Борисоглебский филиал
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Воронежский государственный университет»

На правах рукописи

Хвостов Михаил Николаевич

Матричная коррекция несобственных задач линейного программирования со специальной структурой

05.13.17 — Теоретические основы информатики

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Ерохин В.И.

Москва — 2015

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Линейные оптимизационные модели широко применяются в экономике и технике [11], [13] [14], [33], [41], [67], [79], [107], [109] – [111], [126], [130], [158] – [160], задачах помехоустойчивого анализа экспериментальных данных, гарантирующего оценивания параметров [12], [123] – [125], [131], [179], [199], распознавания образов и классификации [15], [16], [39], [42], [63], [66], [68], [103] – [105], [127], [146], [147], [162], [163], [175], [180], [183], [187], [198]. В связи с высокой востребованностью в приложениях, фундаментальные свойства, эффективные методы и алгоритмы построения, анализа и применения рассматриваемых моделей являются объектом интенсивных исследований [34], [35], [37], [38], [70], [71]. Указанные модели представляют собой совокупность объектов двух классов: систем линейных алгебраических уравнений и задач линейного программирования, которые объединяет совместная математическая теория. Так, результаты, полученные для систем линейных алгебраических уравнений, имеют важное значение и для задач линейного программирования. Таким образом, для решения задач линейного программирования имеется достаточно мощный математический аппарат.

Однако на практике часто встречаются неразрешимые задачи линейного программирования. Основными причинами их возникновения являются погрешности (шум) в экспериментальных данных, ошибки округления, возникающие при вычислениях в арифметике с конечной разрядностью, а также нечеткость и противоречивость информации, использующейся при построении указанных моделей. Такие задачи принято называть противоречивыми или несобственными.

В связи с тем, что несобственная задача линейного программирования не позволяет получить содержательную информацию об исследуемом процессе или явлении непосредственно, возникает необходимость в ее уточнении, изменении, в результате чего должна быть получена собственная задача, в некотором смысле «близкая» к исходной. Т.е. возникает задача предварительной обработки данных. Если рассматриваются модели малой размерности, то ситуация неразрешимости преодолевается достаточно простыми средствами: контроль правильности исходных данных с последующей их правкой, ослабление некоторых ограничений или их полное исключение из модели и т.д. Однако в случае модели высокой размерности или при автоматизированном (программном) формировании модели, необходимы более сложные (программно обеспеченные) средства коррекции данных [72]. Таким образом, матричная коррекция может являться инструментом обработки данных (информации), позволяющим решать задачи линейного программирования с зашумленными, неопределенными, нечеткими данными, что позволяет ее включить в область исследования теоретических основ информатики.

Несмотря на то, что изучение методов коррекции данных несобственных задач линейного программирования является относительно новым направлением развития теоретической информатики, предпосылки к исследованию проблем коррекции данных несобственных задач выпуклого программирования и противоречивых систем линейных алгебраических уравнений можно проследить еще в работах А.Н. Тихонова [152] – [156]. Систематические же исследования в данной области были начаты в 80-х годах (XX века) И.И. Еремиными [73] – [84], его учениками и коллегами: Н.Н. Астафьевым [1] – [3], А.А. Ватолиным [23] – [30], [196], [197], Вл.Д. Мазуровым, [128], [129], Л.Д. Поповым [141] – [144], В.Д. Скариным [148] – [150], С.П. Трофимовым [157], В.Н. Фроловым [158] – [161] и другими. В перечисленных работах рассматриваются несобственные задачи линейного и выпуклого программирования, вводятся соответствующая терминология и классификация несобственных задач линейного программирования [80], строится и исследуется теория двойственности, вводятся и исследуются дискретные аппроксимации решений – комитетные конструкции, предлагаются различные постановки и методы решения задач полной или частичной (правая часть системы уравнений или неравенств) параметрической коррекции и их содержательная, в основном экономическая, интерпретация.

В большинстве исследований рассматривается коррекция по вектору правой части ограничений и коэффициентам вектора целевой функции.

Так методы коррекции правой части ограничений двойственной пары задач линейного программирования рассматривались Ф.П. Васильевым [17] – [21], причем все вспомогательные задачи были также задачами линейного программирования.

В конце 90-х годов (XX в.) исследования в области коррекции несобственных задач линейного программирования были продолжены (а также продолжаются в настоящее время) в ВЦ им. А.А. Дородницына РАН и Московском педагогическом государственном университете В.А. Гореликом [43] – [65], [176] – [177], [132], [134] его учениками и коллегами: В.И. Ерохиным [85], [86], В.А. Кондратьевой [114], О.В. Муравьевой [137], Р.Р. Ибатуллиным [108], Р.В. Печенкиным [140], [178], И.А. Золтоевой [106] и другими. Указанными авторами широко исследовалась коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений при условии неотрицательности решения, а так же показана их тесная связь с задачами матричной корекции несобственных задач линейного программирования. В их работах рассмотрены задачи линейного программирования с несовместными системами ограничений, т.е несобственные задачи линейного программирования 1-го и 3-го рода в классификации [80]. В качестве вспомогательных, решены задачи коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств. Так коррекция задачи линейного программирования рассматривалась как двухкритериальная проблема максимизации исходного линейного критерия и минимизации нормы корректирующей матрицы ограничений. Эта проблема была формализована как задача минимизации нормы корректирующей матрицы при ограничении снизу на значение исходного критерия. Получены условия существования решения всех поставленных задач и аналитические выражения решений через собственные числа и векторы специальных матриц. В качестве приложения решена линейная задача аппроксимации по критерию минимального расстояния. Кроме того, с использованием чебышевской матричной нормы и ряда специфических свойств одноранговых матриц, было получено решение задачи минимаксной коррекции матрицы коэффициентов несобственной задачи линейного программирования в канонической форме путем сведения ее к задаче линейного программирования. Совместно с В.Л. Матросовым и С.А. Ждановым [133] исследовалось применение методов коррекции данных в задаче классификации.

Работа в области коррекции данных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования велись и зарубежными исследователями. Так, П. Амарал (P. Amaral) и П. Барахоно (P. Barahona) [168] – [173], независимо от перечисленных выше исследователей, но несколько позже были получены схожие результаты в области коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования. Ряд вопросов коррекции несовместных систем линейных неравенств рассматривались А. Даксом (A. Dax) [174]. В работах Дж.Б. Розена (J.B. Rosen) и его научной группы [189] – [193] была впервые поставлена и решена задача структурной коррекции переопределенной системы. Рассматривалась система линейных алгебраических уравнений, в которой левая часть системы – матрица A – задана неточно в силу недостаточной априорной информации, а вектор правой части b содержит неточные данные (в связи с ошибками измерения). Кроме того, матрица A обладает теплицевой структурой. Результатом работы алгоритма [192] является расширенная матрица коррекции, обладающая такой же структурой, как и исходная матрица.

Данный подход к решению задач структурной матричной коррекции получил дальнейшее развитие в работах бельгийских математиков под руководством профессора С. Ван Хаффел (S. Van Haffel) [181], [184], [185].

Перечисленные выше работы определяют направления современных исследований: матричная коррекция с использованием квадратичного и минимаксных критериев, а так же полиэдральных норм; коррекция несовместных систем заданной структуры; построение эффективных в вычислительном плане методов коррекции; коррекция несовместных систем с матрицами, имеющими разреженную структуру; построения методов решения многокритериальных задач; поиск необходимых и достаточных условий существования решения задач матричной коррекции.

Так в работах Печенкина Р.В. [44] – [47],[52],[54],[134],[140] получен метод решения задачи оптимальной матричной коррекции несовместных блочных систем линейных алгебраических уравнений при использовании квадратичного и минимаксного критериев, сформулирован критерий оптимальной коррекции несовместной системы с матрицей Теплица и Вандермонда при наличии ошибок только в левой части и предложен метод коррекции с использованием штрафных функций норм векторов невязок, для плохо обусловленных систем со структурой Вандермонда сформулирован регуляризованный критерий коррекции, разработан численный алгоритм, реализующий поиск оптимального решения в различных нормах.

В работах Ибатуллина Р.Р. [56] – [58], [108] продолжено изучение проблемы регуляризации и аппроксимации несобственных задач линейного и выпуклого программирования формулировалась Тихоновым А.Н., Ереминым И.И., Ватолиным А.А. и др. При этом основным критерием коррекции данных являлся квадратичный критерий. В данной работе предложены задачи коррекции данных с минимаксным критерием и построены методы коррекции, которые являеются для задач линейного программирования более эффективными в вычислительном плане. Приведены формулировка и решение задач коррекции всех данных для несовместных систем линейных уравнений с минимаксным критерием, формулировка и исследование задач минимаксной аппроксимации несобственных моделей линейного программирования в канонической и стандартной форме, построены и применены к некоторым задачам оптимизации и управления методы коррекции несобственных задач с несовместной системой ограничений.

В работах Золтоевой И.А. [53], [54], [106], получены методы решения задач коррекции системы ограничений и пороговых значений при использовании минимаксного и квадратичного критериев, разработаны методы оптимальной коррекции несовместных систем с разреженными матрицами, которые позволяют применить данный подход для решения ряда многокритериальных задач, получено решение задачи коррекции данных многокритериальной задачи при использовании метода попарных сравнений и метода анализа иерархий.

В работах Кондратьевой В.А. [59], [112] – [114] проблема коррекции формулируется как двухкритериальная задача, которая заключается в одновременном поиске матрицы, аппроксимирующей систему ограничений, и решении скорректированной задачи по исходному критерию, поставленная проблема решается по пути от вспомогательной задачи матричной коррекции системы линейных уравнений к задаче аппроксимации системы ограничений задачи линейного программирования и, наконец, к двухкритериальной задаче, доказываются необходимые и достаточные условия существования решения задач матричной коррекции: системы линейных уравнений, системы линейных уравнений с фиксированными элементами, системы ограничений канонической задачи линейного программирования, иллюстрируются случаи, когда задача аппроксимации не имеет решения, исследуется два частных способа параметризации задачи линейного программирования: коррекция с помощью матрицы, ранг которой равен единице, и один из способов многошаговой коррекции.

В работах Муравьевой О.В. [51],[60] – [65], [135] – [138], [177] исследуются вопросы существования и единственности решения в задаче матричной коррекции несовместной системы уравнений по критериям евклидовой и спектральной норм матрицы, рассмотрены некоторые не изученные ранее обобщения задачи коррекции несовместной системы линейных уравнений, в частности, фиксированные ограничения при некорректируемом векторе правой части системы, линейные ограничения на матрицу коррекции, получены аналитические выражения для решения задачи коррекции несобственной задачи ЛП, формализованной заданием порогового значения целевой функции и введением ее в качестве директивного ограничения, рассмотрены случаи с фиксированной и корректируемой правой частью системы, произвольным и неотрицательным допустимым планом, ограничениями вида равенства и неравенства, формулируется и решается задача линейной аппроксимации дискретно заданной функции по критерию, отличному от используемого в методе наименьших квадратов, приводятся процедуры построения единого критерия в задаче векторной оптимизации, основанные на различных методах аппроксимации несовместных систем линейных уравнений с дополнительными ограничениями, теория коррекции несовместных систем линейных уравнений применяется для классификации свойств в геометрических задачах.

В работах Ле Н.З. [119] – [122] приводятся постановки и оригинальные методы решения новых задач коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств с блочной структурой с использованием квадратичного и минимаксного критериев, основанные на декомпозиционных схемах, алгоритмы, реализующие разработанные методы.

Таким образом, методы матричной коррекции данных, разработанные перечисленными выше авторами, фактически сводятся к коррекции допустимой области задач линейного программирования. Но коррекция допустимой области задачи линейного программирования без обеспечения непустоты допустимой области соответствующей двойственной задачи, не гарантирует собственность скорректированной линейной оптимизационной модели [5], [18], [78]. Предпосылки к исследованию коррекции двойственной пары задач линейного программирования заложены Ватолиным А.А. [25]. А одним из первых трудов в области матричной коррекции двойственной пары задач линейного программирования является работа Ерохина В.И. [85]. В настоящее время работы в области матричной коррекции двойственной пары задач линейного программирования активно ведутся Ерохиным В.И., Красниковым А.С., Баркаловой О.С. не только по критерию евклидовой нормы, но и по минимуму полиэдральных норм.

Так, в работах Красникова А.С. [88] – [94], [115] – [118] были разработаны методы оптимальной по минимуму евклидовой матричной нормы совместной коррекции данных двойственной пары несобственных задач линейного программирования, не имеющих специальной структуры, а также соответствующих задач со специальной структурой в виде запрета на коррекцию отдельных элементов, столбцов, строк, блоков матрицы или расширенной матрицы коэффициентов их ограничений. Приведены условия разрешимости задач оптимальной по минимуму евклидовой матричной нормы совместной коррекции данных двойственной пары несобственных задач линейного программирования. Разработаны, теоретически обоснованы и проверены в вычислительных экспериментах алгоритмы решения перечисленных выше задач оптимальной совместной коррекции данных, исследованы приложения полученных методов к задачам распознавания образов с пересекающимися классами и задачам гарантирующего оценивания параметров.

В работах Баркаловой О.С. [7] – [10] получены и теоретически обоснованы необходимые и достаточные условия существования решения задачи коррекции систем линейных уравнений по минимуму различных видов полиэдральных норм, разработаны методы решения задач коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств по минимуму полиэдральных норм, в том числе с различными ограничениями на структуру матриц коэффициентов, разработаны методы коррекции задач линейного программирования по минимуму полиэдральных норм, а также совместной коррекции пары двойственных задач линейного программирования, для многокритериальных задач рассмотрены методы коррекции по минимуму полиэдральных норм с использованием фиксированных пороговых значений, а также одновременной коррекции системы ограничений и пороговых значений.

Однако в отличае от случая решения задач безусловной оптимизации возникающих из регулизованных задач систем линейных уравнений и неравенств, при котором применение теории двойственности может привести к снижению размерности задачи [36], применение теории двойственности при решении задач матричной коррекции несобственных задач линейного программирования приводит как к увеличению размерности решаемой задачи, так и к усложнению алгоритма ее решения. Поэтому, важным аспектом является как можно более точное определение области применимости методов оптимизации, основанных на коррекции только прямой задачи линейного программирования.

Указанные методы опираются на лемму Тихонова [153] и ее модификации на нормы, отличные от евклидовой, и поэтому имеют специальный вид (оптимальные матрицы коррекции оказываются одноранговыми [85]). Между тем, структура данных прикладной задачи может иметь более сложный вид: быть блочной, разреженной, иметь фиксированные элементы, строки или столбцы, коррекция которых запрещена. Такие задачи рассматривались и раньше, однако до сих пор не выработано единого подхода к исследованию таких задач. Таким образом, для решения задач линейного программирования со специальной структурой требуется разработка специального математического аппарата.

В свою очередь, специальная структура матрицы коррекции задается расположением фиксированных элементов расширенных матриц задач линейного программирования. Необходимость в фиксировании элементов чаще всего возникает при обработке разреженных матриц, нулевые значения элементов которых соответствуют аргументам, не влияющим на конкретное уравнение системы ограничений, и при решении задач линейного программирования с системами ограничений, содержащими освобожденные от коррекции элементы в связи с физическим смыслом задачи. Разреженные матрицы возникают при моделировании явлений и процессов, представляющих собой системы, состоящие из более мелких подсистем, слабо связанных между собой. Такая ситуация на практике возникает в случае наличия большого числа аргументов, связанных большим числом уравнений. Таким образом, задачи со структурной матричной коррекцией возникают чаще всего при изучении задач линейного программирования высокой размерности. Далее, если нет соответствующих оговорок, будем считать, что имеем задачу со специальной структурой, которая является задачей высокой размерности.

В большинстве исследований численные методы решения задачи математического программирования к которой сводится исходная задача матричной коррекции данных не рассматриваются. Исключениями могут служить работы В.А. Горелика, В.И. Ерохина, Р.В. Печенкина, И.А. Золтоевой, Н.З. Ле в которых намечаются подходы к разработке соответствующих численных методов и алгоритмов матричной коррекции данных на основе TLN (Total Least Norm – алгоритм обобщенной наименьшей нормы) и метода Ньютона [47], [54], [86], [122]. К данному ряду работ можно отнести работы В.И. Ерохина [85] и А.С. Красникова [118], исследовавших численные методы коррекции данных с применением метода Марквардта.

Тем не менее, чтобы матричная коррекция стала реально работающим инструментом анализа данных, формализуемых с помощью линейных оптимизационных моделей, необходимо более широко исследовать соответствующие численные методы и алгоритмы, добиваться их эффективности, проверять на большем количестве возникающих на практике задач.

Таким образом, актуальной **научной проблемой** является развитие методов и алгоритмов оптимальной матричной коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода, позволяющих включать несобственные линейные оптимизационные модели в число допустимых и конструктивно используемых методов теоретической информатики.

Объектом исследования является проблема матричной коррекции данных несобственных задач линейного программирования, возникающих в задачах линейной оптимизации, связанных с многочисленными приложениями теоретической информатики (классификация, гарантирующее оценивание параметров и др.).

Предмет исследования составляют задачи коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода с евклидовой и взвешенной евклидовой матричной нормой в роли критерия качества коррекции.

Цель работы состоит в построении математического аппарата оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричной норме коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода высокой размерности, структура которых определяется произвольным множеством фиксированных (некорректируемых) элементов, и разработке соответствующих вычислительных алгоритмов.

В основу исследования положена следующая **гипотеза**. Пусть несобственная линейная оптимизационная модель является результатом неточно заданных или противоречивых исходных данных. Причем, данная оптимизационная модель представляет собой несобственную задачу ЛП 1-го рода. Оптимальная матричная коррекция, сводимая к задаче оптимизации, позволяет получить оптимальные по минимуму евклидовой нормы матрицы коррекции H_1^* или $[H_1^* \ -h_1^*]$, гарантирующие собственность и **структурный вид** скорректированной линейной модели

$$(A + H_1^*)x = b,\ x \geqslant 0,\ c^\top x \to \max \quad \text{или} \quad (A + H_1^*)x = b + h_1^*,\ x \geqslant 0,\ c^\top x \to \max$$

и соответствующие оптимальные векторы x_1^* и u_1^*. Результатами оптимальной совместной матричной коррекции, сводимой к задаче оптимизации, позволяющей получить оптимальные по минимуму евклидовой нормы матрицы коррекции являются H_2^* или $[H_2^* \ -h_2^*]$, гарантирующие собственность и структурный вид скорректированных линейных модели

$$\begin{cases} (A+H_2^*)x = b,\ x \geqslant 0,\ c^\top x \to \max, \\ u^\top (A+H_2^*) \geqslant c^\top,\ b^\top u \to \min, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (A+H_2^*)x = b + h_2^*,\ x \geqslant 0,\ c^\top x \to \max, \\ u^\top (A+H_2^*) \geqslant c^\top,\ (b+h_2^*)^\top u \to \min, \end{cases}$$

и соответствующие оптимальные векторы x_2^* и u_2^*. Тогда H_1^* и H_2^*, h_1^* и h_2^*, x_1^* и x_2^*, u_1^* и u_2^* попарно совпадают.

Для достижения поставленной цели и проверки правильности выдвинутой гипотезы были поставлены следующие **задачи:**

1. Получить и обосновать условия существования решения несобственных задач линейного программирования 1-го рода, не имеющих специальной структуры без коррекции двойственной задачи.

2. Опираясь на теоретические результаты, полученные при решении предыдущей задачи, получить и обосновать условия существования решения несобственных задач линейного программирования 1-го рода со специальной структурой в виде запрета на коррекцию отдельных элементов расширенной матрицы коэффициентов их ограничений.

3. Разработать, теоретически обосновать и проверить в вычислительных экспериментах эффективные алгоритмы решения перечисленных выше задач оптимальной коррекции данных.

Методологическую основу исследования составляют методы классической и вычислительной линейной алгебры, матричного анализа, математического программирования.

Научная новизна диссертации заключается в том, что получены и теоретически обоснованы:

1) условия существования решения задачи оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода, гарантирующего собственность скорректированных задач и учитывающего их структуру, выраженные в терминах коррекции допустимой области прямой задачи линейного программирования,

2) конструктивные формулы построения указанного решения,

3) соответствующие численные алгоритмы квазиньютоновского типа с аналитическим вычислением производных.

Практическая значимость результатов.

Подходы, полученные при разработке моделей и алгоритмов, исследованных в данной работе, могут быть использованы для построения методов и алгоритмов, направленных на решение практических задач, связанных с экономикой, техникой, анализом данных, обнаружением закономерностей в данных и их извлечением, анализом текста, устной речи и изображений, распознаванием образов, фильтрацией, распознаванием и синтезом изображений.

Основные положения, выносимые на защиту:

• достаточные условия существования решения задач оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода, выраженные в терминах коррекции допустимой области прямой задачи;

• достаточные условия существования решения задач оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода, выраженные в терминах коррекции допустимой области прямой задачи с учетом специальной структуры;

• редукции задач матричной коррекции данных оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм несобственных задач линейного программирования 1-го рода, учитывающие ограничения на структуру корректирующей матрицы, к задачам безусловной минимизации;

• эффективные алгоритмы решения задач оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода.

Внедрение и апробация результатов исследования. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на XIV-я Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2011), Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика» (Новосибирск, 2011), Научно-технической конференции молодых ученых Санкт-Петербургского технологического института (технического университета) «Неделя науки - 2013» (Санкт-Петербург, 2013), VII Московской международной конференции по исследованию операций ORM-2013 (Москва, 2013), семинаре по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации (CNSA & NDO) Санкт-Петербургского технологического института (технического университета)(Санкт-Петербург, 2014). Кроме того, основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на научно-методических семинарах кафедры прикладной математики информатики, фикики и методики их преподавания Борисоглебского филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» и кафедры инноватики и информационных технологий Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета).

Получено свидетельство о регистрации алгоритма [96].

Материалы, составляющие основное содержание диссертации, опубликованы в 9 печатных работах, из них 4 статьи в изданиях, включенных в перечень ВАК РФ [95], [99], [100], [164], 5 в сборниках и трудах конференций [97], [98], [101], [102], [165].

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, содержащего 199 источников. Полный объем диссертации составляет 116 страниц, основная часть – 116 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа посвящена разработке эффективных методов оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственных задач линейного программирования первого рода, выраженных в терминах коррекции допустимой области прямой задачи с учетом специальной структуры, и их практическим приложениям.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, определяется цель работы, выдвигается гипотеза, формулируются задачи, которые необходимо решить для реализации поставленной цели и проверки выдвинутой гипотезы, указывается методологическая основа исследования, раскрывается научная новизна и практическая значимость диссертационной работы, выдвигаются основные положения, выносимые на защиту, представлено основное содержание работы.

В первой главе рассматриваются постановки задач матричной коррекции без структурных ограничений, структурной, а так же структурной взвешенной матричной коррекции как двойственной пары несобственных задач линейного программирования (ЛП), так и несобственной задачи ЛП первого рода. Причем каждая задача рассматривается в двух постановках: коррекция только левой части систем ограничений и коррекция обеих частей систем ограничений. Приводятся вспомогательные леммы. Приведены достаточные условия разрешимости несобственных задач ЛП первого рода после матричной коррекции их допустимой области.

Во второй главе рассматривается метод Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно. Находятся аналитические производные для целевых функций задач матричной коррекции без структурных ограничений, структурной, а так же структурной взвешенной матричной коррекции как двойственной пары несобственных задач ЛП, так и несобственной задачи ЛП первого рода. Основываясь на методе Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно, получен алгоритм минимизации, применимый к любой из перечисленных выше функций.

В третьей главе рассматриваются задачи средней размерности bgdbg1, mondou2 из системы netlib [182]. Приводится описание и графическое представление данных задач. Проводятся вычислительные эксперименты, подтверждающие работоспособность разработанных методов. Результаты работы алгоритма представлены в виде графиков сходимости, а так же гистограмм относительной величины коррекции элементов матриц систем ограничений задач ЛП.

Заключение содержит результаты и выводы диссертации.

Глава 1. Матричная коррекция несобственных задач линейного программирования по минимуму евклидовой нормы

1.1. Постановки задачи матричной коррекции

Пусть
$$L(A,b,c):\; Ax=b,\; x\geqslant 0,\; c^\top x\to\max \tag{1.1}$$
– некоторая задача линейного программирования в канонической форме,
$$L^*(A,b,c):\; u^\top A\geqslant c^\top,\; b^\top u\to\min \tag{1.2}$$
– двойственная ей задача линейного программирования в стандартной форме, где $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $c,x\in\mathbb{R}^n$, $b,u\in\mathbb{R}^m$. Символом $\mathcal{X}(A,b)\triangleq\{x\,|Ax=b,\; x\geqslant 0\}$ обозначим допустимое множество задачи $L(A,b,c)$, а символом $\mathcal{U}(A,c)\triangleq\left\{u\,\middle|u^\top A\geqslant c^\top\right\}$ – допустимое множество задачи $L^*(A,b,c)$.

