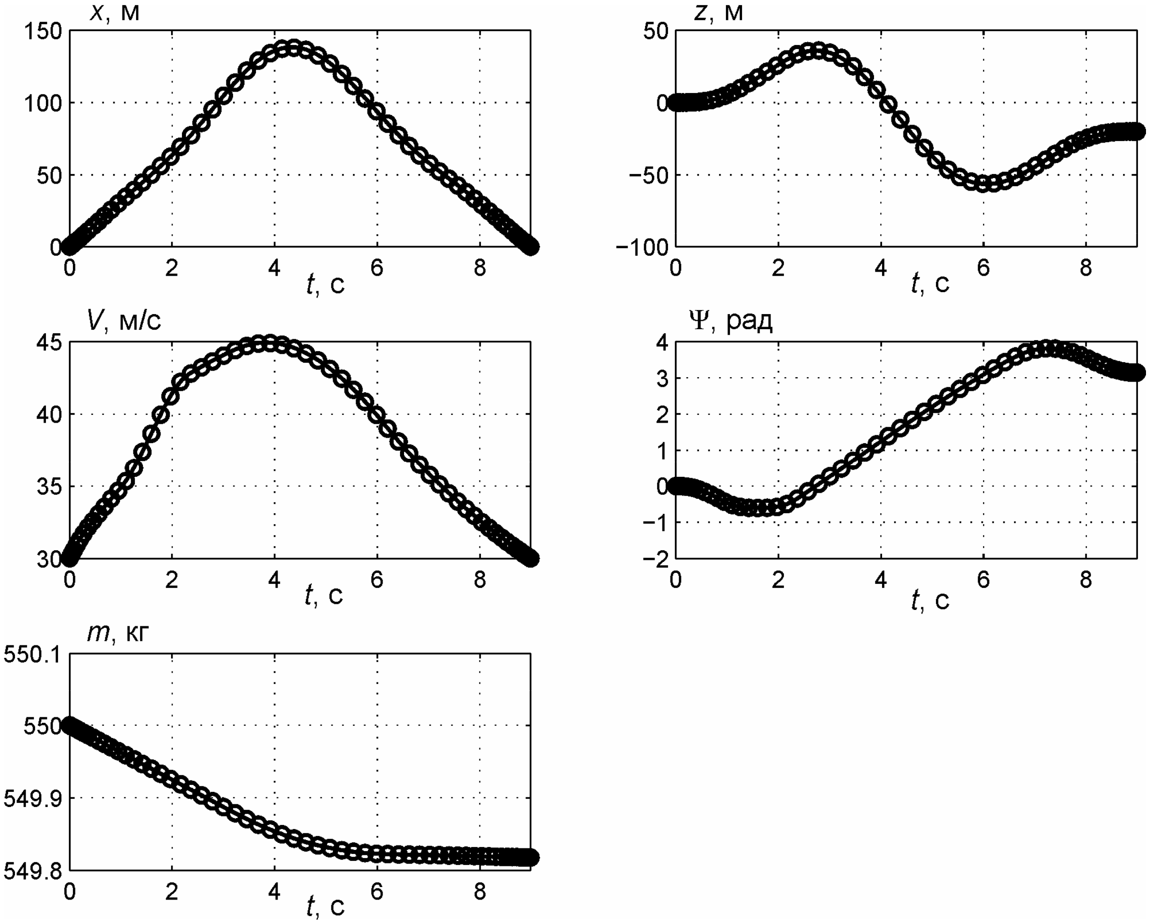


Рис. 3.14. Проверка на согласованность (маркеры “o” – оптимальное решение, сплошные линии – результат интегрирования).

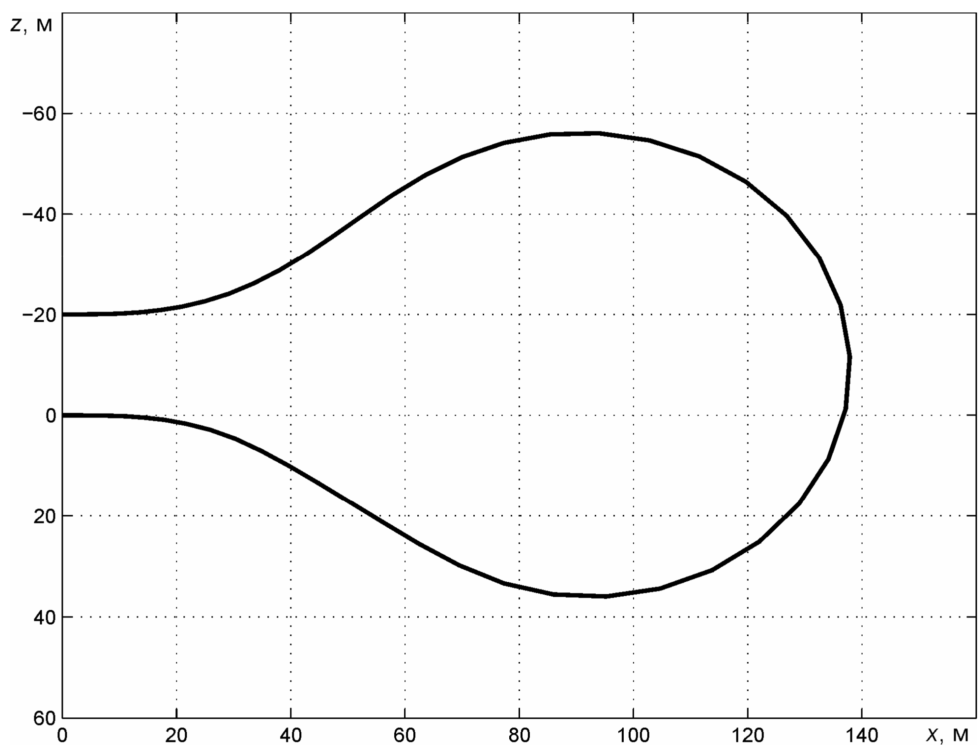


Рис. 3.15. Траектория движения самолета в горизонтальной плоскости

б. Задача на минимум расхода топлива.

На рис. 3.16, 3.17, 3.18 показаны решения задачи оптимизации разворота самолёта в горизонтальной плоскости по критерию минимума расхода топлива. На рис. 3.16 показано поведение переменных управления и состояния. В этом случае время полёта составляет 19.2302 с, а расход топлива 0.0934 кг.

в. Анализ полученных решений.

Анализ графиков показывает, что в обоих рассмотренных случаях процесс разворота можно разделить на три этапа. На первом этапе самолёт делает отворот траектории вправо от исходного нулевого курса. На втором этапе происходит разворот в противоположную сторону. Причем, угол крена здесь удерживается на максимально допустимом значении. На третьем этапе опять происходит смена направления разворота. Очевидно, на первом и третьем этапах значения угла крена тоже должны были быть предельными, но здесь сказалась необходимость соблюдения граничных условий но скорости изменения курсового угла.

В первом случае (оптимизация по критерии времени) скорость полета увеличивается до пикового значения в середине процесса, потом убывает до конечного значения. Это согласуется с общим принципом быстродействия: максимальное ускорение вначале процесса, и максимальное торможение в конце его. В втором случае (оптимизация по критерии топлива) скорость остается неизменной.

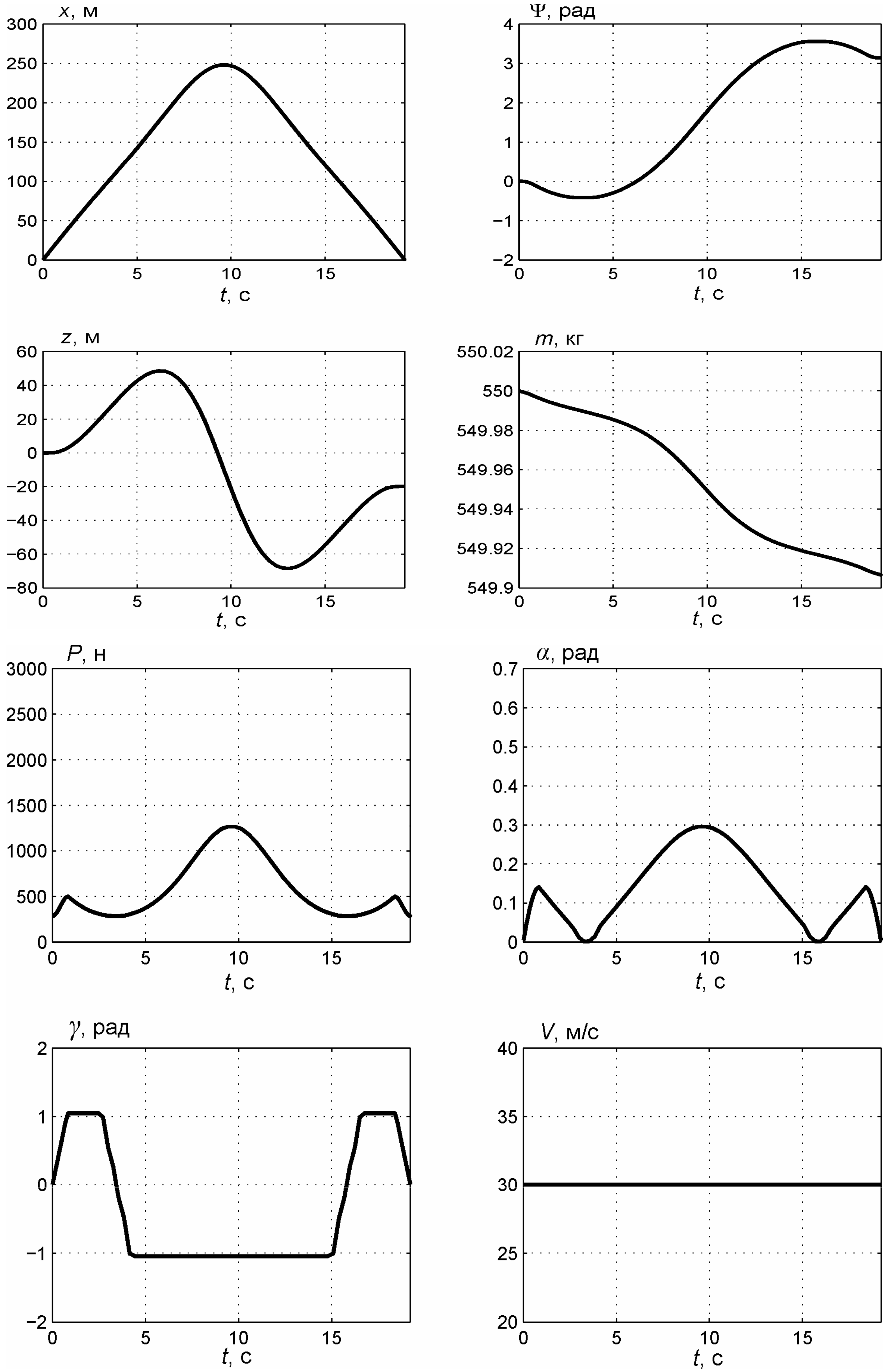


Рис. 3.16. Поведение переменных управления и состояния.

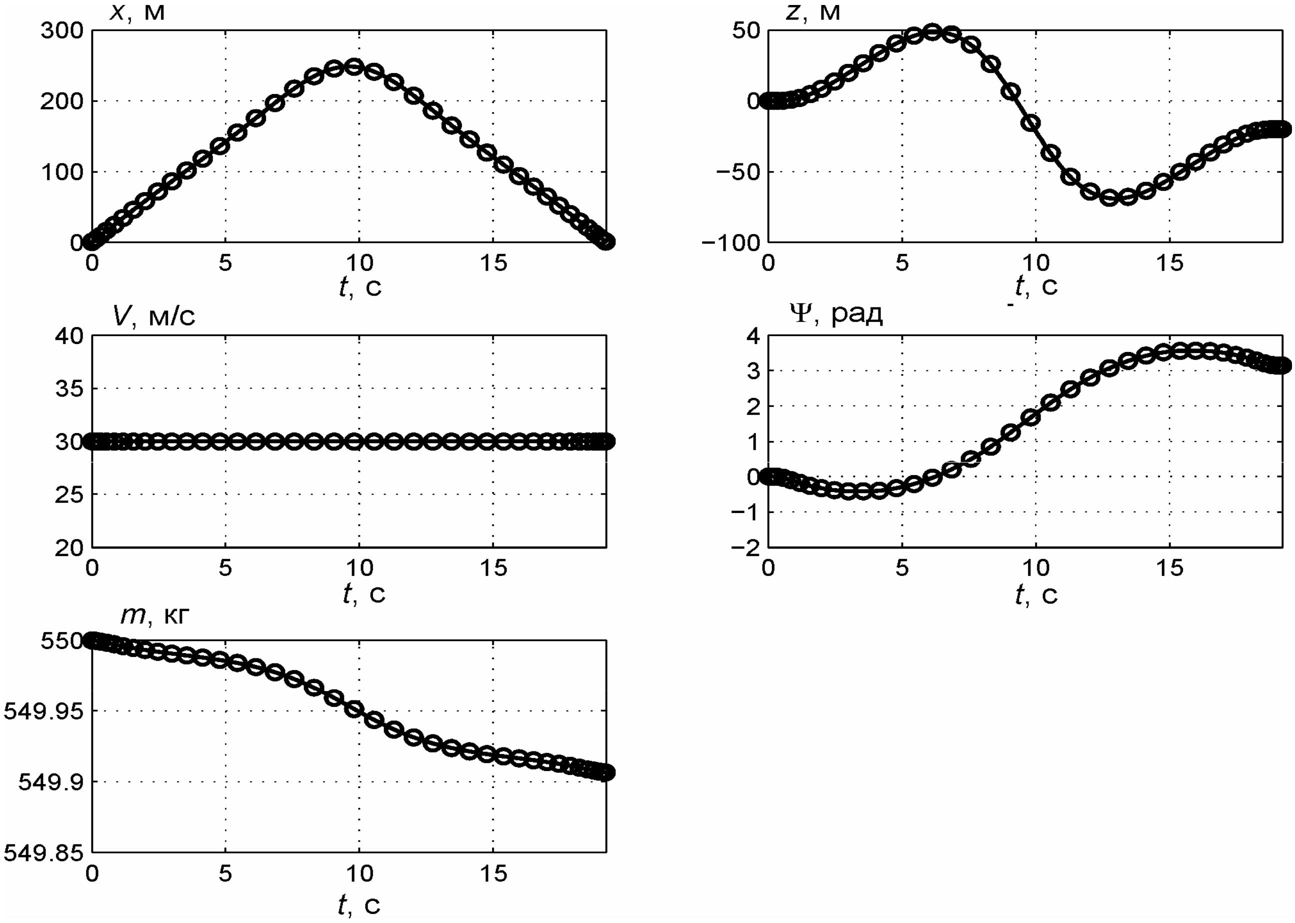


Рис. 3.17. Проверка на согласованность (маркеры “о” – оптимальное решение, сплошные линии – результат интегрирования).

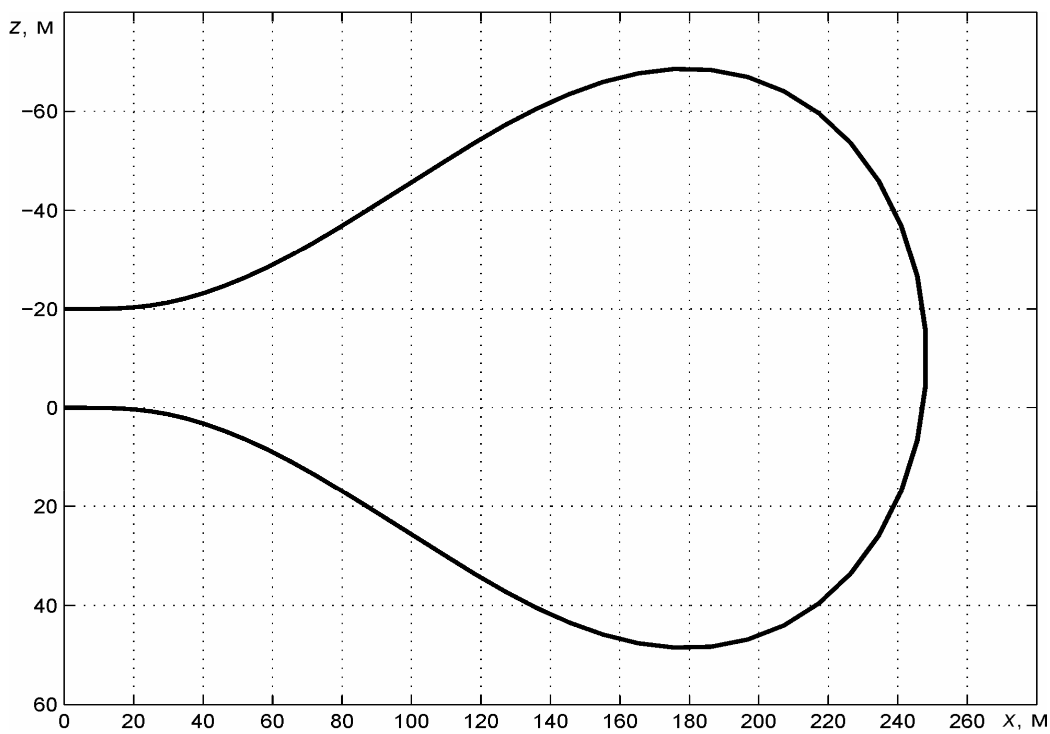


Рис. 3.18. Траектория движения самолета в горизонтальной плоскости

3.8. Задача оптимизации разворота в пространстве

Ограничение на движение в виде дополнительного условия принадлежности траектории маневра горизонтальной плоскости снижает потенциал возможного повышения эффективности управления полетом путем его оптимизации. Кроме того, в реальных полетах при выполнении воздушной работы может требоваться облет препятствий (лесозащитные полосы, строения, линии эдектропередач). Поэтому для практики большой интерес представляют пространственные маневры. Оптимизация таких маневров существенно сложнее, чем оптимизация плоских маневров. Ниже рассматриваются примеры решения задачи оптимизации пространственного маневра квазиспектральным методом. Как и в рассмотренном выше случае плоского маневра, расчеты выполнены для двух критериев оптимальности - быстродействие и топливная экономичность.

3.8.1. Постановка задачи

При рассмотрении пространственного движения самолета используются уравнения движения центра масс самолета в виде системы (1.1). Требуется определить оптимальную траекторию и оптимальное управление, реализующую эту траекторию, обеспечивающие выполнение разворота по курсу на 180^0 и перевод самолёта из заданной начальной фазовой точки в заданную конечную точку в пространстве за минимальное время или за минимальный расход топлива с учётом заданных ограничений на переменные состояния и переменные управления. Подобные задачи рассматривалась, например, в [73, 74], причем для получения решения использовался энергетический метод.

В рассматриваемых ниже примерах численные расчеты выполнялись для характеристик некоторого обобщенного самолета легкого класса:

m = 550 кг, S =14.8 м^2 (размах крыла 9 м),

$C_y = C_y^{\alpha}\alpha$, C_y^{α} = 0.075 град $^{-1}$, $\alpha_{крит}$ = 19.5° (критический угол атаки),

$C_x = C_{xo} + A_2 C_y^2$, $C_{xo} = 0.035$, $A_2 = 0.07$, C_e= 0.03 кг/(н·ч).

Т.к. перепад высот при выполнении маневра небольшой, то плотность атмосферы и ускорение свободного падения приняты постоянными,

$$\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3, \quad g = 9.807 \text{ м/с}^2 .$$

Граничные условия:

Начальные и конечные условия:

- начало разворота

y_0 = 50 м, x_0 = 0 м, z_0 = 0 м, Θ_o = 0°, Ψ_0 = 0°, $\dot{\Psi}_0 = 0$, V_0 = 30 м/с.

- окончание разворота

y_f = 50 м, x_f = 0 м, z_f = -20 м, Θ_f = 0°, Ψ_f = 180°, $\dot{\Psi}_f = 0$, V_f = 30 м/с.

Ограничения на переменные состояния:

$$y \geq 50 \text{ м}, \ |\Theta| \leq 60°, \ -90° \leq \Psi \leq 270°, \ 30 \text{ м/с} \leq V \leq 120 \text{ м/с};$$

Ограничения на переменные управления:

$$200 \text{ н} \leq P \leq 4500 \text{ н}, \ -2° \leq \alpha \leq 19.5°, \ |\gamma| \leq 60°,$$

$$|dP/dt| \leq 1500 \text{ н/с}, \quad |d\alpha/dt| \leq 32.5 \text{ °/с}, \quad |d\gamma/dt| \leq 74.5 \text{ °/с},$$

3.8.2. Решение и анализ

а. Задача на максимальное быстродействие.

Сначала рассмотрим возможность получения решения этой задачи с помощью принципа максимума Понтрягина. Чтобы учесть ограничения на скорости изменения управляющих переменных, эти скорости принимаются в качестве новых управлений, а система уравнений движения центра масс самолета (1.1) дополнена тремя уравнениями связи. Таким образом, необходимо рассматривать следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{V} = (P\cos\alpha - X_a - mg\sin\Theta)/m \\ \dot{\Theta} = (P\sin\alpha\cos\gamma + Y_a\cos\gamma - mg\cos\Theta)/(mV) \\ \dot{\Psi} = -(P\sin\alpha\sin\gamma + Y_a\sin\gamma)/(mV\cos\Theta) \\ \dot{m} = -C_e P/3600 \\ \dot{x} = V\cos\Theta\cos\Psi \\ \dot{y} = V\sin\Theta \\ \dot{z} = -V\cos\Theta\sin\Psi \\ \dot{P} = u_P \\ \dot{\alpha} = u_\alpha \\ \dot{\gamma} = u_\gamma \end{cases} \tag{3.21}$$

где

$$C_y = C_{yo} + C_y^\alpha.\alpha \qquad C_x = C_{xo} + A_1 C_y + A_2 C_y^2$$

$$Y_a = C_y qS = C_y \rho V^2 S/2 \qquad X_a = C_x qS = C_x \rho V^2 S/2$$

Для малых перепадов высоты полета значения ρ и g принимаются постоянными.

Ограничения на управления (на скорости изменения P, α, γ):

$$u_{PL} \le u_P \le u_{PH} \qquad u_{\alpha L} \le u_\alpha \le u_{\alpha H} \qquad u_{\gamma L} \le u_\gamma \le u_{\gamma H}$$

Функция Гамильтона для данной задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H(x,u,\lambda) &= \lambda_x V\cos\Theta\cos\Psi + \lambda_y V\sin\Theta - \lambda_z V\cos\Theta\sin\Psi + \\ &+ \lambda_V (P\cos\alpha - X_a - mg\sin\Theta)/m + \lambda_\Theta (P\sin\alpha\cos\gamma + Y_a\cos\gamma - mg\cos\Theta)/(mV) - \\ &- \lambda_\Psi (P\sin\alpha\sin\gamma + Y_a\sin\gamma)/(mV\cos\Theta) - \lambda_m C_e P/3600 + \lambda_P u_P + \lambda_\alpha u_\alpha + \lambda_\gamma u_\gamma \end{aligned}$$

По виду этой функции можно заключить, что оптимальные управления должны удовлетворять следующей логике переключений:

$$\begin{cases} \lambda_P > 0 & u_P = u_{PL} \\ \lambda_P < 0 & u_P = u_{PH} \\ \lambda_P = 0 & u_{PL} \le u_P \le u_{PH} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_\alpha > 0 & u_\alpha = u_{\alpha L} \\ \lambda_\alpha < 0 & u_\alpha = u_{\alpha H} \\ \lambda_\alpha = 0 & u_{\alpha L} \le u_\alpha \le u_{\alpha H} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_\gamma > 0 & u_\gamma = u_{\gamma L} \\ \lambda_\gamma < 0 & u_\gamma = u_{\gamma H} \\ \lambda_\gamma = 0 & u_{\gamma L} \le u_\gamma \le u_{\gamma H} \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения для сопряженных переменных имеют следующий вид

$$\dot{\lambda}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \dot{\lambda}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \qquad \dot{\lambda}_z(t) = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

$$\dot{\lambda}_V(t) = -\frac{\partial H}{\partial V} = -\lambda_x \cos\Theta\cos\Psi - \lambda_y \sin\Theta + \lambda_z \cos\Theta\sin\Psi + \lambda_V C_x \rho VS/m +$$
$$+\lambda_\Theta \left(\frac{P\sin\alpha\cos\gamma - Y_a\cos\gamma - G\cos\Theta}{mV^2} \right) - \lambda_\Psi \frac{\sin\gamma\left(P\sin\alpha - Y_a\right)}{mV^2\cos\Theta}$$

$$\dot{\lambda}_\Theta(t) = -\frac{\partial H}{\partial \Theta} = \lambda_x V\sin\Theta\cos\Psi - \lambda_y V\cos\Theta - \lambda_z V\sin\Theta\sin\Psi + \lambda_V g\cos\Theta -$$
$$-\lambda_\Theta \left(\frac{g\sin\Theta}{V} \right) + \lambda_\Psi \sin\gamma\sin\Theta \left(\frac{P\sin\alpha + Y_a}{mV\cos^2\Theta} \right)$$

$$\dot{\lambda}_\Psi(t) = -\frac{\partial H}{\partial \Psi} = \lambda_x V\cos\Theta\sin\Psi + \lambda_z V\cos\Theta\cos\Psi$$

$$\dot{\lambda}_m(t) = -\frac{\partial H}{\partial m} = \lambda_V \frac{P\cos\alpha - X_a}{m^2} + \lambda_\Theta \cos\gamma \left(\frac{P\sin\alpha + Y_a}{m^2 V} \right) + \lambda_\Psi \sin\gamma \left(\frac{P\sin\alpha + Y_a}{m^2 V\cos\Theta} \right)$$

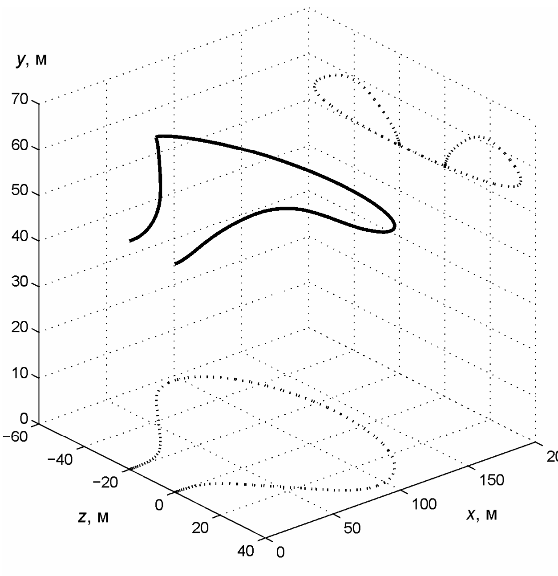
$$\dot{\lambda}_P(t) = -\frac{\partial H}{\partial P} = -\lambda_V \frac{\cos\alpha}{m} - \lambda_\Theta \frac{\sin\alpha\cos\gamma}{mV} + \lambda_\Psi \frac{\sin\alpha\sin\gamma}{mV\cos\Theta} + \lambda_m \frac{C_e}{3600}$$

$$\dot{\lambda}_\alpha(t) = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \lambda_V \frac{2P\sin\alpha + \rho V^2 S C_y^\alpha (A_1 + 2A_2 C_y)}{2m} - \lambda_\Theta \frac{\cos\gamma(2P\cos\alpha + \rho V^2 S C_y^\alpha)}{2mV} +$$
$$+\lambda_\Psi \frac{\sin\gamma(2P\cos\alpha + \rho V^2 S C_y^\alpha)}{2mV\cos\Theta}$$

$$\dot{\lambda}_\gamma(t) = -\frac{\partial H}{\partial \gamma} = \lambda_\Theta \frac{\sin\gamma(P\sin\alpha + Y_a)}{mV} + \lambda_\Psi \frac{\cos\gamma(P\sin\alpha + Y_a)}{mV\cos\Theta}$$

Основной проблемой для интегрирования этих уравнений является отсутствие информации о необходимых начальных значениях для сопряженных переменных. Задача заключается в том, чтобы подбором этих значений обеспечить прохождения оптимальной траектории через заданным граничные точки. Это краевая задача, получить решение которой в данном случае довольно сложно. К тому же, в рассмотренной выше постановке оптимизационной задачи не учитывались ограничения на фазовые переменные. Их учет еще более усложнит проблему получения оптимального решения. Собственно, эти соображения и привели к необходимости обращения к прямым вариационным методам.

При решении задачи минимизации времени разворота функционал имеет вид $J = t_f$, а конечная масса не задается. Для численного решении задачи методом ПМГ число узловых точек принималось равным N=90. Длительность маневра равна $T = t_f = 11.6$ с, а затраты топлива составили величину Δm_f =0.122 кг. Графики, показывающие траекторию движения самолета, её горизонтальную проекцию и поведение параметров движения и управлений, приведены на рис. 3.19, 3.20.



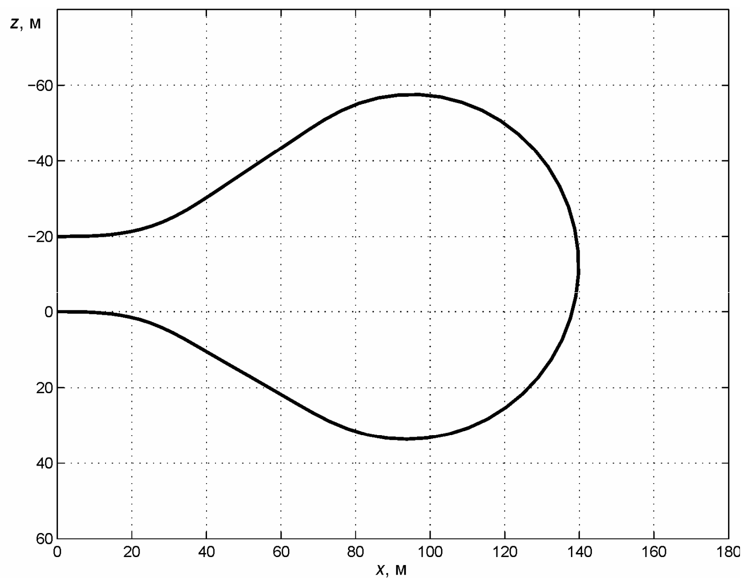


Рис. 3.19. Траектория движения самолета и её горизонтальная проекция

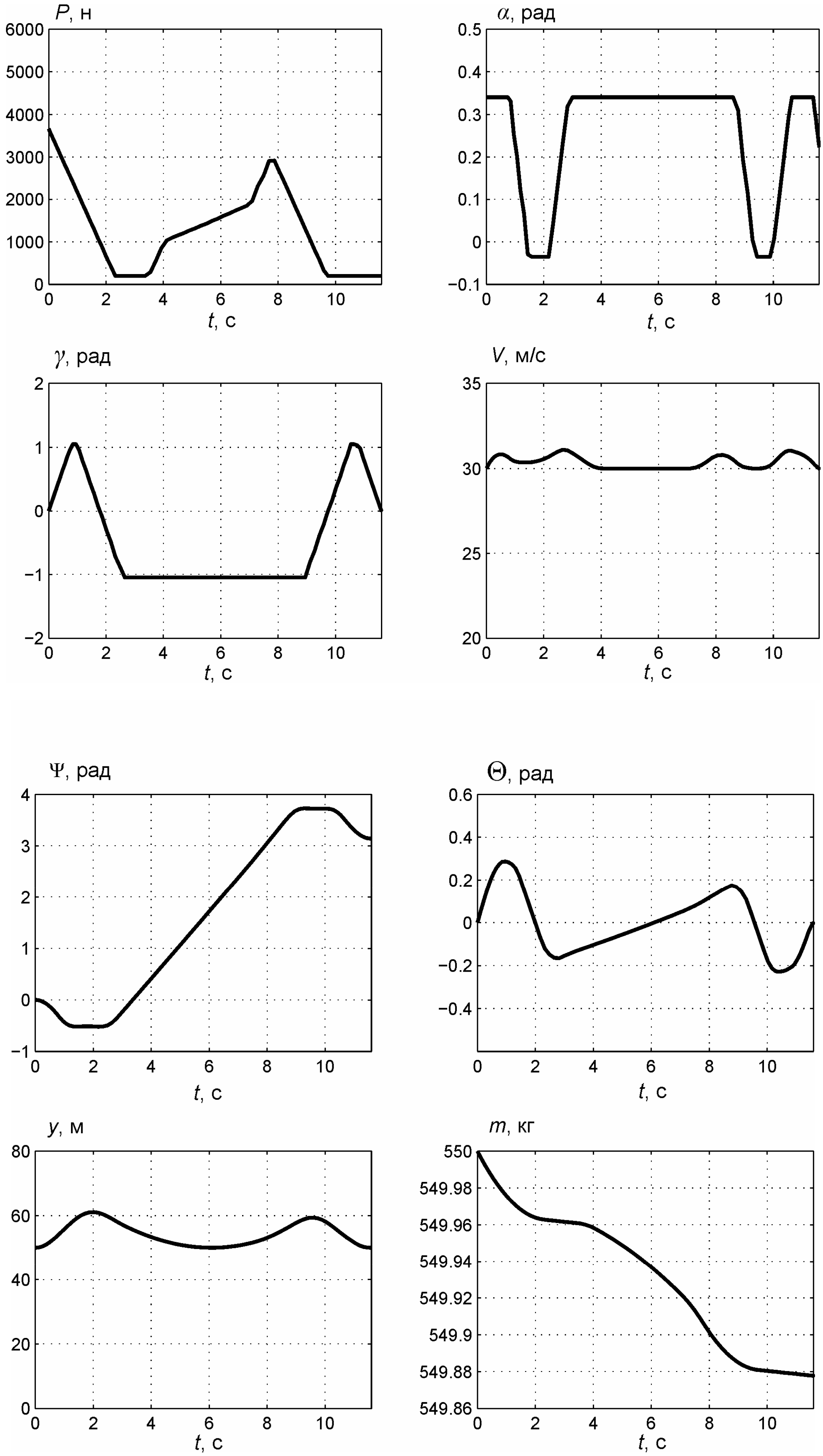


Рис. 3.20. Поведение переменных управления и состояния.

Анализ представленных графиков показывает, что процесс разворота можно разделить на три этапа. На первом этапе (от $t = 0$ с до примерно $t = 2.0$ с) происходит набор высоты ($\Delta y_{\max} \approx 11$ м) и делается отворот траектории вправо от исходного нулевого курса на угол $\Delta\Psi \approx$ -30º. Крен выходит на максимально допустимое значение с максимальной скоростью, а затем, примерно с $t = 1$ с, начинает движение в противоположную сторону, и тоже с максимальной скоростью. Если бы не было ограничения на скорости перекладки, то очевидно оптимальное поведение крена было бы релейным. Скорость полета в среднем повышенная. Тяга двигателя убывает с максимальной скоростью от первоначального максимального значения до минимума, но в среднем она тоже повышена. Своеобразно ведет себя угол атаки. В течение первой секунды он равен максимально допустимому значению, а далее уменьшается фактически до нуля. В целом, управление в начале маневра обеспечивает разгон и подъем самолета. Вертикальную скорость подъема для каждого момента времени можно определить с помощью приведенных графиков для угла наклона траектории и скорости полета.

На втором этапе (примерно от $t = 2.0$ с до $t = 9.5$ с) происходит разворот в противоположную сторону. Здесь курсовой угол получает приращение $\Delta\Psi \approx 240$º. Большая часть маневра происходит с предельными углами крена и атаки. Уровень тяги – промежуточный, а скорость полета находится на нижнем пределе. Угол наклона траектории практически линейно нарастает от отрицательного значения до положительного, что соответствует почти параболической зависимости высоты от времени $y(t)$. График $y(t)$ показывает, что траектория вначале проваливается до граничной высоты 50 м, а затем вновь поднимается до высоты $y \approx 59$ м. Максимум высоты, как и на первом этапе, наступает примерно на удалении $x \approx 50$ м. Наличие двух подъемов по высоте, происходящих на одинаковом расстоянии от границы поля ($x = 0$), является благоприятным фактором для случаев, когда обрабатываемое поле окаймлено лесозащитной полосой. В целях безопасности полета самолет должен обходить это препятствие по вертикали, и оптимальный маневр в данном случае предоставляет такую возможность.

Третий этап маневра начинается примерно с момента времени $t = 9.5$ с и продолжается вплоть до окончания маневра в момент времени $t = 11.6$ с. На этом этапе опять происходит смена направления разворота с уменьшением угла курса на $\Delta\Psi \approx 30^{\circ}$, так что суммарное изменение курса оказывается равным требуемой величине $\Delta\Psi \approx 180^{\circ}$. Тяга двигателя на этом этапе минимальная, но скорость повышенная, и она погашается до требуемого значения V=50 м/с за счет увеличения угла атаки до максимального значения к концу маневра.

Графики для зависимости координат от времени вместе с 2-мерным графиком горизонтальной проекции и 3-мерным графиком самой траектории показывают, что траектория близка к кривой, у которой есть плоскость зеркальной симметрии. В данном случае плоскость зеркальной симметрии – это вертикальная плоскость, параллельная продольной оси Оx, и проходящая посередине между точками старта и финиша. Размеры фигуры разворота составляют 91.5 м в боковом направлении и 140 м в продольном направлении.

Для проверки полученного оптимального решения на согласованность, исходная система уравнений движения (1.1) интегрировалась численным методом Рунге-Кутты четвёртого порядка с использованием найденных оптимальных программ по тяге, углу атаки и углу крена. Графики для фазовых переменных в варианте интегрирования $x_{\text{int}}(t)$ и в варианте найденного оптимального решения $x_{\text{opt}}(t)$ приведены на рис. 3.21. Хорошее совпадение графиков указывает на согласованность полученного оптимального решения с динамикой рассматриваемой системы.

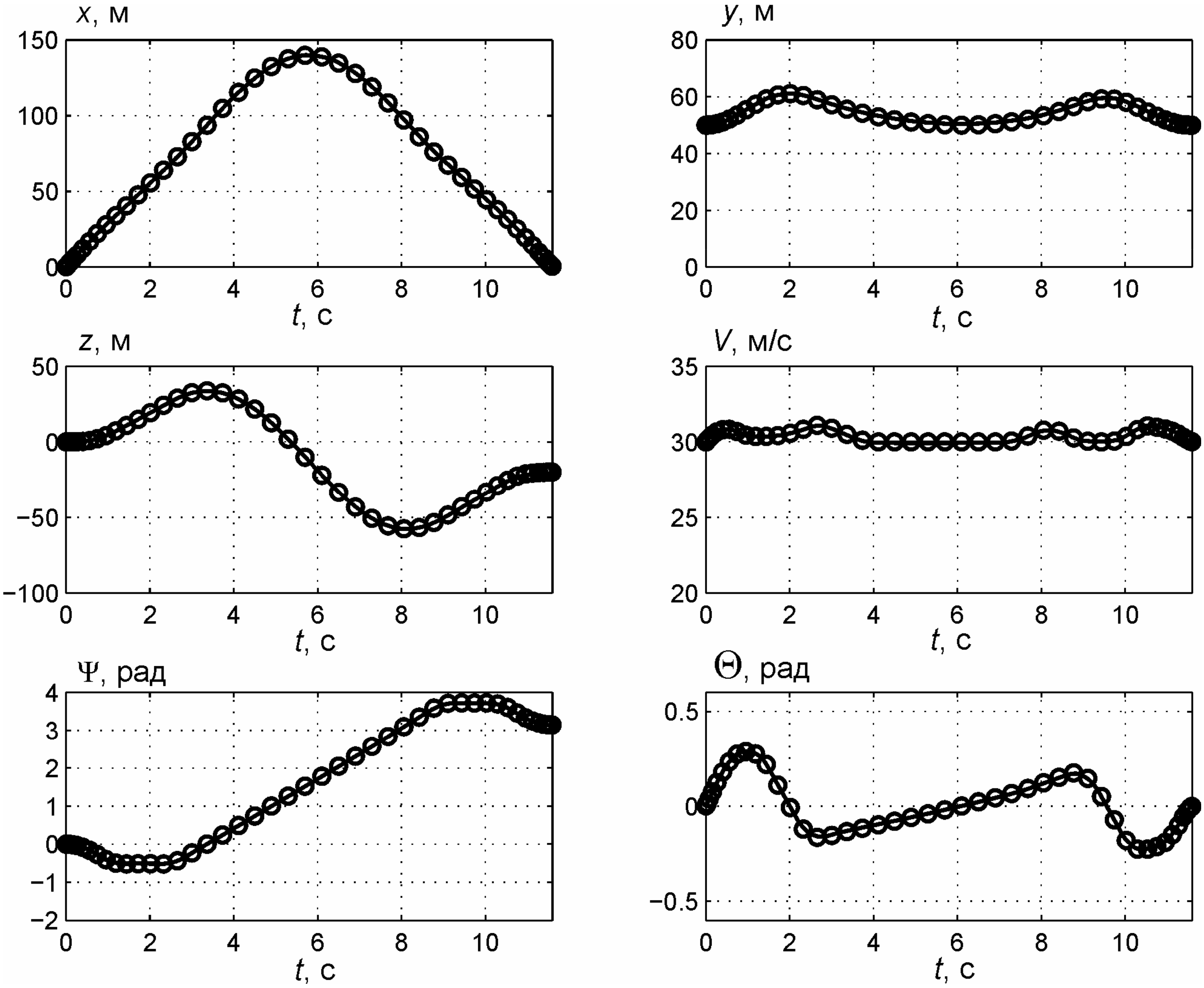


Рис. 3.21. Проверка на согласованность (маркеры “o” – оптимальное решение, сплошные линии – результат интегрирования).

б. Задача на минимум расхода топлива.

При решении задачи минимизации расхода топлива функционал имеет вид:

$$J = -\int_{t_0}^{t_f} \dot{m}(t)dt = \int_{t_0}^{t_f} (C_e P / 3600)dt$$

Полученные результаты решения задачи оптимизация разворота представлены графиками на рис. 3.22, 3.23. В вычислениях принималось значение N=60.

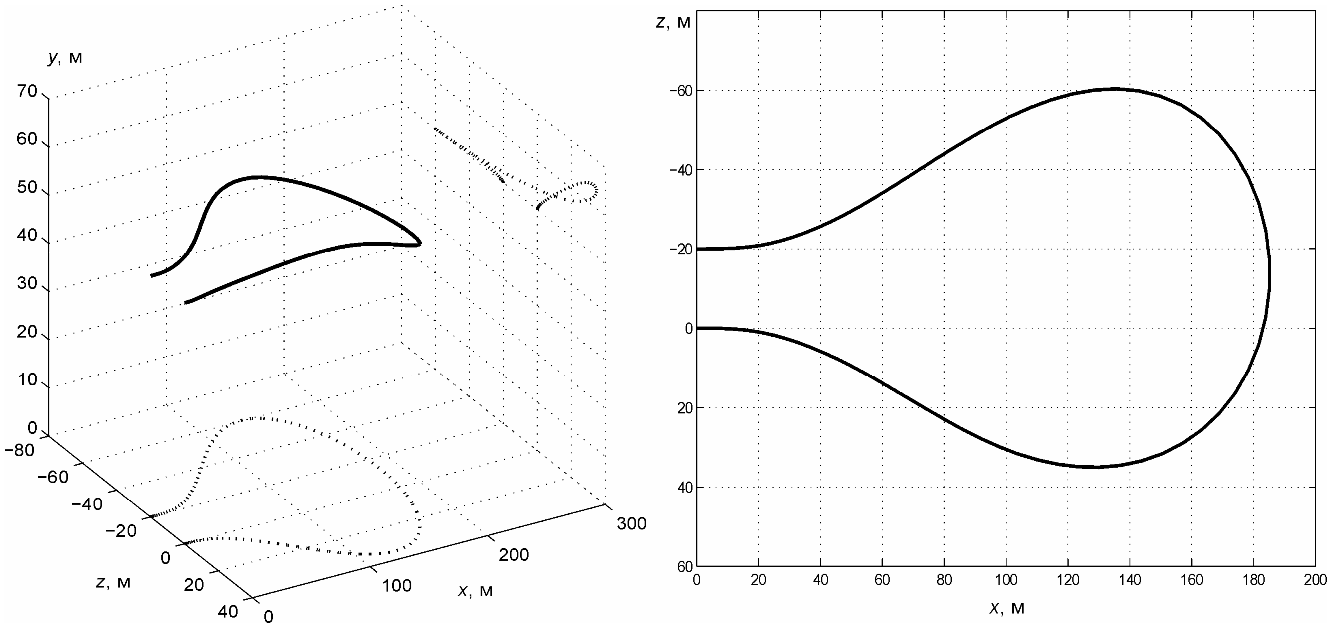


Рис. 3.22. Траектория движения самолета и её горизонтальная проекция

Расход топлива составил Δm=0.108 кг, а время полёта оказалось равным T=14.2 с. По сравнению с рассмотренным выше маневром быстродействия экономичность по топливу возросла на ~11.5%, но время маневра увеличилось на ~22.4%. Внешне траектория маневра получилась похожей на траекторию максимального быстродействия, и весь маневр также можно разбить на 3 этапа (отворот вправо, затем длительный участок с поворотом влево, а затем снова отворот вправо). Однако есть и заметные отличия. Размеры горизонтальной проекции траектории больше, чем в задаче быстродействия: ширина фигуры 95 м, а продольный размах - 184 м. Экономия топлива получилась за счет снижения уровня тяги двигателя на втором этапе маневра (на интервале t=5 с ÷10 с). Изменение тяги на начальном этапе маневра такое же, как и в задаче быстродействия. Однако на этом этапе угол крена меньше, чем в задаче быстродействия. Как следствие, траектория поднимается на большую высоту ($\Delta y_{max} = 15$ м против $\Delta y_{max} = 11$ м в задаче быстродействия). Из-за уменьшения углов крена на первом и третьем этапах углы отворота по курсу на этих этапах снизились ($|\Delta\Psi| \approx 24^{\circ}$).

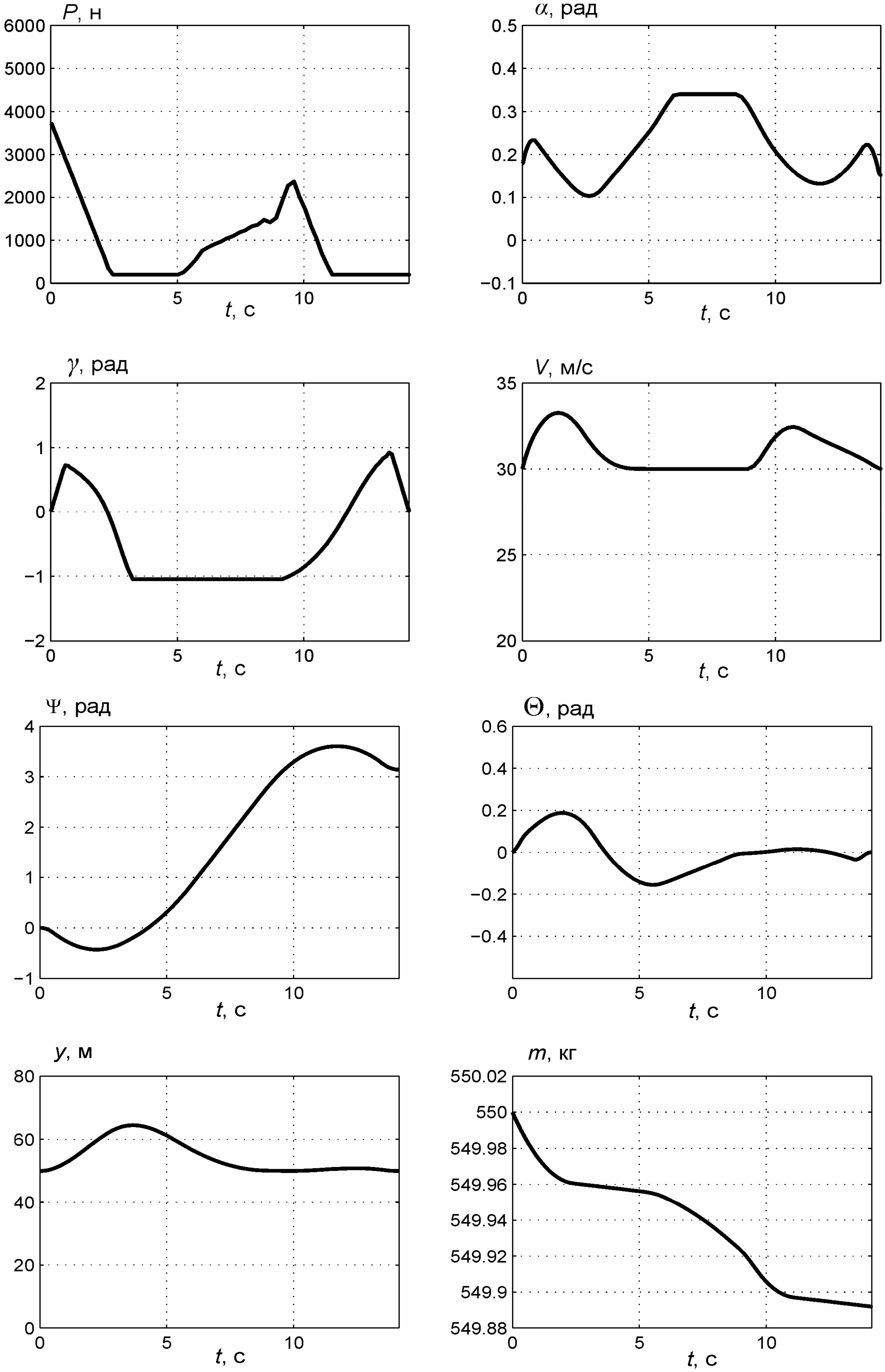


Рис. 3.23. Поведение переменных управления и состояния.

Еще существенным отличием является практическое отсутствие второго подъема по высоте (есть только очень небольшое вспучивание траектории вверх). Поведение графика для угла наклона траектории показывает, что начиная примерно с t=3.5 с этот угол отрицателен, а на участке t=10 с÷12 с знак угла положительный, но величина очень мала. Очевидно, что если требуется облет препятствия типа лесозащитной полосы, то такая траектория не подходит и она должна быть модифицирована.

На рис. 3.24 приведены графики найденного оптимального решения x_{opt}(t) и результаты численного интегрирования уравнений движения x_{int}(t) методом Рунге-Кутты с использованием найденного оптимального управления $u_{opt}(t)$. Визуально совпадение $x_{opt}(t)$ и $x_{int}(t)$ достаточно хорошее.

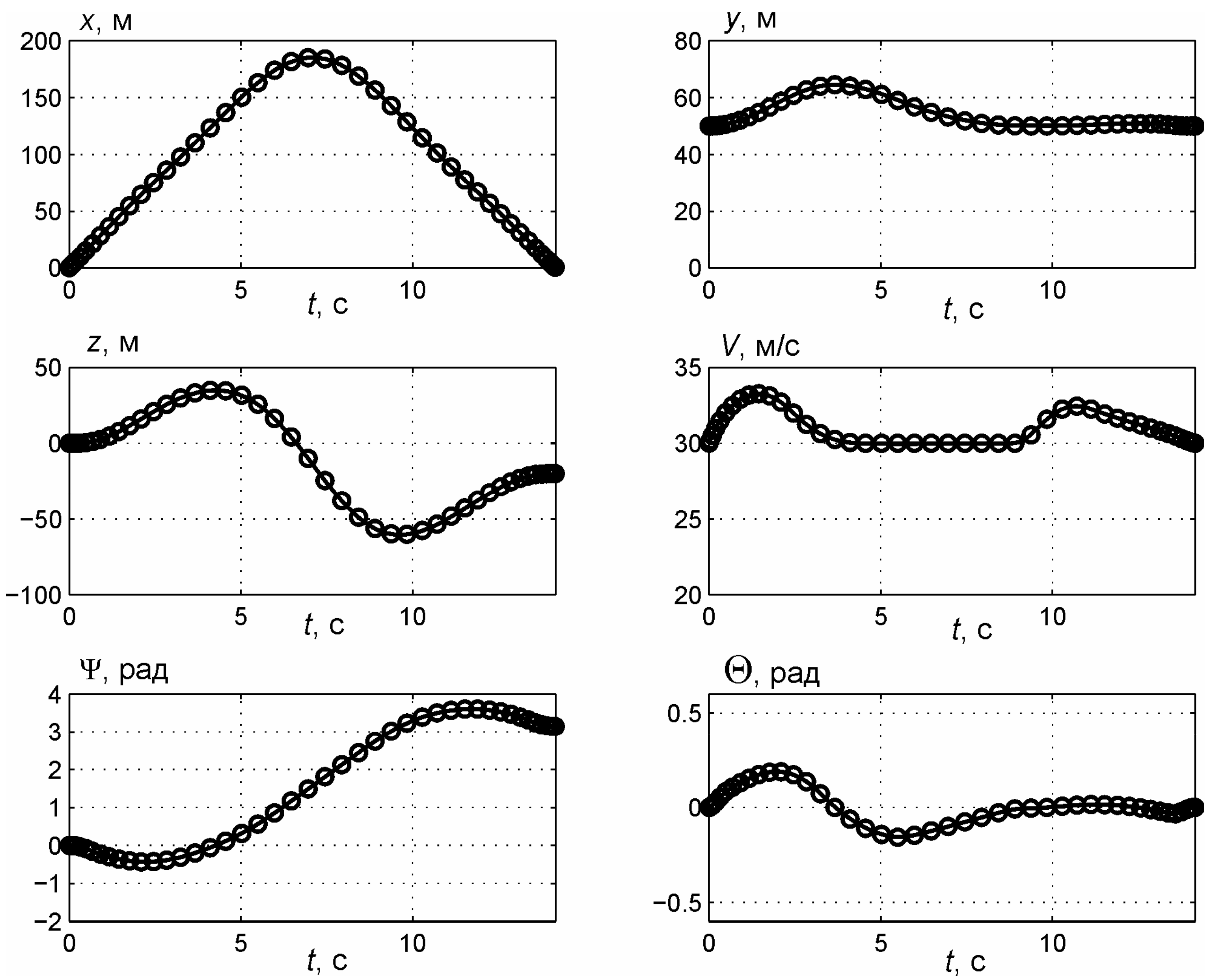


Рис. 3.24. Проверка на согласованность (маркеры “o” – оптимальное решение, сплошные линии – результат интегрирования).