Задачи (1.1), (1.2) условимся рассматривать как несобственные, в силу чего хотя бы одно из множеств $\mathcal{X}(A,b)$ или $\mathcal{U}(A,c)$ является пустым. Задачей $D^{[H\;-h]}$ матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ будем называть задачу построения матрицы $[H\;\;-h]\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей разрешимость скорректированных задач
$$\begin{cases} L(A+H,b+h,c):(A+H)x=b+h,\; x\geqslant 0,\; c^\top x\to\max,\\ L^*(A+H,b+h,c):u^\top(A+H)\geqslant c^\top,\; (b+h)^\top u\to\min\,. \end{cases}$$

Задачей D^H матричной коррекции только левых частей ($h=0$) пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ будем называть задачу построения матрицы $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$, обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей совместность скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A+H,b,c) : (A+H)x = b,\ x \geqslant 0,\ c^\top x \to \max, \\ L^*(A+H,b,c) : u^\top (A+H) \geqslant c^\top,\ b^\top u \to \min\,. \end{cases}$$

Одновременно с задачами $D^{[H\ -h]}$ и D^H будем рассматривать коррекцию противоречивой системы ограничений задачи $L(A,b,c)$, формализованную с помощью задач

$$P^{[H\ -h]}: \quad \begin{cases} \|[H\quad -h]\| \to \min, \\ \mathcal{X}\,(A+H, b+h) \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$P^H: \quad \begin{cases} \|H\| \to \min, \\ \mathcal{X}\,(A+H, b) \neq \varnothing, \end{cases}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова матричная (далее, в зависимости от контекста, матричная или векторная) норма, определяемая для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ как

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Мы также рассмотрим модификации задач D^H, $D^{[H\ -h]}$, P^H, $P^{[H\ -h]}$, – задачи SD^H, $SD^{[H\ -h]}$, SP^H, $SP^{[H\ -h]}$ с некоторыми предписанными множествами нулевых элементов матриц H и $[H\quad -h]$, порождающими запреты на коррекцию элементов матриц A и $[A\quad -b]$. Указанные задачи будем называть задачами матричной коррекции со структурными ограничениями.

Достаточные условия разрешимости задач D^H, $D^{[H\ -h]}$, SD^H, $SD^{[H\ -h]}$ в случае $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing, \mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ и являются в настоящей работе основным предметом исследования.

Допустимые множества всех рассматриваемых задач матричной коррекции будем обозначать как $\mathbf{FS}(\cdot)$. Например, $\mathbf{FS}(SD^{[H\ -h]})$ – допустимое множество решений задачи $SD^{[H\ -h]}$.

Для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^n$, по аналогии с псевдообращением матриц, символом x^+ будем обозначать его «псевдообращение» [32]:

$$x^+ = \begin{cases} \left(x^\top x\right)^{-1} \cdot x^\top \text{ если } x \neq 0, \\ 0 \in \mathbb{R}^{1\times n} \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{1.3}$$

При $x \neq 0$ несложно убедиться, что $x^+ x = 1$ и $\|x^+\| = 1/\|x\|$, а если выполнено условие $\|x\| = 1$, то $x^+ = x^\top$.

1.2. Достаточные условия разрешимости несобственных задач ЛП 1-го рода после матричной коррекции их допустимой области без учета структурных ограничений

Предположим, что на матрицы коррекции (расширенные матрицы коррекции) задач $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ не наложены ограничения.

Для последующих выкладок потребуются определенные сведения о матрицах H^* и $[H^* \ \ -h^*]$, являющихся решениями задач P^H и $P^{[H \ \ -h]}$. Систематизируя результаты, впервые полученные в работах [25], [80], и развитые в последствии в работах [51], [59], указанные сведения можно изложить в виде следующих лемм.

Лемма 1.2.1. *Если решение задачи P^H существует, то оно имеет вид*

$$H^* = (b - Ax^*)\, x^{*+}, \tag{1.4}$$

где

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x \geqslant 0} \frac{\|b - Ax\|}{\|x\|}.$$

При этом

$$\|H^*\| = \frac{\|b - Ax^*\|}{\|x^*\|}. \tag{1.5}$$

Лемма 1.2.2. *Если решение задачи $P^{[H \ \ -h]}$ существует, то оно имеет вид*

$$[H^* \ \ -h^*] = \frac{(b - Ax^*) \cdot \begin{bmatrix} x^{*\top} & 1 \end{bmatrix}}{x^{*\top} x^* + 1}, \tag{1.6}$$

где

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x \geqslant 0} \frac{\|b - Ax\|^2}{\|x\|^2 + 1}.$$

При этом

$$\|[H^* \ \ -h^*]\|^2 = \frac{\|b - Ax^*\|^2}{\|x^*\|^2 + 1}. \tag{1.7}$$

Результаты данных лемм, являющихся классическими результатами, используются для доказательства нижеследующих теорем.

Лемма 1.2.3. (*Неравенство Коши-Буняковского*) [31]

Для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство* $\left|x^\top y\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, *которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда справедливо представление* $y = \gamma x$, *где* γ *– некоторое число.*

Лемма 1.2.4. (*Теорема двойственности* [18], *классификация несобственных задач ЛП* [80]) *Задачи* $L(A, b, c)$ *и* $L^*(A, b, c)$ *разрешимы тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия* $\mathcal{X}(A, b) \neq \varnothing$ *и* $\mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$. *Если задачи* $L(A, b, c)$ *и* $L^*(A, b, c)$ *неразрешимы, возможны следующие три случая:*

1. $\mathcal{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$, $L(A, b, c)$ *– несобственная задача ЛП 1-го рода,* $L^*(A, b, c)$ *– несобственная задача ЛП 2-го рода.*

2. $\mathcal{X}(A, b) \neq \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) = \varnothing$, $L(A, b, c)$ *– несобственная задача ЛП 2-го рода,* $L^*(A, b, c)$ *– несобственная задача ЛП 1-го рода.*

3. $\mathcal{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) = \varnothing$, $L(A, b, c)$ *и* $L^*(A, b, c)$ *– несобственные задачи ЛП 3-го рода.*

Лемма 1.2.5. (*Фаркаша* [35], [37]). *Либо имеет решение система*

$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

либо разрешима система

$$\begin{cases} A^\top y \geqslant 0, \\ b^\top y < 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

В дальнешем неоднократно будет использоваться теорема Александрова – Фань-Цзи об альтернативной совместности системы линейных неравенств и смешанной системы линейных уравнений и неравенств ([5]) в следующей формулировке

Теорема 1.2.6. (*Александрова – Фань-Цзи*) *Либо совместна система* $u^\top A \geqslant c^\top$, *либо совместна система* $Ax = 0, c^\top x > 0, x \geqslant 0$.

Следствием данной теоремы является следующее утверждение

Лемма 1.2.7. (*Следствие условия* $\mathcal{U}(A + H^*, c) = \varnothing$ *при решении задач* P^H, $P^{[H\ -h]}$, SP^H, $SP^{[H\ -h]}$ *для несобственной задачи* $L(A, b, c)$ *1-го рода*)

Пусть H^* *– решение задачи* P^H *или* SP^H, $[H^* \quad -h^*]$ *– решение задачи* $P^{[H \ -h]}$ *или* $SP^{[H \ -h]}$ *для несобственной задачи* $L(A, b, c)$ *1-го рода и выполнено условие* $\mathcal{U}(A + H^*, c) = \varnothing$.

Тогда существует вектор $z \in \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющий условиям*

$$z \geqslant 0, \quad \|z\| = 1, \quad (A + H^*)z = 0, \quad c^\top z > 0, \tag{1.10}$$

$$Az \neq 0. \tag{1.11}$$

Доказательство. По определению $\mathcal{U}(\cdot)$ условие $\mathcal{U}(A+H^*, c) = \varnothing$ означает несовместность системы неравенств $u^\top(A + H^*) \geqslant c^\top$. В этом случае в силу теоремы Александрова – Фань-Цзи, совместна альтернативная система, имеющая вид $z \geqslant 0$, $(A + H^*)z = 0$, $c^\top z > 0$. В силу условия $c^\top z > 0$ вектор z – не нулевой и может иметь произвольную (не нулевую) норму. В частности, может выполняться условие $\|z\| = 1$, что и соответствует (1.10).

Убедимся в выполнении условия (1.11). Действительно, предположив $Az = 0$, по теореме Александрова – Фань-Цзи имеем $\mathcal{U}(A, c) = \varnothing$, что противоречит условию леммы. □

Теорема 1.2.8. (*О достаточных условиях существования решения задачи* D^H)

Если $\mathcal{X}(A, b) = \varnothing, \mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$ (*т.е.* $L(A, b, c)$ *– несобственная задача ЛП 1-го рода*), $b \neq 0$, *задача* P^H *разрешима и матрица* H^* *является её решением, то задача* D^H *также разрешима и матрица* H^* *является её решением.*

Доказательство. 1. Покажем, что матрица H^* принадлежит допустимой области задачи D^H. Предположим противное, а именно, что $H^* \notin \mathbf{FS}(D^H)$. Поскольку $H^* \in \mathbf{FS}(P^H) \Leftrightarrow \mathcal{X}(A + H^*, b) \neq \varnothing$, в силу леммы 1.2.4 $\mathcal{U}(A + H^*, c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 1.2.7 существует вектор z, удовлетворяющий условиям (1.10)-(1.11).

1.1. Покажем, что выполняется условие

$$\|H^*\| = \frac{\|b - Ax^*\|}{\|x^*\|} > \|Az\|. \tag{1.12}$$

Действительно, $(A + H^*)\, z = 0 \Rightarrow H^* z = -Az$. В силу (1.4), получим $(b - Ax^*)\left(x^{*+} z\right) = -Az$. В силу условия (1.11) $x^{*+} z \neq 0$, $x^* \neq 0$. Тогда

$$b - Ax^* = -Az/x^{*+}z. \tag{1.13}$$

Покажем, что $x^* \neq \lambda z$, где $\lambda \neq 0$ – некоторое число. Предположим противное:

$$x^* = \lambda z \Rightarrow x^{*+} = \frac{1}{\lambda} z^\top \Rightarrow \left(b - Ax^* = -\frac{Az}{x^{*+} z} \Leftrightarrow b - \lambda Az = -\lambda Az \right) \Rightarrow b = 0,$$

что противоречит условию теоремы.

Оценим $|x^{*+}z|$. Поскольку $x^* \neq \lambda z$, в силу леммы 1.2.3 справедливо неравенство $|x^{*+}z| < \|x^{*+}\| \cdot \|z\| = \|x^{*+}\|$.

Поэтому в силу (1.13)

$$\|b - Ax^*\| > \frac{\|Az\|}{\|x^{*+}\|}. \tag{1.14}$$

Так как $\left\|x^{*+}\right\| = 1/\|x^*\|$, то $\|b - Ax^*\| > \|Az\| \cdot \|x^*\|$, откуда в силу (1.5), (1.14) и получаем (1.12).

1.2. Пусть $H_{z,\gamma} = (b - \gamma Az)(\gamma z)^+$, где $\gamma > 0$ – некоторый скалярный параметр. Очевидно, что $H_{z,\gamma}$ – допустимое решение задачи P^H, поскольку $(\gamma z) \in \mathcal{X}(A + H_{z,\gamma}, b)$. В то же время, по аналогии с (1.5), $\|H_{z,\gamma}\| = \gamma^{-1}\|b - \gamma Az\|$. Рассмотрим $H^*_{z,\gamma} = \lim\limits_{\gamma \to +\infty} H_{z,\gamma} = -Azz^\top$. В силу (1.12) имеем

$$\left\|H^*_{z,\gamma}\right\| = \left\|Azz^+\right\| = \left\|Azz^\top\right\| = \|Az\| < \|H^*\|. \tag{1.15}$$

Но условие (1.15), в свою очередь, означает, что для достаточно большого, но конечного $\gamma > 0$ существует матрица $H_{z,\gamma}$, являющаяся допустимым решением задачи P^H и такая, что $\|H_{z,\gamma}\| < \|H^*\|$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы H^*.

2. Покажем, что H^* – оптимальное решение задачи D^H. Действительно, если предположить противное, то существует матрица $H^{**} \in \mathbf{FS}(D^H)$ такая, что $\|H^{**}\| < \|H^*\|$. Но $\mathbf{FS}(D^H) \subset \mathbf{FS}(P^H)$, следовательно, существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы H^* в задаче P^H. $\square$

Теорема 1.2.9. (*О достаточных условиях существования решения задачи* $D^{[H\ \ -h]}$)

Если $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ *(т.е.* $L(A,b,c)$ *– несобственная задача ЛП 1-го рода), задача* $P^{[H\ \ -h]}$ *разрешима и матрица* $[H^*\ \ -h^*]$ *является* *её решением, то задача* $D^{[H\ \ -h]}$ *также разрешима и матрица* $[H^*\ \ -h^*]$ *также является её решением.*

Доказательство. 1. Покажем, что матрица $[H^*\ \ -h^*]$ принадлежит допустимой области задачи $D^{[H\ \ -h]}$. Предположим противное, а именно, что $[H^*\ \ -h^*] \notin \mathbf{FS}(D_{[H)\ \ -h]}$. Поскольку $[H^*\ \ -h^*] \in \mathbf{FS}(P^{[H\ \ -h]}) \Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H^*, b+h^*) \neq \varnothing$, в силу леммы 1.2.4 $\mathcal{U}(A+H^*, c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 1.2.7 существует вектор z, удовлетворяющий условиям (1.10)-(1.11).

1.1. Покажем, что выполняется условие

$$\|H^*\ \ -h^*\| = \frac{\|b - Ax^*\|}{\sqrt{x^{*\top}x^* + 1}} > \|Az\|\,. \tag{1.16}$$

Действительно, $(A + H^*)\,z = 0 \Rightarrow H^*z = -Az$. В силу (1.11) и (1.6), получим

$$\frac{(b - Ax^*)\,x^{*\top}z}{x^{*\top}x^* + 1} = -Az \neq 0 \Rightarrow x^{*\top}z \neq 0,\ x^* \neq 0. \tag{1.17}$$

Формула (1.17) позволяет связать величины $\|b - Ax^*\|$ и $\|Az\|$:

$$b - Ax^* = -\frac{x^{*\top}x^* + 1}{x^{*\top}z} \cdot Az, \quad \|b - Ax^*\| = \frac{x^{*\top}x^* + 1}{|x^{*\top}z|} \cdot \|Az\|\,.$$

В силу леммы 1.2.3 с учётом условия $\|z\| = 1$ имеем $\left|x^{*\top}z\right| \leqslant \|x^*\| = \sqrt{x^{*\top}x^*}$, поэтому

$$\|b - Ax^*\| \geqslant \frac{x^{*\top}x + 1}{\sqrt{x^{*\top}x^*}} \cdot \|Az\|\,.$$

Но в силу (1.7),

$$\|[H^*\ \ -h^*]\| = \frac{\|b - Ax^*\|}{\sqrt{x^{*\top}x + 1}} \geqslant \sqrt{\frac{x^{*\top}x + 1}{x^{*\top}x^*}} \cdot \|Az\| > \|Az\|\,,$$

что и означает выполнение условия (1.16).

1.2. Пусть

$$[H\ \ -h]_{z,\gamma} = [H_{z,\gamma}\ \ -h_{z,\gamma}] = \frac{(b - \gamma Az)\left[\gamma z^\top\ \ 1\right]}{\gamma^2 + 1},$$

где $\gamma > 0$ – некоторый скалярный параметр. Несложно убедиться, что $(\gamma z){\in}\mathcal{X}(A + H_{z,\gamma}, b + h_{z,\gamma})$, в силу чего матрица $[H\ \ -h]_{z,\gamma}$ – допустимое решение задачи $P^{[H\ \ -h]}$. В то же время, по аналогии с (1.7),

$$\|H\ \ -h\|_{z,\gamma} = \frac{\|b-\gamma Az\|}{\sqrt{\gamma^2+1}}.$$

Рассмотрим матрицу

$$[H\ \ -h]^*_{z,\gamma} = \lim_{\gamma\to+\infty} \frac{(b-\gamma Az)\left[\gamma z^\top\ \ 1\right]}{\gamma^2+1} = \left[-Azz^\top\ \ 0\right].$$

В силу (1.16) имеем

$$\|\,[H\ \ -h]^*_{z,\gamma}\,\| = \|Az\| < \|H^*\ \ -h^*\|\,. \tag{1.18}$$

Условие (1.18), в свою очередь, означает, что для достаточно большого, но конечного $\gamma > 0$ существует матрица $[H\ \ -h]_{z,\gamma}$, являющаяся допустимым решением задачи $P^{[H\ \ -h]}$ и такая, что $\|\,[H\ \ -h]_{z,\gamma}\,\| < \|[H^*\ \ -h^*]\|$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ \ -h^*]$.

2. Покажем, что $[H^*\ \ -h^*]$ – оптимальное решение задачи $D^{[H\ \ -h]}$. Действительно, если предположить противное, то существует матрица $[H^{**}\ \ -h^{**}] \in \mathbf{FS}(D^{[H\ \ -h]})$ такая, что $\|[H^{**}\ \ -h^{**}]\| < \|[H^*\ \ -h^*]\|$. Но $\mathbf{FS}(D^{[H\ \ -h]}) \subset \mathbf{FS}(P^{[H\ \ -h]})$, следовательно, существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ \ -h^*]$ в задаче $P^{[H\ \ -h]}$. $\square$

В качестве примера, иллюстрирующего теорем 1.2.8 и 1.2.9 рассмотрим задачи оптимизации D_H, $D_{[H\ -h]}$ с параметрами $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Проверка принадлежности указанной задачи к классу несобственных задач ЛП 1-го рода. Пусть $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$: $A^\top y = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \geqslant 0$, $b^\top w = -3 < 0$ тогда по лемме 1.2.5 $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{array} \right.$

не имеет решений, отсюда следует, что $\mathcal{X}(A,b)=\varnothing$. Пусть $u=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$:

$$u^\top A=\begin{bmatrix}2\\6\\2\\4\\2\end{bmatrix}\geqslant c^\top=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\mathcal{U}(A,c)\neq\varnothing.$$

Обозначим результаты коррекции только прямой и двойственой пары задач линейного программирования как x^*, H^*, h^* и x^{**}, H^{**}, h^{**} соответственно.

1) Для пары задач P^H и D^H:

$$x^*\approx x^{**}\approx\begin{bmatrix}0,850427271\\0\\0,958054645\\0\\4,526254446\end{bmatrix},$$

$$H^*\approx H^{**}\approx\begin{bmatrix}-0,037732253 & 0 & -0,042507527 & 0 & -0,200823495\\0,036557949 & 0 & 0,041184606 & 0 & 0,194573460\\-0,205024855 & 0 & -0,230972150 & 0 & -1,091209907\\0,024393141 & 0 & 0,027480260 & 0 & 0,129828344\end{bmatrix},$$

$$c^\top x\approx c^\top x^{**}\approx 1,388780151.$$

2) Для пары задач $P^{[H\ -h]}$ и $D^{[H\ -h]}$:

$$x^*\approx x^{**}\approx\begin{bmatrix}0,772044982\\0\\0,961585405\\0\\3,970548191\end{bmatrix},\ h^*\approx h^{**}\approx\begin{bmatrix}0,058749831\\-0,029623942\\0,257256409\\-0,041738421\end{bmatrix},$$

$$H^* \approx H^{**} \approx \begin{bmatrix} -0,045357512 & 0 & -0,056492980 & 0 & -0,233269035 \\ 0,022871016 & 0 & 0,028485950 & 0 & 0,117623290 \\ -0,198613520 & 0 & -0,247374009 & 0 & -1,021448970 \\ 0,032223938 & 0 & 0,040135056 & 0 & 0,165724410 \end{bmatrix},$$

$$c^\top x^* \approx c^\top x^{**} \approx 1.321198065.$$

3) Для пары задач SP^H и SD^H с логическим шаблоном для структуры нулевых и ненулевых элементов матрицы H

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \quad x^* \approx x^{**} \approx \begin{bmatrix} 1,43496956 \\ 0,00000643 \\ 0,86477004 \\ 0,01878429 \\ 5,48474944 \end{bmatrix},$$

$$H^* \approx H^{**} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} -0,05578117 & 0 & 0 & -0,02231480 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,01747355 & 0.16899363 \\ 0 & 0 & -0,19306256 & 0 & -1.21338673 \\ 0,01673840 & 0,00361122 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c^\top x \approx c^\top x^{**} \approx 1,54234738.$$

1.3. Постановка задачи структурной матричной коррекции

Пусть задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ таковы, что $\mathcal{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$. С несобственными задачами $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ будем связывать задачи SD^H, $SD^{[H\ -h]}$, SP^H, $SP^{[H\ -h]}$ структурной матричной коррекции, в которых матрице H или расширенной матрице $[H\ \ -h]$ предписано иметь структуру нулевых и ненулевых элементов, задаваемую множествами индексов нулевых элементов $\mathbf{K} = \{(i \in \{1, 2, ..., m\},\ j \in \{1, 2, ..., n\}) |\, H_{i,j} = 0\}$ и $\mathbf{k} = \{i \in \{1, 2, ..., m\}|\ h_i = 0\}$.

Для реализации структурных требований к H и $[H \quad -h]$ вводится ряд объектов:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{i,j}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{H}_{i,j} = 0 \text{ если } \{i, j\} \in \mathbf{K}, \\ \mathcal{H}_{i,j} = 1 \text{ в противном случае }, \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_i) \left| \begin{array}{l} \mathfrak{h}_i = 0 \text{ если } i \in \mathbf{k}, \\ \mathfrak{h}_i = 1 \text{ в противном случае }. \end{array} \right.$$

Как видно из представленных выше формул, матрица $\mathcal{H}$ и вектор $\mathfrak{h}$ – логические шаблоны для структуры нулевых и ненулевых элементов матрицы H и вектора h.

Пусть

$$s\left(p, q\right) = (s_i) = \left| \begin{array}{l} p_j \text{ если } q_j \neq 0, \\ 0 \text{ в противном случае}, \end{array} \right.$$

где $s\left(p, q\right) \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_j) \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_j) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом,

$$\hbar(H) = \begin{bmatrix} s\left(H_{1*}^\top, \mathcal{H}_{1*}^\top\right) \\ \vdots \\ s\left(H_{m*}^\top, \mathcal{H}_{m*}^\top\right) \end{bmatrix} - \tag{1.19}$$

вектор, составленный из элементов строк H_{i*} в соответствии с шаблонами строк $\mathcal{H}_{i*}$,

$$\hbar([H \quad -h]) = \begin{bmatrix} s\left(\begin{bmatrix} H_{1*}^\top \\ -h_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{1*}^\top \\ \mathfrak{h}_1 \end{bmatrix}\right) \\ \vdots \\ s\left(\begin{bmatrix} H_{m*}^\top \\ -h_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{m*}^\top \\ \mathfrak{h}_m \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} - \tag{1.20}$$

вектор, составленный из элементов строк $[H_{i*} \quad -h_i]$ в соответствии с шаблонами строк $[\mathcal{H}_{i*} \quad \mathfrak{h}]$,

$$X(x) = \begin{bmatrix} s^\top\left(x, \mathcal{H}_{1*}^\top\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^\top\left(x, \mathcal{H}_{2*}^\top\right) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s^\top\left(x, \mathcal{H}_{m*}^\top\right) \end{bmatrix} - \tag{1.21}$$

матрица, i-я строка которой составлена из нулевых элементов и элементов вектора x в соответствии с шаблоном $\mathcal{H}_{i*}$.

Выражения $H(\hbar)$, $[H \ \ -h(\hbar)] = [H \ \ -h](\hbar)$, $x(X)$ – обращения формул (1.19), (1.20) и (1.21) соответственно. Так, например, $H(\hbar)$ – это матрица H, восстановленная по вектору $\hbar$ в соответствии с формулой (1.19).

Используя (1.19)-(1.21), несложно убедиться, что для матриц H и $[H \ \ -h]$, подчиняющихся соответствующим структурным ограничениям, справедливы формулы

$$Hx = X(x) \cdot \hbar(H), \ [H \ \ -h] \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \hbar\left([H \ \ -h]\right).$$

Таким образом, если $H, \mathcal{H}$ – матрицы размера $m \times n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, то размеры рассматриваемых объектов $X(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$, $\hbar(H) \in \mathbb{R}^N$, $X\left([x^\top \ 1]^\top\right) \in \mathbb{R}^{m \times N'}$, $\hbar\left([H \ \ -h]\right) \in \mathbb{R}^{N'}$, где $N = m \cdot n$, $N' = m \cdot (n+1)$.

Для последующих выкладок, связанные с задачами SP^H и SD^H, на ряду с матрицей $X(x)$ потребуется матрица $X^+(x) \in \mathbb{R}^{N \times m}$ – псевдообратная к матрице $X(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$.

Лемма 1.3.1. *Матрица, псевдообратная к матрице $X(x)$, заданной формулой* (1.21)*, имеет вид*

$$X^+(x) = \begin{bmatrix} s^{+^\top}\left(x, \mathcal{H}_{1*}^\top\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{+^\top}\left(x, \mathcal{H}_{2*}^\top\right) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s^{+^\top}\left(x, \mathcal{H}_{m*}^\top\right) \end{bmatrix}, \qquad (1.22)$$

где векторы-строки $s^+\left(x, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)$ вычисляются в соответствии с (1.3)*.*

Доказательство. Как известно, (см., например, [31]), вещественная матрица Z, псевдообратная к некоторой заданной вещественной матрице A, однозначно определяется следующими четырьмя уравнениями (называемыми уравнениями Пенроуза): $AZA = A$, $ZAZ = Z$, $(ZA)^\top = ZA$, $(AZ)^\top = AZ$. Таким образом, для обоснования формулы (1.22) необходимо выполнить проверку уравнений Пенроуза с использованием соотношений (1.3), (1.21) и (1.22). Рассмотрим два случая.