3.9. Зависимость длительности полёта и расхода топлива от величины заданного бокового смещения в конце маневра.

При выполнении воздушных работ (например АХР) самолет летает над обрабатываемой поверхностью вдоль параллельных направлений и делает развороты на обратный курс на границах этой поверхности. В совокупности, маневры разворота могут занимать существенную часть летного времени и увеличивать стоимость воздушной работы. Особенно это ощутимо в тех случаях, когда длина прямолинейных не слишком велика. На характеристики маневра разворота значительное влияние оказывает величина бокового смещения z_{f}, которая в примерах разделов 3.7, 3.8 принималась равной ширина полосы охвата (чтобы последовательными проходами обеспечить полное покрытие поля). Но, в ряде случаев величина бокового смещения может быть произвольной. Например, возможно применение тактики повторных заходов на обрабатываемое поле для покрытия пропущенных участков. На рис. 3.25 приведены две тактики обработки поверхности: покрытие последовательное непрерывное (слева) и покрытие с временными пробелами (справа).

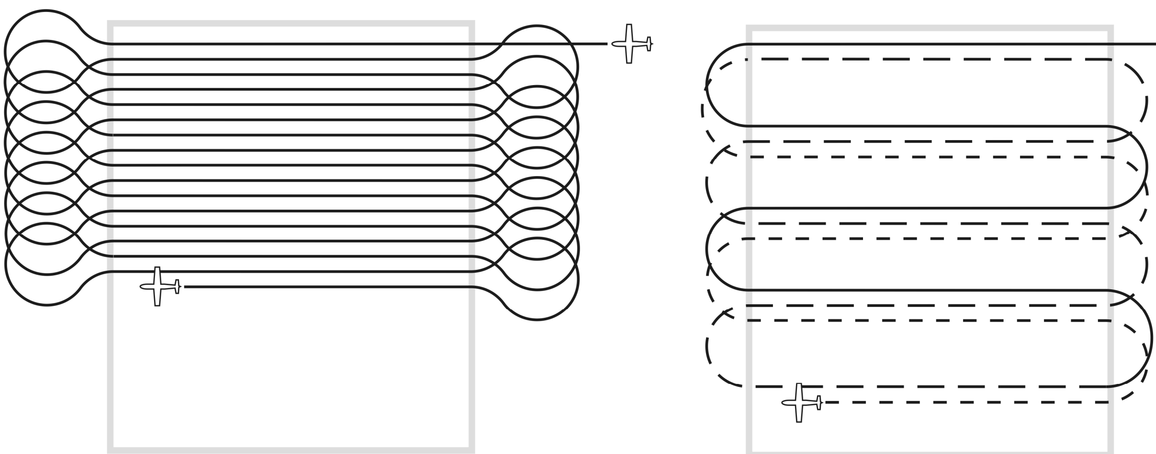


Рис. 3.25. Две тактики обработки поверхности

В связи с этим определенный интерес представляет оценка влияния бокового смещения z_{f} на затраты топлива и времени, требующиеся для маневра разворота.

3.9.1. Развороты в горизонтальной плоскости

На рис. 3.26 приведены траектории движения самолета в горизонтальной плоскости при оптимизации разворота самолёта по критерию минимума времени (слева) и по критерию минимума расхода топлива (справа) с различными значениями z_f.

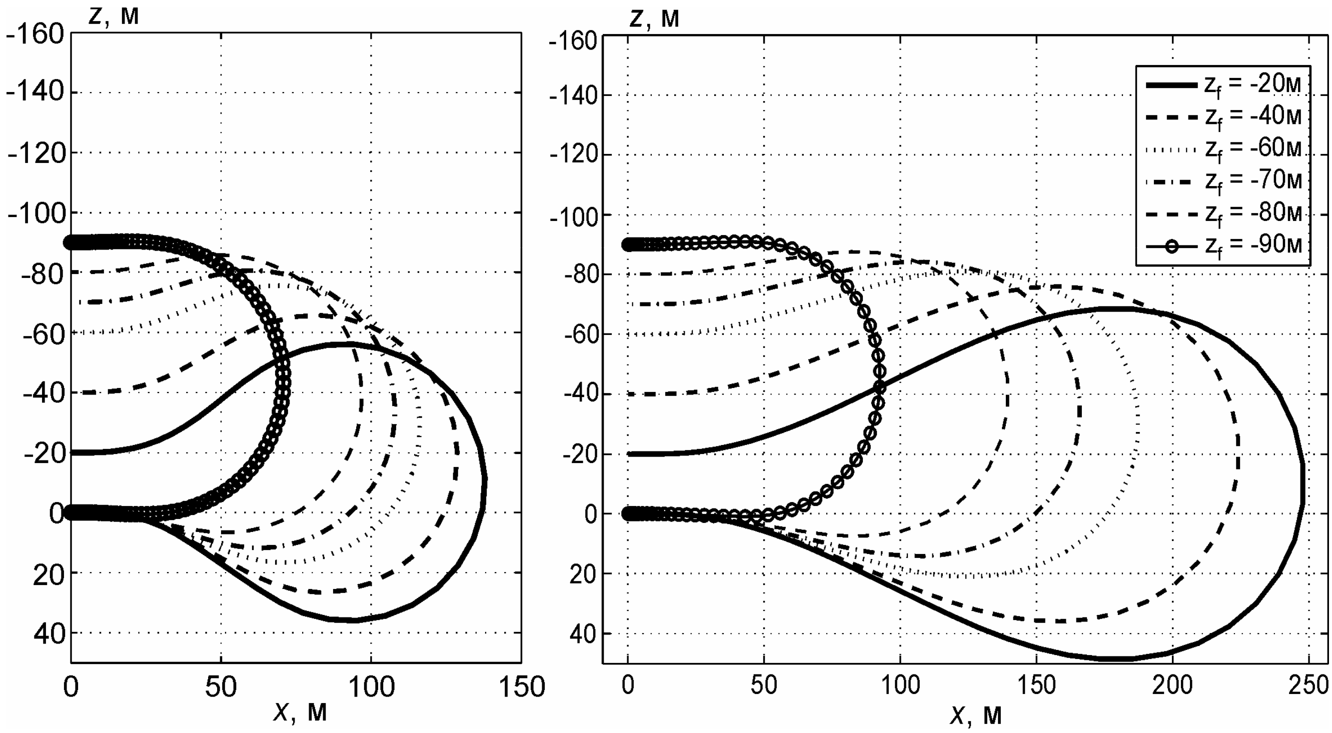


Рис. 3.26. Траектории движения самолета в горизонтальной плоскости

Сравнения результатов оптимизации по критерию минимума времени J_T и по критерию минимума расхода топлива J_F приведены на рис. 3.27 в виде графиков расхода топлива на маневр (слева) и графиков затраты времени на маневр (справа) в зависимости от требуемого конечного бокового смещения z_f. Естественно, что оптимизация по критерию минимума расхода топлива (пунктирная линия) приводит к снижению расхода топлива в сравнении с оптимизацией по быстродействию (сплошная линия). И наоборот, оптимизация по быстродействию приводит к уменьшению времени выполнения маневра. Наибольшее отличие по расходу топлива и длительности маневра имеет место при малых z_f (при z_f= -20 м коэффициент отличия близок к двум). Значения абсолютной разницы $|J_F- J_T|$ с увеличением z_f уменьшаются, но при этом уменьшаются также и сами величины J_F и J_T. Тем не менее, эти изменения таковы, что с ростом z_f оптимизация по быстродействию и по расходу топлива приводит все более к близким результатам. В рассматриваемом примере при значении z_f = -90 м двукратная перекладка крена практически отсутствует и форма траектории становится похожей на полуокружность. Очевидно, оптимальная величина z_f близка к удвоенному радиусу виража самолета и для такой величины z_f траектория маневра состоит из одной дуги без сегментов отворота. Использование подобных маневров обеспечивает минимизацию как длительности выполнения, так и затрат топлива. Если допускает технология обработки посевов, такие маневры выгодны.

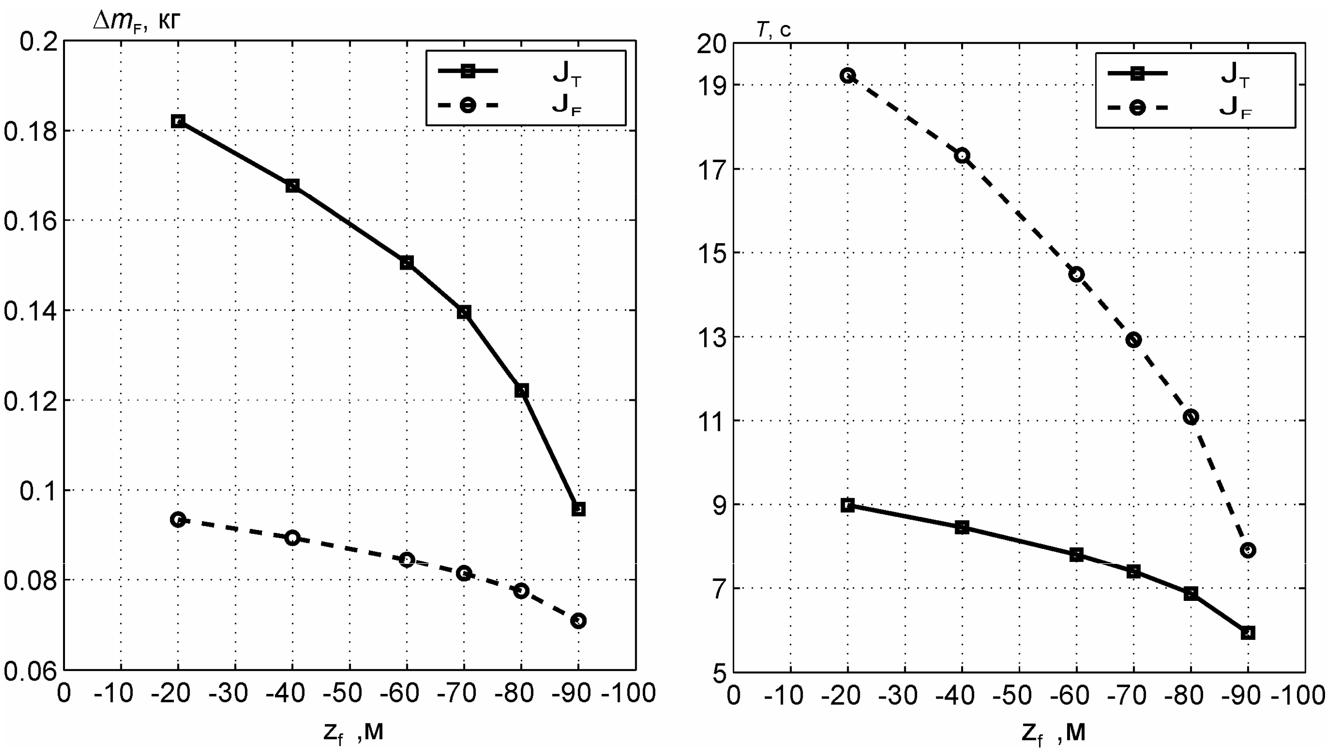


Рис. 3.27. Сравнения двух методов оптимизации: по критерию минимума времени J_T и по критерию минимума расхода топлива J_F.

3.9.2. Пространственные развороты

На рис. 3.28 приведены проекции траекторий движения самолета в горизонтальной плоскости для разных величин конечного бокового смещения z_f

при оптимизации разворота самолёта по критерию минимума времени J_T (слева) и по критерию минимума расхода топлива J_F (справа). Сравнить эти варианты оптимизации можно с помощью графиков, приведенных на рис. 3.29 (пунктир – для J_F , сплошные линии – для J_T). Результаты по достигаемым значениям критериев оптимальности и из зависимости от параметра z_f качественно такие же, как и для плоского разворота (см. предыдущий раздел 3.9.1). Если сравнивать плоский и пространственный развороты на количественном уровне, то для пространственного разворота можно отметить уменьшение отличий по достигаемым значениями расхода топлива и длительности маневра с оптимизациями J_F и J_T.

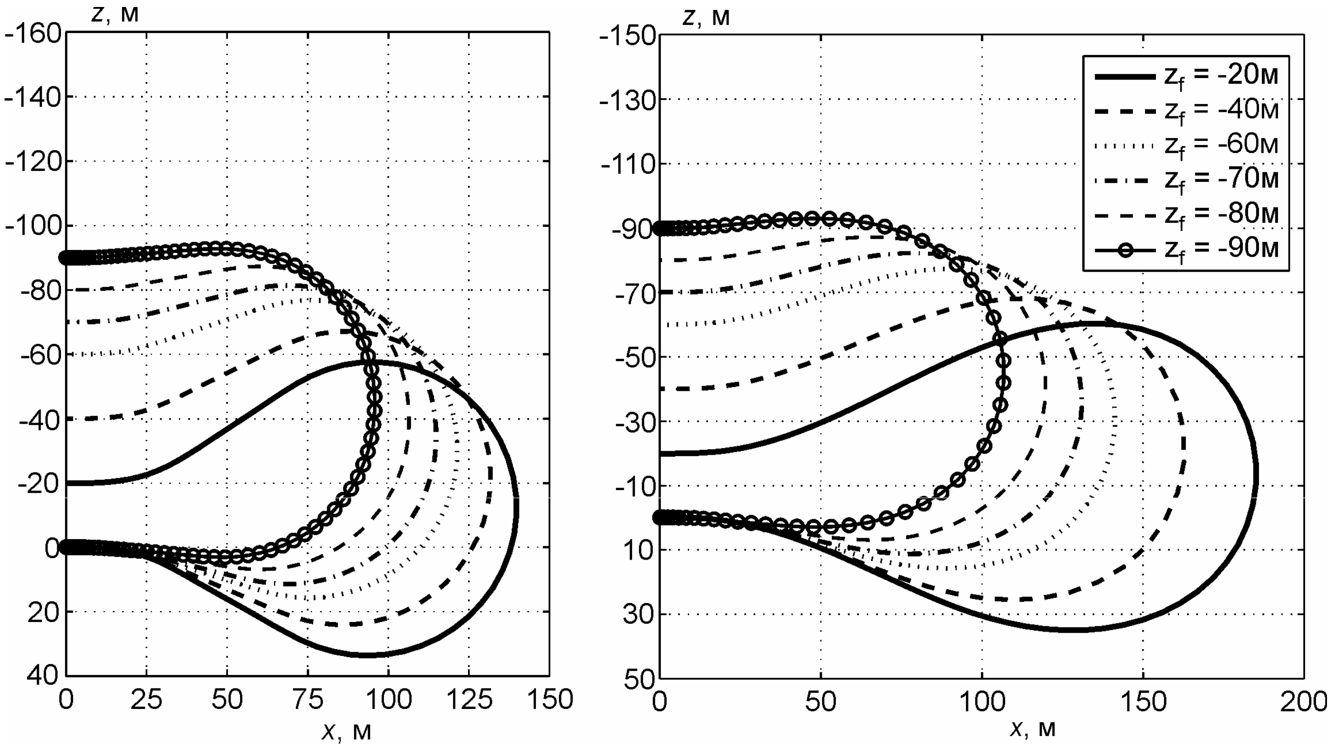


Рис. 3.28. Проекции траекторий движения самолета в горизонтальной плоскости

С другой стороны, графики плоского разворота показывают более высокую экономию топлива при минимизации критерия J_F (ср. пунктирные линии на левых графиках рис. 3.27 и рис. 3.29), и меньшее время маневра при минимизации критерия J_T (ср. сплошные линии на правых графиках рис. 3.26 и рис. 3.29).

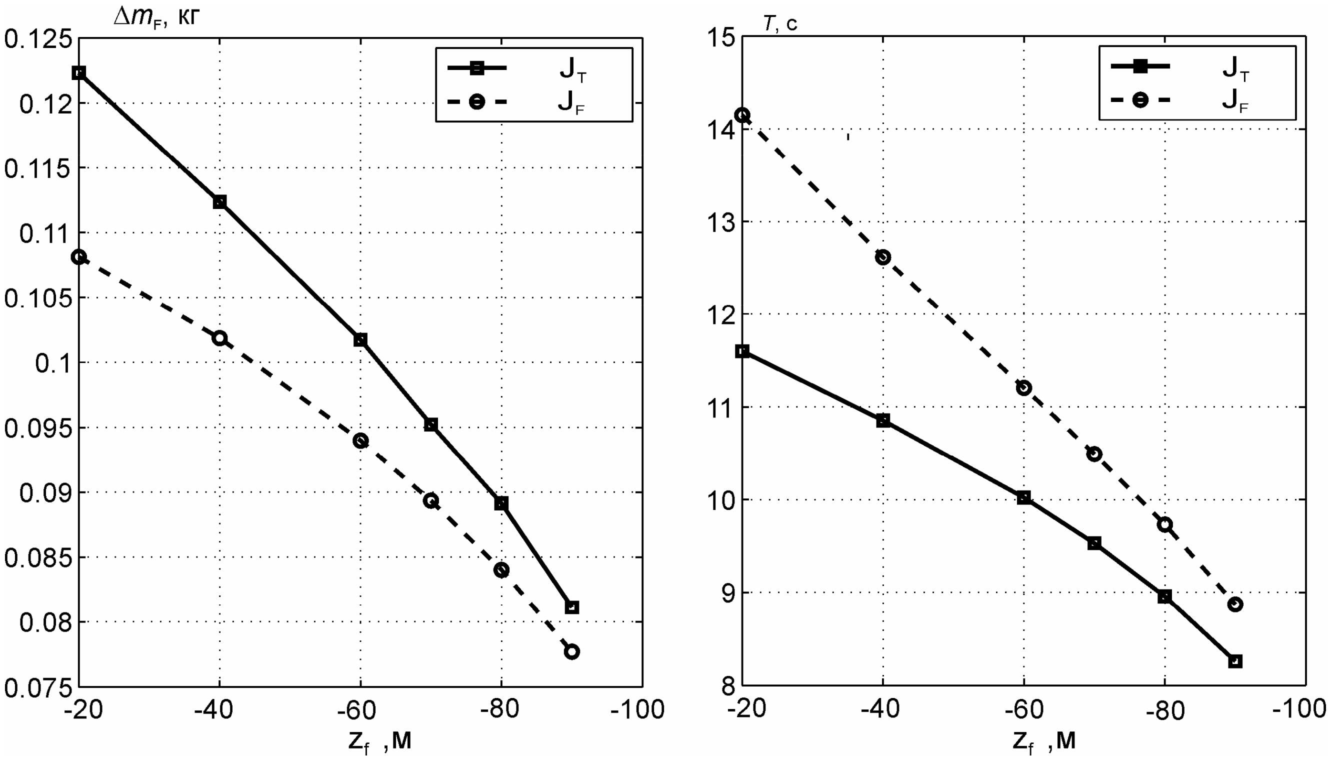


Рис. 3.29. Сравнения двух методов оптимизации: по критерию минимума времени J_T и по критерию минимума расхода топлива J_F.

3.10. Влияние изменения массы самолёта

Как уже отмечалось, в случае интенсивной эмиссии рабочей массы, полная масса самолета в процессе выполнения воздушной работы может сравнительно быстро уменьшаться. Это означает, что при выполнении каждого очередного маневра разворота, текущее значение массы самолета оказывается меньше того значения, которое было при выполнении предыдущего маневра. В данном разделе рассматривается зависимость характеристик оптимального маневра от массы самолёта. Поскольку длительность T оптимального маневра разворота от маневра к маневру изменяется (вследствие изменения массы самолета m), сопоставление поведения фазовых координат и управлений предлагается проводить не на множестве значений физического времени t, а на множестве значений нормированного времени

$$\tau = \frac{t}{T} .$$

По аргументу τ =[0, 1] все траектории имеют одинаковую длительность, а следовательно, сопоставление получается более корректным.

3.10.1. Влияние изменения массы самолёта на оптимизацию по критерию быстродействия

На рис. 3.30÷3.32 приведены графики для оптимальных маневров разворота по критерию быстродействия, включающие графики пространственной траектории, процессов изменения переменных управления и состояния, полученные для нескольких значений массы самолета (m = 600, 650, 700, 750 кг). На качественном уровне все одноименные зависимости, соответствующие разным значениям массы, подобны. Отличия носят только количественный характер. Это является основанием для возможного привлечения интерполяции в целях получения оптимального решения для промежуточных значений массы самолета. Как видно из приведенных данных, уменьшение массы самолета приводит к сжатию траектории маневра разворота и, соответственно к уменьшению длины траектории.

3.10.2 Влияние изменения массы самолёта на оптимизации по критерию экономичности

На рис. 3.33÷3.35 приведены графики для оптимальных маневров разворота по критерию минимума затрат топлива, включающие графики пространственной траектории, процессов изменения переменных управления и состояния, полученные для нескольких значений массы самолета (m = 600, 625, 650, 700, 750 кг). Как и в предыдущем случае с минимизацией по критерию быстродействия все одноименные зависимости, соответствующие разным значениям массы, подобны. Количественные изменения зависимостей при изменении массы довольно плавные и в основном монотонные. Исключение составляет участок перехода от значения m = 650 кг к значению m = 600 кг, где изменения оказываются более существенными. Это стало основанием для проведения дополнительных расчетов со значением m = 625 кг.

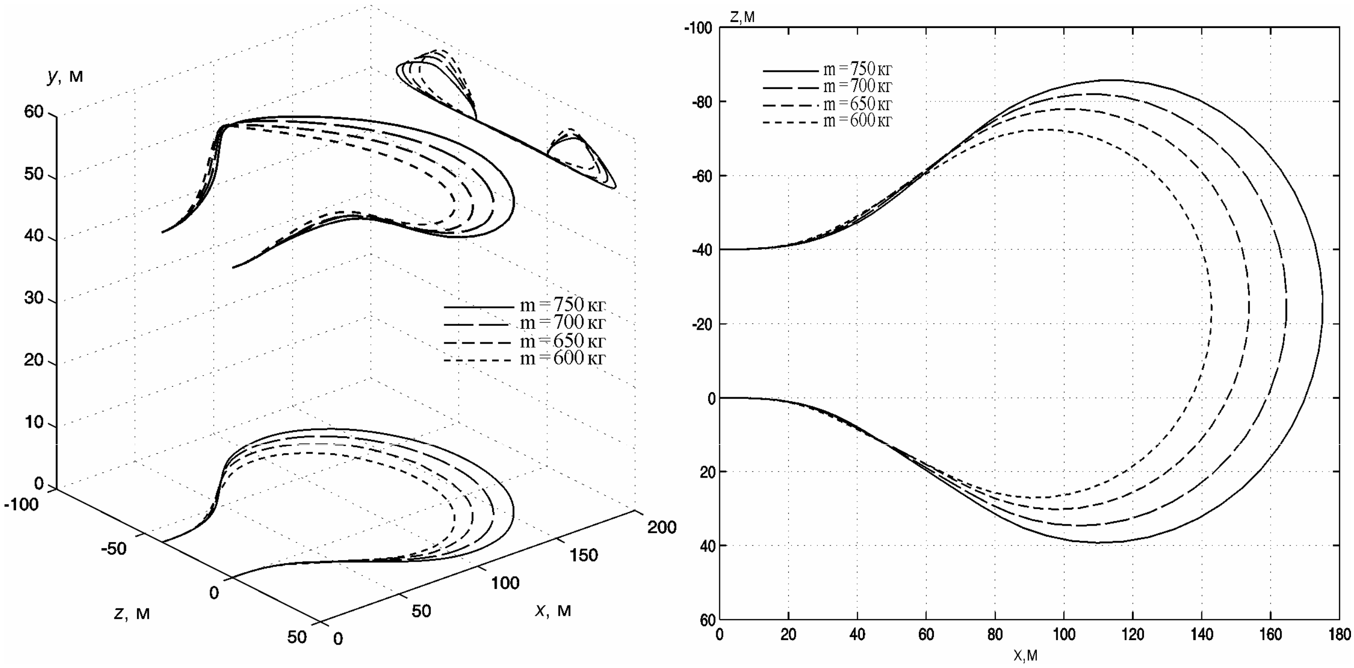


Рис. 3.30. Влияние изменения массы самолёта на оптимальные траектории полёта

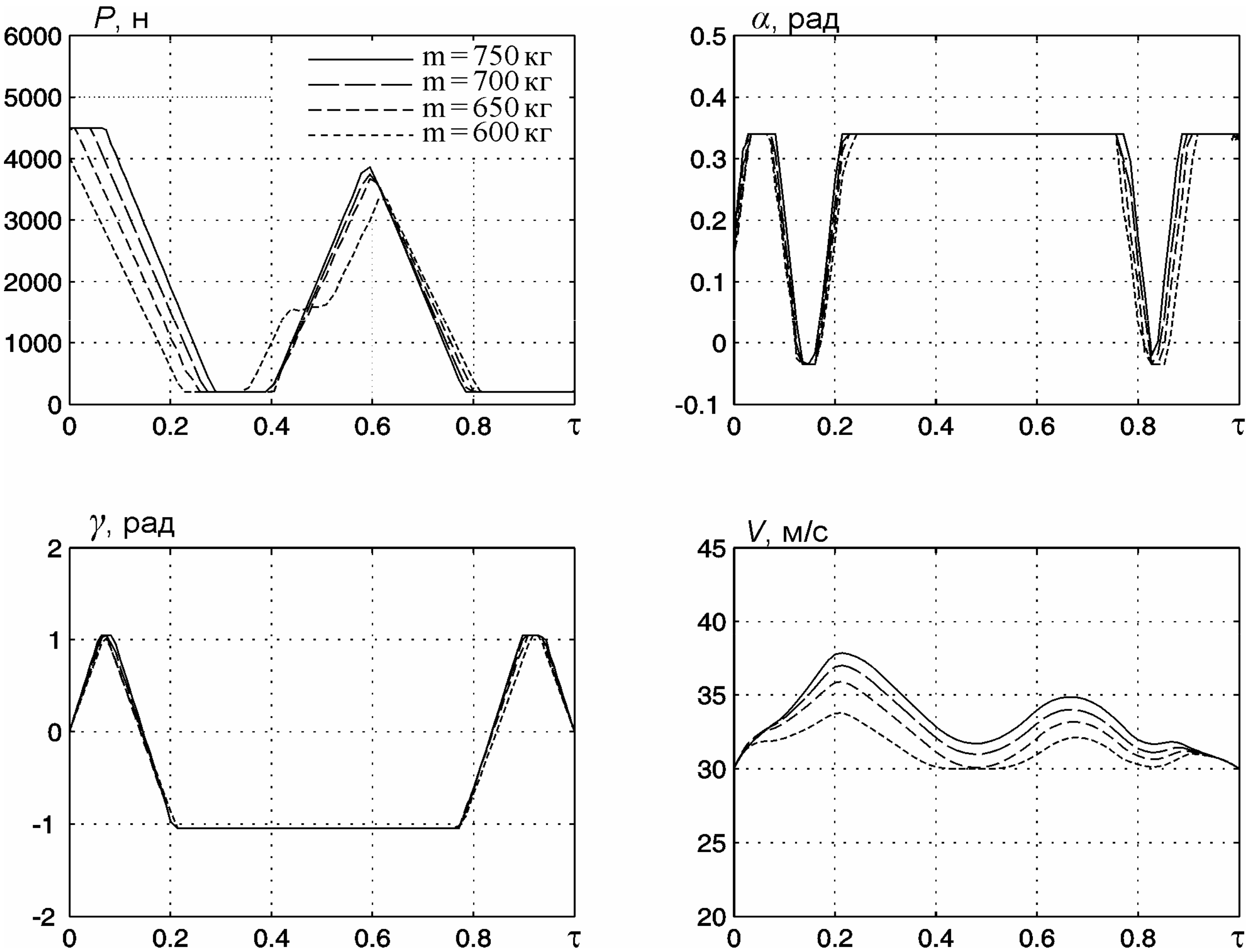


Рис. 3.31. Влияние изменения массы самолёта на оптимальные переменные управления и скорость полёт

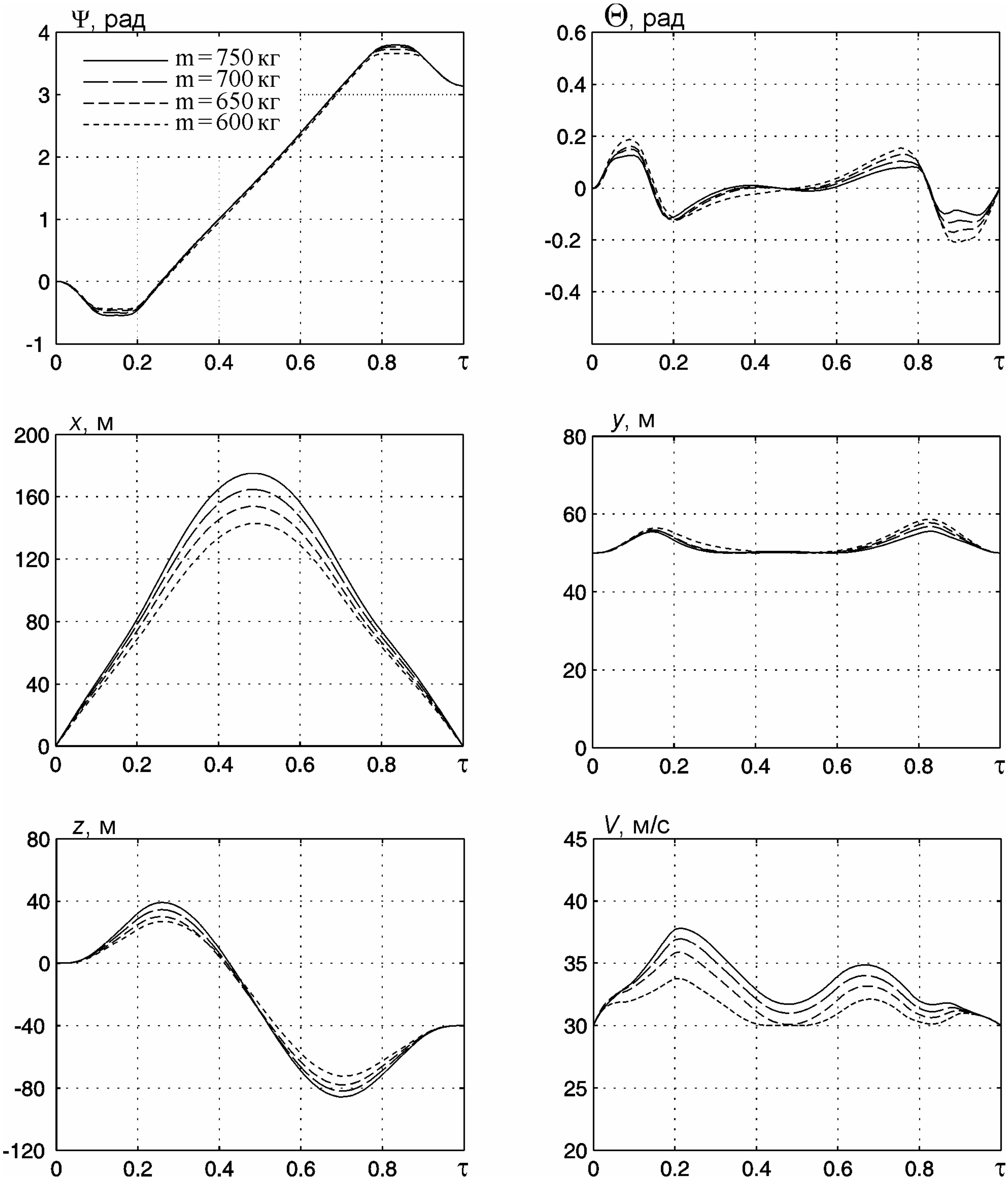


Рис. 3.32. Влияние изменения массы самолёта на оптимальные переменные состояния

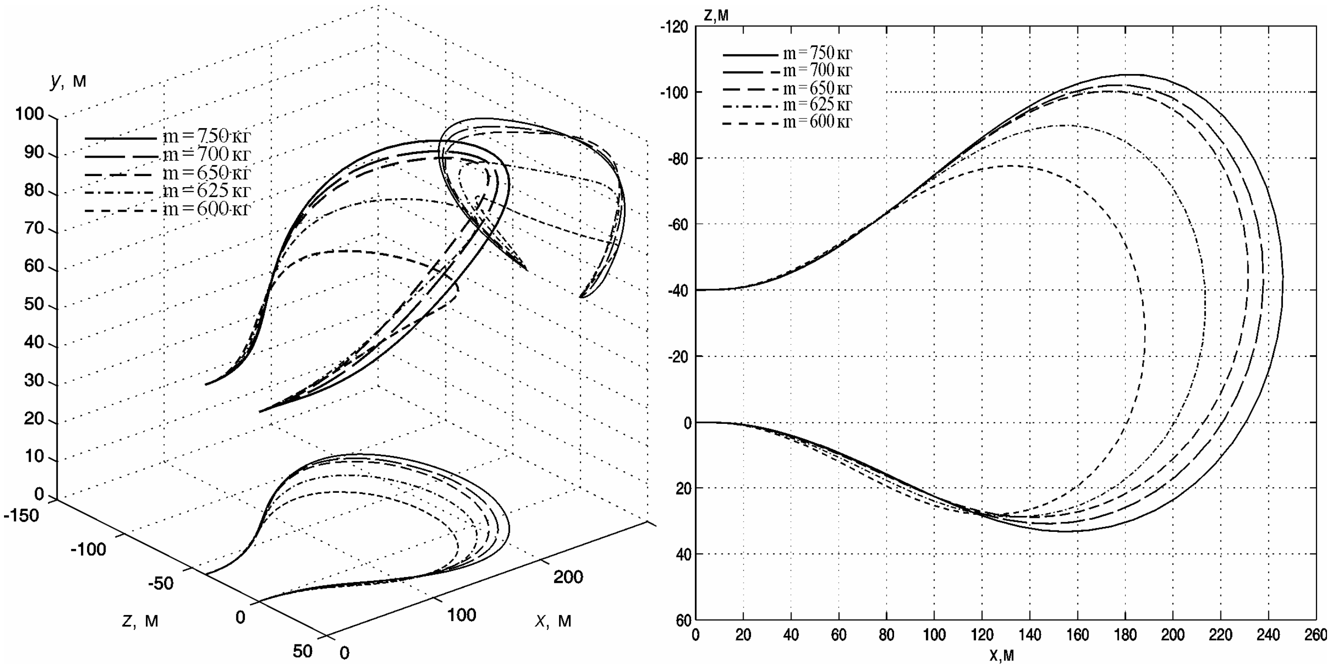


Рис. 3.33. Влияние изменения массы самолёта на оптимальные траектории полёта

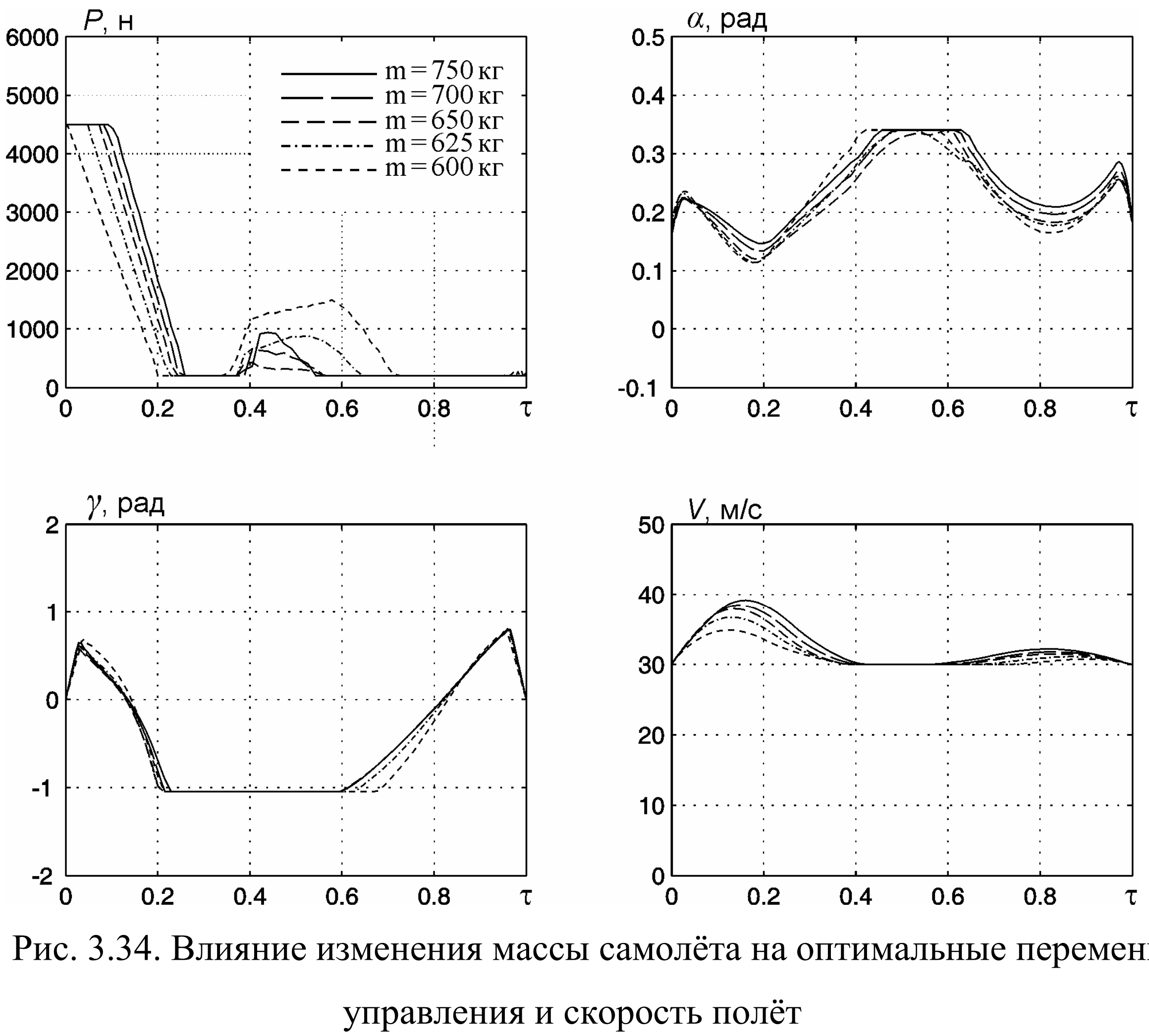


Рис. 3.34. Влияние изменения массы самолёта на оптимальные переменные управления и скорость полёт

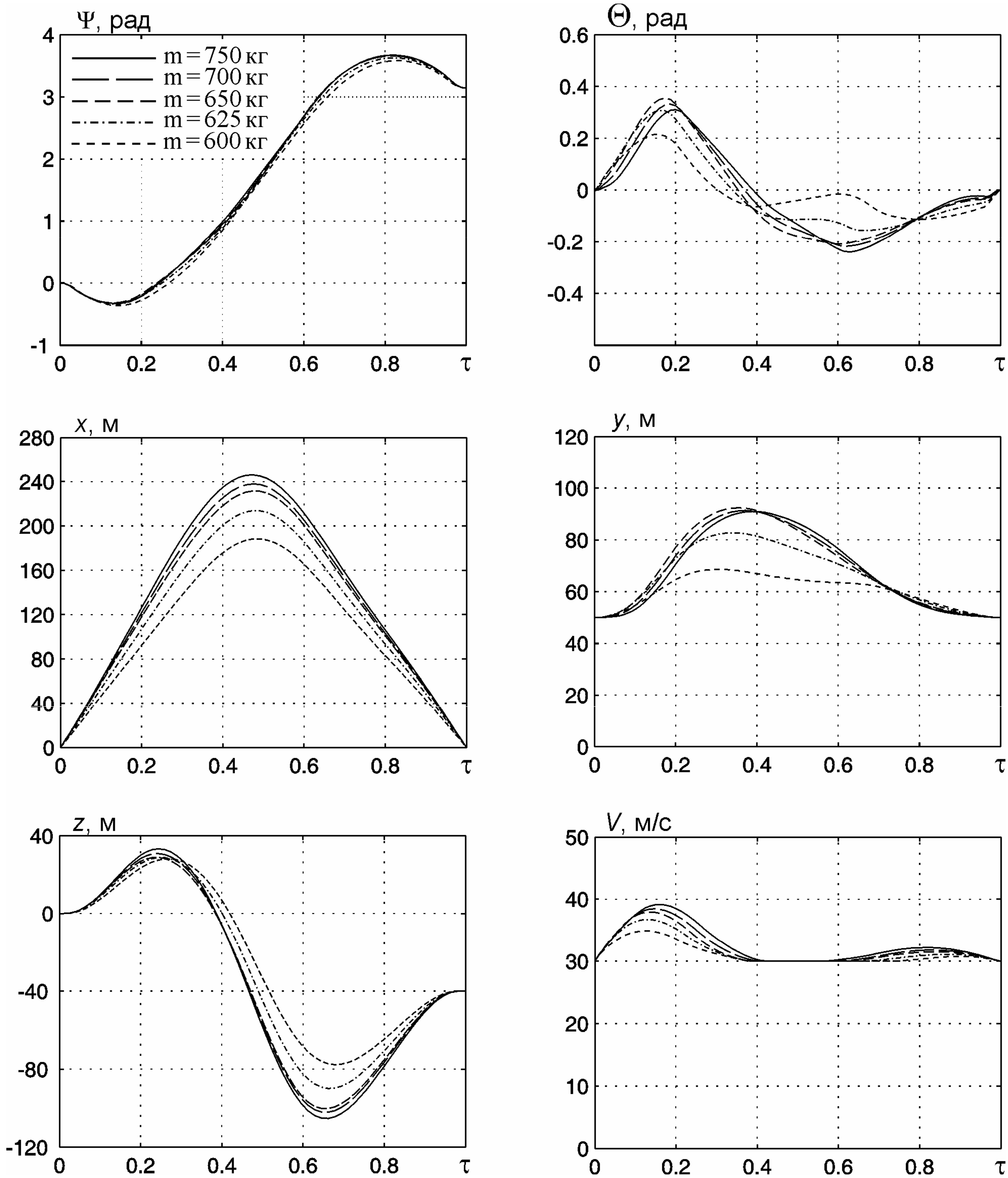


Рис. 3.35. Влияние изменения массы самолёта на оптимальные переменные состояния

На рис. 3.36 приведены графики, показывающие затраты времени и топлива в зависимости от массы самолёта при выполнении разворота с оптимизацией по критериям быстродействия (J_T) и экономичности (J_F).

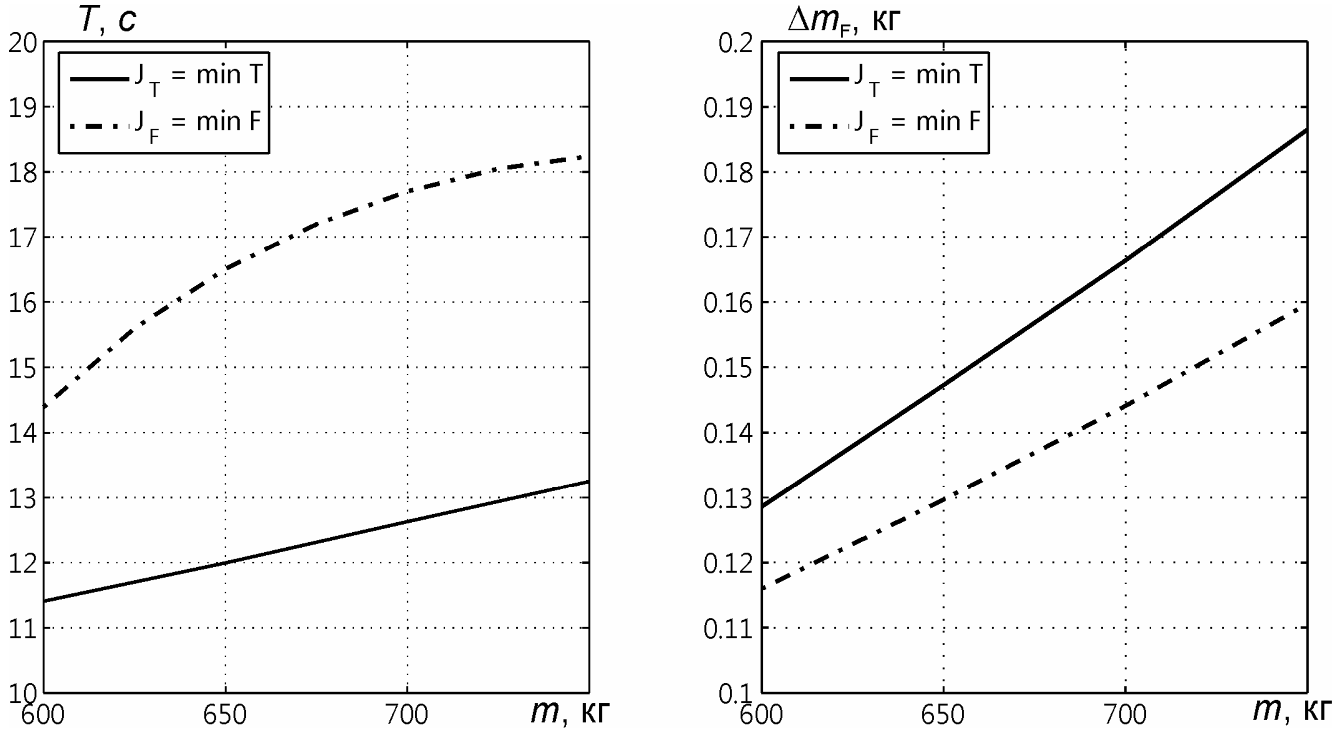


Рис. 3.36. Затраты времени и топлива при изменении массы самолета

Правая часть рис. 3.36 содержат графики зависимости расхода топлива от массы самолета. В рассмотренном диапазоне изменения массы (600÷750 кг) эта зависимость показывает практически линейное снижение расхода топлива при уменьшении массы самолета для обоих вариантов оптимизации. Левая часть рис. 3.36 содержат графики для зависимости времени разворота от массы самолета. В случае оптимизации по критерию быстродействия зависимость времени маневра практически линейна, но в случае оптимизации по критерию минимума расхода топлива зависимость уже нелинейная. Тем не менее, в обоих случае длительность маневра сокращается при уменьшении массы самолета. Можно также отметить, что при оптимизации по критерию быстродействия переход от m = 750 кг до m = 600 кг приводит к уменьшению длительности маневра примерно на 1.8 с. А в случае оптимизации по критерию расхода топлива соответствующее отличие составляет уже 3.8 с.

3.11. Вывод раздела Б

В данном разделе представлены результаты решения задач оптимизации псевдоспектральным методом Гаусса. Результаты численного решения задачи соответствуют легкому самолету (масса 550 кг).

- Решение задачи оптимизации набора высоты в вертикальной плоскости по критерию времени
- Решение задачи оптимизации набора высоты в вертикальной плоскости по критерию топлива
- Решение задачи оптимизации разворота самолёта в горизонтальной плоскости по критерию времени
- Решение задачи оптимизации разворота самолёта в горизонтальной плоскости по критерию топлива
- Решение задачи оптимизации разворота в пространстве по критерию времени
- Решение задачи оптимизации разворота в пространстве по критерию топлива
- Рассмотрены влияния изменения массы самолёта на расход топлива и время маневра.

Полученные результаты можно использовать как оптимальные программы управления полётом.

3-В. Задача оптимизации движении самолёта на заданной траектории

3.12. Постановка задачи

Предполагается, что траектория или программа полёта задана. Надо формировать переменные управления, обеспечивающие движение самолёта вдоль заданной пространственной траектории. Траектория может быть задана в виде координат $x(t)=x_{зад}(t)$, $y(t)=y_{зад}(t)$, $z(t)=z_{зад}(t)$ или в некотором виде посредством задания маршрута полета и графика прохождения промежуточных пунктов этого маршрута. Высота самолёта $y_{зад}(t)$ может задаваться как эквидистанта рельефа местности или как поверхность равных барометрических высот (равных барометрических давлении). Вместо $x_{зад}(t)$, $z(t)=z_{зад}(t)$ может задаваться программа изменения угла рыскания (курсовой метод) $\psi_{зад}(t)$ [55]. Критерии оптимизации в этой задаче часто формируются как критерии минимизации отклонений между заданной и действительной траекторями. Можно использовать многие другие критерии оптимальности, но более широко применяются квадратичные критерии отклонений.

Рассмотрим следующую задачу: Заданная траектория представляется значениями координат $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$. Здесь τ – относительная единица времени. Самолёт должел отследить заданную траекторию с самой высокой точностью.
В этой задаче критерий оптимизации имеет вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[k_x.(x_{зад}(t) - x(t))^2 + k_y.(y_{зад}(t) - y(t))^2 + k_z.(z_{зад}(t) - z(t))^2 \right] dt$$

Здесь k_x, k_y, k_z – весовые коэффициенты.

Известно, что для линейных динамических систем, описываемых системой уравненям:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

Задача оптимального управления, в которой критерий оптимальности представляет собой квадратичный функционал:

$$J = \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru)dt$$

Эта задача хорошо изучена и линейно-квадратичные регуляторы (LQR) получили широкое распространение. Закон управления имеет вид отрицательной обратной связи переменных состояния:

$$u = -R^{-1} B^T Px \ ,$$

где матрица P может быть определена из алгебраического уравнения Риккати

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \, .$$

В 60-х годах предыдущего столетия А.М. Летовым была представлена теория аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), в которой рассматривались задачи с квадратичными функционалами. Эта проблема также рассматривалась академиком А.А. Красовским [56, 57], а позднее - учёными В. Н. Буковым [55] и В. Н. Сизых [37]. В задачах АКОР выбор функционала играет важную роль. В последнее время подходы АКОР обобщались для решения задач оптимизации управления нелинейными объектами с неквадратичными функционалами.

3.13. Решение и анализ.

На рис. (3.37÷3.40) показан один из примеров решения задачи отслеживания заданной траектории (на графиках представлена штрих пунктирными линиями). Заданная траектория взята из решения рассмотренной в §3.10.1 (m=750 кг) задачи оптимизации. Сплошные линии на графиках соответствуют отслеживающей траектории самолёта. Скорости полёта, представленная графиками на рис. 3.38, вычислялась по формуле $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

В квадратичном функционале качества слежения J использовались значения параметров: k_x= 0.01; k_y= 0.08 ; k_z = 0.01; t_0=0 ; t_f = T = 13.2 с. В начальный момент времени самолёт имел значения высоты (65 м), бокового удаления (12 м) и скорости (35 м/с), которые отличаются от соответствующих значений на заданной траектории. О сходимости траектории самолета к требуемому номиналу можно судить по 3-мерным графикам траекторий и их горизонтальных проекций (рис. 3.37, 3.38). а также по поведению переменных управления и состояния (рис. 3.39, 3.40). Представленные графики показывают сходимость процесса слежения и получение траектории, близкой к заданному номиналу. В данном примере начальное отклонение было сравнительно большим и достаточная близость реализующейся траектории к номиналу наступает примерно после τ = 0.6 (t=8 с).