1. Матрица $X(x)$ не имеет нулевых строк. В этом случае проверка уравнений Пенроуза существенно облегчается, поскольку, как несложно

убедиться (с использованием (1.21), (1.22) и (1.3)), выполняется условие

$$X(x) \cdot X^{+}(x) = I_m,$$

где I_m – единичная матрица порядка m.

2. Матрица $X(x)$ имеет нулевые строки. Как следует из (1.3), (1.21) и (1.22), матрица $X^{+}(x)$ имеет нулевые столбцы с теми же номерами, в силу чего выполняется условие

$$X(x) \cdot X^{+}(x) = \tilde{I}_m,$$

где $\tilde{I}_m$ – единичная матрица порядка m с нулевыми диагональными элементами, соответствующими нулевым строкам $X(x)$ (нулевым столбцам $X^{+}(x)$). Перестановкой строк в $X(x)$ и такой же перестановкой столбцов в $X^{+}(x)$ указанные матрицы можно привести к блочному виду, выделив блоки нулевых и ненулевых строк, нулевых и ненулевых столбцов. После этого с помощью техники перемножения блочных матриц убеждаемся в справедливости уравнений Пенроуза. $\square$

Для выкладок, связанный с задачами $SP^{[H\ \ -h]}$ и $SD^{[H\ \ -h]}$, потребуются модификации матриц $X(x)$ и $X^{+}(x)$:

$$X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad X^{+}\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Указанные объекты также могут быть «построены» по формулам (1.21) и (1.22), но уже из векторов

$$s\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^{\top} \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right), \quad s^{+}\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^{\top} \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right).$$

Как будет показано ниже, нулевые и ненулевые строки матриц H, $[H\ \ -h]$, $X(\cdot)$ а также нулевые и ненулевые столбцы $X^{+}(\cdot)$ отказываются тесно связанными с множеством индексов

$$\mathbf{L}(x) = \{i\,|(b - Ax)_i \neq 0\},$$

контекстом использования которого будут служить несовместная система $Ax = b,\ x \geqslant 0$ и совместные системы $(A + H)x = b$, $(A + H)x = b + h$.

1.4. Достаточные условия разрешимости несобственных задач ЛП 1-го рода после матричной коррекции их допустимой области с учетом структурных ограничений

Лемма 1.4.1. *Пусть существуют матрица H и вектор x такие, что H отвечает структурным ограничениям, задаваемым множеством $\mathbf{K}$, система $(A+H)\,x=b$ – совместна.*

Тогда матрица $\hat{H}$, являющаяся решением указанной системы с минимальной евклидовой нормой, существует, единственна и определяется формулой

$$\hat{H}=H(\hat{\hbar}),$$

где

$$\hat{\hbar}=X^{+}(x)\cdot(b-Ax). \tag{1.23}$$

При этом

$$\hat{H}_{i*}\neq 0\Leftrightarrow i\in\mathbf{L}(x), \tag{1.24}$$

$$\|\,\hat{H}\,\|=\|\,\hat{\hbar}\,\|=\sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}(x)}\frac{(b-Ax)_i^2}{\left\|s\left(x,\mathcal{H}_{i*}^{\top}\right)\right\|^2}}. \tag{1.25}$$

Доказательство. $(A+H)x=b\Leftrightarrow Hx=b-Ax\Leftrightarrow X(x)\hbar(H)=(b-Ax)$. Заметим, что в силу исходных предположений все системы в указанной цепочке эквивалентных систем совместны, откуда, в силу хорошо известных свойств псевдообратных матриц [31], [32], получаем обоснование существования и единственности матрицы $\hat{H}$, вектора $\hat{\hbar}$ и справедливости формулы (1.23).

Для обоснования формул (1.24)-(1.25) заметим, что суммируемые в (1.25) величины являются квадратами евклидовых норм строк матрицы $\hat{H}$ (это можно показать с использованием (1.3), (1.19)), (1.21) и (1.22)). Но в силу совместности системы $(A+\hat{H})x=b$ и минимальности $\|\hat{H}\|$ множество номеров ненулевых строк матрицы $\hat{H}$ совпадает с множеством $\mathbf{L}(x)$. □

Лемма 1.4.2. *Пусть существуют матрица $[H\ \ -h]$ и вектор x такие, что $[H\ \ -h]$ отвечает структурным ограничениям, задаваемым множествами $\mathbf{K}$, $\mathbf{k}$, система $(A+H)\,x=b+h$ – совместна.*

Тогда матрица $\left[\hat{H} \quad -\hat{h}\right]$, *являющаяся решением указанной системы с минимальной евклидовой нормой, существует, единственна и определяется формулой*

$$\left[\hat{H} \quad -\hat{h}\right] = \left[H(\hat{\hbar}) \quad -h(\hat{\hbar})\right],$$

где

$$\hat{\hbar} = X^{+}\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right) \cdot (b - Ax). \tag{1.26}$$

При этом

$$\left[\hat{H}_{i*} \quad -\hat{h}_i\right] \neq 0 \Leftrightarrow i \in \mathbf{L}(x), \tag{1.27}$$

$$\|\,[\hat{H} \quad -\hat{h}]\,\| = \|\,\hat{\hbar}\,\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x)} \frac{(b - Ax)_i^2}{\left\| s\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*} & \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}^{\top}\right)\right\|^2}}. \tag{1.28}$$

Доказательство.

$$(A + H)x = b + h \Leftrightarrow [H(\hbar) \quad -h(\hbar)] \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^{\top} = b - Ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right) \hbar\left([H \quad -h]\right) = b - Ax.$$

Поскольку все системы в указанной цепочке эквивалентных систем совместны, из хорошо известных свойств псевдообратных матриц [31], [32] вытекает существование и единственность матрицы $[\hat{H} \quad -\hat{h}]$, вектора $\hat{\hbar}$ и справедливость формулы (1.26).

Для обоснования формул (1.27)-(1.28) заметим, что суммируемые в (1.28) величины являются квадратами евклидовых норм строк матрицы $[\hat{H} \quad -\hat{h}]$, что следует из (1.3), (1.20)), (1.21) и (1.22). Но в силу совместности системы $(A + \hat{H})x = b + \hat{h}$ и минимальности $\|[\hat{H} \quad -\hat{h}]\|$ множество номеров ненулевых строк матрицы $[\hat{H} \quad -\hat{h}]$ совпадает с множеством $\mathbf{L}(x)$. $\square$

Леммы 1.4.1 и 1.4.2 позволяют свести задачи SP^{H} и $SP^{[H \ -h]}$ к задачам условной минимизации по вектору $x \geqslant 0$ целевых функций вида (1.25) и (1.28) соответственно. Очевидно, что существование минимума в указанных задачах эквивалентно разрешимости задач SP^H и $SP^{[H\ \ -h]}$, что является обоснованием приводимых ниже лемм, дающих, по аналогии с леммами 1.2.1 и 1.2.2, конструктивное описание решений задач SP^H и $SP^{[H\ \ -h]}$.

Лемма 1.4.3. *Если решение задачи SP^H существует, то оно имеет вид*

$$H^* = H\left(X^+(x^*)\cdot(b - Ax^*)\right),$$

где

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x\geqslant 0} \sum_{i\in\mathbf{L}(x^*)} \frac{(b-Ax)_i^2}{\left\|s\left(x, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)\right\|^2}.$$

При этом

$$\|\,H^*\,\| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}(x^*)} \frac{(b-Ax^*)_i^2}{\left\|s\left(x^*, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)\right\|^2}}. \tag{1.29}$$

Лемма 1.4.4. *Если решение задачи $SP^{[H\ \ -h]}$ существует, то оно имеет вид*

$$[H^*\ \ -h^*] = [H(\hbar^*)\ \ -h(\hbar^*)],$$

где

$$\hbar^* = X^+\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right)\cdot(b - Ax^*),$$

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x\geqslant 0} \sum_{i\in\mathbf{L}(x^*)} \frac{(b-Ax^*)_i^2}{\left\|s\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*} & \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}^\top\right)\right\|^2}.$$

При этом

$$\|\,[H^*\ \ -h^*]\,\| = \|\hbar^*\| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}(x^*)} \frac{(b-Ax^*)_i^2}{\left\|s\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*} & \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}^\top\right)\right\|^2}}. \tag{1.30}$$

Теорема 1.4.5. (*О достаточных условиях существования решения задачи SD^H*)

Если $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing, \mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ (т.е. $L(A,b,c)$ – несобственная задача ЛП 1-го рода), $b \neq 0$, задача SP^H разрешима и матрица H^* является *её решением, то задача SD^H также разрешима и матрица H^* является её решением.*

Доказательство. 1. Покажем, что матрица H^* принадлежит допустимой области задачи SD^H. Предположим противное: пусть $H^* \notin \mathbf{FS}(SD^H)$. Поскольку $H^* \in \mathbf{FS}(SP^H) \Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H,b) \neq \varnothing$, в силу леммы 1.2.4 $\mathcal{U}(A+H^*,c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 1.2.7, существует вектор z, удовлетворяющий условиям (1.10)-(1.11).

$$(1.10),(1.11) \Rightarrow H^*z = -Az \Leftrightarrow X(z)\cdot\hbar\left(H^*\right) = -Az \Rightarrow$$

$$X(z)\cdot X^+\left(x^*\right)\cdot\left(b-Ax^*\right) = -Az \neq 0. \tag{1.31}$$

Пусть $D = (d_{ij}) = X(z)\cdot X^+\left(x^*\right)$, $u_i = s(x^*,\mathcal{H}_{i*}^\top)$, $v_i = s(z,\mathcal{H}_{i*}^\top)$, тогда в силу (1.3), (1.21) и (1.22)

$$d_{ij} = \begin{cases} u_i^+ v_i & \text{если } i=j \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Таким образом,

$$(1.31) \Rightarrow \begin{cases} u_i^+ v_i\cdot\left(b-Ax^*\right)_i = -(Az)_i \ \ \forall i\in\mathbf{L}(x^*), \\ (Az)_i = 0 \ \ \forall i\notin\mathbf{L}(x^*), \end{cases} \tag{1.32}$$

Заметим, что условие (1.24) эквивалентно условию $(b-Ax^*)_i\cdot u_i^+ \neq 0$, откуда в силу (1.3) имеем

$$u_i \neq 0 \ \ \forall i\in\mathbf{L}(x^*). \tag{1.33}$$

Разобьем множество $\mathbf{L}(x^*)$ на три подмножества: $\mathbf{L}_1(x^*) = \left\{i\in\mathbf{L}(x^*)|\, u_i^\top v_i \neq 0\right\}$, $\mathbf{L}_2(x^*) = \left\{i\in\mathbf{L}(x^*)|\, u_i^\top v_i = 0, v_i\neq 0\right\}$ и $\mathbf{L}_3(x^*) = \left\{i\in\mathbf{L}(x^*)|\, u_i^\top v_i = 0, v_i = 0\right\}$. В силу (1.3), (1.32) и (1.33)

$$\frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|u_i\|^2} = \frac{|(Az)_i|}{\left|u_i^\top v_i\right|} \neq 0 \quad \forall i\in\mathbf{L}_1(x^*), \ \ (Az)_i = 0 \ \ \forall i\in\mathbf{L}_2(x^*)\cup\mathbf{L}_3(x^*).$$

Заметим, что вектор u_i не представим в виде $u_i = \lambda v_i$ для всех $i\in\mathbf{L}_1(x^*)$, где λ – некоторое число, поскольку в противном случае (с помощью «построчного» варианта используемым в доказательстве теоремы 1.2.8 выкладок) получаем $b=0$, что противоречит условиям теоремы.

Таким образом, в силу леммы 1.2.3,

$$|u_i^\top v_i| \leqslant \|u_i\| \cdot \|v_i\| \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \;\; \exists i \in \mathbf{L}_1(x^*) \,\big|\, |u_i^\top v_i| < \|u_i\| \cdot \|v_i\|$$

откуда, в свою очередь, $\forall i \in \mathbf{L}_1(x^*)$

$$\frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|^2} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|u_i\| \cdot \|v_i\|}\,, \quad \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|},$$

причем в приведенной цепочке неравенств обязательно присутствуют строгие неравенства.

Следовательно, в силу (1.29),

$$\|H^*\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}} > \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}}.$$

Рассмотрим

$$H_{\gamma,z} = H(X^+(x^* + \gamma z) \cdot (b - Ax^* - \gamma Az)).$$

Очевидно, что $H_{z,\gamma}$ – допустимое решение задачи SP^H, поскольку $(x^* + \gamma z) \in \mathcal{X}\,(A + H_{z,\gamma}, b)$. Кроме того, в силу (1.3) и (1.22)

$$\|(H_{z,\gamma})_{i*}\| = \frac{|(b - Ax^* - \gamma Az)_i|}{\left\|s\left(x^* + \gamma z, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)\right\|},$$

причем

$$\left\|(H_{z,\gamma})_{i*}\right\| = 0 \;\; \forall \gamma \text{ при } i \notin \mathbf{L}(x^*),$$
$$\lim_{\gamma \to +\infty} \left\|(H_{z,\gamma})_{i*}\right\| =$$
$$= \left\{ \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|} \;\; \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \; 0 \;\; \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*), \; \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|} \;\; \forall i \in \mathbf{L}_3(x^*) \right\}.$$

Следовательно, для $H_{z,\gamma}^* = \lim\limits_{\gamma \to +\infty} H_{z,\gamma}$ имеем

$$\left\|H_{z,\gamma}^*\right\| = \lim_{\gamma \to +\infty} \|H_{\gamma,z}\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}}.$$

Таким образом,

$$\left\|H_{z,\gamma}^*\right\| < \|H^*\|.$$

Но это означает, что при достаточно большом, но конечном $\gamma > 0$ существует матрица $H_{z,\gamma} = H(X^+(x^* + \gamma z) \cdot (b - Ax^* - \gamma Az))$, являющаяся допустимым решением задачи SP^H и такая, что $\| H_{z,\gamma} \| < \|H^*\|$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы H^* в задаче SP^H .

2. Оптимальность H^* в задаче SD^H покажем от противного: пусть существует матрица $H^{**} \in \mathbf{FS}(SD^H)$ такая, что $\|H^{**}\| < \|H^*\|$. В то же время $\mathbf{FS}(SD^H) \subset \mathbf{FS}(SP^H)$, в силу чего существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы H^* в задаче SP^H. □

Теорема 1.4.6. (*О достаточных условиях существования решения задачи* $SD^{[H\ \ -h]}$)

Если $\mathcal{X}(A, b) = \varnothing, \mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$ (*т.е.* $L(A, b, c)$ – *несобственная задача ЛП 1-го рода*), *задача* $SP^{[H\ \ -h]}$ (*с параметром* $\mathfrak{h} \neq 0$) *разрешима и матрица* $[H^*\ \ -h^*]$ *является её решением, то задача* $SD^{[H\ \ -h]}$ *также разрешима и матрица* $[H\ \ -h]$ *является её решением.*

Доказательство. 1. Покажем, что матрица $[H\ \ -h]$ принадлежит допустимой области задачи $SD^{[H\ \ -h]}$. Предположим противное: пусть $[H\ \ -h] \notin \mathbf{FS}(SD^{[H\ \ -h]})$. Поскольку $[H\ \ -h] \in \mathbf{FS}(SP^{[H\ \ -h]})$, в силу леммы 1.2.4 $\mathcal{U}(A + H^*, c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 1.2.7 существует вектор z, удовлетворяющий условиям (1.10)-(1.11).

$$(1.10), (1.11) \Rightarrow [H^*\ \ -h^*] \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \hbar\left([H^*\ \ -h^*]\right) = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot X^+\!\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right) \cdot (b - Ax^*) = -Az \neq 0. \qquad (1.34)$$

Пусть $D = (d_{ij}) = X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot X^+\!\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\tilde{u}_i = s\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)$, векторы u_i, v_i и множества $\mathbf{L}_1(\cdot)$, $\mathbf{L}_3(\cdot)$ и $\mathbf{L}_2(\cdot)$ определены также, как в доказательстве теоремы 1.4.5. В силу (1.3), (1.21) и (1.22)

$$d_{ij} = \begin{cases} \tilde{u}_i^{+} \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} \text{ если } i = j, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$(1.34) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_i^{+} \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (b - Ax^*)_i = -(Az)_i \ \ \forall i \in \mathbf{L}(x^*), \\ \qquad\qquad (Az)_i = 0 \ \ \forall i \notin \mathbf{L}(x^*), \end{cases} \tag{1.35}$$

Заметим, что условие (1.27) эквивалентно условию $(b - Ax^*)_i \cdot \tilde{u}_i^{+} \neq 0$, откуда имеем

$$\tilde{u}_i^{+} \neq 0 \ \ \forall i \in \mathbf{L}(x^*). \tag{1.36}$$

В силу (1.3), (1.35) и (1.36)

$$\frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|^2} = \frac{|(Az)_i|}{\left|u_i^{\top} v_i\right|} \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \quad (Az)_i = 0 \ \ \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*).$$

В силу леммы 1.2.3,

$$\left|u_i^{\top} v_i\right| \leqslant \|u_i\| \cdot \|v_i\| \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*),$$

откуда, с учетом (1.30), $\forall i \in \mathbf{L}_1(x^*)$

$$\frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|^2} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|u_i\| \cdot \|v_i\|}, \quad \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|} \geqslant \zeta_i \cdot \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|},$$

причем в неравенствах, замыкающих приведённую выше цепочку неравенств, обязательно есть строгие, поскольку в силу $\mathfrak{h} \neq 0$ выполняются условия

$$\zeta_i = \|\tilde{u}_i\| / \|u_i\| \geqslant 1 \ \ \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \quad \exists i \in \mathbf{L}_1(x^*) \,|\, \zeta_i > 1.$$

Следовательно,

$$\|[H^* \quad -h^*]\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x^*)} \frac{|(b - Ax^*)_i|^2}{\|\tilde{u}_i\|^2}} >$$

$$> \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|\tilde{u}_i\|^2}}.$$

Пусть
$$[H \quad -h]_{z,\gamma} = [H(\hbar_{z,\gamma}) \quad -h(\hbar_{z,\gamma})],$$
где
$$\hbar_{z,\gamma} = X^{+}\left(\begin{bmatrix} x^* + \gamma z \\ 1 \end{bmatrix}\right) \cdot (b - Ax^* - \gamma Az).$$

Как несложно показать,
$$(x^* + \gamma z) \in \mathcal{X}(A + H_{z,\gamma}, b + h_{z,\gamma}) \Rightarrow [H \quad -h]_{z,\gamma} \in \mathbf{FS}(SP^{[H \ -h]}).$$
Кроме того, в силу (1.3) и (1.22)
$$\left\|[H_{i*} \quad -h_i]_{z,\gamma}\right\| = \frac{|b - Ax^* - \gamma Az|_i}{\left\| s\left(\begin{bmatrix} x^* + \gamma z \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^{\top} \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)\right\|},$$
причем
$$\left\|[H_{i*} \quad -h_i]_{z,\gamma}\right\| = 0 \ \ \forall\gamma \text{ при } i \notin \mathbf{L}(x^*),$$
$$\lim_{\gamma\to+\infty}\left\|[H_{i*} \quad -h_i]_{z,\gamma}\right\| =$$
$$= \left\{\frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|} \ \ \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*),\ 0 \ \ \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*),\ \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|} \ \ \forall i \in \mathbf{L}_3(x^*)\right\}.$$

Следовательно, для $[H \quad -h]^*_{z,\gamma} = \lim\limits_{\gamma\to+\infty} [H \quad -h]_{z,\gamma}$ имеем
$$\left\|[H \quad -h]^*_{z,\gamma}\right\| = \lim_{\gamma\to+\infty}\left\|[H \quad -h]_{z,\gamma}\right\| =$$
$$= \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i\in\mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|\tilde{u}_i\|^2}} < \|[H^* \quad -h^*]\|.$$

Но последнее неравенство означает, что при достаточно большом, но конечном $\gamma > 0$ существует матрица $[H \quad -h]_{z,\gamma}$, являющаяся допустимым решением задачи $SP^{[H \ -h]}$ и такая, что $\|\,[H \quad -h]_{z,\gamma}\| < \|[H^* \quad -h^*]\|$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^* \quad -h^*]$. в задаче $SP^{[H \ -h]}$.

2. Оптимальность $[H^* \ -h^*]$ в задаче $SD^{[H \ -h]}$ покажем от противного. Действительно, пусть существует матрица $[H^{**} \quad -h^{**}] \in \mathbf{FS}(SD^{[H \ -h]})$ такая, что $\|[H^{**} \quad -h^{**}]\| < \|[H^* \quad -h^*]\|$. Но $\mathbf{FS}(SD^{[H \ -h]}) \subset \mathbf{FS}(SP^{[H \ -h]})$, следовательно, существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^* \quad -h^*]$ в задаче $SP^{[H \ -h]}$. $\square$

1.5. Постановка задачи структурной взвешенной матричной коррекции

Как показывают вычислительные эксперименты, часто в задачах SD^H, SP^H, $SD^{[H\ -h]}$, $SP^{[H\ -h]}$ и других задачах матричной коррекции оказывается оправданным использование взвешенной евклидовой нормы. Это связано с тем, что величина коррекция больших и малых по модулю коэффициентов систем ограничений равнозначна. Таким образом, при относительно небольшой по евклидовой норме матрице коррекции может быть получена задача ЛП совсем не «похожая» на исходную.

Пусть задачи $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ таковы, что $\mathcal{X}(A, b) = \varnothing$, $\mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$. С несобственными задачами $L(A, b, c)$ и $L^*(A, b, c)$ будем связывать задачи SwD^H, $SwD^{[H\ -h]}$, SwP^H, $SwP^{[H\ -h]}$ структурной взвешенной матричной коррекции, в которых матрице H или расширенной матрице $[H\ \ -h]$ предписано иметь структуру нулевых и ненулевых элементов, задаваемую множествами индексов нулевых элементов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{k}$, а также, весовые коэффициенты задаваемые матрицами $\mathcal{W}$ и $\mathfrak{w}$. Вес каждого элемента H_{ij} и h_i задается элементами $\mathcal{W}_{ij}$ и $\mathfrak{w}_i$ соответственно, где $\mathcal{W}$ – весовая матрица с размерами $m \times n$ и $\mathfrak{w}$ – весовая матрица с размерами $m \times 1$.

Критерий оптимальности матричной коррекции в данной форме при условии

$$\mathcal{W} = (\mathcal{W}_{ij} > 0 |\, i \in 1, \ldots, m, \ \ j \in 1, \ldots, n) \tag{1.37}$$

и

$$\mathfrak{w} = (\mathfrak{w}_i > 0 |\, i \in 1, \ldots, m) \tag{1.38}$$

обладает почти максимальной общностью при использовании евклидовой нормы и является существенным условием ряда теоретических выкладок [87]. Так, если некоторая прикладная задача может потребовать применения нулевых весов для отдельных элементов матриц H, $[H\ \ -h]$, то нулевые коэффициенты $\mathcal{W}$ и $\mathfrak{w}$ могут быть заменены некоторыми малыми (относительно данной задачи) положительными числами, уменьшение которых будет давать приближение к решению исходной задачи.

Решения задач в общем случае (при произвольных матрицах $\mathcal{W}$ и $\mathfrak{w}$) не могут быть записаны в терминах собственных векторов матриц, построенных использованием матрицы A и вектора b, так как произведением матриц по Адамару («$\circ$») в общем случае не сводится к классическому матричному умножению.

Пусть $\omega(\mathcal{W}) = [\mathcal{W}_{1*} \ \ldots \ \mathcal{W}_{m*}]^\top$ – вектор, составленный из элементов строк $\mathcal{W}_{i*}$, $\omega([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) = [[\mathcal{W}_{1*} \ \mathfrak{w}_1] \ \ldots \ [\mathcal{W}_{m*} \ \mathfrak{w}_m]]^\top$ – вектор, составленный из элементов строк $[\mathcal{W}_{i*} \ \mathfrak{w}_i]$, где $\omega(\mathcal{W}) \in \mathbb{R}^N$, $\omega([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) \in \mathbb{R}^{N'}$, $N = m \cdot n$, $N' = m \cdot (n+1)$.

Таким образом,

$$\Omega(\mathcal{W}) = (\Omega_{ij}(\mathcal{W})) = \left| \begin{array}{l} \omega_i(\mathcal{W}) \text{ если } i = j, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{array} \right. \tag{1.39}$$

$$\Omega([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) = (\Omega_{ij}([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}])) = \left| \begin{array}{l} \omega_i([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) \text{ если } i = j, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{array} \right. \tag{1.40}$$

где $\Omega(\mathcal{W}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\Omega([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) \in \mathbb{R}^{N' \times N'}$.

Пусть, так же,

$$\Omega^i = \Omega^i(\mathcal{W}_{i*}) = \left(\Omega^i_{lk}(\mathcal{W}_{i*})\right) = \left| \begin{array}{l} (\mathcal{W}_{i*})_l \text{ если } l = k, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{array} \right. \tag{1.41}$$

$$\Omega'^i = \Omega^i([\mathcal{W}_{i*} \ \mathfrak{w}_i]) = \left(\Omega^i_{lk}([\mathcal{W}_{i*} \ \mathfrak{w}_i])\right) = \left| \begin{array}{l} [\mathcal{W}_{i*} \ \mathfrak{w}_i]_l \text{ если } l = k, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{array} \right. \tag{1.42}$$

где $\Omega^i(\mathcal{W}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Omega^i([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$.