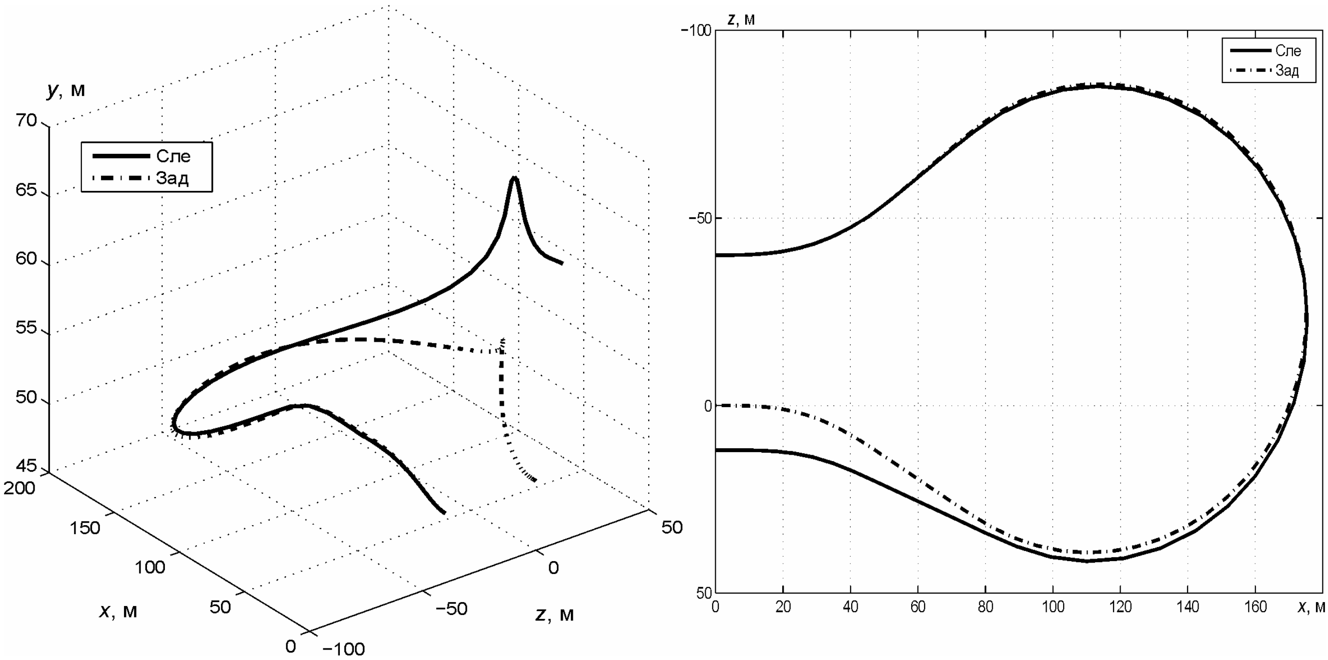


Рис. 3.37. Заданная и следящая траектории и их горизонтальные проекции

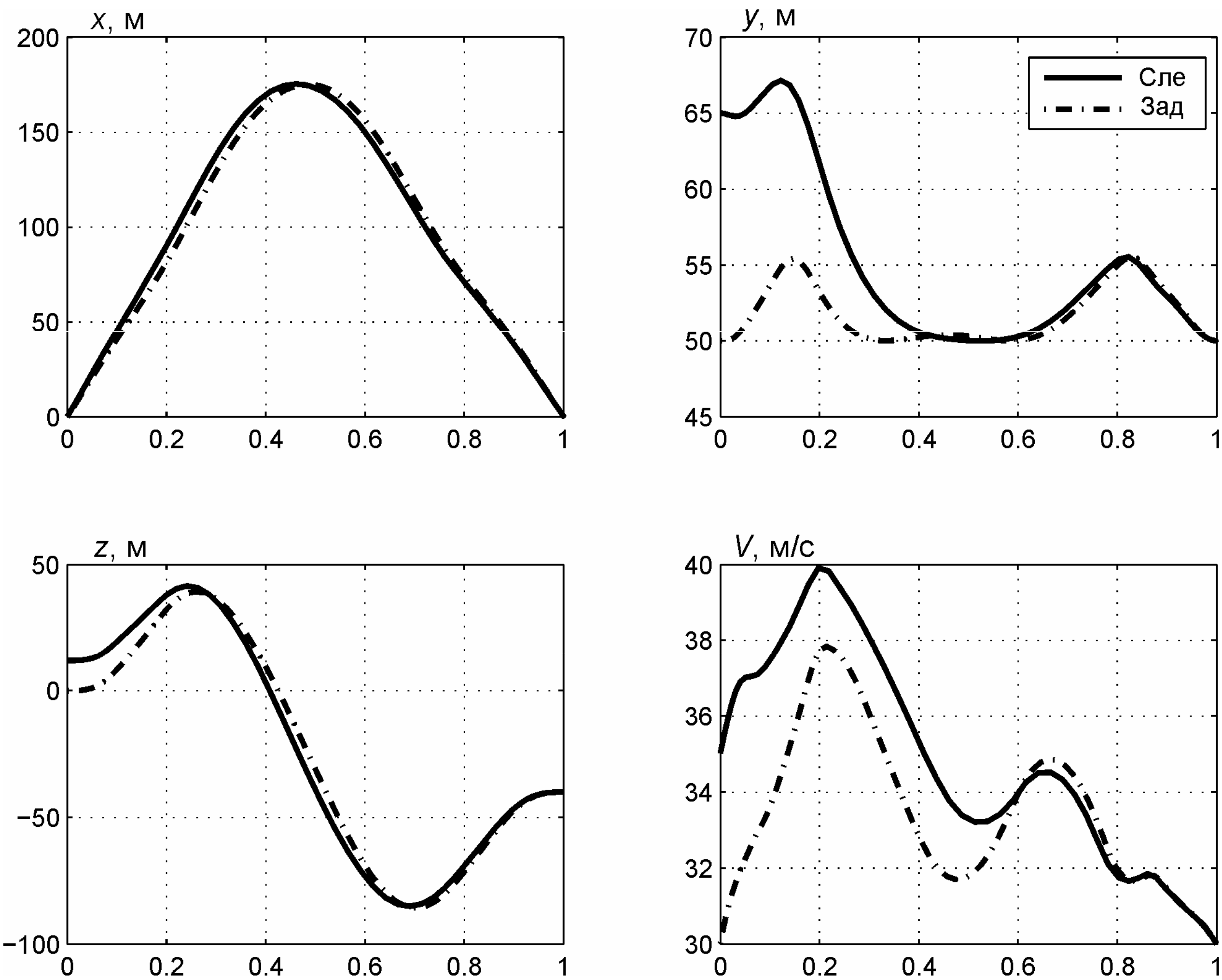


Рис. 3.38. Заданная и следящая координаты

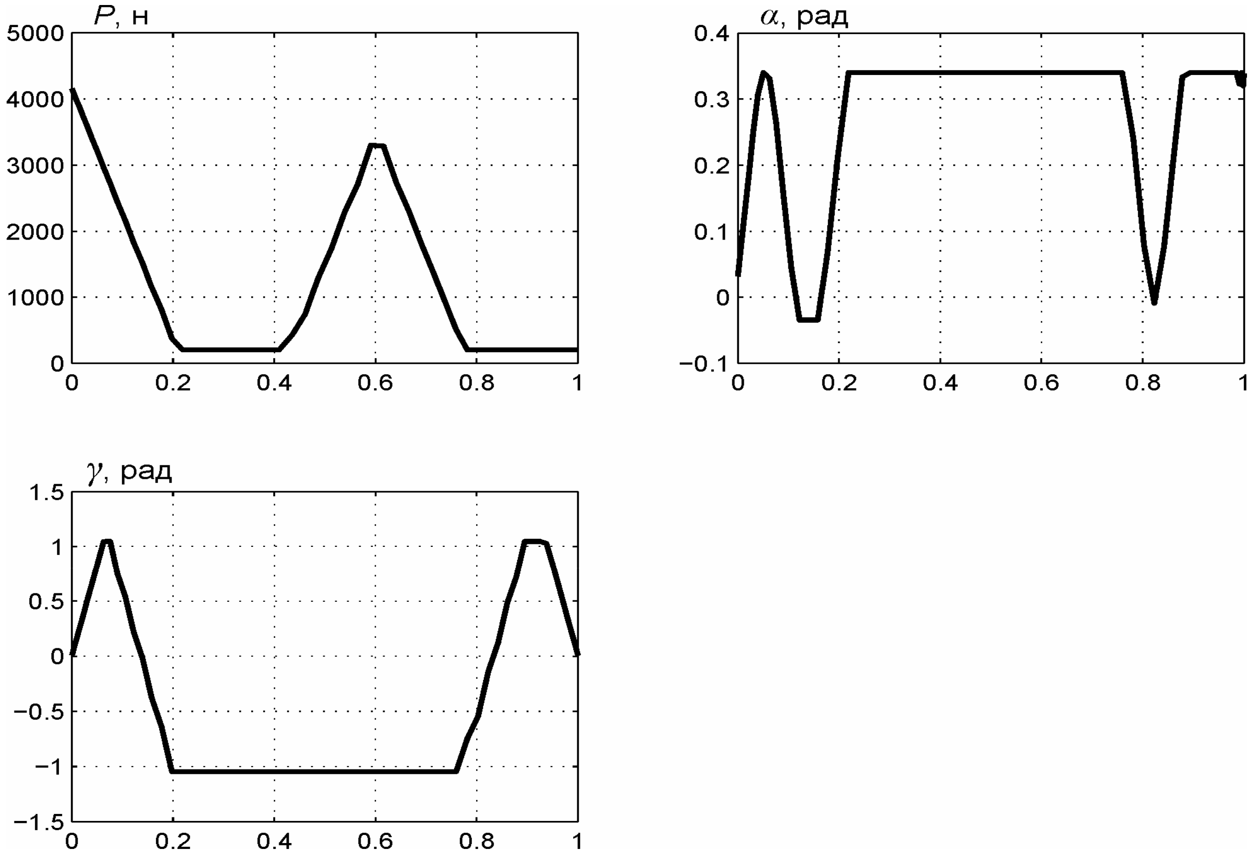


Рис. 3.39. Поведение переменных управления

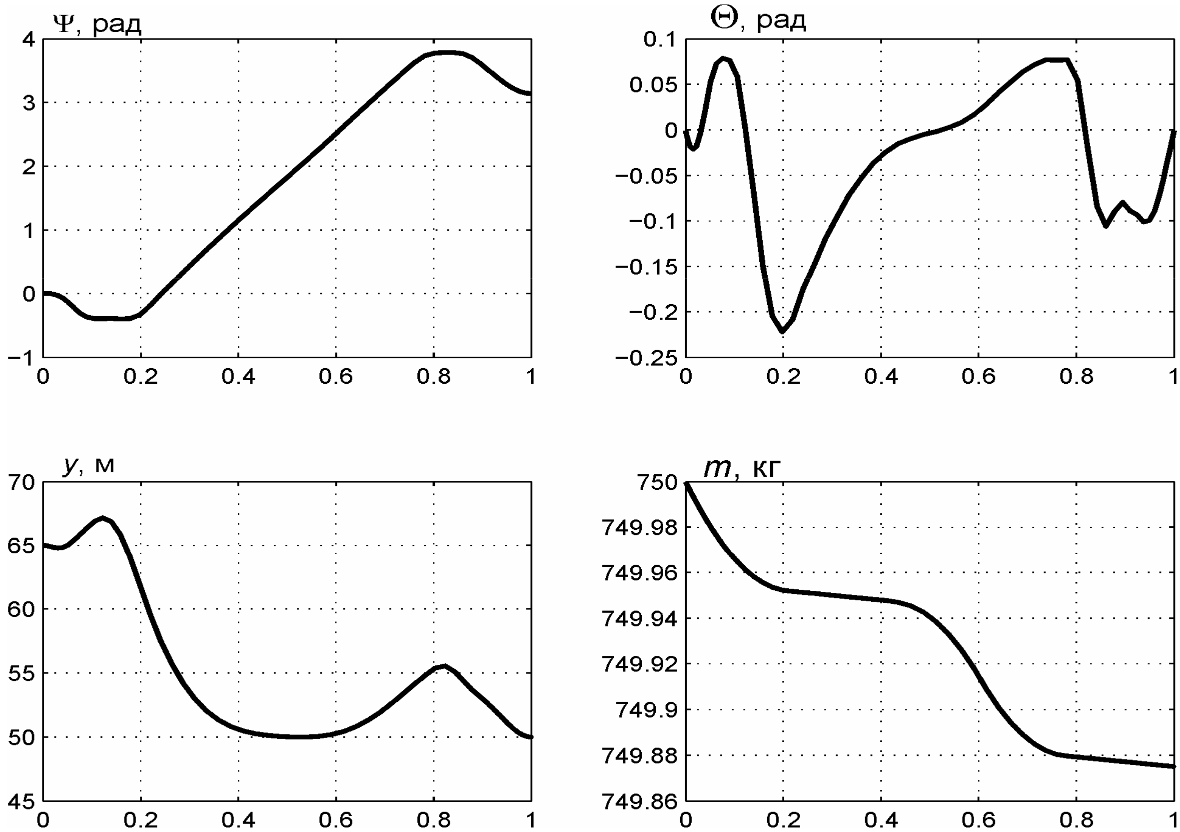


Рис. 3.40. Поведение переменных состояния

3.14. Выводы по главе

Раздел состоит из трех частей (**А**, **Б** и **В**). В первых двух частях (**А**, **Б**) рассматриваются методы оптимизации типа прямых вариационных методов, наиболее пригодных для оптимизации маневров самолета с целью повышения общей эффективности выполнения воздушных работ. Приводимые примеры включают типичные маневры – набор высоты и развороты (горизонтальный и пространственный). В качестве критериев эффективности выполнения маневров рассматриваются экономичность и быстродействие. Конкретные расчеты выполнены для самолета легкого класса. В заключительной части (**В**) раздела предлагается синтез управления для реализации оптимальных траекторий маневра на принципах линейно-квадратичного оптимального регулятора.

В части **3-А** рассматривается метод прямой оптимизации с параметризацией траекторных переменных с помощью специальным образом заданных базисных функций, обеспечивающих автоматическое выполнение граничных условий и снимающих проблему необходимости решения краевой задачи. Управляющие переменные определяются по траекторным переменным на основе концепции обратной задачи динамики. Дополнительно рассмотрен простой метод генерирования траектории, основанный на использования аппроксимирующих полиномов без проведения оптимизации и учета ограничений. Оба метода проверены на расчетных примерах с маневрами типа разворота с набором высоты, а также разворота с набором высоты и последующим возвратом на исходную высоту. Полученные результаты показывают, что этот простой метод ненадежен, т.к. он часто может приводить к получению нереализуемой траектории.

В части **3-Б** для оптимизации маневров самолета рассматривается применение псевдоспектрального метода Гаусса, в котором для прямого решения задач оптимального управления используются идеи современной вычислительной математики. Благодаря параметризации управляющих переменных (также, как и фазовых переменных) этот метод обходится без привлечения концепции обратной задачи динамики. Метод оказался достаточно надежным и с помощью него решена основная часть рассмотренных в диссертационной работе примеров по оптимизации маневров самолета (набор высоты, плоский и пространственный развороты). На основе полученных в расчетных примерах результатов проведен анализ особенностей оптимальных траекторий маневра. В том числе исследовано влияние изменения массы самолета в процессе воздушной работы на характеристики оптимального разворота.

В части **3-В** для реализации сгенерированных траекторий маневра предлагается использовать следящую систему, организованную на принципе синтеза оптимального линейно-квадратичного регулятора. Приводятся необходимые расчетные формулы. Представлен иллюстрирующий расчетный пример с отслеживанием заданной траектории пространственного разворота самолета, свидетельствующий о потенциальной пригодности предлагаемого подхода.

4. Реализация оптимальных режимов

В разделах 2, 3 рассматривались построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ. Это оптимальные системы с «жесткой» настройкой (без адаптации), которые построены по заданным критериям оптимальности: по быстродействию и по минимуму расхода топлива. Решения оптимальных программных управлений и оптимальных программ представлены в виде функций по времени. Это разомкнутые системы или системы без обратной связи. Если оптимизация выполнена для всей траектории, соединяющей начальную и конечную точки, то оптимальные программные управления обеспечивают полную и глубокую оптимизацию. Однако эти оптимальные результаты могут быть достигнуты только в том случае, если объект управления и информационные каналы не подвергаются воздействию возмущений, математическая модель объекта управления, начальное и конечное состояния известны с достаточной степенью точности, а программное управление точно реализовано. Но на практике такая идеализация редко осуществима. Влияния внешних возмущений, погрешности модели объекта и управлений приводят к отклонению от начальной оптимальной программы. Поэтому эти системы такого класса в большинстве случаев неработоспособны. В связи с эти интерес представляет подкласс оптимальных систем с адаптацией: экстремальные системы или системы локальной оптимизации. Эти системы обеспечивают оптимизацию в реальном времени в каждой точке траектории движения.

В данном разделе рассматривается возможность применения экстремального регулирования для автоматической оптимизации полета самолета при выполнении воздушной работы. Если за критерий эффективности принять экономичность по расходу топлива, то для выполнения текущей оптимизации (в каждый момент времени) удобно рассматривать коэффициент удельной дальности $C_{\text{уд}}$, который показывает расход топлива на единицу пройденного пути. Чем меньше величина $C_{уд}$, тем меньше топлива потребуется для выполнения полета с требуемой дальностью

4.1. Постановка задачи

Для расчёта расхода затрат топлива $m_Т$ на единицу пройденного пути L в горизонтальном полете с постоянной скоростью V используется коэффициент удельной дальности $C_{уд}$:

$$C_{УД} = \frac{dm_T}{dL} = \frac{C_e P}{3600V} \qquad (4.1)$$

где P - тяга двигателя (N), $C_е$ - удельный расход топлива (кг/N.ч)

Величина $C_е$ зависит от высоты и скорости полета, тяги двигателя, поэтому коэффициент удельной дальности $C_{УД}$ является функцией этих же параметров. Следует отметить, что из-за вариативности характеристик двигателя, а также ввиду зависимости этих характеристик от состояния окружающей среды (атмосферных параметров, которые могут непредвиденно изменяться), реальное значение $C_{уд}$ может заметно отличаться от значения, определенного по формуле (4.1) с использованием номинальных характеристик. Однако значение $C_{уд}$ можно определять в виде отношения секундного расхода топлива dm_T / dt к скорости полета $V = dL / dt$, т.е. по формуле

$$C_{УД} = \frac{dm_T / dt}{V}. \qquad (4.2)$$

Секундный расход топлива dm_T / dt и скорость полета доступны измерениям бортовыми средствами (имеются расходомеры, системы воздушных и навигационных данных). Поэтому истинное значение $C_{уд}$, определяемое формулой (4.2), в каждый момент времени известно. Целью экстремального управления является автоматические поиск и поддержание скорости полёта так, чтобы величина $C_{уд}$ достигала минимума.

4.2. Характеристика зависимости коэффициента $C_{уд}$ от скорости полета

На рис. 4.1 приведены графики зависимости $C_{уд}$ от скорости для самолета лёгкого класса (высота полета H=700м). Левая часть графика содержит зависимость и истинных координатах, а правая часть – в относительных ($C_{уд}/C_{уд}$ min и $V/V_{опт}$). Графики показывают наличие одной точки минимума.

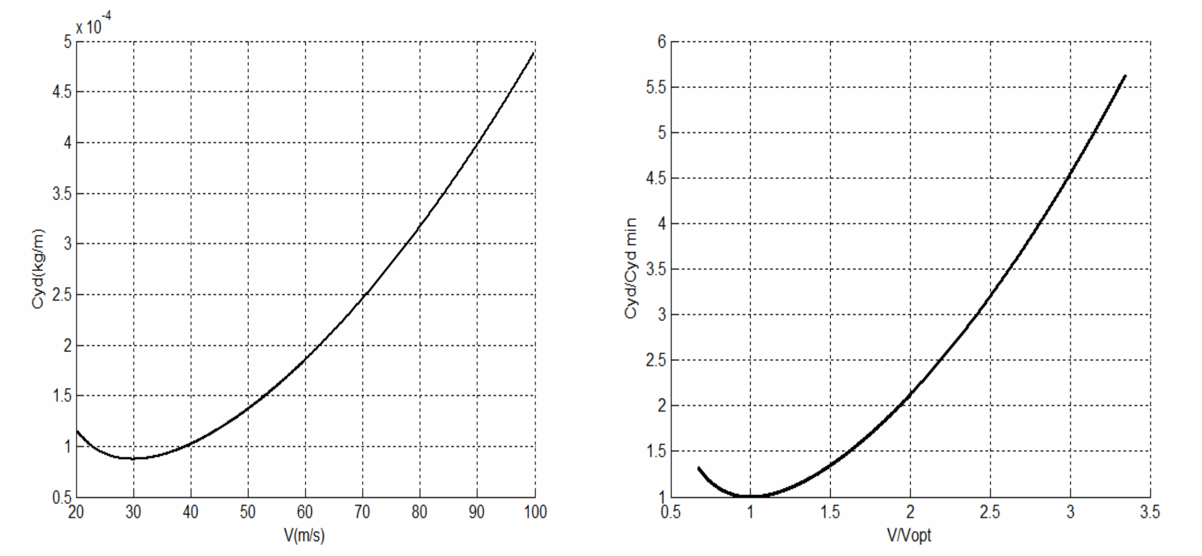


Рис. 4.1. Зависимость $C_{уд}$ от скорости полета лёгкого самолета (H = 700 м).

Аналогичные графики для среднемагистрального пассажирского самолета приведены приведены на рис. 4.2. Графики построены для двух высот полета: H = 2 км и H =6 км .

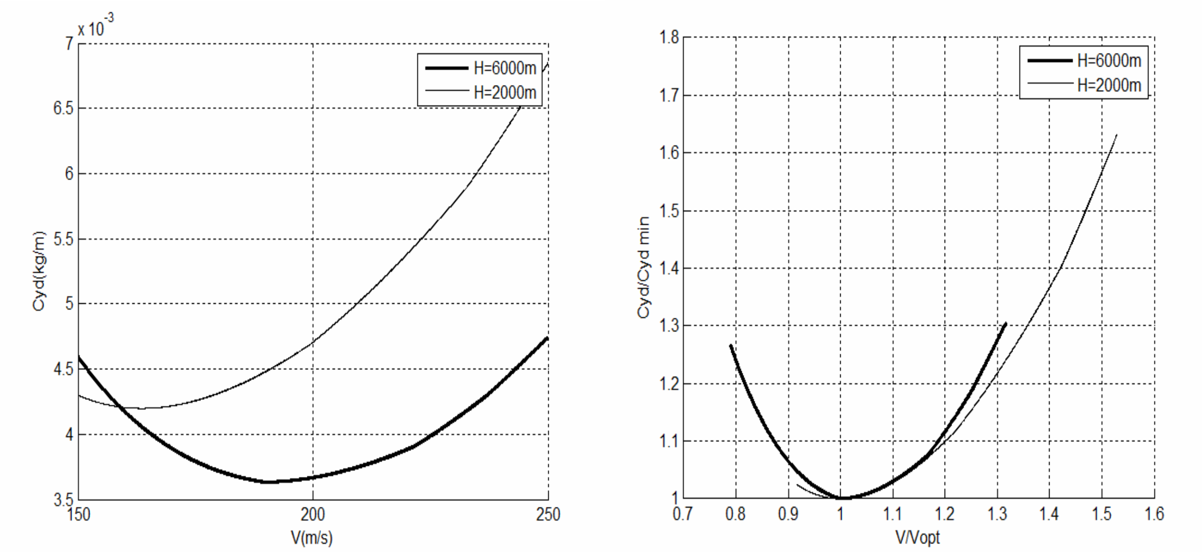


Рис. 4.2. Зависимости $C_{уд}$ от скорости полета среднемагистрального пассажирского самолёта (H = 2 км и H = 6 км).

Как и в первом случае графики показывают наличие одного минимума по скорости полета. В данном случае значение $C_{уд}$ на большей высоте меньше значения $C_{уд}$ на малой высоте.

4.3. Модель объекта управления

Система уравнений движения центра масс самолета в вертикальной плоскости имеет вид:

$$\begin{cases} m\dot{V} = P\cos\alpha - C_x qS - G\sin\theta \\ mV\dot{\theta} = P\sin\alpha + C_y qS - G\cos\theta \\ \dot{H} = V\sin\theta \\ \dot{L} = V\cos\theta \\ \dot{m}_T = C_e P/3600 \end{cases} \qquad (4.3)$$

С использованием (4.3) объект управления можно моделировать в виде блоков:

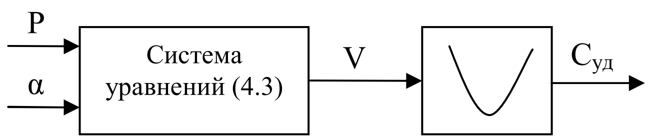


Рис. 4.3. Модель объекта в виде блоков

Модель объекта экстремального регулирования состоит из двух частей: Динамическая часть описывается системой уравнений (4.3). Часть “Экстремальная характеристика”- это однозначная зависимость критерия $C_{уд}$ от скорости полета V, имеющая один экстремум.

4.4. Системы экстремального управления

Оптимальные адаптивные системы подразделяют на подклассы в зависимости от способа адаптации [42]. Рассмотрим один подкласс - экстремальные системы. Такие системы являются системами автоматического управления, которые автоматически обеспечивают оптимальный режим, соответствующий экстремуму статической характеристики объекта при возможном наличии "дрейфа”, за счет автоматического регулирования сигналов на входе экстремального объекта. Оптимальному режиму управляемой системы соответствует экстремум (максимум или минимум) какого-либо критерия качества. Поэтому наличие достаточно выраженного экстремума у рассматриваемого критерия качества является необходимым условием для применения экстремального регулирования.

С изменением внешних условий, а также дрейфа (сравнительно медленное изменение) параметров системы значение экстремума и его положение могут меняться, но это не влияет на точность системы экстремального регулирования. Она находит и фиксирует новое положение экстремума и, таким образом, корректирует изменение внешних условий и дрейф параметров системы. Система экстремального регулирования обеспечивает наилучшие режимы работы даже в условиях присутствия сильных возмущающих воздействий и при отсутствии точных данных о характеристиках объекта регулирования.

Наиболее интенсивное развитие экстремальное регулирование получило в 60-70-х годах XX века. Большой вклад в развитие теории и практики систем экстремального регулирования внесли советские ученые - В.В. Казакевич, П.И Чинаев, Б.А. Арефьев, А.А. Красовский, А.А. Растригин, И.С. Моросанов, Л.М. Либерзон, А.Б. Родов, и др. После первого этапа бурного развития исследования по системам экстремального регулирования на некоторое время приостановились. Однако в последнее время интерес к таким системам снова возродился. Новые исследования связаны с работами А.С. Вострикова, Г.А. Французовой, M. Krstic, K. B. Ariyur, C. Zhang, D. Nesic, R. Ordonez и др.

К настоящему времени разработано довольно много вариантов метода экстремального регулирования. В зависимости от способа поиска экстремума, характеристик входных и выходных величин объекта регулирования можно выделить следующие типы экстремальных систем:

- Шаговые экстремальные системы, в которых входные управляющие сигналы имеют дискретный ступенчатый вид.

- Системы с запоминанием экстремума, в которых значения выходного сигнала запоминаются, а разности между ними используются для определения входного управляющего сигнала.

- Градиентные системы или системы экстремального регулирования, которые действуют по чувствительности. Здесь под градиентом или чувствительностью понимается производная выхода регулируемого объекта по входу dy/dx (x – вход, y – выход). Градиентные экстремальные системы могут быть следующего вида: с прямым использованием сигнала о градиенте, с непрерывным поисковым сигналом, с дискретными значениями градиента. В этих системах, модуль и (или) знак градиента используются для создания входного управляющего сигнала.

- Системы со вспомогательной модуляцией, которые определяют направление движения к экстремуму по сдвигу фазы между входными и выходными колебаниями объекта.

В зависимости от наличия или отсутствия специального возбуждающего сигнала экстремальные системы можно разделить на два типа:

- поисковые (возбуждающий сигнал используется),
- безпоисковые (возбуждающий сигнал не используется).

4.4.1. Системы экстремального управления на основе оценки градиента или его знака

Рассматривается метод экстремального регулирования на основе оценки градиента. Задача синтеза системы управления на основе оценки градиента состоит из двух частей:

- Оценка градиента или его знака
- Организация движения к экстремуму

Пусть $y(x)$ - зависимость, для которой надо определить точку экстремума (минимум или максимум). Автоматическая система может обеспечить движение к точке экстремума по информации о значении градиента (dy/dx) или его знака. В диссертационной работе рассматривается вариант релейной экстремальной системы, в которой движение к точке экстремума по знакам производных (*dy/dt*) и (*dx/dt*).

Вычислить градиент можно по формуле:

$$G = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} \tag{4.4}$$

Для использования формулы требуется определять производные по времени для входного *x(t)* и выходного *y(t)* сигналов. Формула (4.4) простая, но получение непрерывной оценки градиента в реальности представляет собой непростую техническую проблему. Разработано много методов определения производной и градиента. Например, возможны оценка градиента с помощью специального фильтра, определение производной фильтрами первого порядка, фильтрами второго порядка, дифференциаторами переменной структуры и т.д. Из-за влияния помех, и особенно при малых значениях производной в окрестности экстремума $\partial y / \partial x \approx 0$, формула (4.4) дает неточные результаты. При (*dx/dt*) → 0 производная (*dy/dt*) → 0 также стремится к нулю. Поэтому, задача отыскания экстремума становится неопределенной. Для исключения случаев деления на нуль и вообще исключения операции деления, движение к экстремуму можно организовать с использованием только знака градиента. Он вычисляется по формуле

$$signG = sign\left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\right) = sign\left(\frac{dy}{dt}\right) sign\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} e = 1 & \text{при} \quad sign\left(\frac{dy}{dt}\right) sign\left(\frac{dx}{dt}\right) > 0 \\ e = -1 & \text{при} \quad sign\left(\frac{dy}{dt}\right) sign\left(\frac{dx}{dt}\right) < 0 \\ e = 0 & \text{при} \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Здесь *e* – выход звена оценки градиента ОГ.

Для организации движения к экстремуму, принято использовать пропорционально-интегральное звено

$$u = \int_0^t KGdt$$

где K - коэффициент усиления. Его значение выбирается из условия обеспечения устойчивости и быстродействия системы.

В релейных системах экстремального управления используют знак градиента. В этом случае, закон управления имеет вид

$$u = \int_0^t Kedt$$

На рис. 4.4 показана структурная схема системы экстремального управления, где в качестве критерия оптимизации рассматривается коэффициент удельной дальности $C_{уд}$.

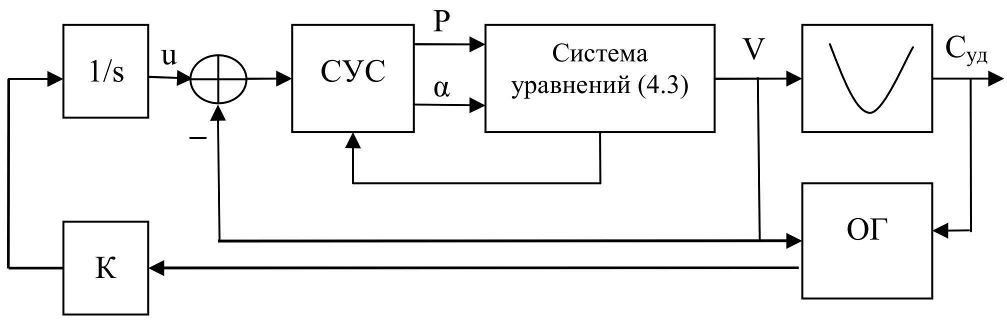


Рис. 4.4. Структурная схема экстремальной системы управления на основе оценки градиента

Блок СУС – система управления и стабилизации самолёта, состоит из контуров управления скоростью, тягой, высотой. Структурная схема блока приведена на рис. 4.5. Здесь P_V - регулятор скорости, P_H - регулятор высоты, P_T - регулятор угла тангажа.

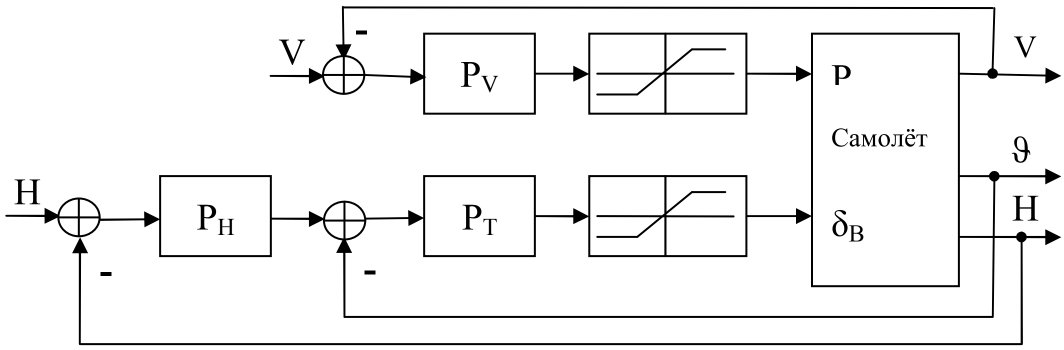


Рис. 4.5. Структурная схема системы управления скоростью, тягой, высотой

Для моделирования использовались следующие данные:

$C_y^\alpha = 4.31$ (1/rad); $\mathrm{C_y} = C_y^\alpha.\alpha$; $\alpha_{\text{кр}} = 19.5^\circ$; $\alpha_{\text{нв}} = 9^\circ$; $\mathrm{C_{y\,нв}} = 0.7$; $\mathrm{K_{max}} = 10$

$\mathrm{C_x} = \mathrm{C_{xo}} + A.C_y^\alpha = 0.035 + 0.07.C_y^\alpha$

S=14.8 м^2.   m = 550 kг.

Здесь: α [град] - угол атаки; $\alpha_{\text{кр}}$ [град] – критический угол атаки; $\alpha_{\text{нв}}$ [град] – наивыгоднейший угол атаки; C_y - коэффициент аэродинамической подъемной силы; C_x - коэффициент аэродинамической силы сопротивления; C_y^α [1/град] – производная коэффициента подъёмной силы по углу атаки; S [м^2]– площадь крыла ; *m* [кг]- масса самолёта и топлива. $K_{\max}$ – максимальное значение аэродинамического качества.

На рис. 4.6 показаны результаты моделирования системы экстремального управления на основе оценки градиента для лёгкого самолёта.

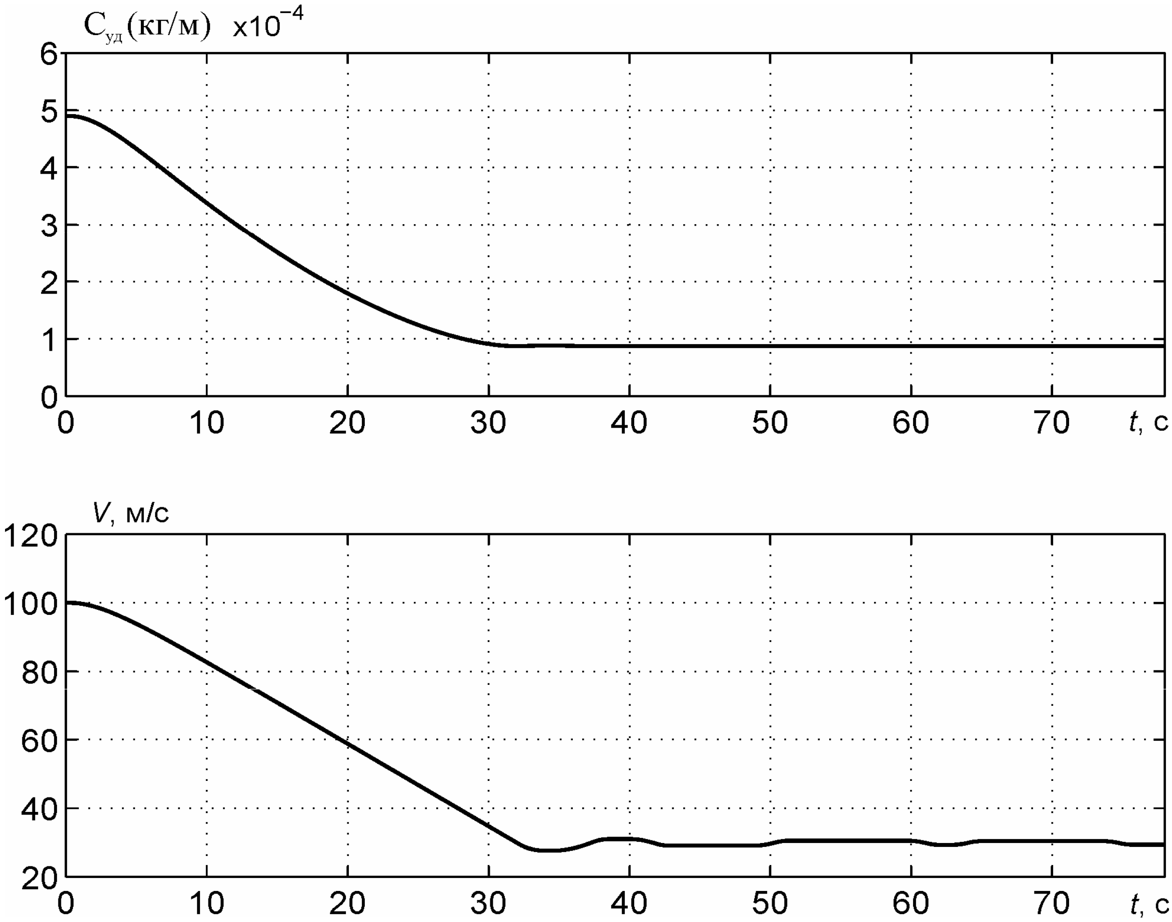


Рис. 4.6. Коэффициент удельной дальности и скорость полёта
в случае управления на основе оценки градиента

Результаты моделирования показывают, что скорость полёта из начального состояния V=100 м/с ($C_{уд}$ = 4.9.10^{-4} кг/м) приблизилась к оптимальному значению V=30 м/с за 40с. При оптимальной скорости полета значение $C_{уд}$ минимально и равно $C_{уд}$=0.89.10^{-4} кг/м. После выхода в область оптимума V=30 м/с наблюдаются колебания относительно этого значения. Однако отклонения скорости небольшие. При этих колебаниях амплитуда отклонений $C_{уд}$ от оптимального значения очень мала.

4.4.2. Системы экстремального управления с использованием синхронного детектирования

В системах экстремального управления с поисковым сигналом наиболее распространенным типом является система, в которой используется метод синхронного детектирования с поисковым синусоидальным сигналом. Пятьдесят лет назад способ синхронного детектирования был исследован и широко использован, а в последнее время этому методу ещё раз было уделено большое внимание в работах авторов M. Krstic, H. Wang, K. B. Ariyur, C. Zhang, D. Nesic, R. Ordonez и др. Структурная схема и принцип действия способа синхронного детектирования приведены в многих публикациях. С подробностями об этом методе можно познакомится, например, в работах [50÷53, 95, 96]. По сути, метод синхронного детектирования является одним методом определения градиента (или производной). Поэтому, можно поставить этот метод в группу градиентных методов.

На рис. 4.7 показана структурная схема системы экстремального управления с использованием синхронного детектирования. Поисковый синусоидальный сигнал малой амплитуды $A_1\sin(\omega t)$ добавляется к командному сигналу скорости полета.

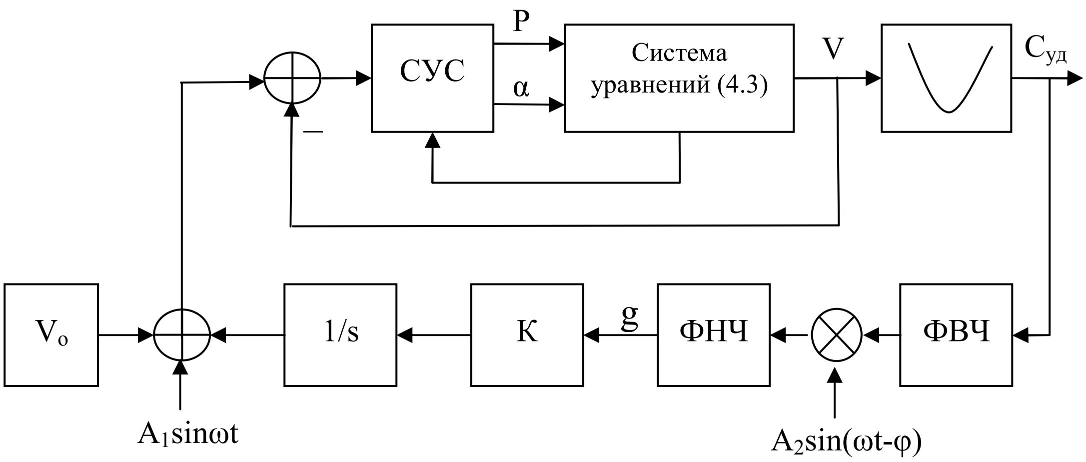


Рис. 4.7. Структурная схема системы экстремального управления с использованием синхронного детектирования

В системе используется фильтр высоких частот (ФВЧ) с передаточной функцией

$$W_{HF} = \frac{s}{s+h}$$

Этот фильтр удаляет постоянную составляющую из сигнала $C_{уд}$. На выходе фильтра получается сигнал с высокочастотными составляющими, который умножается на синусоидальный сигнал $A_2\sin(\omega t-\varphi)$, обладающий фазовым сдвигом φ. Результат перемножения подается на фильтр низких частот (ФНЧ), играющий роль усредняющего фильтра. Сигнал выхода ФНЧ оказывается пропорциональным величине градиента g.

На рис. 4.8 показаны результаты моделирования системы экстремального управления на основе использования синхронного детектирования для лёгкого самолёта. Результаты моделирования показывают, что скорость полёта из начального состояния V=62 м/с ($C_{уд}$ = 2.1.10^{-4} кг/м) приблизилась к оптимальному значению V=30 м/с за 45с. При оптимальной скорости полета значение $C_{уд}$ минимально и равно $C_{уд}$ = 0.89.10^{-4} кг/м. После выхода в область оптимума V=30 м/с наблюдаются колебания относительно этого значения. В этом случае колебания скорости и $C_{уд}$ заметнее, чем в случае §4.4.1.

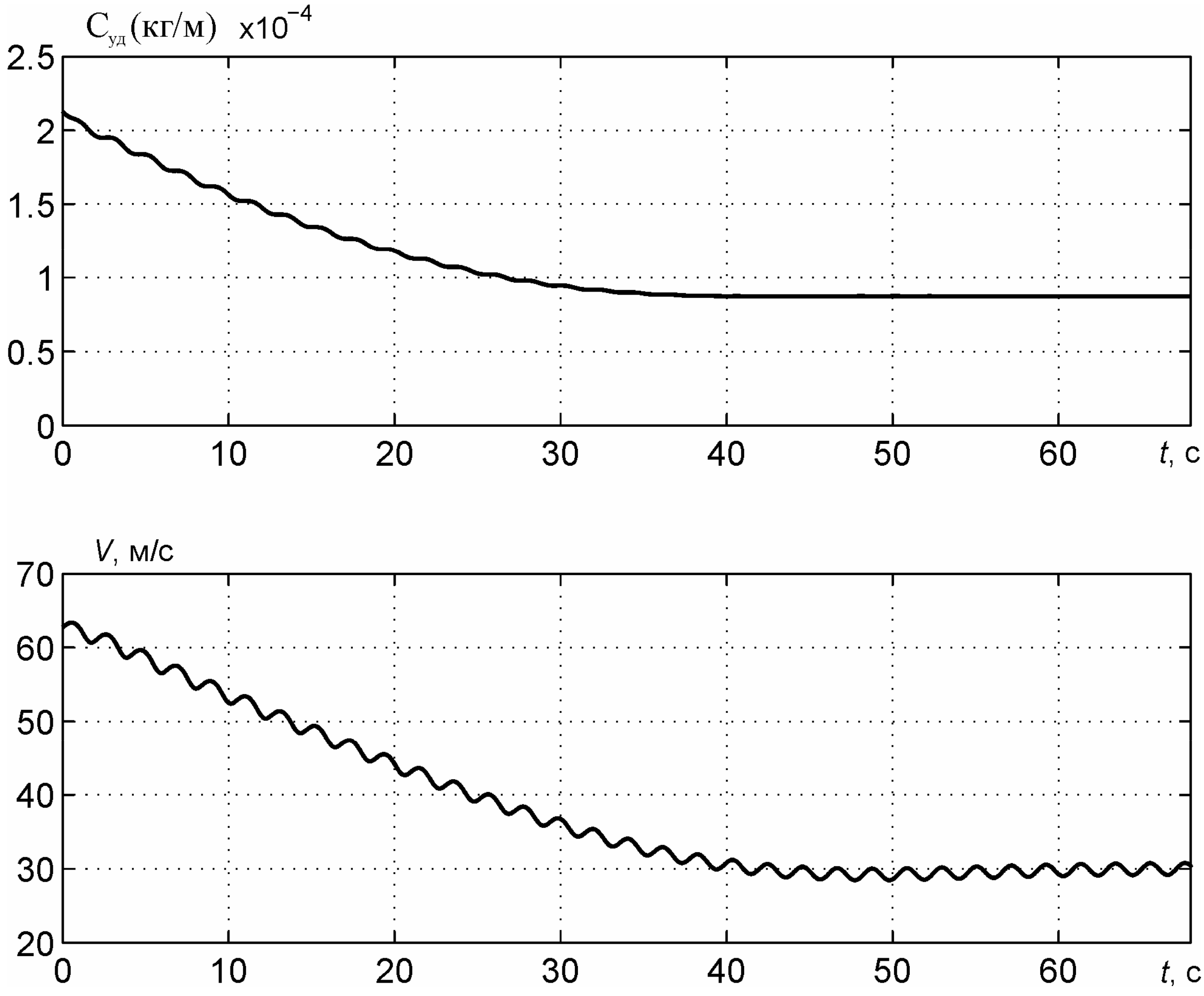


Рис. 4.8. Коэффициент удельной дальности и скорость полёта в случае управления на основе способа синхронного детектирования

4.5. Автоматическое управление полётом

В настоящее время для автоматизации полёта используются разнообразные автоматические системы – от простых регуляторов до сложных интеллектуальных комплексов. Системы автоматического управления полётом обеспечивают стабилизацию, управление угловыми движениями и движениями центра масс самолёта.

Угловые координаты и их производные характеризуют движение летательного аппарата по отношению к центру масс. Автопилоты углов тангажа, крена, курса, рыскания, углов атаки и скольжения, а также их производных, обеспечивают стабилизацию полета путем отклонения управляющих рулей по определенному закону управления. Простейшие автопилоты угла могут быть реализоваться с помощью простых ПИД-регуляторов (пропорциональные-интегрирующие-дифференцирующие). Автопилоты улучшают характеристики устойчивость и управляемости, обеспечивают требуемое качество переходных процессов. Поэтому они необходимы для любого современного самолёта. На рис. 4.9, 4.10, 4.11 приведены структурные схемы некоторых автопилотов, которые управляют рулями высоты, направления, элеронами и дросселем двигателя.

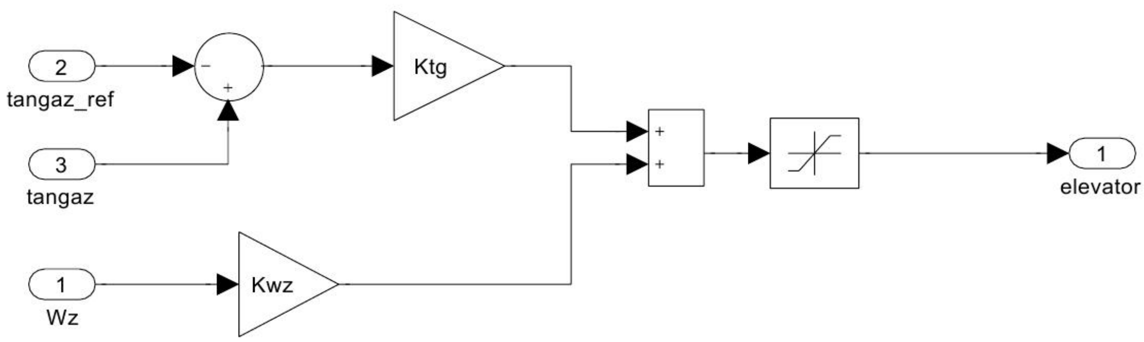


Рис. 4.9 Схема моделирования автопилота управления рулем высоты

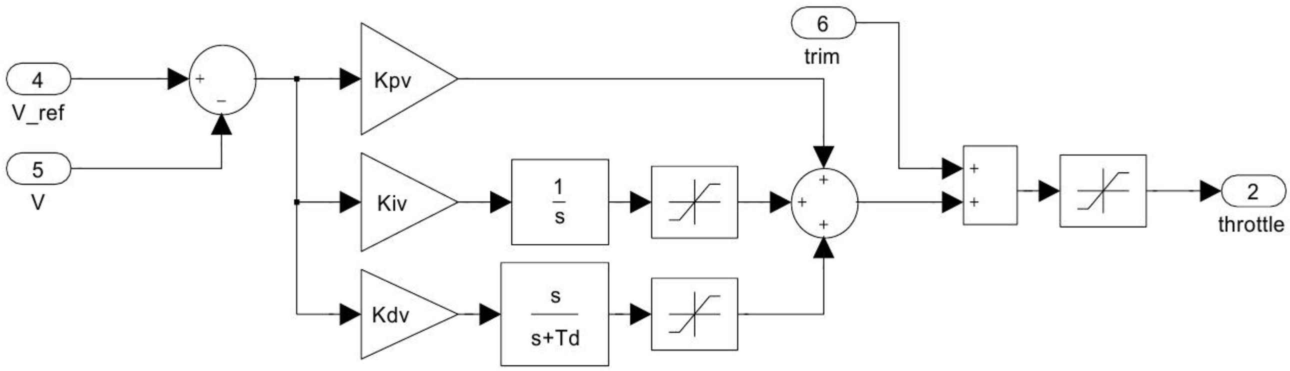


Рис. 4.10. Схема моделирования автопилота управления дросселем двигателя

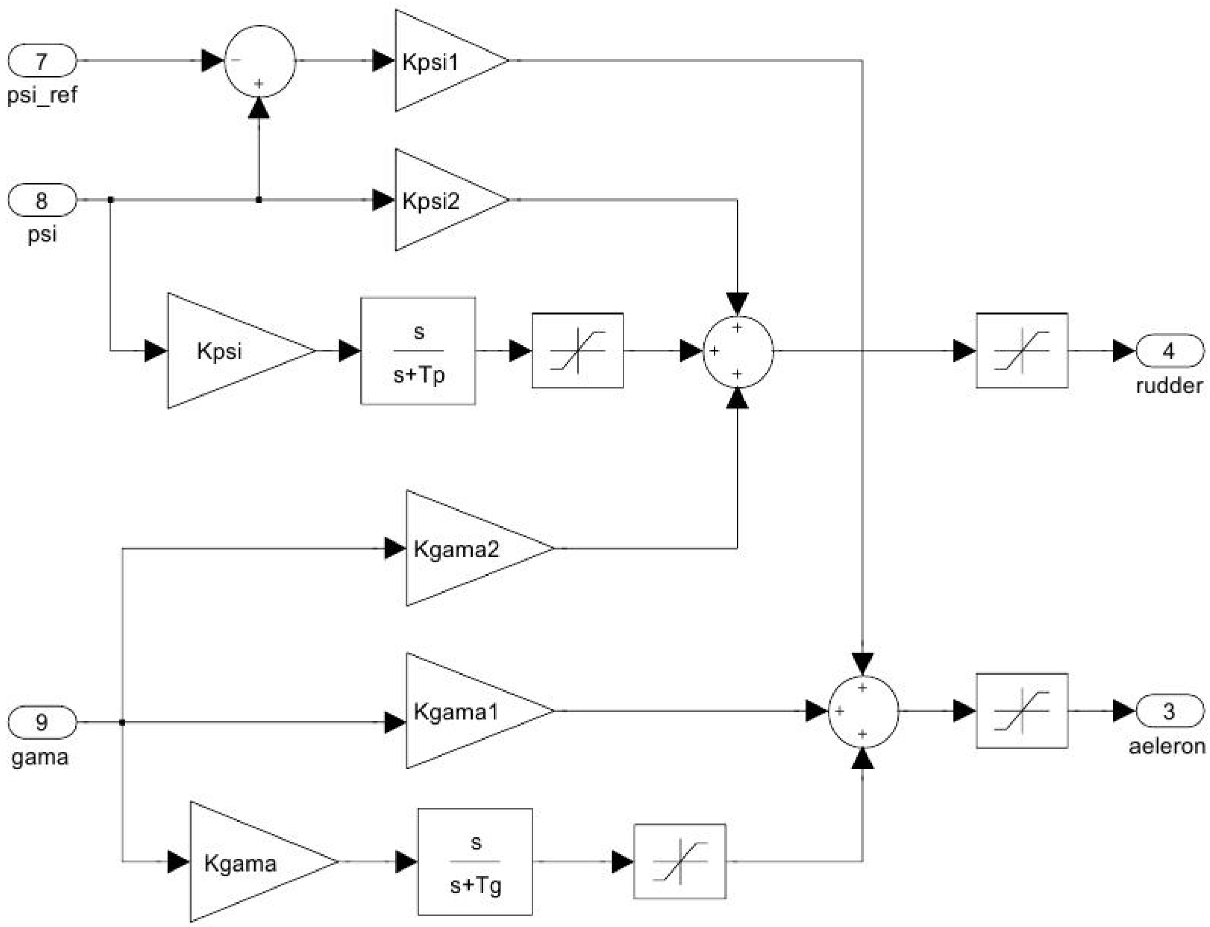


Рис. 4.11. Схема моделирования автопилота управления рулями направления и элеронов

Тема об автопилотах достаточно хорошо изучена и широко представлена в учебной и специальной литературе по динамике полета и системам управления полетом (например [44÷47]). Поэтому подробности по конкретным алгоритмам и использованию автопилотов в диссертационной работе не рассматриваются.