Лемма 1.5.1. *Задача структурной взвешенной матричной коррекции SwP^H эквивалентна задаче*

$$\|\Omega(\mathcal{W})\,\hbar\,(H)\| \to \min_{(X(x)\Omega^{-1}(\mathcal{W}))(\Omega(\mathcal{W})\hbar(H)) = b - Ax} \tag{1.43}$$

Доказательство. Используя (1.19), (1.21), (1.39), несложно убедиться, что для матрицы H, подчиняющейся соответствующим структурным ограничениям и имеющей заданные весовые коэффициенты, справедливы формулы

$$\left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)(\Omega(\mathcal{W})\hbar\,(H)) = X(x) \cdot \hbar(H) = H \cdot x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)(\Omega(\mathcal{W})\hbar\,(H)) = b - Ax \Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H, b) \neq \varnothing$$

и

$$\|\Omega(\mathcal{W})\,\hbar(H)\| = \|\mathcal{W}\circ H\|\,.$$

$\square$

Лемма 1.5.2. *Задача структурной взвешенной матричной коррекции $SwP^{[H\ \ -h]}$ эквивалентна задаче*

$$\|\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\,\hbar\,([H\ \ -h])\| \to \min_{\left(X\left(\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)(\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\hbar([H\ \ -h]))=b-Ax} \tag{1.44}$$

Доказательство. Используя (1.20), (1.21), (1.40), несложно убедиться, что для матрицы $[H\ \ -h]$, подчиняющейся соответствующим структурным ограничениям и имеющей заданные весовые коэффициенты, справедливы формулы

$$\left(X\left(\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)(\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\,\hbar\,([H\ \ -h])) =$$

$$= X\left(\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\right)\cdot\hbar([H\ \ -h]) = [H\ \ -h]\cdot\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(X\left(\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\right)(\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\,\hbar\,([H\ \ -h])) = b - Ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H, b+h) \neq \varnothing$$

и

$$\|\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}])\,\hbar([H\ \ -h])\| = \|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\ \ -h]\|\,.$$

$\square$

1.6. Достаточные условия разрешимости несобственных задач ЛП 1-го рода после взвешенной матричной коррекции их допустимой области с учетом структурных ограничений

Лемма 1.6.1. *Пусть существуют матрица H и вектор x такие, что H отвечает структурным ограничениям, задаваемым множеством*

$\mathbf{K}$, *и имеет весовые коэффициенты задаваемые матрицей* $\mathcal{W}$, *система* $(A + H)\,x = b$ *– совместна.*

Тогда матрица $\hat{H}$, *являющаяся решением указанной системы с минимальной взвешенной евклидовой нормой, существует, единственна и определяется формулой*

$$\hat{H} = H(\hat{\hbar}),$$

где

$$\hat{\hbar} = \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^{+} \cdot (b - Ax). \tag{1.45}$$

При этом

$$\hat{H}_{i*} \neq 0 \Leftrightarrow i \in \mathbf{L}(x), \tag{1.46}$$

$$\left\|\mathcal{W} \circ \hat{H}\right\| = \left\|\Omega(\mathcal{W})\,\hat{\hbar}\right\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x)} \frac{(b - Ax)_i^2}{\left\|s^{\top}\left(x, \mathcal{H}_{i*}^{\top}\right) \cdot (\Omega^i)^{-1}\right\|^2}}. \tag{1.47}$$

Доказательство.

$$(A + H)x = b \Leftrightarrow Hx = b - Ax \Leftrightarrow X(x)\hbar(H) = (b - Ax) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)(\Omega(\mathcal{W})\hbar\,(H)) = b - Ax \Leftrightarrow$$

$$\hbar\,(H) = \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \left(X\,(x)\,\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^{+} \cdot (b - Ax).$$

Заметим, что в силу исходных предположений все системы в указанной цепочке эквивалентных систем совместны, откуда, в силу хорошо известных свойств обратных и псевдообратных матриц [31], [32], получаем обоснование существования и единственности матрицы $\hat{H}$, вектора $\hat{\hbar}$ и справедливости формулы (1.45).

Для обоснования формул (1.46)-(1.47) заметим, что суммируемые в (1.47) величины являются квадратами взвешенных евклидовых норм строк матрицы $\hat{H}$ (это можно показать с использованием (1.3), (1.19)), (1.21), (1.22) и (1.41)). Но в силу совместности системы $(A+\hat{H})x = b$ и минимальности $\left\|\mathcal{W} \circ \hat{H}\right\|$ при (1.37) множество номеров ненулевых строк матрицы $\hat{H}$ совпадает с множеством $\mathbf{L}(x)$. $\square$

Лемма 1.6.2. *Пусть существуют матрица* $[H \;\; -h]$ *и вектор* x *такие, что* $[H \;\; -h]$ *отвечает структурным ограничениям, задаваемым множествами* $\mathbf{K}$, $\mathbf{k}$ *и имеет весовые коэффициенты задаваемые матрицей* $[\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}]$, *система* $(A+H)\,x = b+h$ *– совместна.*

Тогда матрица $\left[\hat{H} \;\; -\hat{h}\right]$, *являющаяся решением указанной системы с минимальной взвешенной евклидовой нормой, существует, единственна и определяется формулой*

$$\left[\hat{H} \;\; -\hat{h}\right] = \left[H(\hat{\hbar}) \;\; -h(\hat{\hbar})\right],$$

где

$$\hat{\hbar} = \Omega^{-1}([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}]) \cdot \left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}])\right)^{+} \cdot (b - Ax). \tag{1.48}$$

При этом

$$\left[\hat{H}_{i*} \;\; -\hat{h}_i\right] \neq 0 \Leftrightarrow i \in \mathbf{L}(x), \tag{1.49}$$

$$\|[\,\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}\,]\circ[\,\hat{H} \;\; -\hat{h}\,]\| = \left\|\Omega\left([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}]\right)\hat{\hbar}\right\| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}(x)} \frac{(b-Ax)_i^2}{\left\| s^{\top}\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^{\top} \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right) \cdot (\Omega'^{i})^{-1}\right\|^2}}. \tag{1.50}$$

Доказательство.

$$(A+H)x = b+h \Leftrightarrow [H(\hbar) \;\; -h(\hbar)]\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^{\top} = b - Ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\hbar([H \;\; -h]) = b - Ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}])\right)\left(\Omega([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}])\,\hbar\left([H \;\; -h]\right)\right) = b - Ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hbar\left([H \;\; -h]\right) = \Omega^{-1}([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}]) \cdot \left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right)\Omega^{-1}([\mathcal{W} \;\; \mathfrak{w}])\right)^{+} \cdot (b - Ax).$$

Поскольку все системы в указанной цепочке эквивалентных систем совместны, из хорошо известных свойств обратных и псевдообратных матриц [31], [32] вытекает существование и единственность матрицы $[\hat{H}\ \ -\hat{h}]$, вектора $\hat{\hbar}$ и справедливость формулы (1.48).

Для обоснования формул (1.49)-(1.50) заметим, что суммируемые в (1.50) величины являются квадратами взвешенных евклидовых норм строк матрицы $[\hat{H}\ \ -\hat{h}]$, что следует из (1.3), (1.20)), (1.21), (1.22) и (1.42). Но в силу совместности системы $(A+\hat{H})x = b+\hat{h}$ и минимальности $\left\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}] \circ \left[\hat{H}\ \ -\hat{h}\right]\right\|$ множество номеров ненулевых строк матрицы $[\hat{H}\ \ -\hat{h}]$ совпадает с множеством $\mathbf{L}(x)$. □

Леммы 1.6.1 и 1.6.2 позволяют свести задачи SwP^{H} и $SwP^{[H\ -h]}$ к задачам условной минимизации по вектору $x \geqslant 0$ целевых функций вида (1.47) и (1.50) соответственно. Очевидно, что существование минимума в указанных задачах эквивалентно разрешимости задач SwP^{H} и $SwP^{[H\ -h]}$, что является обоснованием приводимых ниже лемм, дающих, по аналогии с леммами 1.2.1, 1.2.2 и 1.4.3, 1.4.4, конструктивное описание решений задач SwP^{H} и $SwP^{[H\ -h]}$.

Лемма 1.6.3. *Если решение задачи* SwP^{H} *существует, то оно имеет вид*

$$H^* = H\left(\Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \left(X\left(x\right)\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^{+} \cdot (b-Ax)\right),$$

где

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x\geqslant 0} \sum_{i\in\mathbf{L}(x)} \frac{(b-Ax)_i^2}{\left\|s^{\top}\left(x, \mathcal{H}_{i*}^{\top}\right) \cdot \left(\Omega^i\right)^{-1}\right\|^2}.$$

При этом

$$\|\mathcal{W}\circ H^*\| = \sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}(x)} \frac{(b-Ax)_i^2}{\left\|s^{\top}\left(x, \mathcal{H}_{i*}^{\top}\right) \cdot \left(\Omega^i\right)^{-1}\right\|^2}}. \tag{1.51}$$

Лемма 1.6.4. *Если решение задачи* $SwP^{[H\ -h]}$ *существует, то оно имеет вид*

$$[H^*\ \ -h^*] = [H(\hbar^*)\ \ -h(\hbar^*)],$$

где

$$\hbar^* = \Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]) \cdot \left(X\left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Omega^{-1}([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]) \right)^+ \cdot (b - Ax),$$

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x \geqslant 0} \sum_{i \in \mathbf{L}(x^*)} \frac{(b - Ax)_i^2}{\left\| s^\top \left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix} \right) \cdot (\Omega'^i)^{-1} \right\|^2}.$$

При этом

$$\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}] \circ [H^* \quad - h^*]\| = \|\Omega([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]) \cdot \hbar^*\| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x)} \frac{(b - Ax)_i^2}{\left\| s^\top \left(\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix} \right) \cdot (\Omega'^i)^{-1} \right\|^2}}. \quad (1.52)$$

Теорема 1.6.5. (*О достаточных условиях существования решения задачи SwD^H*)

Если $\mathcal{X}(A, b) = \varnothing, \mathcal{U}(A, c) \neq \varnothing$ (т.е. $L(A, b, c)$ – несобственная задача ЛП 1-го рода), $b \neq 0$, задача SwP^H разрешима и матрица H^* является её решением, то задача SwD^H также разрешима и матрица H^* является её решением.

Доказательство. 1. Покажем, что матрица H^* принадлежит допустимой области задачи SwD^H. Предположим противное: пусть $H^* \notin \mathbf{FS}(SwD^H)$. Поскольку $H^* \in \mathbf{FS}(SwP^H) \Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H, b) \neq \varnothing$, в силу леммы 1.2.4 $\mathcal{U}(A+H^*, c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 1.2.7, существует вектор z, удовлетворяющий условиям (1.10)-(1.11).

$$(1.10), (1.11) \Rightarrow H^* z = -Az \Leftrightarrow X(z) \cdot \hbar\,(H^*) = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X\,(z)\, \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \right) \cdot (\Omega(\mathcal{W}) \hbar\,(H^*)) = -Az \Rightarrow$$

$$\left(X\,(z)\, \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \right) \cdot \left(X\,(x^*)\, \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \right)^+ \cdot (b - Ax^*) = -Az \neq 0. \quad (1.53)$$

Пусть $D = (d_{ij}) = \left(X\,(z)\, \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \right) \cdot \left(X\,(x^*)\, \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \right)^+$, $u_i = \left(\Omega^i\right)^{-1} \cdot s(x^*, \mathcal{H}_{i*}^\top)$, $v_i = \left(\Omega^i\right)^{-1} \cdot s(z, \mathcal{H}_{i*}^\top)$, тогда в силу (1.3), (1.21) и (1.22)

$$d_{ij} = \begin{cases} u_i^+ v_i \ \text{ если } i = j \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$(1.53) \Rightarrow \begin{cases} u_i^{+} v_i \cdot (b - Ax^*)_i = -(Az)_i \;\; \forall i \in \mathbf{L}(x^*), \\ (Az)_i = 0 \;\; \forall i \notin \mathbf{L}(x^*), \end{cases} \tag{1.54}$$

Заметим, что условие (1.46) эквивалентно условию $(b - Ax^*)_i \cdot u_i^{+} \neq 0$, откуда в силу (1.3) и (1.38) имеем

$$u_i \neq 0 \;\; \forall i \in \mathbf{L}(x^*). \tag{1.55}$$

Разобьем множество $\mathbf{L}(x^*)$ на три подмножества: $\mathbf{L}_1(x^*) = \left\{ i \in \mathbf{L}(x^*) |\, u_i^{\top} v_i \neq 0 \right\}$, $\mathbf{L}_2(x^*) = \left\{ i \in \mathbf{L}(x^*) |\, u_i^{\top} v_i = 0, v_i \neq 0 \right\}$ и $\mathbf{L}_3(x^*) = \left\{ i \in \mathbf{L}(x^*) |\, u_i^{\top} v_i = 0, v_i = 0 \right\}$. В силу (1.3), (1.54) и (1.55)

$$\frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|^2} = \frac{|(Az)_i|}{|u_i^{\top} v_i|} \neq 0 \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \;\; (Az)_i = 0 \;\; \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*).$$

Заметим, что вектор u_i не представим в виде $u_i = \lambda v_i$ для всех $i \in \mathbf{L}_1(x^*)$, где λ – некоторое число, поскольку в противном случае (с помощью «построчного» варианта используемым в доказательстве теоремы 1.2.8 выкладок) получаем $b = 0$, что противоречит условиям теоремы.

Таким образом, в силу леммы 1.2.3,

$$|u_i^{\top} v_i| \leqslant \|u_i\| \cdot \|v_i\| \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \;\; \exists i \in \mathbf{L}_1(x^*) \left| |u_i^{\top} v_i| < \|u_i\| \cdot \|v_i\| \right.$$

откуда, в свою очередь, $\forall i \in \mathbf{L}_1(x^*)$

$$\frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|^2} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|u_i\| \cdot \|v_i\|}, \quad \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|},$$

причем в приведенной цепочке неравенств обязательно присутствуют строгие неравенства.

Следовательно, в силу (1.51),

$$\|\mathcal{W} \circ H^*\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}} > \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}}.$$

Рассмотрим

$$H_{\gamma,z} = H(\Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \left(X\,(x^* + \gamma z)\, \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \right)^{+} \cdot (b - Ax^* - \gamma Az)).$$

Очевидно, что $H_{z,\gamma}$ – допустимое решение задачи SwP^H, поскольку $(x^* + \gamma z) \in \mathcal{X}\left(A + H_{z,\gamma}, b\right)$. Кроме того, в силу (1.3) и (1.22)

$$\left\|(\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma})_{i*}\right\| = \frac{|(b - Ax^* - \gamma Az)_i|}{\left\|\Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot s\left(x^* + \gamma z, \mathcal{H}_{i*}^{\top}\right)\right\|},$$

причем

$$\left\|(\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma})_{i*}\right\| = 0 \ \ \forall \gamma \text{ при } i \notin \mathbf{L}(x^*),$$
$$\lim_{\gamma \to +\infty} \left\|(\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma})_{i*}\right\| =$$
$$= \left\{ \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|} \ \ \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \ 0 \ \ \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*), \ \frac{|(b - Ax^*)_i|}{\|u_i\|} \ \ \forall i \in \mathbf{L}_3(x^*) \right\}.$$

Следовательно, для $H_{z,\gamma}^* = \lim\limits_{\gamma \to +\infty} H_{z,\gamma}$ имеем

$$\left\|\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma}^*\right\| = \lim_{\gamma \to +\infty} \|\mathcal{W} \circ H_{\gamma,z}\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b - Ax^*)_i^2}{\|u_i\|^2}}.$$

Таким образом,

$$\left\|\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma}^*\right\| < \|\mathcal{W} \circ H^*\|.$$

Но это означает, что при достаточно большом, но конечном $\gamma > 0$ существует матрица

$$H_{\gamma,z} = H(\Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot \left(X\left(x^* + \gamma z\right)\Omega^{-1}(\mathcal{W})\right)^+ \cdot (b - Ax^* - \gamma Az)),$$

являющаяся допустимым решением задачи SwP^H и такая, что $\|\mathcal{W} \circ H_{z,\gamma}\| < \|\mathcal{W} \circ H^*\|$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы H^* в задаче SwP^H .

2. Оптимальность H^* в задаче SwD^H покажем от противного: пусть существует матрица $H^{**} \in \mathbf{FS}(SwD^H)$ такая, что $\|\mathcal{W} \circ H^{**}\| < \|\mathcal{W} \circ H^*\|$. В то же время $\mathbf{FS}(SwD^H) \subset \mathbf{FS}(SwP^H)$, в силу чего существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы H^* в задаче SwP^H. □

Теорема 1.6.6. (*О достаточных условиях существования решения задачи* $SwD^{[H\ -h]}$)

Если $\mathcal{X}(A,b) = \varnothing, \mathcal{U}(A,c) \neq \varnothing$ (*т.е.* $L(A,b,c)$ – *несобственная задача ЛП 1-го рода*), *задача* $SwP^{[H\ -h]}$ (*с параметром* $\mathfrak{h} \neq 0$) *разрешима и* *матрица* $[H^* \ \ -h^*]$ *является её решением, то задача* $SwD^{[H \ -h]}$ *также разрешима и матрица* $[H^* \ \ -h^*]$ *является её решением.*

Доказательство. 1. Покажем, что матрица $[H \ \ -h]$ принадлежит допустимой области задачи $SwD^{[H \ -h]}$. Предположим противное: пусть $[H \ \ -h] \notin \mathbf{FS}(SwD^{[H \ -h]})$. Поскольку $[H \ \ -h] \in \mathbf{FS}(SwP^{[H \ -h]})$, в силу леммы 1.2.4 $\mathcal{U}(A + H^*, c) = \varnothing$. Следовательно, в силу леммы 1.2.7 существует вектор z, удовлетворяющий условиям (1.10)-(1.11).

$$(1.10), (1.11) \Rightarrow [H^* \ \ -h^*] \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \hbar\left([H^* \ \ -h^*]\right) = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right) \Omega^{-1}([\mathcal{W} \ \ \mathfrak{w}])\right) \cdot \left(\Omega([\mathcal{W} \ \ \mathfrak{w}])\, \hbar\left([H^* \ \ -h^*]\right)\right) = -Az \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right) \Omega^{-1}([\mathcal{W} \ \ \mathfrak{w}])\right) \cdot \left(X\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Omega^{-1}([\mathcal{W} \ \ \mathfrak{w}])\right)^{+} \cdot$$
$$\cdot (b - Ax^*) = -Az \neq 0. \quad (1.56)$$

Пусть

$$D = (d_{ij}) = \left(X\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}\right) \Omega^{-1}([\mathcal{W} \ \ \mathfrak{w}])\right) \cdot \left(X\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Omega^{-1}([\mathcal{W} \ \ \mathfrak{w}])\right)^{+},$$

$\tilde{u}_i = \left(\Omega'^i\right)^{-1} \cdot s\left(\begin{bmatrix} x^* \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^{\top} \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)$, $\tilde{v}_i = \left(\Omega'^i\right)^{-1} \cdot s\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^{\top} \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)$, векторы u_i, v_i и множества $\mathbf{L}_1(\cdot)$, $\mathbf{L}_3(\cdot)$ и $\mathbf{L}_2(\cdot)$ определены также, как в доказательстве теоремы 1.6.5. В силу (1.3), (1.21) и (1.22)

$$d_{ij} = \begin{cases} \tilde{u}_i^{+}\tilde{v}_i \ \text{ если } i = j, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$(1.56) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{u}_i^{+}\tilde{v}_i \cdot (b - Ax^*)_i = -(Az)_i \ \ \forall i \in \mathbf{L}(x^*), \\ (Az)_i = 0 \ \ \forall i \notin \mathbf{L}(x^*), \end{cases} \quad (1.57)$$

Заметим, что условие (1.49) эквивалентно условию $(b-Ax^*)_i \cdot \tilde{u}_i^+ \neq 0$, откуда имеем

$$\tilde{u}_i^+ \neq 0 \ \ \forall i \in \mathbf{L}(x^*). \tag{1.58}$$

В силу (1.3), (1.57) и (1.58)

$$\frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|^2} = \frac{|(Az)_i|}{\left|u_i^\top v_i\right|} \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \quad (Az)_i = 0 \ \ \forall i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*).$$

В силу леммы 1.2.3,

$$\left|u_i^\top v_i\right| \leqslant \|u_i\| \cdot \|v_i\| \quad \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*),$$

откуда, с учетом (1.52), $\forall i \in \mathbf{L}_1(x^*)$

$$\frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|^2} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|u_i\| \cdot \|v_i\|}, \quad \frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|} \geqslant \zeta_i \cdot \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|} \geqslant \frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|},$$

причем в неравенствах, замыкающих приведённую выше цепочку неравенств, обязательно есть строгие, поскольку в силу $\mathfrak{h} \neq 0$ выполняются условия

$$\zeta_i = \|\tilde{u}_i\|/\|u_i\| \geqslant 1 \ \ \forall i \in \mathbf{L}_1(x^*), \quad \exists i \in \mathbf{L}_1(x^*) |\, \zeta_i > 1.$$

Следовательно,

$$\|[\mathcal{W} \ \ \mathfrak{w}] \circ [H^* \quad -h^*]\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}(x^*)} \frac{|(b-Ax^*)_i|^2}{\|\tilde{u}_i\|^2}} >$$

$$> \sqrt{\sum_{i \in \mathbf{L}_1(x^*)} \frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2} + \sum_{i \in \mathbf{L}_2(x^*) \cup \mathbf{L}_3(x^*)} \frac{(b-Ax^*)_i^2}{\|\tilde{u}_i\|^2}}.$$

Пусть

$$[H \quad -h]_{z,\gamma} = [H(\hbar_{z,\gamma}) \quad -h(\hbar_{z,\gamma})],$$

где

$$\hbar_{z,\gamma} = \Omega^{-1}([\mathcal{W} \ \ \mathfrak{w}]) \cdot \left(X\left(\begin{bmatrix} x^* + \gamma z \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Omega^{-1}([\mathcal{W} \ \ \mathfrak{w}]) \right)^+ \cdot (b - Ax^* - \gamma Az).$$

Как несложно показать,

$$(x^* + \gamma z) \in \mathcal{X}(A + H_{z,\gamma}, b + h_{z,\gamma}) \Rightarrow [H \quad -h]_{z,\gamma} \in \mathbf{FS}(SP^{[H \ \ -h]}).$$

Кроме того, в силу (1.3) и (1.22)

$$\left\|([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\ \ -h]_{z,\gamma})_{i*}\right\| = \frac{|b-Ax^*-\gamma Az|_i}{\left\|\Omega'^i\cdot s\left(\begin{bmatrix} x^*+\gamma z\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathcal{H}_{i*}^{\top}\\ \mathfrak{h}_i\end{bmatrix}\right)\right\|},$$

причем

$$\left\|([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\ \ -h]_{z,\gamma})_{i*}\right\| = 0\ \ \forall\gamma \text{ при } i\notin\mathbf{L}(x^*),$$
$$\lim_{\gamma\to+\infty}\left\|([\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\ \ -h]_{z,\gamma})_{i*}\right\| =$$
$$=\left\{\frac{|(Az)_i|}{\|v_i\|}\ \ \forall i\in\mathbf{L}_1(x^*),\ 0\ \ \forall i\in\mathbf{L}_2(x^*),\ \frac{|(b-Ax^*)_i|}{\|\tilde{u}_i\|}\ \ \forall i\in\mathbf{L}_3(x^*)\right\}.$$

Следовательно, для $[H\ \ -h]^*_{z,\gamma}=\lim\limits_{\gamma\to+\infty}[H\ \ -h]_{z,\gamma}$ имеем

$$\left\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\ \ -h]^*_{z,\gamma}\right\| = \lim_{\gamma\to+\infty}\left\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\ \ -h]_{z,\gamma}\right\| =$$

$$=\sqrt{\sum_{i\in\mathbf{L}_1(x^*)}\frac{(Az)_i^2}{\|v_i\|^2}+\sum_{i\in\mathbf{L}_3(x^*)}\frac{(b-Ax^*)_i^2}{\|\tilde{u}_i\|^2}} < \|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H^*\ \ -h^*]\|.$$

Но последнее неравенство означает, что при достаточно большом, но конечном $\gamma > 0$ существует матрица $[H\ \ -h]_{z,\gamma}$, являющаяся допустимым решением задачи $SP^{[H\ -h]}$ и такая, что $\left\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H\ \ -h]_{z,\gamma}\right\| < \left\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H^*\ \ -h^*]\right\|$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ \ -h^*]$. в задаче $SP^{[H\ -h]}$.