Задача обеспечения требуемого движения самолета в пространстве состоит из двух частей: формирование траектории и отслеживание заданной траектории. Траектория может формироваться заранее, или в реальном времени в процессе полёта. В разделах 2 и 3 диссертации представлены результаты расчёта траектории полёта в виде оптимальных программ. Здесь движение самолёта рассмотрено как движения центра масс. Стабилизация движения самолёта относительно требуемой траектории может выполняться с помощью автоматической системы траекторного управления. Положение самолёта на по заданной траектории можно определять заданием прямоугольных координат x, y, z (x – пройденное расстояние, y – высота, z – боковое отклонение,), географических координат y, φ, λ (φ, λ – широта и долгота места) и цилиндрических координат y, r, θ (r, θ – радиус вектор и полярный угол). Кроме координат, на заданной траектории может иметь другие характерные параметры, например скорость, ускорение, перегрузки.

На рис. 4.12 показана структурная схема системы автоматического управления, обеспечивающая движение самолета по заданным программным траекториям, зависящим от значения текущей массы самолета. Такая система может использоваться для автоматизации выполнения оптимальных маневров самолета.

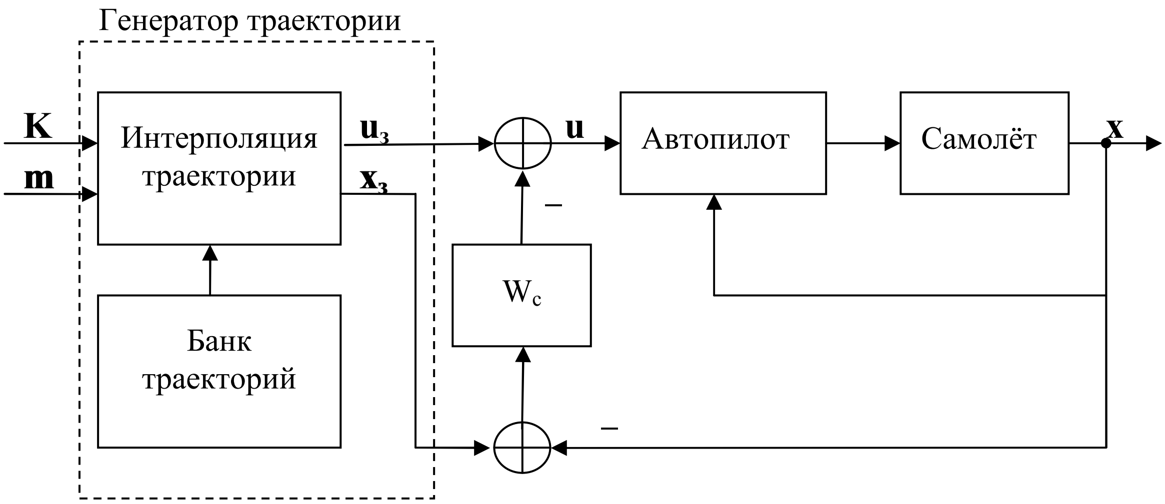


Рис. 4.12. Структурная схема системы автоматического управления полётом по заданной траектории.

Здесь **К** – вход команд системы управления, **m** – текущая масса самолёта. В производственном процессе масса самолёта уменьшается. Оценка текущего значения массы самолёта может быть выполнена на основе данных об исходной полной массе самолета, которая состоит из массы собственно самолета, массы запаса топлива и массы загруженного распыляемого вещества, а также данных датчиков-расходомеров топлива и распыляемого вещества. При изменении массы самолёта, оптимальная траектория и оптимальные программные управления изменяются, как было показано в расчетных примерах раздела 3. Банк траекторий содержит записи оптимальных номинальных траекторий для типовых маневров, применяемых в процессе выполнения воздушной работы. Эти траектории вычисляются заранее для ряда значений массы самолета. При этом они тщательно проверяются и при необходимости корректируются с целью получения гарантии реализуемости и безопасности. Когда возникает потребность выполнения определенного маневра, производится генерирование номинальной оптимальной траектории для текущей массы самолета путем интерполяции хранящихся в банке траекторий. Для многих фазовых переменных и управлений зависимость от массы самолета несильная. Для таких переменных интерполяция может быть заменена на дискретные переключения, а в случае очень слабой зависимости допустимо использовать записи таких переменных только для одной средней массы.

Сгенерированная номинальная траектория в виде номинальных значений координат и управлений реализуется на принципах следящей системы с помощью автопилотов. На схеме рис. 4.12. показан возможный вариант такой системы.

4.6. Выводы по главе

Системы экстремального регулирования описаны во многих публикациях, но очень мало информации о применении экстремального регулирования для снижения затрат топлива в полёте. Поэтому важно разобраться с особенностями применения этих подходов к решаемой конкретной задаче - оптимизации расхода топлива в полете. В данном разделе приведены результаты исследования применимости двух типичных методов экстремального регулирования, основанных на использовании зависимости коэффициента расхода топлива $C_{\text{уд}}$ от скорости. Проведенное исследование методов градиента и синхронного детектирования подтвердило возможность автоматического снижения значения $C_{\text{уд}}$. Результаты моделирования динамики движения замкнутого контура управления к оптимальному значению скорости полета дают результаты, совпадающие со значениями, соответствующими статической зависимости $C_{\text{уд}}(V)$. Тем самым продемонстрирована работоспособность рассмотренных методов. Рассматриваемая система экстремального регулирования может быть использована для автоматического поддержания режима экономичного полета самолета в производственном процессе. Для реализации оптимальных маневров предложена структура системы автоматического управления полётом. Особенность предлагаемого решения - генерирование номинальной траектории маневра с использованием банка номинальных оптимальных траекторий маневра и с учётом изменения массы самолёта.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

- Представлено решение задачи оптимизации движения самолета на участках горизонтального полёта. Предложен новый метод определения экстремали вариационной задачи, основанный на уточнении более простого квазистационарного решения, получаемого исходя из условия равенства силы тяги двигателя аэродинамическому сопротивлению самолета.
- Проведено решение задачи планирования траектории пространственного маневра самолета. На основе анализа результатов, полученных двумя способами решения, сделан вывод о необходимости учёта ограничений на переменные состояния и управления с целью получения реализуемых траекторий полета. Для обеспечения надежности и безопасности полёта, необходим также тщательный анализ получаемых расчетных траекторий.
- Представлены решения задач оптимизации типовых маневров. Для расчета оптимальных маневров самолета с учетом сложных ограничений на переменные состояния и управления рассмотрен и использован псевдоспектральный метод Гаусса. Среди решенных задач:

  - набор высоты в вертикальной плоскости с оптимизацией по критериям затрат времени и топлива, с учетом сложных ограничений на фазовые переменные и управления;

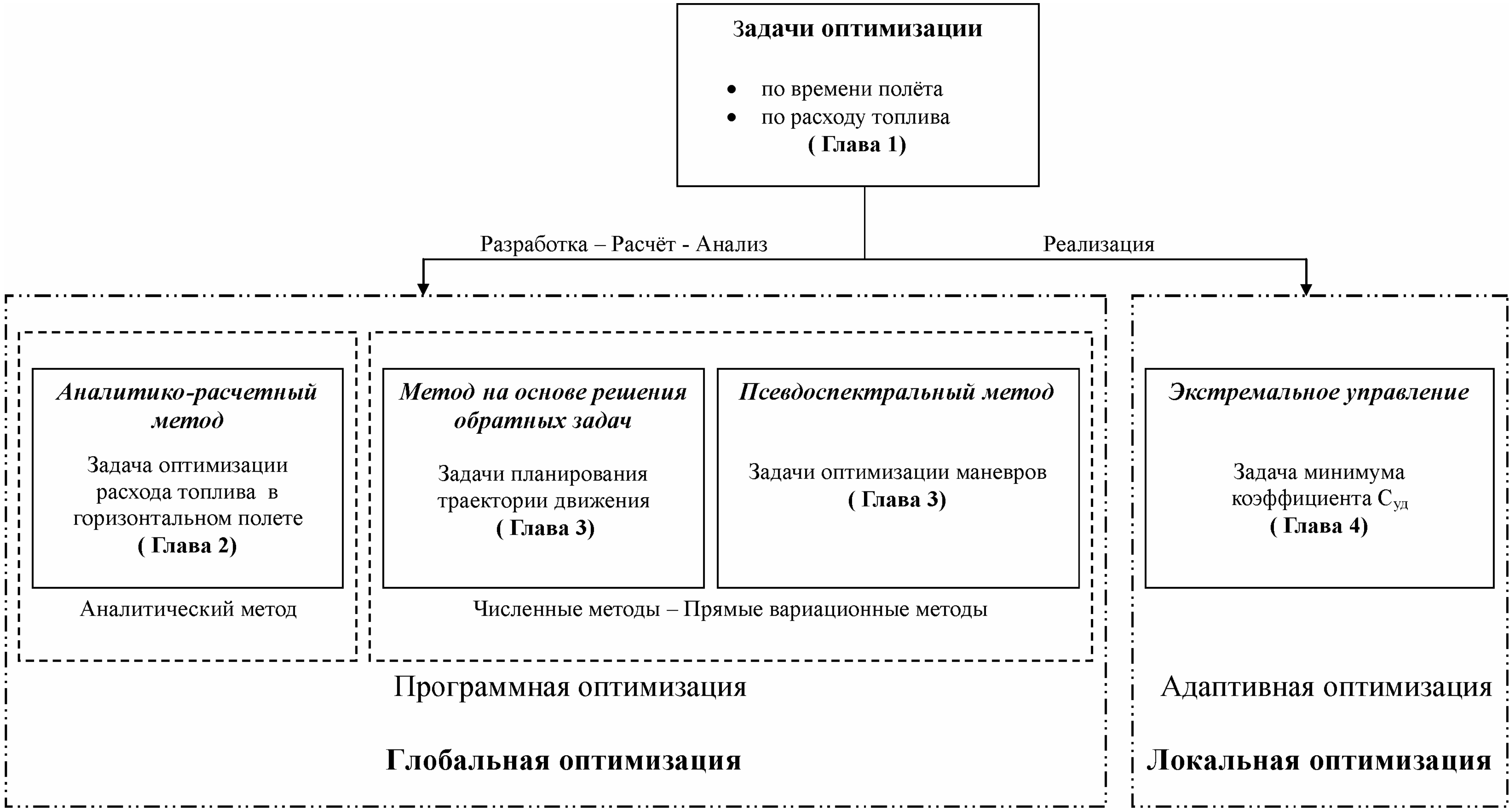
  - разворот в горизонтальной плоскости с оптимизацией по критериям затрат времени и топлива, с учетом сложных ограничений на фазовые переменные и управления;

  - разворот в пространстве с оптимизацией по критериям затрат времени и топлива, с учетом сложных ограничений на фазовые переменные и управления.
- Получены расчетные данные и графики для зависимости траектории, расхода топлива и длительности оптимального разворота от величины

задаваемого бокового смещения в конце маневра, а также от значения массы самолёта. Эти результаты позволяют сделать оценки экономичности и эффективности оптимальных траекторий маневра в разных условиях и фазах выполняемой воздушной работы.

- Предложены структурные схемы для реализации адаптивной системы типа экстремального регулирования, автоматически обеспечивающей оптимальный режим экономии топлива (максимума дальности) путем минимизации текущего значения коэффициента удельной дальности. Путем численного моделирования проведен анализ работоспособности предложенных схем.
- В интересах повышения уровня автоматизации управления полетом сделаны предложения по использованию типовых автопилотов, а также предложена структурная схема для системы автоматического генерирования оптимальных маневров самолета, использующая банк номинальных траекторий для формирования оптимальных маневров с учётом изменения массы самолета.
- Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации режимов полёта летательных аппаратов разного класса. Использованные в диссертации методы расчёта позволяют решать многочисленные актуальные задачи оптимизации в промышленности, и в этом плане изложенный в диссертации материал может иметь методическую значимость.
- Отдельные результаты диссертационной работы могут быть использованы в программе индустриализации и модернизации производственных процессов Вьетнама.

Автор выражает глубокую благодарность к.т.н., доц. С.Н. Супруненко (ЦАГИ) и д.т.н., профессор Нгуен Куанг Тхьюнг (ГУУ). Автор также выражает свою благодарность к.т.н., доц. А.М. Кузнецову (МФТИ) за оказанную помощь и поддержку.



Главные содержания диссертации

Список литературы

[1] Полухин, А. А. Малая авиация в сельском хозяйстве: дорого, но выгодно / А. А. Полухин. // Аграрное обозрение. – 2011. – № 1 (23). – С. 20–23.

[2] Дибир, А. Г. Сельскохозяйственная авиация: развитие и перспективы / А. Г. Дибир, В. П. Копычко, И. И. Хоменко. // Авиация общего назначения.– Харьков, 1999. – №3 – Часть 3.

[3] Бабенко, И., Олейник В. “Бельфегор” и битва за урожай / И. Бабенко, В. Олейник. // Авиация и время. – 2006. – № 2. – С. 4–16.

[4] Деревянко, В. С. Влияние аэродинамических возмущений на процессы авиационного опыливания / В. С. Деревянко. – М. : Транспорт,1974. – 72 с.

[5] Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин , В. Г. Болтянский , Р. В. Гамкрелидзе , Е. Ф. Мищенко. – 4-е изд. – М. : Наука, 1983. – 393 с.

[6] Красовский, А. А. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами / А. А. Красовский, В. Н. Буков, В. С. Шендрик. – М. : Наука, 1977. – 272 с.

[7] Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо-Ю-Ши. – М. : Мир, 1972. – 544 с.

[8] Методы классической и современной теории автоматического управления - Том 4 / Под. ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова – М. : МГТУ, 2004. – 741 с.

[9] Фалдин, Н. В. Оптимизация систем управления. Оптимальное управление и оптимальные мехатронные системы: Конспект лекций. / Н. В. Фалдин. – Тула. : Тул-ГУ, 2000. – 149с.

[10] Мерриэм, К. У. Теория оптимизации и расчёт систем управления с обратной свзью / К. У. Мерриэм. – М. : Мир, 1967. – 549 с.

[11] Петров, Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю. П. Петров. – М. : Энергия, 1965. – 220 с.

[12] Федоров, Л. П. Экономические режимы полета сельскохозяйственного самолета / Л. П. Федоров. // Труды ЦАГИ. – 1979. – Вып. 1990. – С. 3–25.

[13] Григорьев, В. А. Оптимальный крейсерский режим полета неманевренного самолета по критерию дальности / В. А. Григорьев, В. К. Святодух. // Ученые записки ЦАГИ. – 1986.– Т. XVII. – № 5. – С. 24–34.

[14] Кротов, В. Ф. Об оптимальном режиме горизонтального полета самолета / В. Ф. Кротов. // Сб. Механика МВТУ им. Н.Э.Баумана. – М. :Оборонгиз. – 1961. – Вып.104. – С. 54–66.

[15] Кротов, В. Ф. Об оптимальном управлении траекториями полета. Абсолютный оптимум, аналитические решения, алгоритмы. I / В. Ф. Кротов // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 3. – С. 47-57.

[16] Кротов, В. Ф. Об оптимальном управлении траекториями полета. Абсолютный оптимум, аналитические решения, алгоритмы. II / В. Ф. Кротов // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 2. – С. 37-47.

[17] Тарасов, Е. В. Оптимальные режимы полета летательных аппаратов / Е. В. Тарасов. – М. : Оборонгиз, 1963. – 248 с.

[18] Скрипниченко, С. Ю. Оптимизация режимов полета самолета / С. Ю. Скрипниченко. –М. : Машиностроение, 1975. – 191 с.

[19] Батенко, А. П. Управление конечным состоянием движущихся объектов / А. П. Батенко. – М. : Сов. радио, 1977. – 256 с.

[20] Канатников, А. Н. Задача терминального управления движением летательного аппарата / А. Н. Канатников, Е. А. Шмагина. // Нелинейная динамика и управление. – 2010. – С. 79–94.

[21] Велищанский, М. А. Синтез квазиоптимальной траектории движения беспилотного летательного аппарата / М. А. Велищанский. // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон, журн. – 2013. – № 12. – С. 417–430.

[22] Коровин, С. К. Энергия как независимая переменная в задачах планирования траекторий беспилотных летательных аппаратов / С. К. Коровин, А. Н. Канатников. // Нефтсгазопромысловый инжиниринг. – 2010. – С. 10–11.

[23] Евтушенко, Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. – М.: Наука, 1982. – 432 с.

[24] Лебедев, А. А. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов / А. А. Лебедев, Л. С. Чернобровкин. – М. : Машиностроение, 1973. – 615 с.

[25] Остославский, И. В. Динамика полета (траектории летательных аппаратов) / И. В. Остославский, И. В. Стражева. – М. : Машиностроение, 1969. – 499 с.

[26] Динамика полёта / Под. ред. Г. С. Бюшгенса. – М. : Машиностроение, 2011. – 775 с.

[27] Медников, В. Н. Динамика полёта и пилотирование самолётов / В. Н. Медников. Монино, 1976. – 386 с.

[28] Тараненко, В. Т. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета / В. Т. Тараненко, В. Г. Момджи – М. : Машиностроение, 1986. – 127 с.

[29] Тараненко, В. Т. Динамика самолета с вертикальным взлетом и посадкой / В. Т. Тараненко. – М. : Машиностроение, 1978. – 248 с.

[30] Тараненко, В. Т. Оптимальные манёвры / В. Т. Тараненко. // Авиация и космонавтика. – 1976: № 10. – С. 21–23; № 11. – С. 26–29; № 12. – С. 15–17; – 1977: № 5. – С. 20–23; № 6. – С. 18–20; № 7. – С. 16–18; № 8. С. 29–31; № 9. – С. 26–27.

[31] Дикусар, В. В. Задачи на экстремум при наличии ограничений / В. В. Дикусар. // Соросовский образовательный журнал.– 1999. – № 1. – С. 117–123.

[32] Васильев, Ф. П. Методы оптимизации. / Ф. П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

[33] Васильев, Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

[34] Федоренко, Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. – М.: Наука, 1978. – 488 с.

[35] Моисеев, Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1971. – 424 с.

[36] Моисеев, Н. Н. Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – М. : Наука, 1978. – 351 с.

[37] Сизых, В. Н. Методы и алгоритмы оптимизации интегрированной системы управления летательного аппарата на основе прогнозирующих моделей : дис. ...

д-ра тех. наук : 05.13.01 / Сизых Виктор Николаевич. – Иркутск, 2012. – 302 с.
[38] Стешин С. Н. Повышение эффективности применения малой авиации в сельском хозяйстве / С. Н. Стешин. // Бюллетень Оренбургского научного центра УрО РАН. Электрон, журн. – 2011. – №4.
[39] Усик, В. В. Моделирование эффективного использования летательных аппаратов в сельском хозяйстве : дис. ... к-та экн. наук : 08.00.05 / Усик Владимир Викторович. – Ижевск, 2012. – 152 с.
[40] Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 368 с.
[41] Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – 3-е изд. стер. – М. : Высшая школа, 2008. – 480 с.
[42] Куропаткин, П. В. Оптимальные и адативные системы / П. В. Куропаткин. – М. : Высшая школа, 1980. – 287 с.
[43] Олейников, В. А. Основы оптимального и экстремального управления / В. А. Олейников, Н. С. Зотов, А. М. Пришвин. – М. : Высшая школа, 1969. – 297 с.
[44] Боднер, В. А. Системы управления летательными аппаратами / В. А. Боднер. – М. : Машиностроение, 1973. – 502 с.
[45] Боднер, В. А. Теория автоматического управления полетом / В. А. Боднер. – М. : Наука, 1964. – 698 с.
[46] Воробьев, В. Г. Автоматическое управление полетом самолетов / В. Г. Воробьев, С. В. Кузнецов. – М. : Транспорт, 1995. – 448 с.
[47] Белогородский С. Л. Автоматизация управления посадкой самолёта / С. Л. Белогородский. – М. : Транспорт, 1972. – 350 с.
[48] Либерзон, Л. М. Системы экстремального регулирования / Л. М. Либерзон , А. Б. Родов. – М. : Энергия, 1965. – 158 с.
[49] Либерзон, Л. М. Шаговые экстремальные системы / Л. М. Либерзон , А. Б. Родов. – М. : Энергия, 1969. – 96 с.
[50] Растригин, Л. А. Системы экстремального регулирования / Л. А. Растригин. – М. : Наука, 1974. – 629 с.

[51] Казакевич, В. В. Системы автоматической оптимизации / В. В. Казакевич , А. Б. Родов. – М. : Энергия, 1977. – 288 с.

[52] Чинаев, П. И. Самонастраивающиеся системы. Справочник / П. И. Чинаев - Киев : Наукова думка, 1969. – 528 с.

[53] Арефьев Б. А. Оптимизация инерционных процессов / Б. А. Арефьев. – Ленинград : Машиностроение, 1969. –160 с.

[54] Французова, Г. А. Синтез систем экстремального регулирования для нелинейных нестационарных объектов на основе принципа локализации : дис. ... д-ра тех. наук : 05.13.01 / Французова Галина Александровна. – Новосибирск, 2004. – 346 с.

[55] Буков, В. Н. Адавтивные прогнозирующие системы управления полётом / В. Н. Буков. – М. : Наука, 1987. – 232 с.

[56] Красовский А. А. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 712 с.

[57] Красовский А. А. Основы автоматики и технической кибернетики / А. А. Красовского, Г. С. Поспелов. – М. Л. : Госэнергоиздат, 1962. – 600 с.

[58] Воронов, А. А. Основы теории автоматического управления / А. А. Воронов. – Ленинград : Энергия, 1970. – 328 с.

[59] Крутько, П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Нелинейные модели / П. Д. Крутько. – М. : Наука, 1988. – 330 с.

[60] Крутько, П. Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического правления / П. Д. Крутько. – М. : Машиностроение, 2004. – 576 с.

[61] Matthews, G. A. Pesticide Application Methods / G.A. Matthews. – Blackwell Science, 2000. – 432 p.

[62] Anderson, J. D. Aircraft Performance and Design / J. D. Anderson. – WCB/McGraw-Hill, 1999. – 580 p.

[63] Filippone, A. Flight Performance of Fixed and Rotary Wing Aircraft / A. Filippone. – Elsevier, 2006. – 565 p.

[64] Lowry, J. T. Performances of light aircraft / J. T. Lowry. – AIAA Inc, 1999. – 475 p.

[65] Russell, J. B. Performance and Stability of Aircraft / J. B. Russell. – Butterworth-Heinemann,1996. – 294 p.
[66] Love, M. C. Flight Maneuvers / M. C. Love. – Mc Graw Hill, 1999. – 256 p.
[67] Nelson, R. C. Flight Stability and Automatic Control / R. C. Nelson. – WCB/Mc Graw Hill, 1998. – 441 p.
[68] McLean, D. Automatic Flight Control Systems / D. McLean. – Prentice Hall, 1990. – 593 p.
[69] Blakelock, J. H. Automatic Control of Aircraft and Missile / J. H. Blakelock. – John Wiley & Sons Inc, 1991. – 646 p.
[70] Cook, M. V. Flight Dynamics Principles / M. V. Cook. – Elsevier, 2007. – 468 p.
[71] Etkin, B. Dynamics of atmospheric flight- B. Etkin, L. D. Reid. – John Wiley & Sons Inc, 1996. – 382 p.
[72] Tewari, A. Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets / A. Tewari. – Wiley, 2011. – 390 p.
[73] Hedrick, J. K. Three-Dimensional Minimum-Time Turns for a Supersonic Aircraft / J. K. Hedrick, A. E. Bryson, JR. // Journal of Aircraft, February, Vol. 9, № 2. – pp. 115–121.
[74] Bryson, A. E. Three-Dimensional Minimum-Fuel Turns for a Supersonic Aircraft / A. E. Bryson, J. K. Hedrick. // Journal of Aircraft, March, Vol. 9, № 3. – pp. 223–229.
[75] Bryson, A. E. Minimum Time Turn for a Supersonic Aircraft at Constant Altitude / A. E. Bryson, J. K. Hedrick. // Journal of Aircraft, Vol. 8, № 3, March 1971. – pp. 182–187.
[76] Bryson, A. E. The Energy State Approximation in Performance Optimization of Supersonic Aircraft / A. E. Bryson, M. N. Desai, W. L. Hoffman. // Journal of Aircraft, Vol. 6, № 6, November-December, 1969. – pp. 481-487.
[77] Kelley, H. J. Energy Climbs, Energy Turns and Asymptotic Expansions / H. J. Kelley, T. N. Edelbaum. // Journal of Aircraft, Vol. 7, № 1, January-February, 1970. – pp. 93-95.

[78] Basset, G. Computing short-time aircraft maneuvers using direct methods / G. Basset, Y. Xu, O. A. Yakimenko. // Известия РАН, Теория и Системы Управления. – 2010. – № 3. – pp. 145-176.

[79] Yakimenko, O. A. Direct Method for Rapid Prototyping of Near-Optimal Aircraft Trajectories / O. A. Yakimenko. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2000. – Vol. 23, № 5. – pp. 865-875.

[80] Trefethen, L. N. Spectral Methods in MATLAB / L. N. Trefethen. – Philadelphia : SIAM, 2000. – 160 p.

[81] Boyd, J. P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods Second Edition / J. P. Boyd. – New York : DOVER Publications Inc., 2000. – 594 p.