2. Оптимальность $[H^*\ \ -h^*]$ в задаче $SwD^{[H\ -h]}$ покажем от противного. Действительно, пусть существует матрица $[H^{**}\ \ -h^{**}] \in \mathbf{FS}(SwD^{[H\ -h]})$ такая, что $\|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H^{**}\ \ -h^{**}]\| < \|[\mathcal{W}\ \ \mathfrak{w}]\circ[H^*\ \ -h^*]\|$. Но $\mathbf{FS}(SwD^{[H\ -h]}) \subset \mathbf{FS}(SwP^{[H\ -h]})$, следовательно, существование матрицы H^{**} противоречит предположению об оптимальности матрицы $[H^*\ \ -h^*]$ в задаче $SwP^{[H\ -h]}$. $\square$

Глава 2. Построение эффективного алгоритма решения задач матричной коррекции несобственных задач линейного программирования первого рода

2.1. Квазиньтоновский алгоритм матричной коррекции несобственных задач линейного программирования первого рода

Для решения задач матричной коррекции несобственных задач линейного программирования первого рода строится квазиньтоновский алгоритм, основанный на методе Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно, который как и все градиентные методы основан на итерационной процедуре, реализуемой в соответствии с формулой

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k \cdot s\left(x^k\right),$$

где x^k – текущее приближение к решению,
α^k – параметр, характеризующий длину шага,
$s\left(x^k\right)$ – направление поиска.

Причем,

$$s\left(x^k\right) = -G^k \cdot \nabla\Phi\left(x^k\right),$$

где $\Phi\left(x\right)$ – целевая функция,
$\nabla\Phi\left(x\right)$ – градиент целевой функции,
G – приближение к матрице обратной матрице Гессе целевой функции.

Таким образом, выбор данного метода связан с тем, что он относится к классу квазиньютоновских, т.е. не требующих непосредственного расчета матрицы гессе при определении направления поиска минимума. Для реализации данного алгоритма аналитически получены производные целевой функции.

Для перехода от от задачи условной минимизации ($x \geqslant 0$) к задаче безусловной минимизации вводится замена, задающая параметрическую зависимость вектора x от некоторого вспомогательного вектора $\tilde{x}$:

$$x = x(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^2 \end{bmatrix} = diag(\tilde{x})\,\tilde{x}.$$

На основе рассмотренного выше метода получен следующий алгоритм матричной коррекции несобственных задач ЛП 1-го рода:

Шаг 1. Задать $\tilde{x}^0$ – начальное приближение к $\tilde{x}^*$; M – максимальное (допустимое) количество итераций; ε_1 – параметр сходимости алгоритма; ε_2 – параметр сходимости для поиска вдоль прямой; $\Phi(\tilde{x})$ – целевую функцию, определяемую типом задачи.

Шаг 2. Положить $k = 0$, $G^k = I_n$, где I_n – единичная матрица порядка n.

Шаг 3. Вычислить компоненты

$$\nabla\Phi(\tilde{x}) = \left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial\Phi(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}_n}\right]^{\top}.$$

.

Шаг 4. Если выполняется неравенство $\left\|\nabla\Phi\left(\tilde{x}^k\right)\right\| \leqslant \varepsilon_1$, то перейти к шагу 15, иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 5. Если выполняется неравенство $k > M$, то перейти к шагу 15, иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 6. Вычислить $s\left(\tilde{x}^k\right) = -G^k \cdot \nabla\Phi\left(\tilde{x}^k\right)$.

Шаг 7. Если выполняется неравенство $\nabla\Phi\left(\tilde{x}^k\right) \cdot s\left(\tilde{x}^k\right) < 0$, то перейти к шагу 9, иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 8. Положить $s\left(\tilde{x}^k\right) = -\nabla\Phi\left(\tilde{x}^k\right)$, $G^k = I_n$.

Шаг 9. Найти α^k, при котором $\Phi\left(\tilde{x}^k + \alpha^k \cdot s\left(\tilde{x}^k\right)\right) \to min$ с точностью ε_2.

Шаг 10. Вычислить $\Delta\tilde{x}^k = \alpha^k \cdot s\left(\tilde{x}^k\right)$, $\tilde{x}^{k+1} = \tilde{x}^k + \delta\tilde{x}^k$.

Шаг 11. Если выполняется неравенство $\Phi\left(\tilde{x}^{k+1}\right) < \Phi\left(\tilde{x}^k\right)$, то перейти к следующему шагу, иначе перейти к шагу 15.

Шаг 12. Если выполняется неравенство $\dfrac{\left\|\Delta\tilde{x}^k\right\|}{\left\|\tilde{x}^k\right\|} < \varepsilon_1$, то перейти к шагу 15, иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 13. Вычислить $\Delta g^k = \nabla\Phi\left(\tilde{x}^{k+1}\right) - \nabla\Phi\left(\tilde{x}^k\right)$,

$$G^{k+1} = \left[I_n - \frac{\Delta\tilde{x}^k \cdot \left(\Delta g^k\right)^\top}{\left(\Delta\tilde{x}^k\right)^\top \cdot \Delta g^k}\right] \cdot G^k \cdot \left[I_n - \frac{\Delta\tilde{x}^k \cdot \left(\Delta g^k\right)^\top}{\left(\Delta\tilde{x}^k\right)^\top \cdot \Delta g^k}\right]^\top + \frac{\Delta\tilde{x}^k \cdot \left(\Delta\tilde{x}^k\right)^\top}{\left(\Delta\tilde{x}^k\right)^\top \cdot \Delta g^k}.$$

Шаг 14. Положить $k = k + 1$. Перейти к шагу 3.

Шаг 15. Вычислить H^*, h^* (в соответствии с типом решаемой задачи: 1.4, 1.6, 1.4.3, 1.4.4, 1.6.3, 1.6.4), x^*.

Шаг 16. Вывести результаты и остановиться.

2.2. Производные целевых функций задачи матричной коррекции без учета структурных ограничений

2.2.1. Производная целевой функции задачи P^H

На основании леммы 1.2.1, целевая функция данной задачи имеет вид:

$$\Phi^{P^H}\left(\tilde{x}\right) = \frac{\left(b - A\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right)^2}{\left\|\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right\|^2},$$

или

$$\Phi^{P^H}\left(\tilde{x}\right) = B^{P^H} \cdot X^{P^H},$$

$$B^{P^H} = \left(b - A\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right)^2,$$

$$X^{P^H} = \frac{1}{\left\|\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right\|^2}.$$

$$\frac{\partial\Phi^{P^H}(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial B^H}{\partial\tilde{x}}X^H + B^H\frac{\partial X^H}{\partial\tilde{x}},$$

$$\frac{\partial B^{P^H}}{\partial\tilde{x}} = -4\mathrm{diag}(\tilde{x}) \cdot A^\top \cdot \left(b - A\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right),$$

$$\frac{\partial X^{P^H}}{\partial\tilde{x}} = -4\frac{\mathrm{diag}(\tilde{x}) \cdot \mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}}{\left\|\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right\|^4},$$

2.2.2. Производная целевой функции задачи $P^{[H\ -h]}$

На основании леммы 1.2.2, целевая функция данной задачи имеет вид:

$$\Phi^{P^{[H\ -h]}}\left(\tilde{x}\right) = \frac{\left(b - A\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right)^2}{\left\|\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right\|^2 + 1},$$

или

$$\Phi^{P^{[H-h]}}(\tilde{x}) = B^{P^{[H-h]}} \cdot X^{P^{[H-h]}},$$
$$B^{P^{[H-h]}} = \left(b - A\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right)^2,$$
$$X^{P^{[H-h]}} = \frac{1}{\left\|\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right\|^2 + 1}.$$
$$\frac{\partial \Phi^{P^{[H-h]}}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial B^{P^{[H-h]}}}{\partial \tilde{x}} X^{P^{[H-h]}} + B^{P^{[H-h]}} \frac{\partial X^{P^{[H-h]}}}{\partial \tilde{x}},$$
$$\frac{\partial B^{P^{[H-h]}}}{\partial \tilde{x}} = -4\mathrm{diag}(\tilde{x}) \cdot A^\top \cdot \left(b - A\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right),$$
$$\frac{\partial X^{P^{[H-h]}}}{\partial \tilde{x}} = -4\frac{\mathrm{diag}(\tilde{x}) \cdot \mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}}{\left(\left\|\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right\|^2 + 1\right)^2},$$

2.3. Производные целевых функций задачи матричной коррекции с учетом структурных ограничений

2.3.1. Производная целевой функции задачи SP^H

На основании леммы 1.4.3, целевая функция данной задачи имеет вид:

$$\Phi^{SP^H}(\tilde{x}) = \sum_{i \in \mathbf{L}(x)} \frac{\left(b_i - A_{i*}\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right)^2}{s^\top\!\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\right) s\!\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)},$$

или

$$\Phi^{SP^H}(\tilde{x}) = \sum_{i \in \mathbf{L}(x)} B_i^{SP^H} \cdot X_i^{SP^H},$$
$$B_i^{SP^H} = \left(b_i - A_{i*}\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right)^2,$$
$$X_i^{SP^H} = \frac{1}{s^\top\!\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\right) s\!\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)}.$$
$$\frac{\partial \Phi^{SP^H}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \sum_{i \in \mathbf{L}(x)} \left(\frac{\partial B_i^{SP^H}}{\partial \tilde{x}} X_i^{SP^H} + B_i^{SP^H} \frac{\partial X_i^{SP^H}}{\partial \tilde{x}}\right),$$
$$\frac{\partial B_i^{SP^H}}{\partial \tilde{x}} = -4\left(b_i - A_{i*}\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right) \cdot \left(A_{i*}\right)^\top \mathrm{diag}(\tilde{x}),$$
$$\frac{\partial X_i^{SP^H}}{\partial \tilde{x}} = -4\frac{s\!\left(\mathrm{diag}(\tilde{x}) \cdot \mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)}{\left(s^\top\!\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\right) s\!\left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)\right)^2}.$$

2.3.2. Производная целевой функции задачи $SP^{[H\ -h]}$

На основании леммы 1.4.4, целевая функция данной задачи имеет вид:

$$\Phi^{SP^{[H\ -h]}}(\tilde{x}) = \sum_{i\in\mathbf{L}(x)} \frac{(b_i - A_{i*}(\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}))^2}{s^\top\left(\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathcal{H}_{i*}^\top\\ \mathfrak{h}_i\end{bmatrix}\right) s\left(\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathcal{H}_{i*}^\top\\ \mathfrak{h}_i\end{bmatrix}\right)},$$

или

$$\Phi^{SP^{[H\ -h]}}(\tilde{x}) = \sum_{i\in\mathbf{L}(x)} B_i^{SP^{[H\ -h]}}\cdot X_i^{SP^{[H\ -h]}},\quad B_i^{SP^{[H\ -h]}} = (b_i - A_{i*}(\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}))^2,$$

$$X_i^{SP^{[H\ -h]}} = \frac{1}{s^\top\left(\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathcal{H}_{i*}^\top\\ \mathfrak{h}_i\end{bmatrix}\right) s\left(\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathcal{H}_{i*}^\top\\ \mathfrak{h}_i\end{bmatrix}\right)}.$$

$$\frac{\partial\Phi^{SP^{[H\ -h]}}(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}} = \sum_{i\in\mathbf{L}(x)}\left(\frac{\partial B_i^{SP^{[H\ -h]}}}{\partial\tilde{x}} X_i^{SP^{[H\ -h]}} + B_i^{SP^{[H\ -h]}}\frac{\partial X_i^{SP^{[H\ -h]}}}{\partial\tilde{x}}\right),$$

$$\frac{\partial B_i^{SP^{[H\ -h]}}}{\partial\tilde{x}} = -4(b_i - A_{i*}(\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}))\cdot(A_{i*})^\top\operatorname{diag}(\tilde{x}),$$

$$\frac{\partial X_i^{SP^{[H\ -h]}}}{\partial\tilde{x}} = -4\frac{s\big(\operatorname{diag}(\tilde{x})\cdot\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\big)}{\left\|s\left(\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathcal{H}_{i*}^\top\\ \mathfrak{h}_i\end{bmatrix}\right)\right\|^4}.$$

2.4. Производные целевых функций структурной взвешенной задачи матричной коррекции

2.4.1. Целевая функция «взвешеннной» задачи SwP^H и её производная

На основании леммы 1.6.3, целевая функция данной задачи имеет вид:

$$\Phi^{SwP^H}(\tilde{x}) = \sum_{i\in\mathbf{L}(x)} \frac{(b_i - A_{i*}(\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}))^2}{s^\top\big(\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\big)\cdot(\Omega^i)^{-1}\cdot(\Omega^i)^{-1}\cdot s\big(\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\big)},$$

или

$$\Phi^{SwP^H}(\tilde{x}) = \sum_{i \in \mathbf{L}(x)} B_i^{SwP^H} \cdot X_i^{SwP^H},$$

$$B_i^{SwP^H} = (b_i - A_{i*}\,(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}))^2,$$

$$X_i^{SwP^H} = \frac{1}{s^\top\big(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\big) \cdot (\Omega^i)^{-1} \cdot (\Omega^i)^{-1} \cdot s\big(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\big)}.$$

$$\frac{\partial \Phi^{SwP^H}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \sum_{i \in \mathbf{L}(x)} \left(\frac{\partial B_i^{SwP^H}}{\partial \tilde{x}} X_i^{SwP^H} + B_i^{SwP^H} \frac{\partial X_i^{SwP^H}}{\partial \tilde{x}} \right),$$

$$\frac{\partial B_i^{SwP^H}}{\partial \tilde{x}} = -4(b_i - A_{i*}\,(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x})) \cdot (A_{i*})^\top \,\mathrm{diag}(\tilde{x}),$$

$$\frac{\partial X_i^{SwP^H}}{\partial \tilde{x}} = -4 \frac{\big(\Omega^i\big)^{-1} \cdot \big(\Omega^i\big)^{-1} \cdot s\big(\mathrm{diag}(\tilde{x}) \cdot \mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\big)}{\Big(s^\top\big(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\big) \cdot (\Omega^i)^{-1} \cdot (\Omega^i)^{-1} \cdot s\big(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\big)\Big)^2}.$$

2.4.2. Целевая функция «взвешеннной» задачи $SwP^{[H\ -h]}$ и её производная

На основании леммы 1.6.4, целевая функция данной задачи имеет вид:

$$\Phi^{SwP^{[H\ -h]}}(\tilde{x}) = \sum_{i \in \mathbf{L}(x)} \frac{(b_i - A_{i*}\,(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}))^2}{\left\| (\Omega'^i)^{-1} \cdot s\left(\begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix} \right) \right\|^2},$$

или

$$\Phi^{SwP^{[H\ -h]}}(\tilde{x}) = \sum_{i \in \mathbf{L}(x)} B_i^{SwP^{[H\ -h]}} \cdot X_i^{Sw^{[H\ -h]}}, \quad B_i^{SwP^{[H\ -h]}} = (b_i - A_{i*}\,(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}))^2,$$

$$X_i^{SwP^{[H\ -h]}} = \frac{1}{\left\| (\Omega'^i)^{-1} \cdot s\left(\begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix} \right) \right\|^2}.$$

$$\frac{\partial \Phi^{SwP^{[H\ -h]}}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \sum_{i \in \mathbf{L}(x)} \left(\frac{\partial B_i^{SwP^{[H\ -h]}}}{\partial \tilde{x}} X_i^{SwP^{[H\ -h]}} + B_i^{SwP^{[H\ -h]}} \frac{\partial X_i^{SwP^{[H\ -h]}}}{\partial \tilde{x}} \right),$$

$$\frac{\partial B_i^{SwP^{[H\,-h]}}}{\partial \tilde{x}} = -4(b_i - A_{i*}\left(\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)) \cdot \left(A_{i*}\right)^\top \operatorname{diag}(\tilde{x}),$$
$$\frac{\partial X_i^{SwP^{[H\,-h]}}}{\partial \tilde{x}} = -4\frac{\left(\Omega'^i\right)^{-1} \cdot \left(\Omega'^i\right)^{-1} \cdot s\big(\operatorname{diag}(\tilde{x}) \cdot \operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}, \mathcal{H}_{i*}^\top\big)}{\left\| \left(\Omega'^i\right)^{-1} \cdot s\left(\begin{bmatrix} \operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{i*}^\top \\ \mathfrak{h}_i \end{bmatrix}\right)\right\|^4}.$$

2.5. Использование штрафа для адаптации алгоритма коррекции к задачам, постановка которых допускает наличие некорректируемых строк матрицы коэффициентов

При решении задачи структурной матричной коррекции могут иметься строки с запретом коррекции, множество которых определяется:

$$\mathbf{Q}(x) = \left\{ i \,|(b - Ax)_i \neq 0, \mathcal{H}_{i*} = 0 \in \mathbb{R}^n \right\},$$

или, в зависимости от контекста,

$$\mathbf{Q}(x) = \left\{ i \,\middle|(b - Ax)_i \neq 0, [\mathcal{H}_{i*} \;\; \mathfrak{h}_i] = 0 \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}.$$

Таким образом, при использовании описанного выше алгоритма, возникает необходимость не допустить невязки в строках, не подлежащих коррекции. Тогда для обобщения алгоритма на случай решения задач с подобной структурой применяется квадратичная штрафная функция, которая для каждой некорректируемой строки имеет вид:

$$R_i\left(\tilde{x}\right) = \mu\left(b_i - A_{i*}(\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x})\right)^2, \tag{2.1}$$

где μ – штрафной параметр, являющийся достаточно большой величиной для конкретной задачи. Следует отметить, что выбор квадратичной штрафной функции определяется, прежде всего, канонической формой записи корректируемой задачи, а также тем, что и данная функция непрерывна и дифференцируема. Тогда градиент (2.1) имеет вид

$$\frac{\partial R_i(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = -4\mu(b_i - A_{i*}\left(\operatorname{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)) \cdot \left(A_{i*}\right)^\top \operatorname{diag}(\tilde{x}). \tag{2.2}$$

Учитывая (2.1) целевые функции задач структурной и взвешенной структурной матричной коррекции только левой и обеих частей системы ограничений при наличии некорректируемых строк могут быть увеличены на значение функции

$$R(\tilde{x}) = \sum_{i \notin \mathbf{Q}(x)} \mu \left(b_i - A_{i*}(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x})\right)^2,$$

а градиенты перечисленных выше целевых функций на основании (2.2) получают поправку

$$\frac{\partial R(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = -4\mu \sum_{i \notin \mathbf{Q}(x)} \left(b_i - A_{i*} \left(\mathrm{diag}(\tilde{x})\tilde{x}\right)\right) \cdot \left(A_{i*}\right)^{\top} \mathrm{diag}(\tilde{x}).$$

Глава 3. Вычислительные эксперименты

3.1. Постановка и решение задачи bgdbg1

3.1.1. Общая постановка задачи bgdbg1

В качестве примера рассмотрена задача средней размерности bgdbg1 из хранилища несобственных задач линейного программирования netlib [182]. Левая часть данной задачи представляет собой матрицу размером 348×407, включающую 1485 ненулевых элементов. Так же в задаче имеются дополнительные верхние ограничения на x. Структура нулевых и ненулевых элементов расширенной матрицы представлена на рисунке 3.1 (черными точками выделены ненулевые элементы). При представлении данной задачи в каноническом виде с учетом дополнительных верхних ограничений на аргумент, задача имеет размерность 393×674, где 267 переменных являются вспомогательными и рассматриваться при выводе не будут.

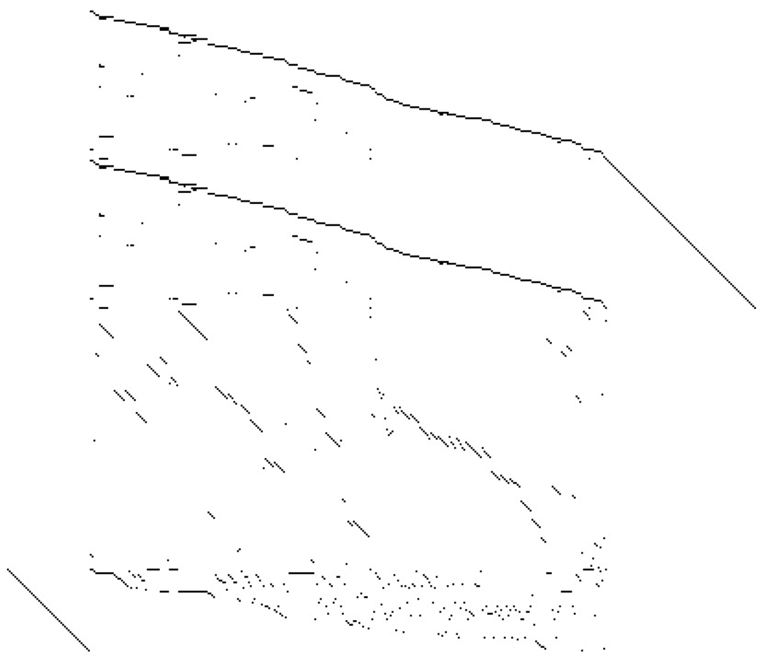

Рис. 3.1. Иллюстрация расширенной матрицы системы ограничений задачи bgdbg1

3.1.2. Постановка и решение задачи bgdbg1 P^H

Корректировались только левая часть системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right) \left| \tilde{x}_i^0 = 4 \;\; \forall i \in 1, 2, \ldots 674 \right. .$$

Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы матрицы коррекции представлена на рис. 3.2 – 3.4. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.5. Значения элементов мат-

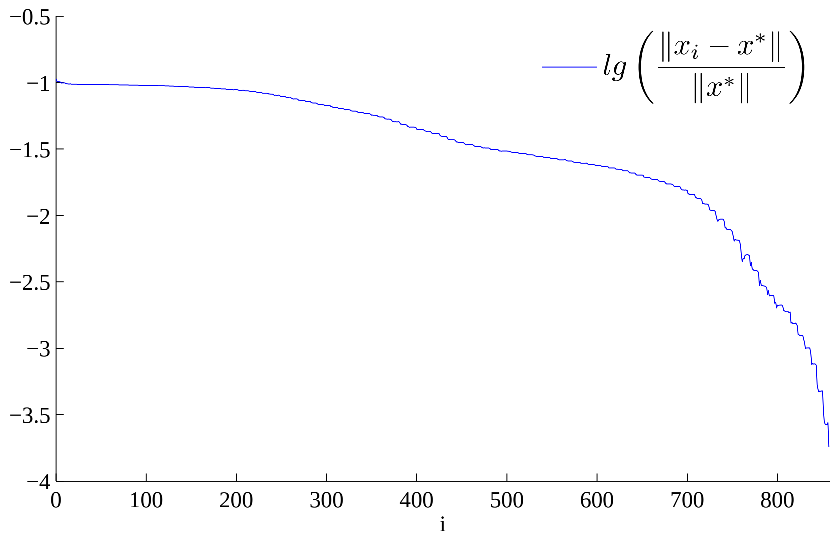

Рис. 3.2. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции P^H задачи bgdbg1

рицы коррекции находятся в диапазоне $\begin{bmatrix} -0,0063 & 0,0063 \end{bmatrix}$. Алгоритм выполнил 860 итераций за 1741,026 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{P^H}\left(\tilde{x^*}\right) = 9,025374361735607e - 004$. Евклидова норма матрицы коррекции $\|H\| = 0,030042260836585$. Замесание: данные и последующие вычисления выполнялись в системе MATLAB 7.9 компьютером с процессором Intel Core i3 M370, тактовой частотой 2,4 ГГц, оперативной памятью 3 Гб.