[82] Huntington, G. T. Advancement and Analysis of a Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control Problems: Ph.D. thesis / G. T. Huntington. – MIT, 2007. – 207 p.

[83] Benson, D. A. A Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control: Ph.D. thesis / D. A. Benson. – MIT, 2005. – 243 p.

[84] Benson, D. A. Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation via an Orthogonal Collocation Method / D. A. Benson, G. T. Huntington, T. P. Thorvaldsen, A. V. Rao. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – Vol. 29, No. 6., 2006. – pp. 1435-1440.

[85] Betts J. T. Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming / J. T. Betts. – Philadelphia : SIAM, 2001. – 190 p.

[86] Betts, J. T. Survey of numerical methods for trajectory optimization / J. T. Betts. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – Vol. 21, No. 2, 1998. – pp. 193–207.

[87] Von Stryk, O. Direct and indirect methods for trajectory optimization / O. Von Stryk, R. Bulirsch. // Annals of Operations Research 37, Scientific Publishing Company, 1992. – pp. 357–373.

[88] Subchan, S. , Zbikowski R. Computational Optimal Control: Tools and Practice / S. Subchan, R. Zbikowski. – New York : John Wiley, 2009. – 182 p.

[89] Naidu, D. S. Optimal Control Systems / D. S. Naidu. – CRC Press, 2003. – 433 p.

[90] Kirk, D. E. Optimal Control Theory / D. E. Kirk. – Dover Publications, 2004. – 452 p.
[91] Hull, D. G. Optimal Control Theory for Applications / D. G. Hull. – New York : Springer, 2003. – 381 p.
[92] Ben Asher, J. Z. Optimal Control Theory with Aerospace Applications / J. Z. Ben Asher. – AIAA educational series, 2010. – 246 p.
[93] Longuski, J. M. Optimal Control with Aerospace Applications / J. M. Longuski, J. J. Guzman, J. E. Prussing. – New York : Springer, 2014. – 273 p.
[94] Gill P. E. User's Guide for SNOPT Version 7: Software for Large Scale Nonlinear Programming / P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders. –2006. – 116 p.
[95] Ariyur, K. B. Real-Time Optimization by Extremum Seeking Control / K. B. Ariyur, M. Krstic. – Wiley-Interscience, 2003. – 236 p.
[96] Zhang, C Extremum-Seeking Control and Applications / C. Zhang, R. Ordónez. . – New York : Springer, 2012. – 201 p.
[97] Direct Adaptive Performance Optimization of Subsonic Transports: A Periodic Perturbation Technique M. Espana, G. Gilyard. –NASA Technical Memorandum TM-4676. – 1995. – 42 p.
[98] Orme, J. S. Flight Assessment of the Onboard Propulsion System Model for the Performance Seeking Control Algorithm on an F-15 Aircraft / J. S. Orme, G. S. Schkolnik. – NASA TM-4705. – 1995. – 17 p.
[99] Gilyard, G. B. Subsonic Flight Test Evaluation of a Performance Seeking Control Algorithm on an F-15 Airplane / G. B. Gilyard, J. S. Orme. – NASA TM-4400. – 1992.
[100] Krstic, M. Stability of extremum seeking feedback for general dynamic systems / M. Krstic, H. Wang // Automatica. – 2000. – Vol. 36. – pp. 595-601.
[101] Fliess, M. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples / M. Fliess, J. L. Lévine, P. Martin, P. Rouchon. // International Journal of Control 61(6), 1995. – pp. 1327-1361.
[102] Fliess, M. On differentially flat nonlinear systems / M. Fliess, J. L. Levine, P. Martin, P. Rouchon. // Proceedings of IFAC-Symposium NOLCOS’92, Bordeaux, France, 1992. – pp. 408–412.

[103] Williams, P. A Gauss-Lobatto Quadrature Method for Solving Optimal Control Problems / P. Williams // Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal. – 2006. – Vol. 47. – pp. 101–115.
[104] Hargraves, C. R. Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation / C. R. Hargraves, S. W. Paris. // Journal of Guidance, Dynamics, and Control. – 1987. – Vol. 10, No. 4. – pp. 338–342.
[105] Enright, P. J. Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming / P. J. Enright, B. A. Conway. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1992. – Vol. 15, No. 4. – pp. 994–1002.
[106] Herman, A. L. Direct optimization using collocation based on high-order Gauss–Lobatto quadrature rules / A. L. Herman, B. A. Conway. // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1996. – Vol. 19, No.3. – pp. 592–599.
[107] Rasuo, B. Effect of load factors on turn maneuver of agricultural aircraft / B. Rasuo. // 21st ICAS Congress, September 1998, Melbourne, Australia.
[108] Rasuo, B. Analytical and Numerical Modelling of the Safe Turn Manoeuvres of Agricultural Aircraft / B. Rasuo. // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 12 – 2012. – pp. 463–464.
[109] https://ru.wikipedia.org/wiki/Летательный_аппарат

Приложение 1: Основные обозначения

В данной работе все данные и результаты представлены на основе Международной системы единиц СИ и ГОСТ

m - масса самолёта [кг].

$q = \frac{\rho V^2}{2}$ - скоростной набор

ρ - плотность атмосферы

V - скорость самолёта [м/с].

S - площадь крыла [м^2].

x, y, h - продольная, боковая дальность и высота полета [м].

t_0 - начальный момент времени [с].

t_f - конечный момент времени [с].

x_0, y_0, h_0 - начальные значения продольной, боковой дальностей и высоты полета [м].

x_f, y_f, h_f - конечные значения продольной, боковой дальностей и высоты полета [м].

V_0, V_f - начальный и конечный значения скорости полета [м/с].

Θ_0, Θ_f - начальный и конечный значения угла наклона траектории полета [rad]

Ψ_0, Ψ_f - начальный и конечный значения угла пути траектории полета [rad]

P - тяга двигателя [Н].

Ψ - угол пути [rad].

ψ - угол рыскания [rad].

β - угол скольжения [rad].

Θ - угол наклона траектории [rad].

ϑ - угол тангажа [rad].

α - угол атаки [rad].

γ - угол крена [rad].

X_a - сила лобового сопротивления [Н].

Y_a - подъемная сила [Н].

C_x - коэффициент аэродинамической силы сопротивления

C_y - коэффициент аэродинамической подъемной силы

C_e - коэффициент удельного расхода топлива

b_A - средняя аэродинамическая хорда [м].

Приложение 2 : Возможное уточнение модели движения

В уравнениях (2.1) не учитывается отклонение вектора тяги от вектора скорости полета. Это учитывает более точная модель движения

$$m\dot{V} = P\cos(\alpha+\varphi) - X_a\,, \quad Y_a + P\sin(\alpha+\varphi) = mg\,,$$

где φ – угол отклонения вектора тяги от продольной оси самолета. Ниже показывается, как эта модель может быть приближенно представлена в таком же виде, как и в (2.1).

Из уравнения равновесия по вертикали следует

$$c_y(\alpha) = [mg - P\sin(\alpha+\varphi)]/qS\,.$$

Второе слагаемое в этой формуле – всего лишь небольшая добавка к первому слагаемому, поэтому, используя приближенную оценку $P \approx X_a = c_x(c_y)qS$, получим соотношение

$$c_y(\alpha) \approx mg/qS - c_x(c_y(\alpha))\sin(\alpha+\varphi)\,,$$

которое представляет собой уравнение относительно угла атаки α. Решение этого уравнения дает значение $\alpha = \alpha_{\text{Г.П}}(m,V)$ и, соответственно,

$$c_{y\text{Г.П}}(m,V) = c_y(\alpha_{\text{Г.П}}(m,V))\,, \qquad c_{x\text{Г.П}}(m,V) = c_x(c_{y\text{Г.П}}(m,V))\,.$$

В дифференциальном уравнении, определяющем изменение скорости полета, сумму действующих сил (тангенциальных составляющих) представим в виде:

$$P\cos(\alpha+\varphi) - X_a = P - X_a - P + P\cos(\alpha+\varphi) = P - X_a^*,$$

$$X_a^* = X_a + P[1-\cos(\alpha+\varphi)]\,.$$

Второе слагаемое в выражении для X_a^* существенно меньше первого, поэтому вполне достаточен приближенный учет его путем замены P на X_a . В результате получается

$$X_a^* \approx [2-\cos(\alpha+\varphi)]X_a = [2-\cos(\alpha_{\text{Г.П}}(m,V)+\varphi)]c_{x\text{Г.П}}qS\,.$$

Нетрудно видеть, что структура дифференциального уравнения, описывающего изменение скорости полета, стала такой же, как в (2.1). Но величина аэродинамического сопротивления X_a заменилась на скорректированную величину X_a^*, которая учитывает уменьшение $c_{y\,\text{Г.П}}$ и соответственно $c_{x\,\text{Г.П}}$ из-за наличия дополнительной составляющей $P\sin(\alpha+\varphi)$, отсутствующей в исходной модели (2.1). Благодаря такому подходу все полученные в статье формулы остаются в силе, только вместо X_a следует брать X_a^*.

Представленные выше вычисления можно несколько упростить, если принять

$$\sin(\alpha+\varphi)\approx\alpha+\varphi\,,\quad c_y\approx c_{y0}+c_y^{\alpha}\alpha\,.$$

В этом случае удобнее вычислять не угол атаки, а коэффициент c_y, учитывая связь

$$\alpha=(c_y-c_{y0})/c_y^{\alpha}\,.$$

Уравнение равновесия по вертикали принимает вид

$$c_y=mg/qS-c_x(c_y)[\varphi+(c_y-c_{y0})/c_y^{\alpha}]\,.$$

Наиболее простой способ получения решения этого уравнения – использовать метод последовательных приближений по схеме

$$c_{y\,|\,i}=mg/qS-c_x(c_{y\,|\,i-1})[\varphi+(c_{y\,|\,i-1}-c_{y0})/c_y^{\alpha}]\,,\ \ i=1,2,\ldots\,.$$

В качестве начального приближения берется величина $c_{y\,|\,0}=mg/qS$. Ввиду малости поправки достаточно ограничиться одной или двумя итерациями. Приняв найденное значение c_y в качестве $c_{y\,\text{Г.П}}$, далее по этому значению определяются угол атаки $\alpha_{\text{Г.П}}$ и коэффициент $c_{x\,\text{Г.П}}$. Процедура повторяется для интересующего набора значений m, V.

Если использовать приближение $\cos(\alpha+\varphi)\approx 1-0.5(\alpha+\varphi)^2$, то для вычисления X_a^* получается упрощенная формула

$$X_a^*\approx[1+0.5(\alpha_{\text{Г.П}}+\varphi)^2]c_{x\,\text{Г.П}}qS\,.$$

Приложение 3: Некоторые вопросы, связанные с решением задач оптимизации динамики полёта

Задача оптимизации является одной из самых важных задач динамики полёта. Можно разделить задачи оптимизации на две группы: оптимизация в конечномерном пространстве или параметрическая оптимизация, и бесконечномерная оптимизация. Задачи вариационного исчисления и оптимального управления относятся к классу задач бесконечномерной оптимизации. Среди задач оптимизации, задачи оптимального управления имеют большую важность. Основной целью этой задачи является определение экстремума функционала на основе удовлетворения динамическим уравнениям и ограничениям на фазовые переменные. При использовании численных методов задача бесконечномерной оптимизации, как и задача оптимального управления, приводится к задаче оптимизации в конечномерном пространстве. Прежде всего, рассмотрим некоторые понятия и вопросы, связывающие с методами решения задач оптимизации динамики полёта, которые будут использоваться в данной диссертации.

П3.1. Прямая и обратная задачи динамики полёта

Движение центра масс самолета в пространстве описывается следующей системой уравнений [28]:

$$\begin{cases} \dot{V} = (P\cos\alpha - X_a - mg\sin\Theta)/m \\ \dot{\Theta} = (P\sin\alpha\cos\gamma + Y_a\cos\gamma - mg\cos\Theta)/(mV) \\ \dot{\Psi} = -(P\sin\alpha\sin\gamma + Y_a\sin\gamma)/(mV\cos\Theta) \\ \dot{m} = -C_e P/3600 \\ \dot{x} = V\cos\Theta\cos\Psi \\ \dot{y} = V\sin\Theta \\ \dot{z} = -V\cos\Theta\sin\Psi \end{cases} \qquad (П3.1)$$

Здесь x, y, z – координаты центра масс самолета в нормальной земной системе координат, V – скорость полёта, Θ – угол наклона траектории, Ψ – угол курса, m – масса самолета, α – угол атаки, γ – угол крена, P – тяга двигателя, C_e – коэффициент удельного расхода топлива, X_a – аэродинамическое сопротивление, Y_a – аэродинамическая подъемная сила, g – ускорение свободного падения.

В системе (П3.1) переменными состояния являются: V, Θ, Ψ, m, x, y, z а переменными управления P, α, γ. Вектор состояния x = $[V\ \Theta\ \Psi\ \ m\ x\ y\ z]^{\mathrm{T}}$. Вектор управления u= $[P\ \ \alpha\ \ \gamma]^{\mathrm{T}}$

Обобщённая векторная форма системой уравнений (П3.1) имеет вид:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \qquad x(t) \in R^n,\ u(t) \in R^m \tag{П3.2}$$

Вектор выхода:

$$y(t) = g(x(t),u(t)) \qquad \mathrm{y}(t) \in R^p \tag{П3.3}$$

Прямая задача динамики полёта формулируется следующим образом. Известны математическое описание системы (П3.1) и значения векторов состояния в начальный момент времени

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{П3.4}$$

Задан вектор входа управления $u(t)$. Требуется найти траекторию вектора состояния по времени $x(t)$.

Решение сформированной задачи сводится к интегрированию (П3.2) с начальными условиями (П3.4). В результате будут найдены вектор состояния $x(t)$ и вектор выхода $y(t)$ по (П3.3).

Обратная задача динамики полёта формулируется так: Известны математическое описание системы (П3.2) и значения векторов состояния в начальный момент времени (П3.4). Задан вектор выхода $y(t)$. Требуется найти вектор входа управления $u(t)$, чтобы система движется по траектории вектора состояния $x(t)$.

Сформулированные задачи противоположны по содержанию. Действительно, решение прямой задачи интегрированием (П3.2) в настоящее время не составляет затруднений. Алгоритмы, основанные на концепциях обратных задач динамики и использования этого подхода в задачах управления представлены в [59, 60]. В следующих главах решение обратной задачи динамики полёта используем для оптимизации некоторых режимов полёта.

Следует отметить, что переменными выхода задач динамики полёта являются координаты траектории, скорость полета, угол наклона траектории, угол курса, масса самолета. Именно они являются переменными состояния в (П3.2). Поэтому без потери обобщённости можно рассматривать задачи динамики полёта в пространстве переменных состояния и переменных управления по (П3.2). В следующих главах переменные состояния *x(t)*, *y(t), z(t)* возьмём в качестве переменных выхода (П3.3).

П3.2. Краевые задачи и несколько методов их решения

Движение самолета в течение времени $[t_0 \quad t_f]$ приводит к изменению переменных состояния из начального положения $x_0 = [V_0 \ \Theta_0 \ \Psi_0 \ m_0 \ x_0 \ y_0 \ z_0]$ до конечного положения $x_f = [V_f \ \Theta_f \ \Psi_f \ m_f \ x_f \ y_f \ z_f]$. Задачи динамики полёта часто имеют формулировку: “Определить управление u, которое обеспечить перевод самолёта из заданной начального положения x_0 в заданное конечное положение x_f.” Можно сказать, что большинство задач динамики полёта является краевыми задачами и решение задач динамики полёта сводится к решению краевых задач.

К настоящему времени разработано много методов решения краевых задач - это и точные аналитические методы, и приближенные численные методы [38–41]. Аналитические методы используются лишь для решения узкого класса дифференциальных уравнений. Можно перечислить ряд численных методов следующим образом: Метод пристрелки, метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод Галёркина-Ритца, методы сведения к интегральным уравнениям Фредгольма и др.

Обратим внимание на метод Галёркина-Ритца. Идея этого метода использовалась в многих работах об оптимизации и планирования траектории и решении краевых задач динамики полёта.

П3.3. Метода Галёркина-Ритца [38–41]

Метод Галёркина-Ритца служит для приближенного решения вариационной задачи. Идея метода Галёркина-Ритца проста. Пусть требуется отыскать экстремум функционала

$$J(y) = L[y(x)] \qquad (П3.5)$$

В методе Галёркина-Ритца решение вариационной задачи ищется в виде линейной комбинации известных, заданных заранее функций:

$$\hat{y}(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} k_i \varphi_i(x) \qquad (П3.6)$$

где $\varphi_0(x), \varphi_i(x)$ $i = 1,2..n$ - базисные функции. Они должны быть линейно независимы. Предположим, что краевые условия имеют вид:

$$y(x)\big|_{x=a} = y(a) = A \qquad y(x)\big|_{x=b} = y(b) = B\,.$$

Функция $\varphi_0(x)$ выбирается так, чтобы удовлетворять неоднородным краевым условиям:

$$\varphi_0(x)_{x=a} = \varphi_0(a) = A \qquad \varphi_0(x)_{x=b} = \varphi_0(b) = B$$

Функции $\varphi_i(x)$ выбираются так, чтобы удовлетворять однородным краевым условиям:

$$\varphi_i(x)\big|_{x=a} = \varphi_i(a) = 0 \qquad \varphi_i(x)\big|_{x=b} = \varphi_i(b) = 0$$

С этими выборами решение $\hat{y}(x)$ при любых значениях параметров k_i будет удовлетворять краевым условиям задачи. Решение $\hat{y}(x)$ полностью характеризуется коэффициентами k_i. Поэтому определение $\hat{y}(x)$ соответствует определению коэффициентов k_i из условия обеспечения экстремума функционала.

После подстановки (П3.6) в функционал (П3.5), он становится функцией неизвестных коэффициентов k_i. Тогда получим:

$$J(y) = F(k_1, k_2 \dots k_n) \qquad \text{(П3.7)}$$

где F - известная функция, зависящая от n переменных $k_1, k_2 \dots k_n$.

Отсюда следует, что вариационная задача приближенно сводится к задаче об отыскании экстремума функции $F(k_1, k_2 \dots k_n)$. Коэффициенты k_i подбираются так, чтобы функция приняла экстремальное значение. Таким образом, вариационная задача сводится к задаче исследования на экстремум функции многих переменных. Это даёт систему уравнений (необходимые условия экстремума):

$$\frac{\partial F}{\partial k_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial k_2} = 0, \dots \frac{\partial F}{\partial k_n} = 0 \qquad \text{(П3.8)}$$

Решение этой системы дает значения коэффициентов k_i. Это означает, что решение $\hat{y}(x)$ становится известным. Вообще говоря, точность решения зависит от количества коэффициентов k_i и формы базисных функций. Точность возрастает при увеличении числа переменных параметров функции F. Правильный выбор базисных функций, учитывающий характеристики решения $y(x)$, приводит к увеличению точности решения даже с малым числом параметров.

П3.4. Плоская система и плоские выходы

Чтобы использовать метод динамической обратной связи, система должна иметь плоскостность. Хотя в [28, 29] Тараненко ранее использовал технику решения обратных задач, но понятия по плоскостности представлены впервые в работах [101, 102]. Рассмотрим нелинейную систему:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad x(t) \in R^n,\ u(t) \in R^m$$

$$f(0,0) = 0 \qquad \operatorname{rank} \left. \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u} \right|_{x=0, u=0} = m$$

Эта система называется «плоской», если можно выбрать переменные выхода $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots y_m(t))$, которые могут быть представлены в виде функции переменных состояний, переменных управления и производных по времени переменных управления $y = g(x, u, \dot{u}, \ldots u^{(d)})$. Все переменные состояний, переменные управления могут представить в виде функции переменных выхода и производных по времени переменных выхода .

$$x = h(y, \dot{y}, \ldots y^{(p)})$$
$$u = k(y, \dot{y}, \ldots y^{(p)})$$

Выход плоской системы называется плоским выходом. С плоскостностью, можно выразить систему на пространстве переменных плоского выхода и проводить оптимизацию на этом пространстве, следовательно задача упрощается.

Плоскостность системы особенно полезна для решения задач планирования траектории, задач терминального управления, задач динамической обратной связи.

П3.5. Принцип максимума Понтрягина

Методы вариационного исчисления широко применяются в различных областях математики. Вариации функционалов считались непрерывными и линейными. Переменные, входящие в функционал или в уравнения связи, ограничений не имели. В практических задачах, на переменные состояния и управления практически всегда накладываются ограничения. Это соответствует тому, что изменение переменных состояния и управления ограничивается в некоторых замкнутых областях и находится на границах этих областей. При некоторых условиях управляющие воздействия являются разрывными. Примером таких управлений являются релейные функции. Нарушение основных условий, на которых строится классическое вариационное исчисление, не позволяет решать многие задачи динамики полёта.

Существуют преобразования, с помощью которых задачи с ограничениями могут быть сведены к задачам без ограничений [17]. Пусть имеются ограничения:

- на переменные управления $u_L \le u(t) \le u_H$

- на переменные состояния $x_L \le x(t) \le x_H$

В соответствии с этим подходом ***u*** и/или ***x*** рассматриваются как функции от некоторых вспомогательных переменных *p, q*:

$$u = u(p) \quad x = x(q)$$

Переменные *p, q* рассматриваться как независимые функции от *t,* изменяющиеся от -∞ до +∞.

В начале 60-го годов был сформулирован принцип максимума Понтрягина [5], ставший важным средством решения задачи оптимального управления.

Пусть решается вариационная задача с функционалом в форме Больца:

$$J = S(x(t_0),x(t_f),t_0,t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t),u(t),t)dt \,. \qquad (\text{П}3.8)$$

Требуется определить векторы управления *u*(*t*) и состояния *x*(*t*), доставляющие минимум функционалу (П3.8) с учетом связей в виде обыкновенных дифференциальных уравнений движения системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),u(t),t)), \quad t \in [t_0,t_f]\,. \qquad (\text{П}3.9)$$

В этой задаче необходимые условия оптимальности определяется принципом максимума. Для того, чтобы допустимое управление *u**(*t*) и соответствующая ему траектория *x**(*t*) были оптимальными, необходимо существование непрерывной векторной функции ψ(*t*), отвечающей *u**(*t*) и *x**(*t*), что гамильтониан:

$$H(x,u,\psi,t) = V(x,u,t) + \psi^T f(x,u,t) \qquad (\text{П}3.10)$$

принимает на *u**(*t*) максимальное значение

$$H(x^*,u,\psi^*,t) \le H(x^*,u^*,\psi^*,t)$$

Процедуры принципа максимума Понтрягина для определения оптимального управления следующие:

- Составить гамильтониан системы (П3.9)
- Найти управление *u**(*x**(*t*),ψ*(*t*),*t*), максимизирующее значение *H* (П3.10)
- Составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{\partial H(x^*, u^*, t)}{\partial \psi^*} \\ \dot{\psi}^*(t) = -\dfrac{\partial H(x^*, u^*, t)}{\partial x^*} \end{cases}$$

с заданными краевыми условиями $x(t_0)$, $x(t_f)$ и условиями трансверсальности

$$\left[H + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{*t_f} \partial t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial t} - \psi \right]_{*t_f} \partial x_f = 0$$

- Решить канонические уравнения относительно $x^*(t)$, $\psi^*(t)$ и получить искомое оптимальное управление $u^*(x^*(t), \psi^*(t), t)$.

Принцип максимума определяет программные оптимальные управления. Он позволяет выявить структуру оптимального управления и вид оптимальных траекторий. Он является эффективным методом оптимизации.

П3.6. Численные методы для решения задач оптимизации

Необходимость и сложность решения задач оптимизации, возникающие на практике, требуют применения численных методов с использованием ЭВМ.

Численные методы для решения задач оптимизации, в том числе задач оптимального управления, принято условно разделяются на две больших группы: прямые и непрямые методы.

Прямые методы являются методами, не использующими необходимых и (или) достаточных условий экстремума для исходной экстремальной задачи. Прямые методы ориентированы на непосредственное отыскание экстремума функционала.

Например, градиентные методы основываются на анализе поведения функционала в окрестности некоторой точки из области его определения выделении экстремального направления. Движение происходит вдоль этого направления, которое приводит к максимуму или минимуму функционала

Непрямые методы основаны на использовании необходимых и (или) достаточных условий экстремума функционала, с помощью которых исходная вариационная задача сводится к краевой задаче. Широкое распространение получили непрямые методы, использующие принципа максимума Понтрягина в качестве необходимого условия экстремума.

Преимуществом численных непрямых методов является высокая точностью, потому что они рассчитываются на основе необходимого условия экстремума. Однако, непрямые методы имеют недостатки. Трудности решения задачи оптимизации непрямыми методами становятся практически непреодолимыми, если необходимые условия формулируются достаточно сложно, как например, в задачах оптимального управления с ограничениями на фазовые переменные. Ещё другая трудность непрямых методов связана с проблемой определения начальных и конечных условий для сопряженных переменных. Как правило, эти сопряженные переменные не имеют явного физического смысла, поэтому нелегко определить их величины и область значений. Практика расчётов показывает, что радиус сходимости этих методов часто бывает узким.

П3.7. Задача нелинейного программирования (НЛП)

Задача нелинейного программирования (НЛП) - случай математического программирования. Задачи математического программирования называются нелинейным, если целевой функцией или ограничения являются нелинейными функциями. Задача НЛП ставится как задача нахождения экстремума целевой функции F(x) при наличии ограничений, которые имеют вид неравенств или равенств:

- На минимум: $\min\limits_{x} F(x)$

при ограничениях

$$g_i(x) \geq 0,\ i = 1,...,m$$
$$h_j(x) = 0,\ j = 1,...,k$$

- На максимум: $$\max_x F(x)$$

при ограничениях

$$g_i(x) \le 0,\ i = 1,...,m$$
$$h_j(x) = 0,\ j = 1,...,k$$

О НЛП можно говорить в том случае, если среди функций $F(x)$, $g_i(x)$, $h_j(x)$ присутствует хотя бы одна нелинейная зависимость.

Все задачи нелинейного программирования можно разделить на следующие группы: задачи без системы ограничений; задачи с системой ограничений, выраженной равенствами; задачи с системой ограничений, выраженной неравенствами либо равенствами и неравенствами.

Ограничения в форме неравенств с помощью введения дополнительных неизвестных можно привести к равенствам, поэтому обычно рассматриваются только первые две задачи.

Среди задач нелинейного программирования важное место занимают задачи выпуклого программирования, когда локальный экстремум функции цели является одновременно и глобальным экстремумом.