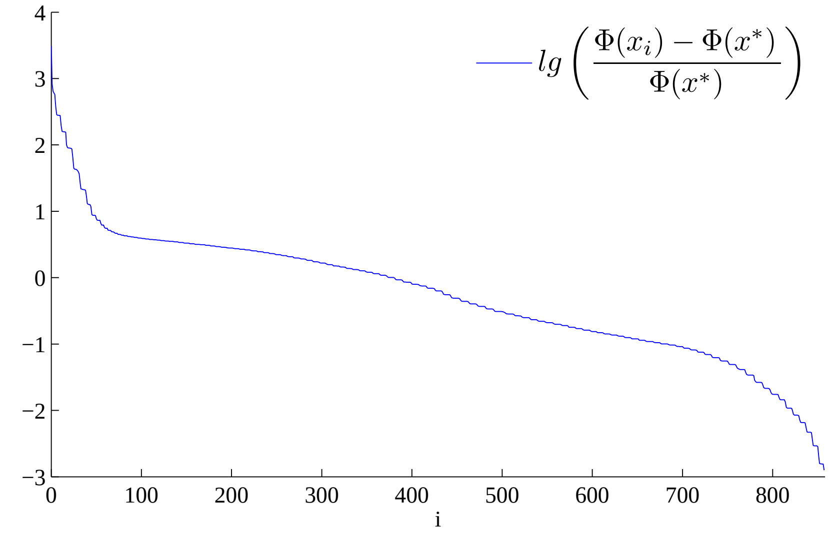

Рис. 3.3. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции P^H задачи bgdbg1

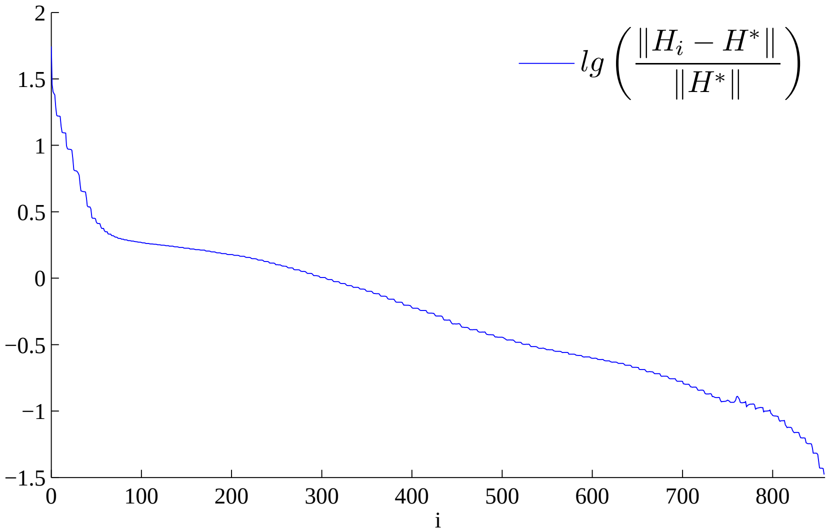

Рис. 3.4. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции P^H задачи bgdbg1

3.1.3. Постановка и решение задачи bgdbg1 $P^{[H\ -h]}$

Корректировались обе части системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right) \middle| \tilde{x}_i^0 = 4 \ \ \forall i \in 1, 2, \dots 674\,.$$

Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы рас-

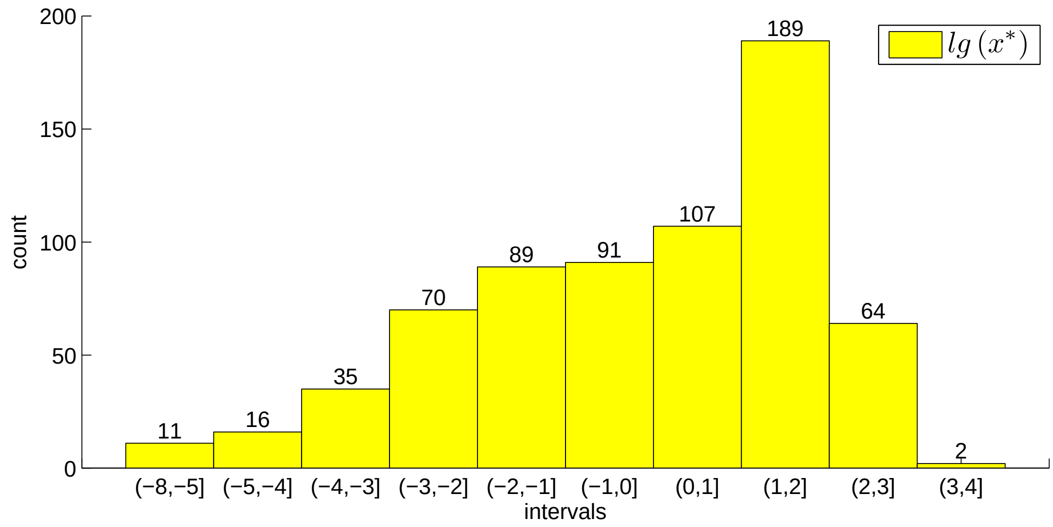

Рис. 3.5. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции P^H задачи bgdbg1

ширенной матрицы коррекции представлена на рис. 3.6 – 3.8. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.9. Зна-

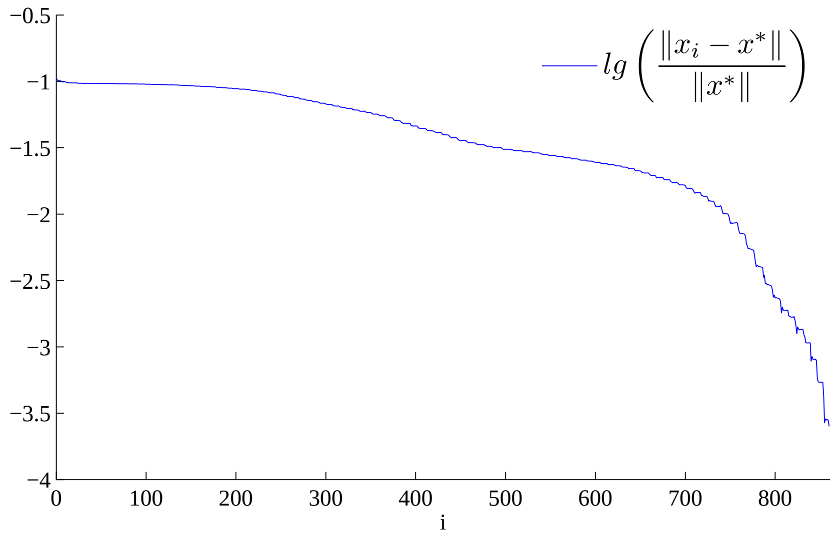

Рис. 3.6. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции $P^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

чения элементов расширенной матрицы коррекции находятся в диапазоне $\begin{bmatrix} -0,0064 & 0,0063 \end{bmatrix}$. Алгоритм выполнил 863 итерации за 1831,044 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{P^{[H\ -h]}}\left(\tilde{x^*}\right) = 9,045389476243942e - 004$. Евклидова норма расширенной матрицы коррекции $\|[H\ -h]\| = 0,030075553986989$.

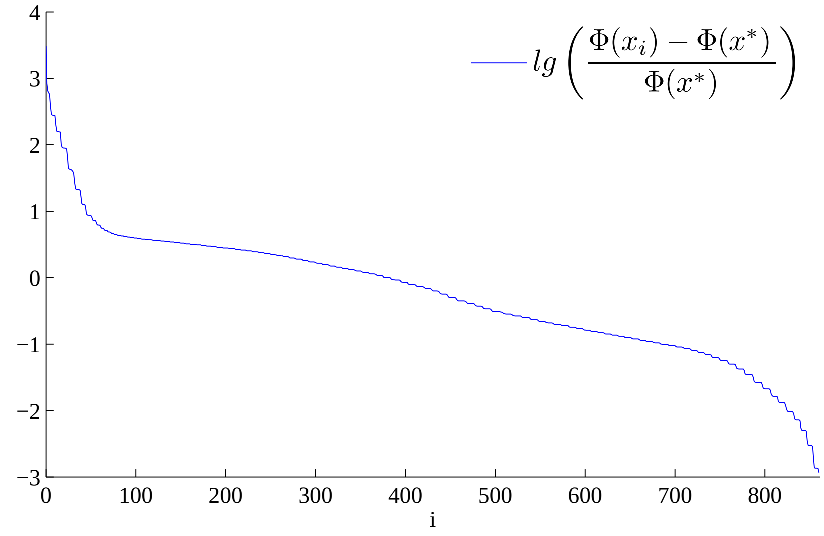

Рис. 3.7. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции $P^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

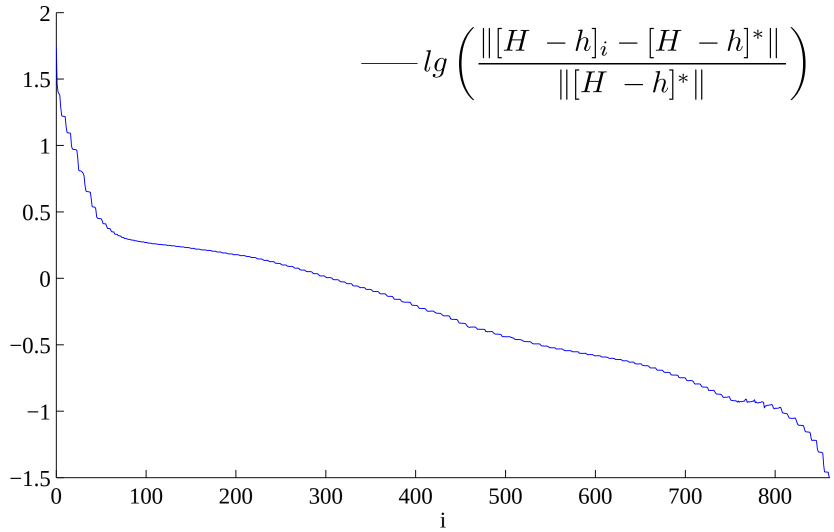

Рис. 3.8. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции $P^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

3.1.4. Постановка и решение задачи bgdbg1 SP^H

Корректировались только левая часть системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0=\left(\tilde{x}_i^0\right)\left|\tilde{x}_i^0=1\ \ \forall i\in 1,2,\ldots 674\right. .$$

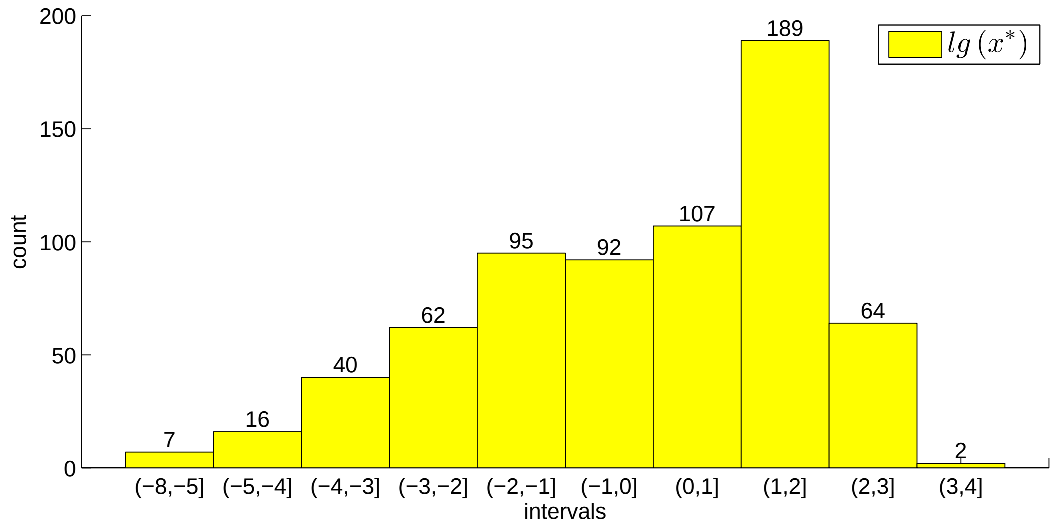

Рис. 3.9. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции $P^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

Корректируются ненулевые элементы левой части системы ограничений, таким образом шаблон, задающий позицию корректируемых элементов

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{i,j}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{H}_{i,j} = 1 \text{ если } A_{ij} \neq 0, \\ \mathcal{H}_{i,j} = 0 \text{ в противном случае.} \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы матрицы коррекции представлена на рис. 3.10 – 3.12. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.13. Матрица коррекции представлена диаграммой рис. 3.14.

Алгоритм выполнил 50000 итераций за 54943,508 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{SP^H}\left(\tilde{x^*}\right) = \ 40,398810217995688$. Евклидова норма матрицы коррекции $\|H\| = \ 6,356005837792425$.

3.1.5. Постановка и решение задачи bgdbg1 $SP^{[H\ -h]}$

Корректировались обе части системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}^0_i\right) \left| \tilde{x}^0_i = 1 \ \ \forall i \in 1, 2, \ldots 674 \right. .$$

Корректируются ненулевые элементы системы ограничений, таким образом шаблоны, задающие позицию корректируемых элементов определяется

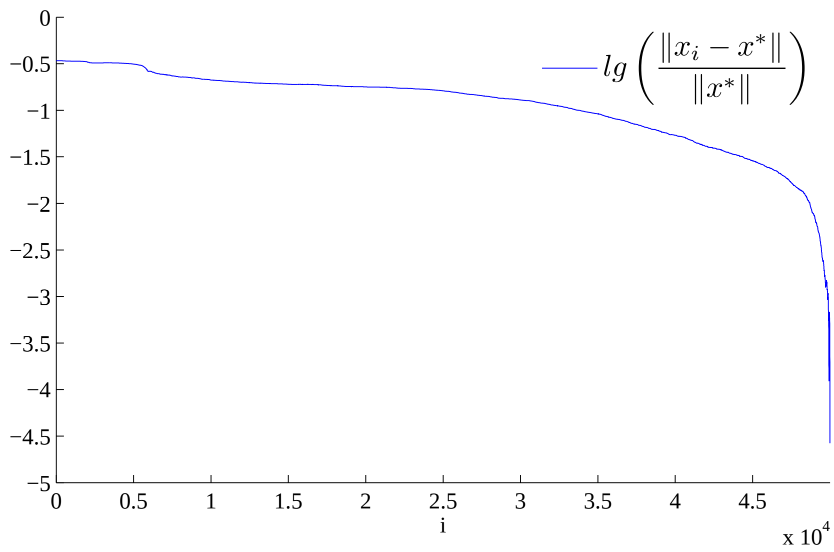

Рис. 3.10. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции SP^H задачи bgdbg1

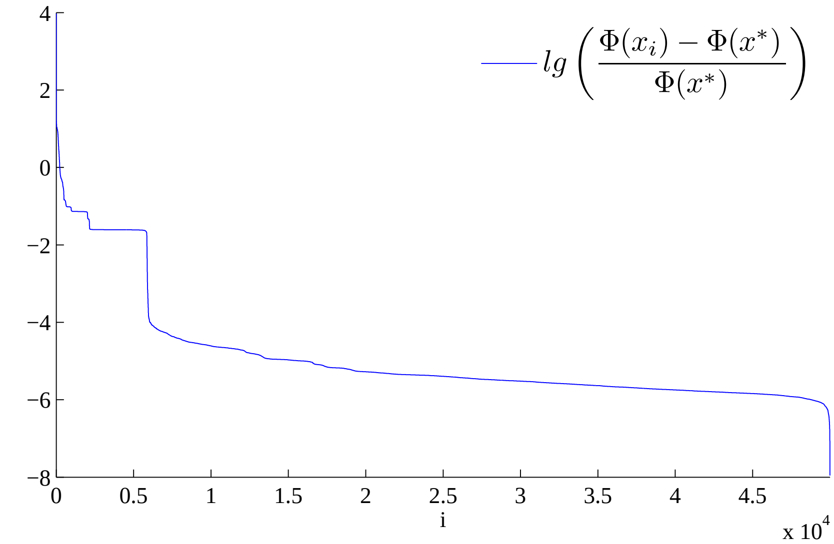

Рис. 3.11. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции SP^H задачи bgdbg1

(3.1), а также

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_i) \left| \begin{array}{l} \mathfrak{h}_i = 1 \text{ если } b_i \neq 0, \\ \mathfrak{h}_i = 0 \text{ в противном случае.} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы расширенной матрицы коррекции представлена на рис. 3.15 – 3.17. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.18. Расширенная

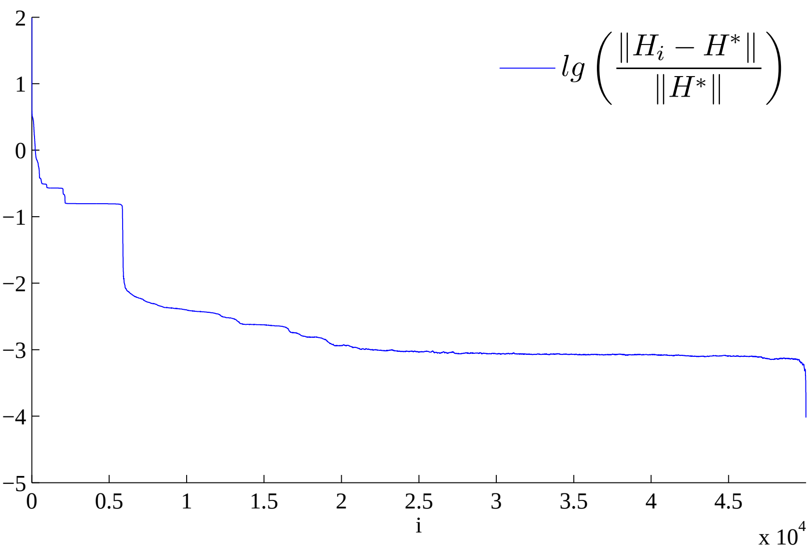

Рис. 3.12. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции SP^H задачи bgdbg1

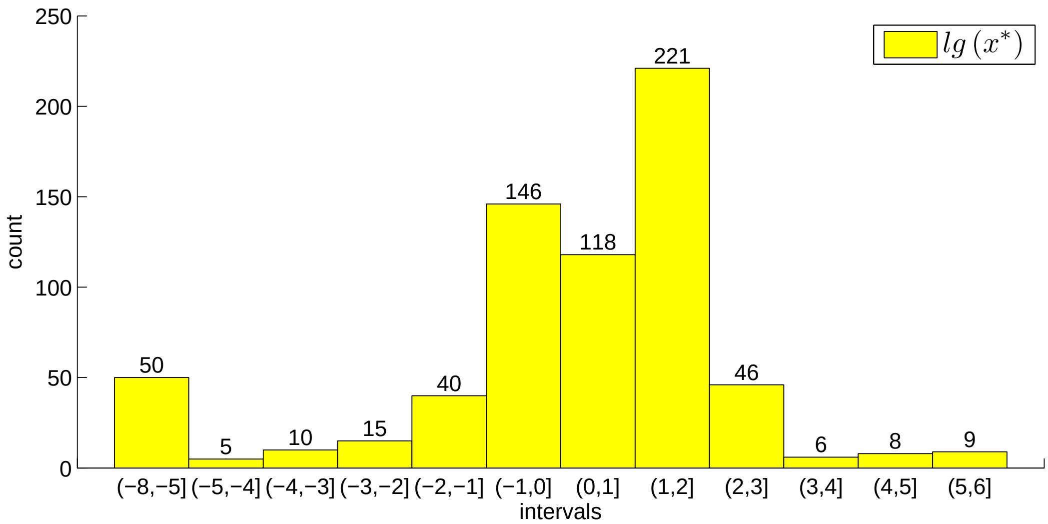

Рис. 3.13. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции SP^H задачи bgdbg1

матрица коррекции представлена диаграммой рис. 3.19.

Алгоритм выполнил 50000 итераций за 55034,749 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{SP^{[H\ -h]}}\left(\tilde{x^*}\right) = 35,266089543842405$. Евклидова норма расширенной матрицы коррекции $\|[H\ -h]\| = 5,938525872947968$.

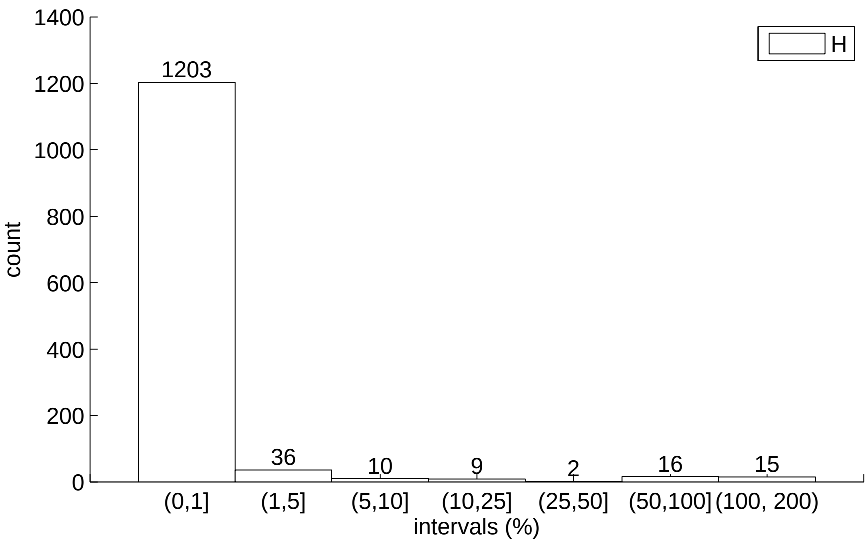

Рис. 3.14. Интервальный ряд распределения значений элементов расширенной матрицы коррекции для целевой функции SP^H задачи bgdbg1

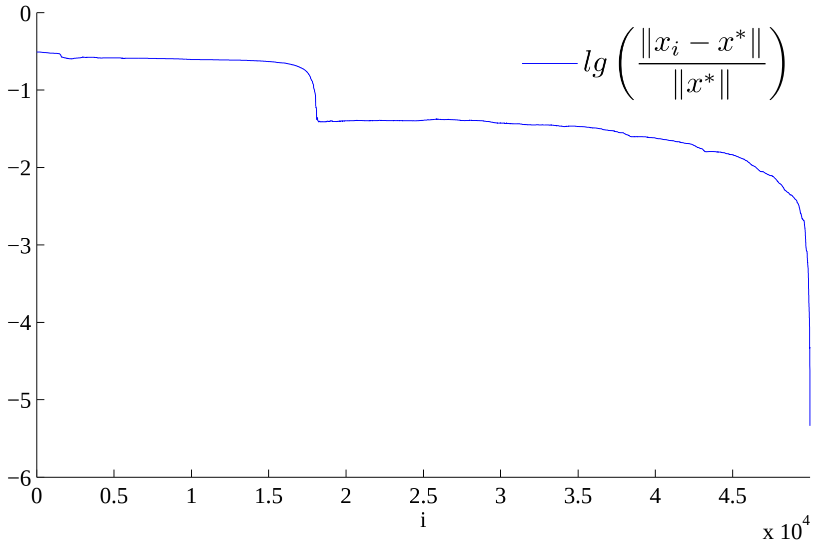

Рис. 3.15. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

3.1.6. Постановка и решение задачи bgdbg1 SwP^H

Корректировались только левая часть системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right) \left| \tilde{x}_i^0 = 1 \ \ \forall i \in 1, 2, \ldots 674 \right. .$$

Корректируются ненулевые элементы левой части системы ограничений, таким образом шаблоны, задающие позицию корректируемых элементов

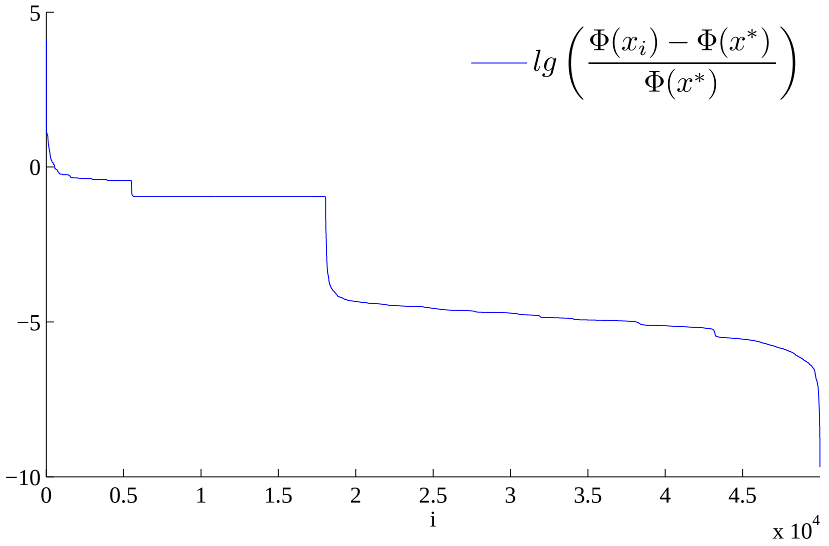

Рис. 3.16. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

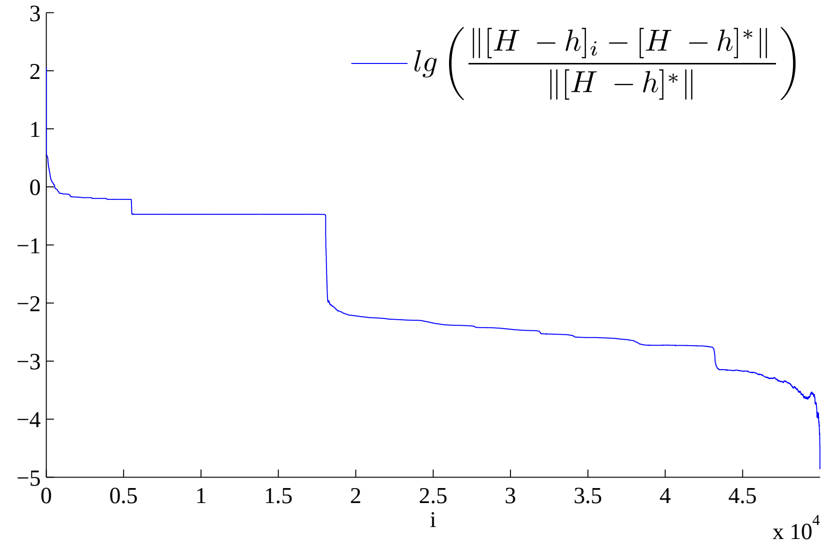

Рис. 3.17. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

определяются (3.1) и (3.2). Весовые коэффициенты элементов задаются

$$\mathcal{W} = (\mathcal{W}_{i,j}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{W}_{i,j} = \dfrac{1}{(A_{ij})^2} \text{ если } A_{ij} \neq 0, \\ \mathcal{W}_{i,j} = 1 \text{ в противном случае.} \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы матрицы коррекции представлена на рис. 3.20 – 3.22. Значение аргумента после

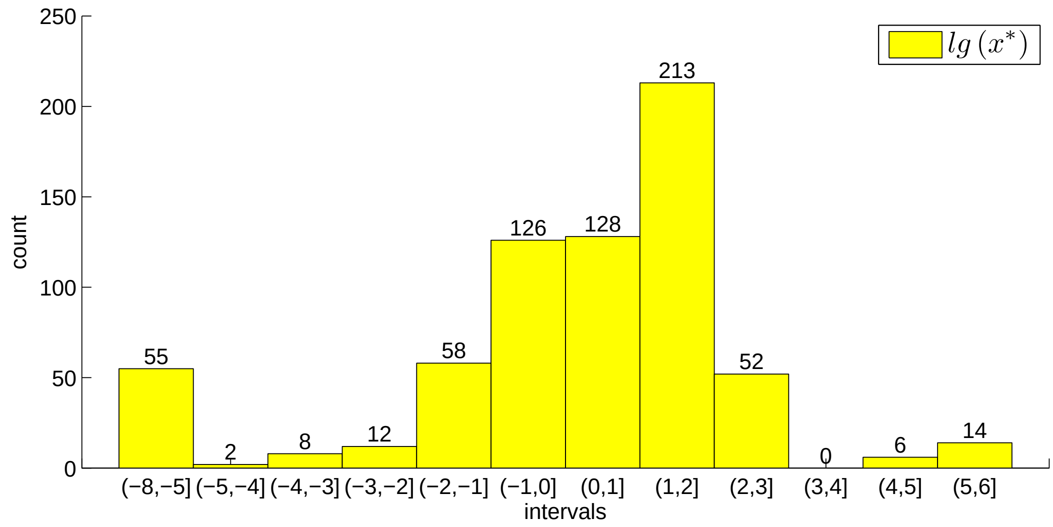

Рис. 3.18. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

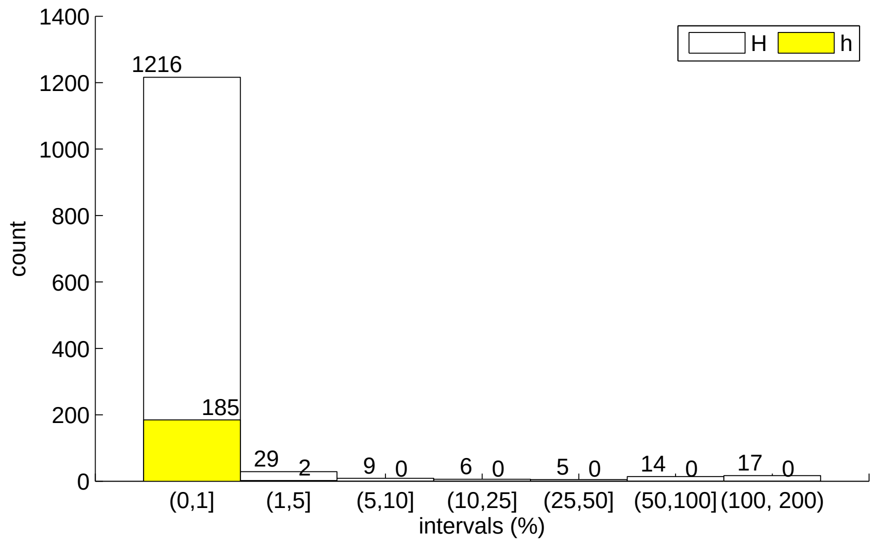

Рис. 3.19. Интервальный ряд распределения значений элементов расширенной матрицы коррекции для целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

матричной коррекции представлено на рис. 3.23. Матрица коррекции представлена диаграммой рис. 3.24.

Алгоритм выполнил 34389 итераций за 40772,617 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{SwP^H}\left(\tilde{x^*}\right) = 25,071610923548086$. Евклидова норма матрицы коррекции $\|H\| = 6,122429955006273$.

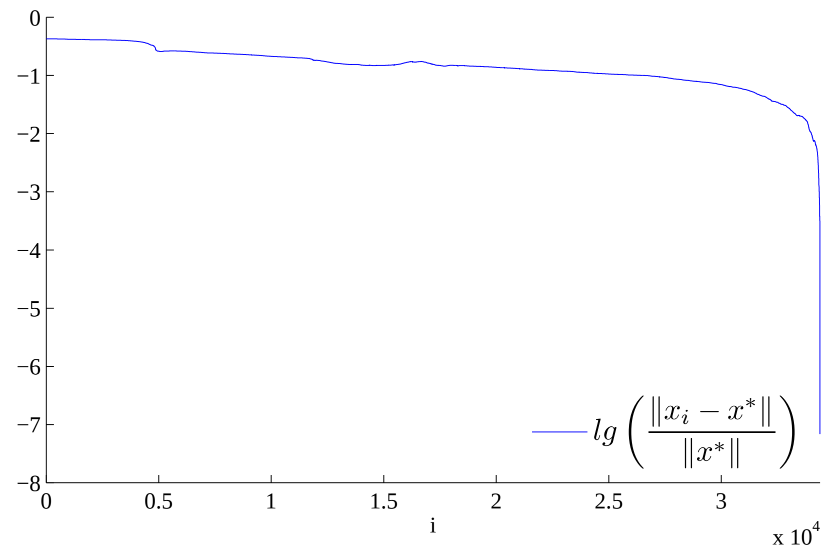

Рис. 3.20. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции SwP^H задачи bgdbg1

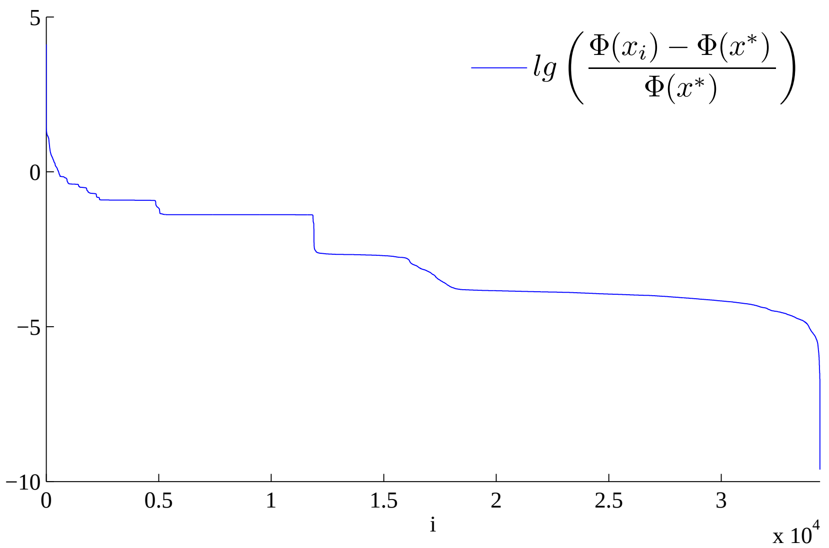

Рис. 3.21. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции SwP^H задачи bgdbg1

3.1.7. Постановка и решение задачи bgdbg1 $SwP^{[H\ -h]}$

Корректировались обе части системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right) \left|\tilde{x}_i^0 = 1 \ \ \forall i \in 1, 2, \ldots 674\right. .$$

Корректируются ненулевые элементы системы ограничений, таким образом шаблоны, задающие позицию корректируемых элементов определяют-

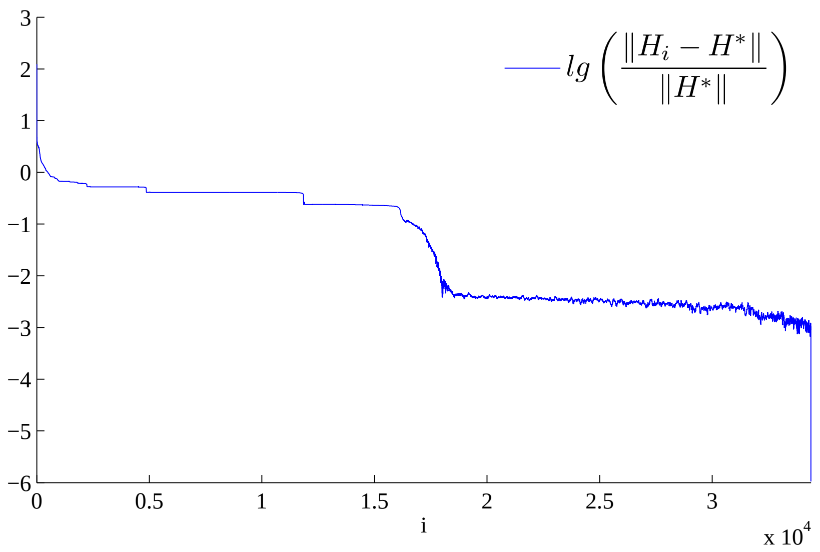

Рис. 3.22. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции SwP^H задачи bgdbg1

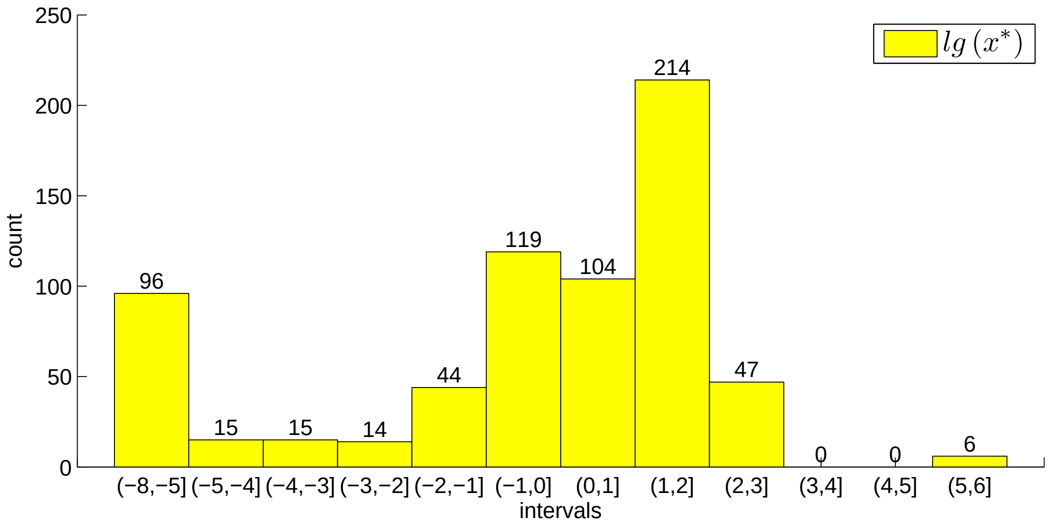

Рис. 3.23. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции SwP^H задачи bgdbg1

ся (3.1) и (3.2). Весовые коэффициенты элементов задаются (3.3) и

$$\mathfrak{w} = (\mathfrak{w}_i) \left| \begin{array}{l} \mathfrak{w}_i = \dfrac{1}{(b_i)^2} \text{ если } b_i \neq 0, \\ \mathfrak{w}_i = 1 \text{ в противном случае.} \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы расширенной матрицы коррекции представлена на рис. 3.25 – 3.27. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.28. Расширенная

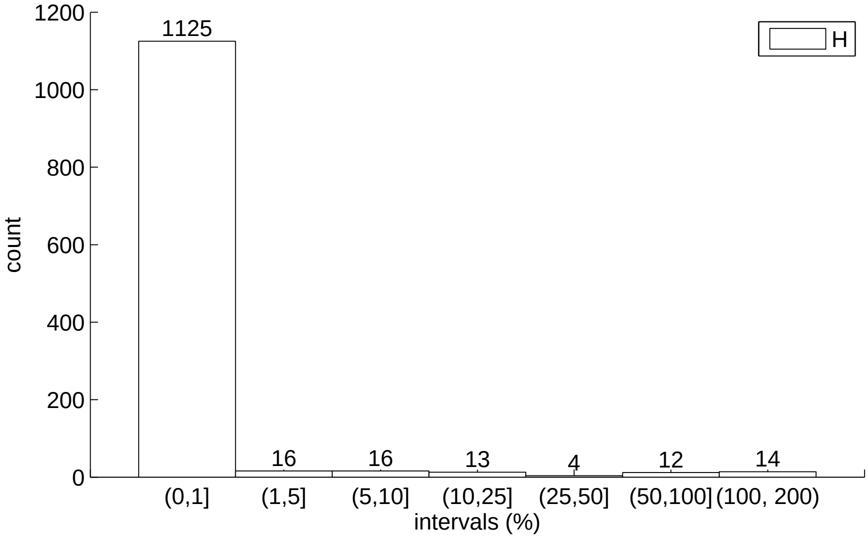

Рис. 3.24. Интервальный ряд распределения значений элементов расширенной матрицы коррекции для целевой функции SwP^H задачи bgdbg1

матрица коррекции представлена диаграммой рис. 3.29.

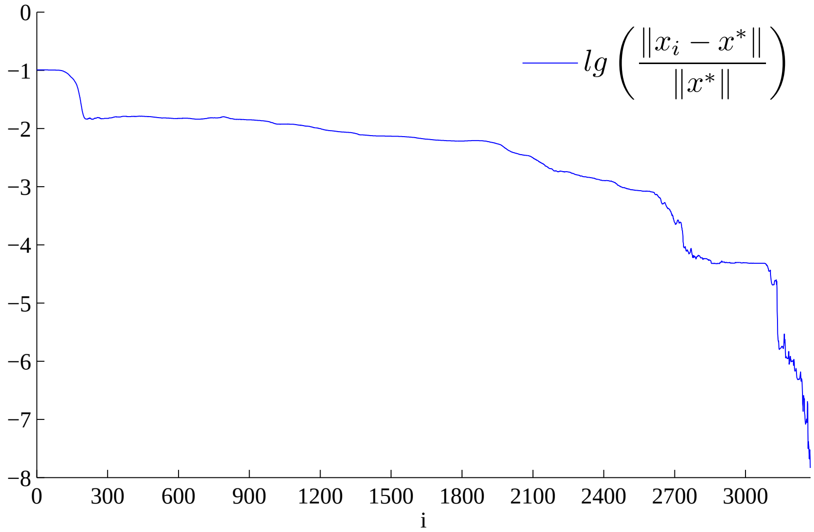

Рис. 3.25. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

Алгоритм выполнил 3277 итераций за 4005,330 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{SwP^{[H\ -h]}}\left(\tilde{x^*}\right) = 20,820672695534476$. Евклидова норма расширенной матрицы коррекции $\|[H\ \ -h]\| = 1,228276049854352e + 002$.

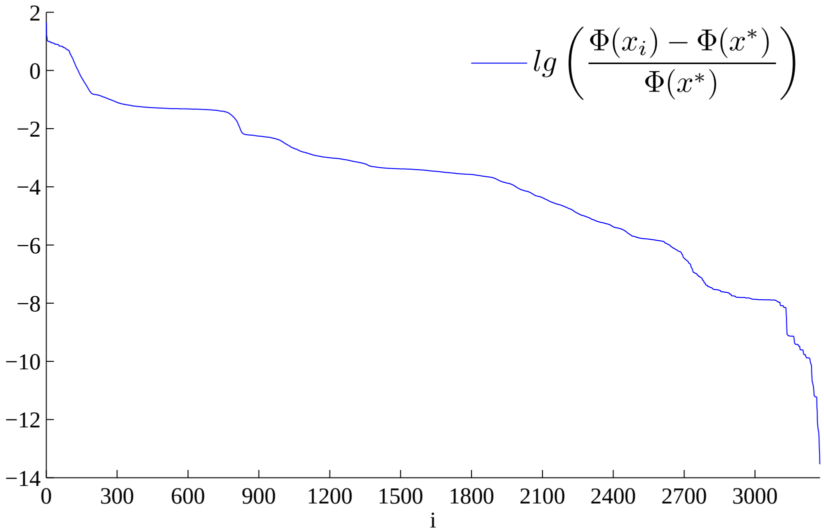

Рис. 3.26. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

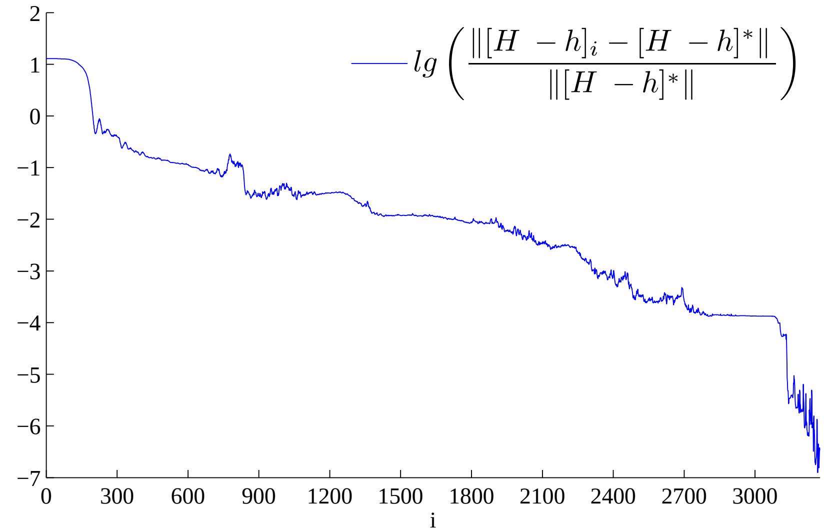

Рис. 3.27. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

3.2. Постановка и решение задачи mondou2

3.2.1. Общая постановка задачи mondou2

Так же, в качестве примера, рассмотрена задача средней mondou2 из хранилища несобственных задач линейного программирования netlib [182]. Левая часть данной задачи представляет собой матрицу размером 312×604, включающую 1623 ненулевых элементов. Структура нулевых и

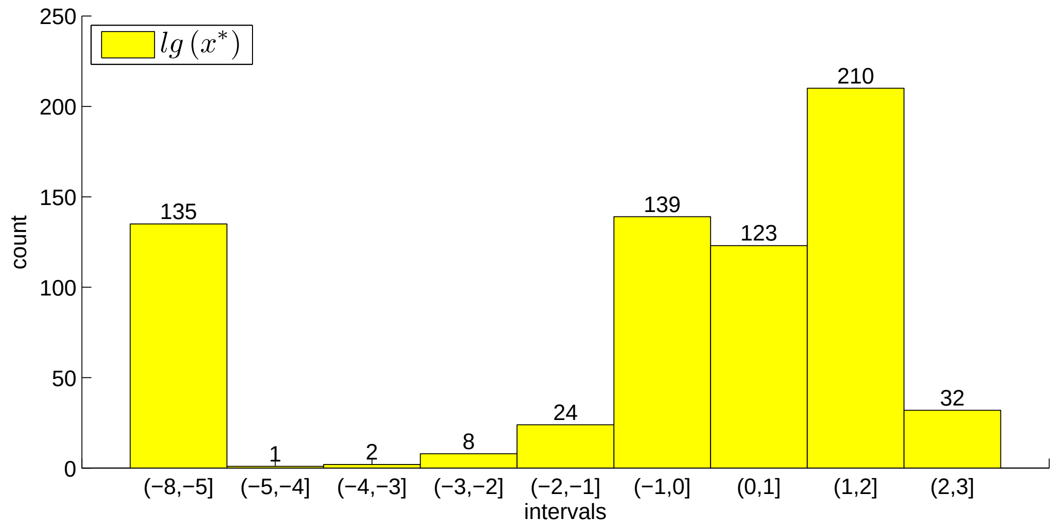

Рис. 3.28. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

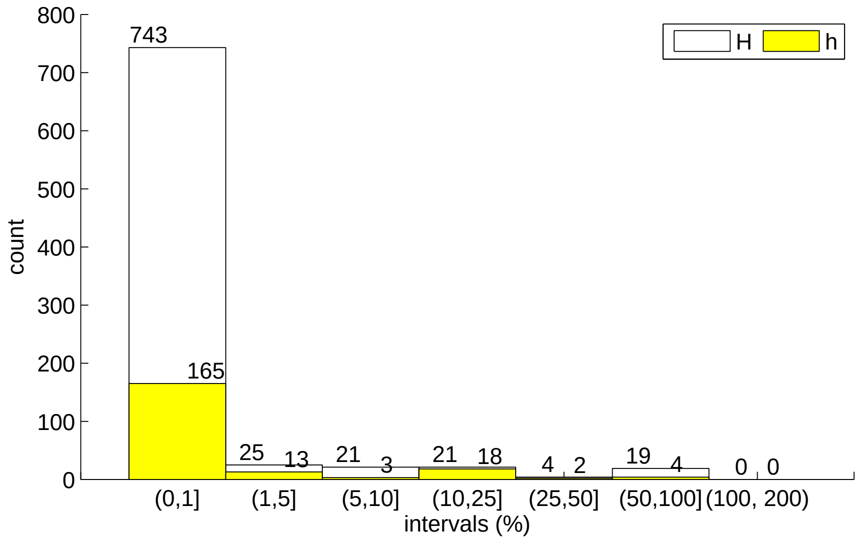

Рис. 3.29. Интервальный ряд распределения значений элементов расширенной матрицы коррекции для целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи bgdbg1

ненулевых элементов расширенной матрицы представлена на рисунке 3.30 (черными точками выделены ненулевые элементы)

3.2.2. Постановка и решение задачи mondou2 P^H

Корректировались только левая часть системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right) \middle| \tilde{x}_i^0 = 100 \ \ \forall i \in 1, 2, \ldots 604\,.$$

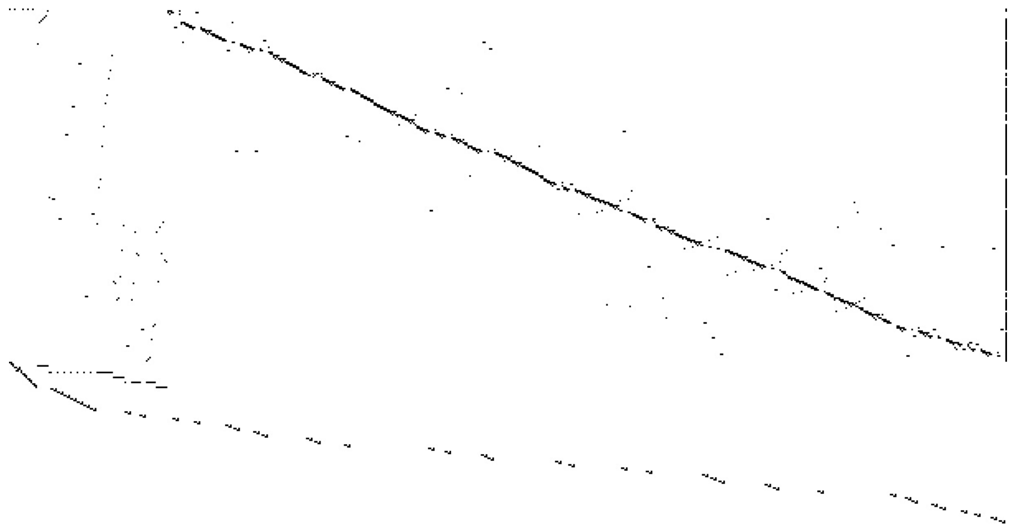

Рис. 3.30. Иллюстрация расширенной матрицы системы ограничений задачи mondou2

Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы матрицы коррекции представлена на рис. 3.31 – 3.33. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.34. Значения элементов

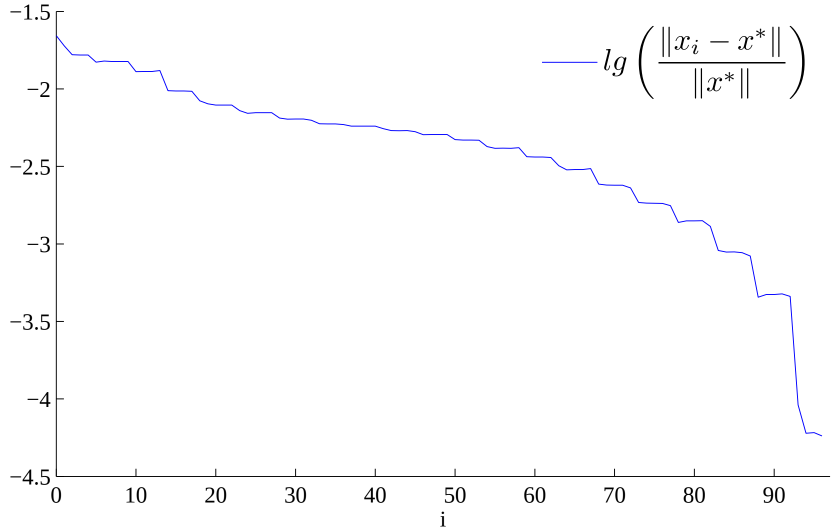

Рис. 3.31. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции P^H задачи mondou2

матрицы коррекции находятся в диапазоне $\left[-5,3301e\ -\ 4\ \ 5,2790\ -\ 4\right]$. Алгоритм выполнил 99 итераций за 188,352 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{P^H}\left(\tilde{x^*}\right)\ =\ 1,926896357986016e\ -\ 004$. Евклидова норма матрицы коррекции $\|H\| = 0,013881269243070$.

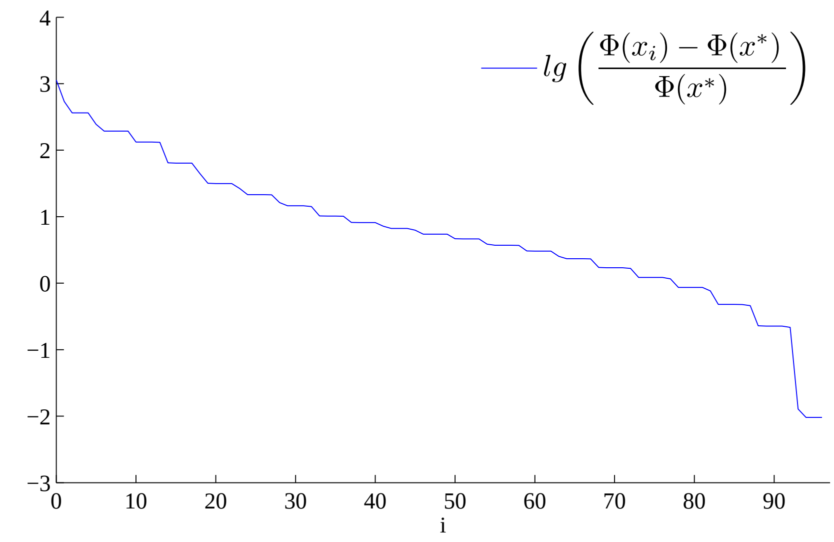

Рис. 3.32. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции P^H задачи mondou2

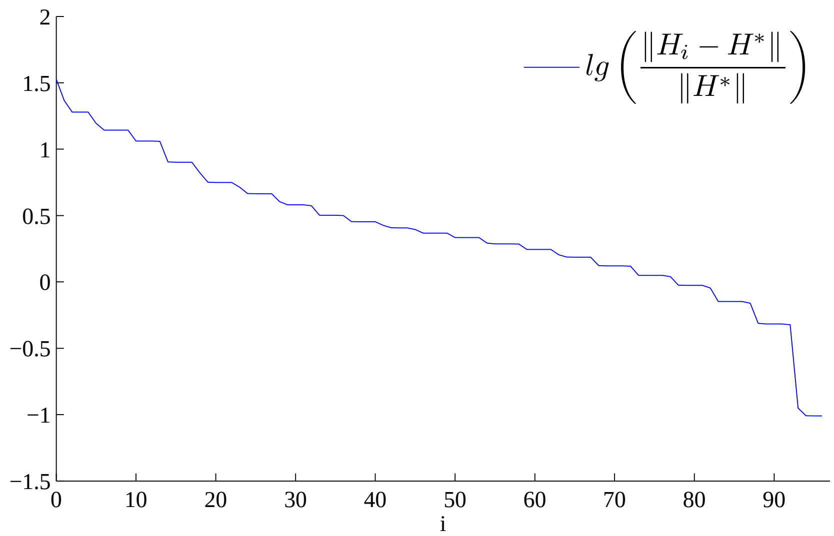

Рис. 3.33. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции P^H задачи mondou2

3.2.3. Постановка и решение задачи mondou2 $P^{[H\ -h]}$

Корректировались обе части системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right) \left| \tilde{x}_i^0 = 100 \ \ \forall i \in 1, 2, \ldots 604 \right. .$$

Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нор-

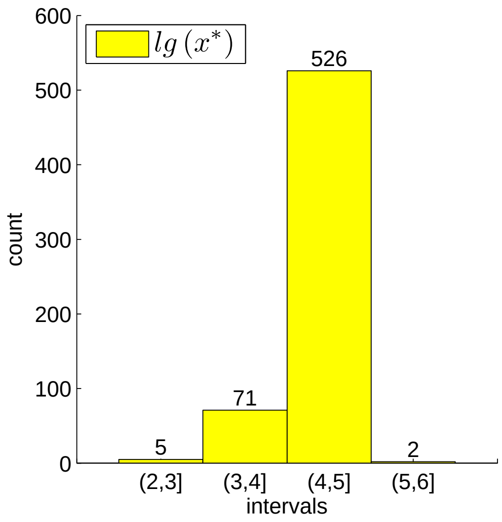

Рис. 3.34. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции P^{H} задачи mondou2

мы расширенной матрицы коррекции представлена на рис. 3.35 – 3.37. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.38. Значения элементов расширенной матрицы коррекции на-

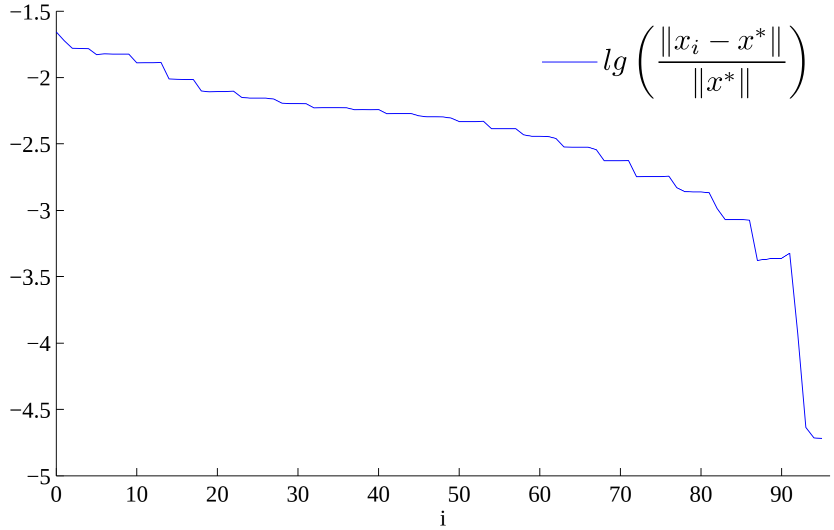

Рис. 3.35. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции $P^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

ходятся в диапазоне $\left[-5,4967e\ -\ 4\ \ 5,3094e\ -\ 4\right]$. Алгоритм выполнил 98 итераций за 172,147 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{P^{[H\ -h]}}\left(\tilde{x^{*}}\right) = 1,948979631325387e - 004$. Евклидова норма расширенной матрицы коррекции $\|[H\ \ -h]\| = 0,013960586059780$.

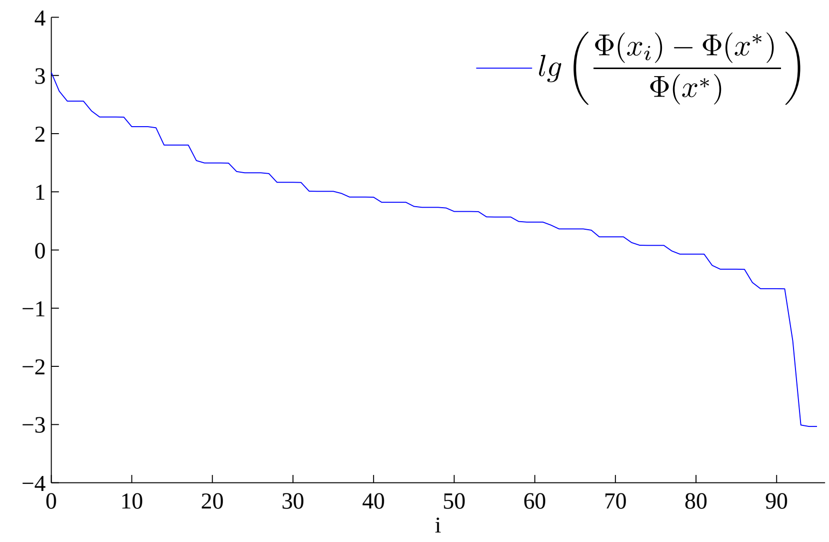

Рис. 3.36. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции $P^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

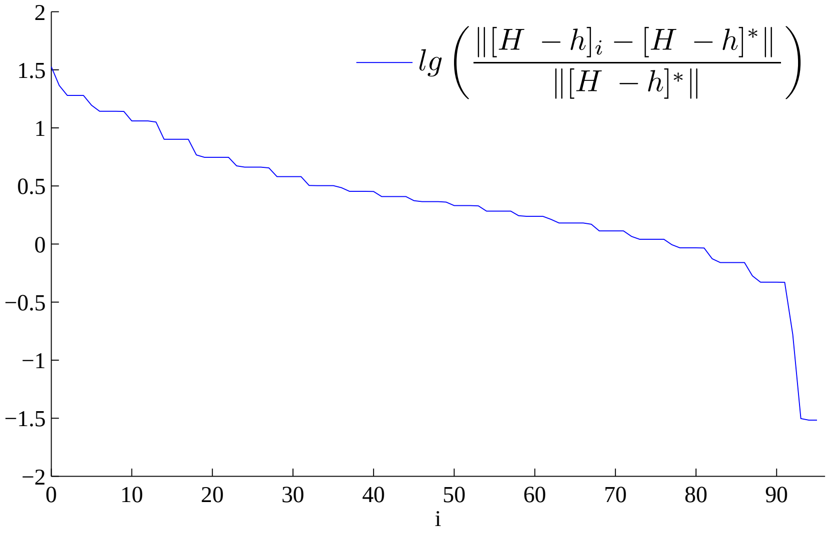

Рис. 3.37. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции $P^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

3.2.4. Постановка и решение задачи mondou2 SP^H

Корректировались только левая часть системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right) \left| \tilde{x}_i^0 = 100 \ \ \forall i \in 1, 2, \ldots 604 \right. .$$

Корректируются ненулевые элементы левой части системы ограничений, таким образом шаблон, задающий позицию корректируемых элементов

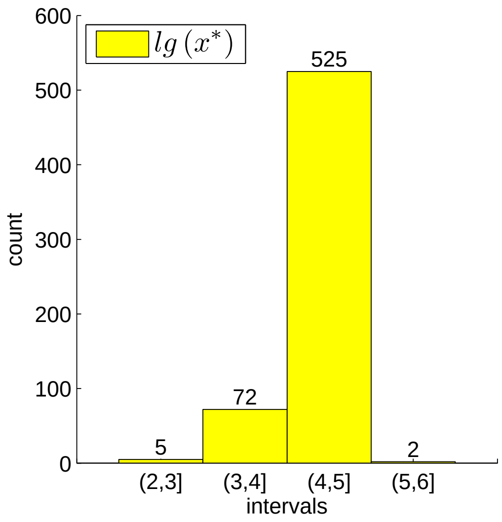

Рис. 3.38. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции $P^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

определяется аналогично задаче bgdbg1 (3.1). Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы матрицы коррекции представлена на рис. 3.39 – 3.41. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.42. Матрица коррекции представлена диаграммой рис. 3.43.

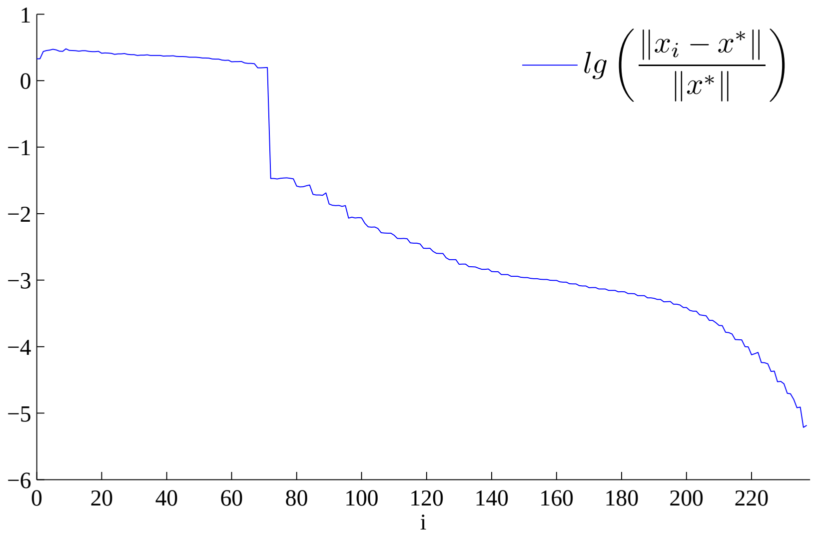

Рис. 3.39. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции SP^H задачи mondou2

Алгоритм выполнил 240 итераций за 238,166 с. Значение величины

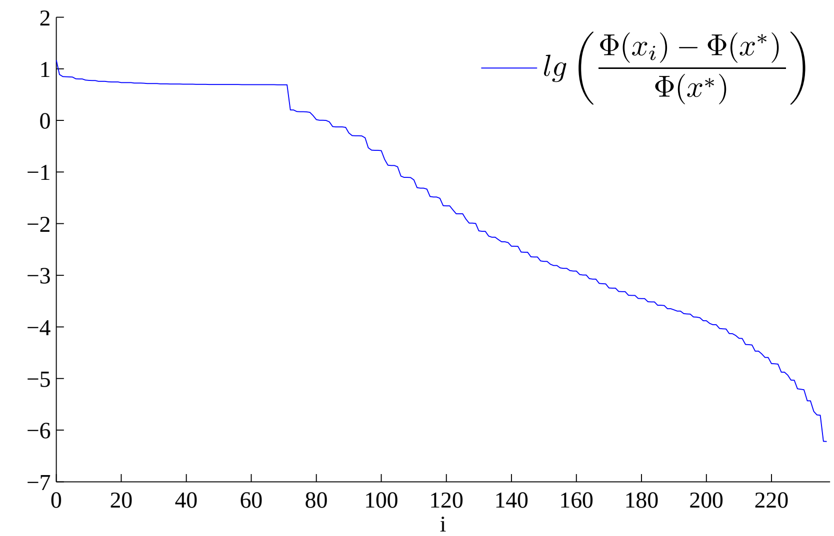

Рис. 3.40. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции SP^H задачи mondou2

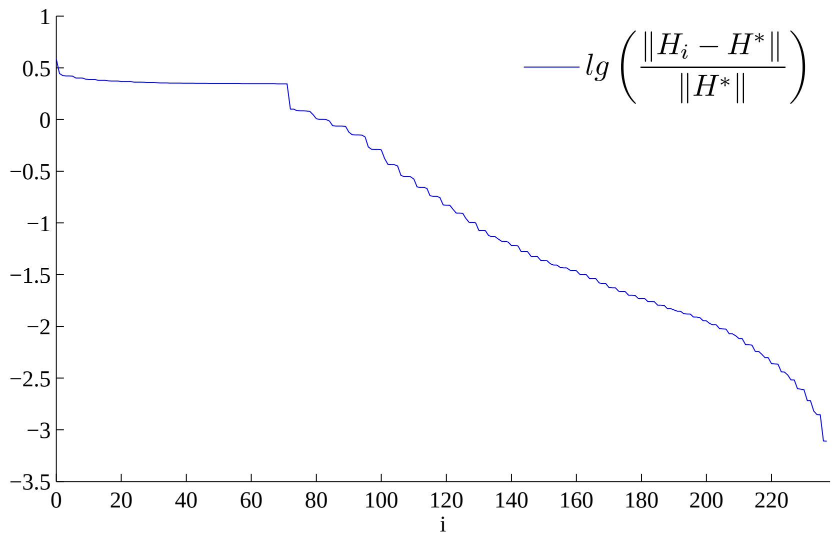

Рис. 3.41. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции SP^H задачи mondou2

целевой функции $\Phi^{SP^H}\left(\tilde{x^*}\right) = 2{,}000065097597554$. Евклидова норма матрицы коррекции $\|H\| = 1{,}414236577662149$.

3.2.5. Постановка и решение задачи mondou2 $SP^{[H\ -h]}$

Корректировались обе части системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right)\left|\tilde{x}_i^0 = 100 \;\; \forall i \in 1, 2, \ldots 604\right. .$$

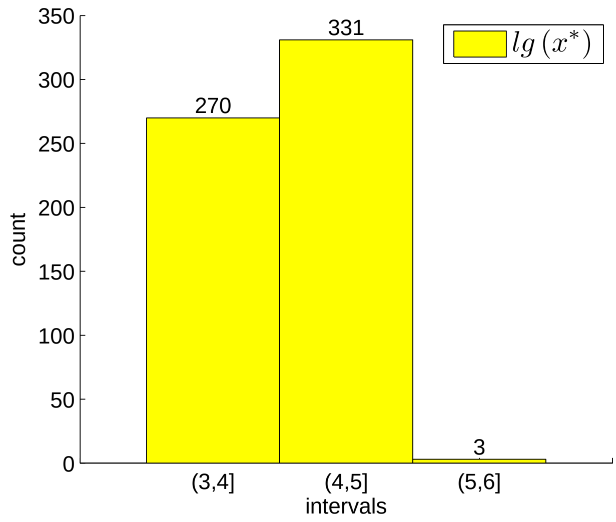

Рис. 3.42. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции SP^H задачи mondou2

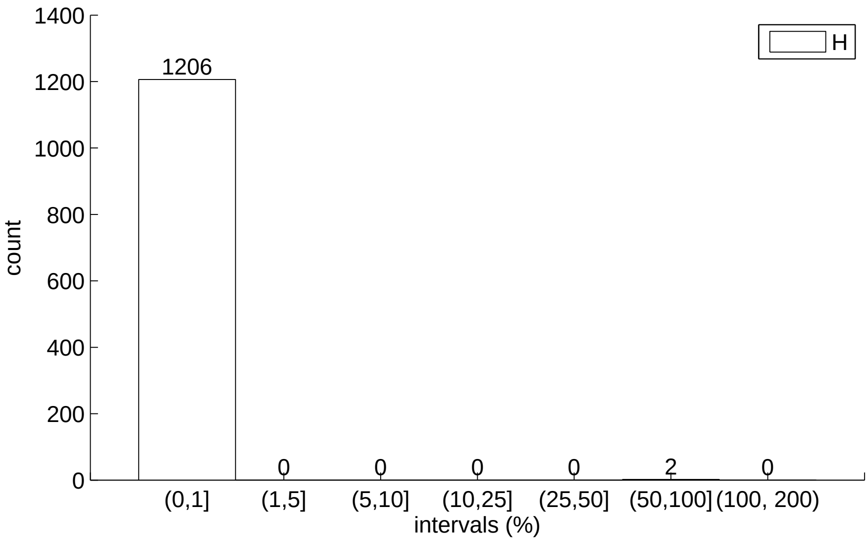

Рис. 3.43. Интервальный ряд распределения значений элементов расширенной матрицы коррекции для целевой функции SP^H задачи mondou2

Корректируются ненулевые элементы системы ограничений, таким образом шаблоны, задающие позицию корректируемых элементов определяются аналогично задаче bgdbg1 (3.1) и (3.2). Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы расширенной матрицы коррекции представлена на рис. 3.44 – 3.46. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.47. Расширенная матрица коррекции представлена диаграммой рис. 3.48.

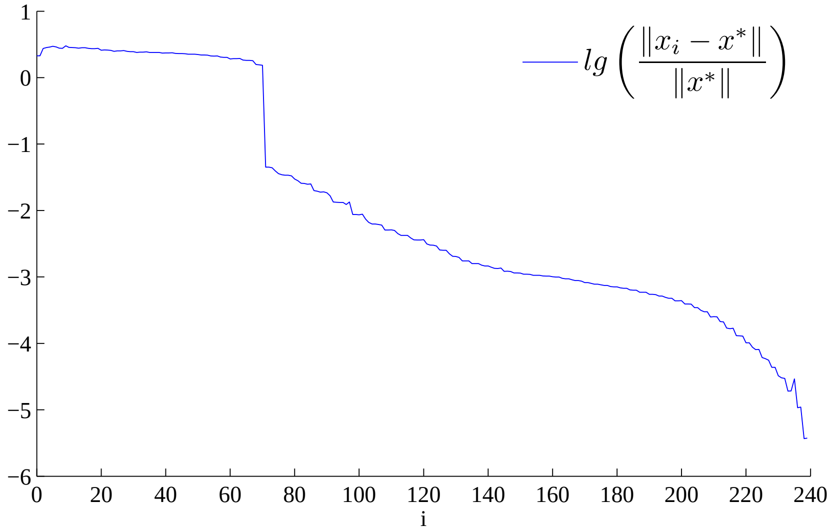

Рис. 3.44. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

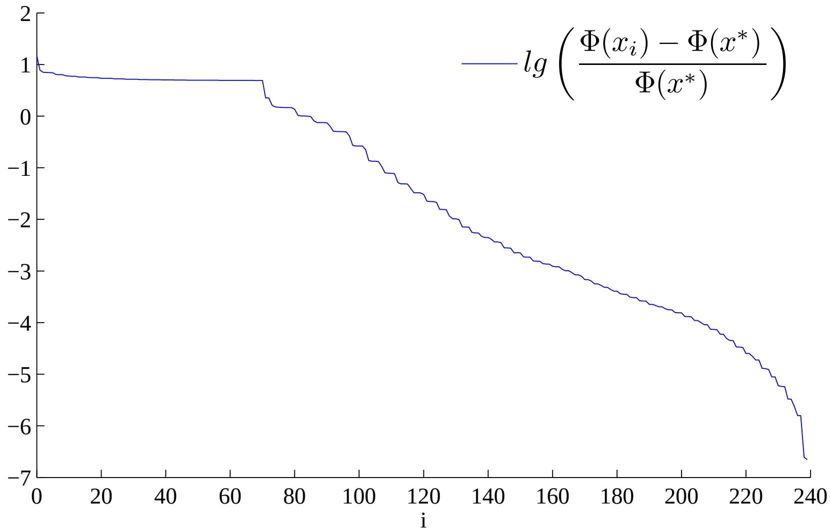

Рис. 3.45. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

Алгоритм выполнил 242 итерации за 235,778 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{SP^{[H\ -h]}}\left(\tilde{x^*}\right) = 2,000065110932379$. Евклидова норма расширенной матрицы коррекции $\|[H\ -h]\| = 1,414236582376648$.

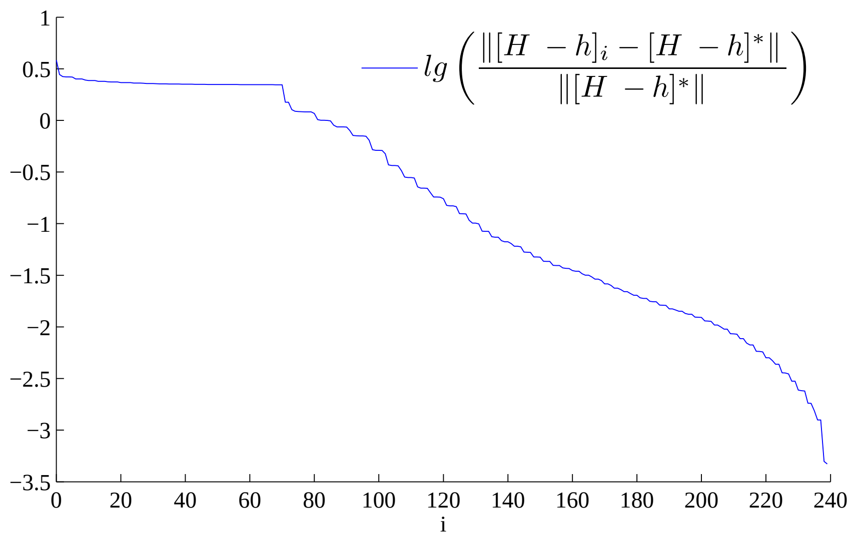

Рис. 3.46. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

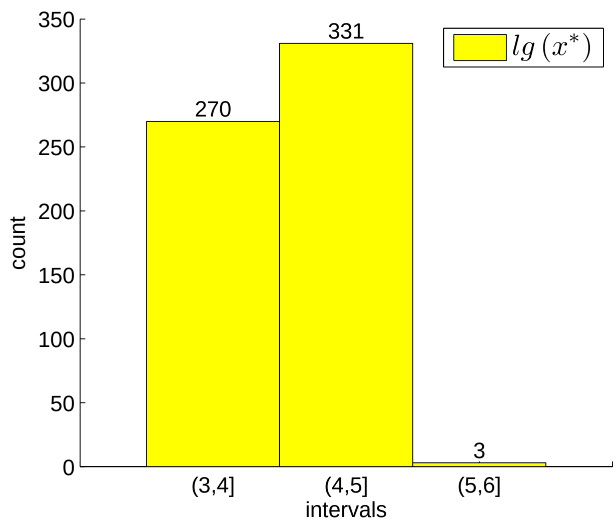

Рис. 3.47. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

3.2.6. Постановка и решение задачи mondou2 SwP^H

Корректировались только левая часть системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right) \left| \tilde{x}_i^0 = 100 \ \ \forall i \in 1, 2, \ldots 604 \right. .$$

Корректируются ненулевые элементы левой части системы ограничений, таким образом шаблоны, задающие позицию корректируемых элементов определяются (3.1) и (3.2). Весовые коэффициенты элементов задаются

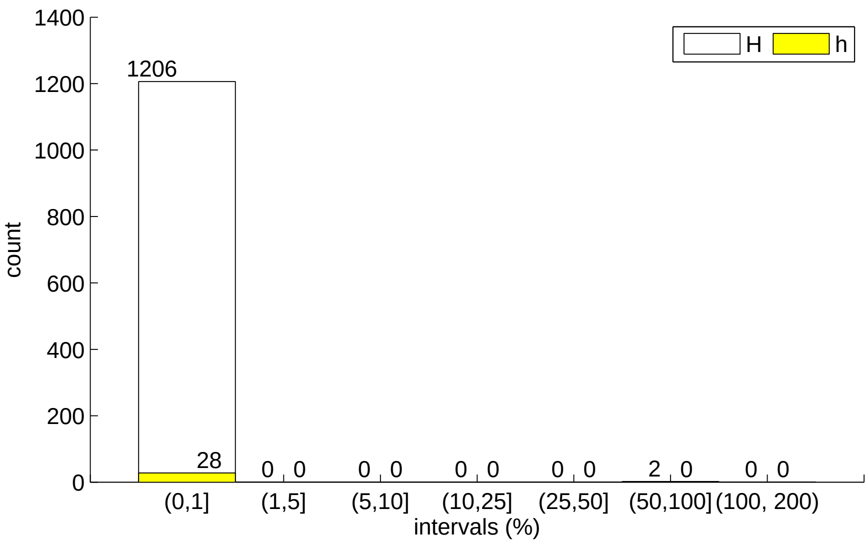

Рис. 3.48. Интервальный ряд распределения значений элементов расширенной матрицы коррекции для целевой функции $SP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

(3.3). Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы матрицы коррекции представлена на рис. 3.49 – 3.51. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.52. Матрица коррекции представлена диаграммой рис. 3.53.

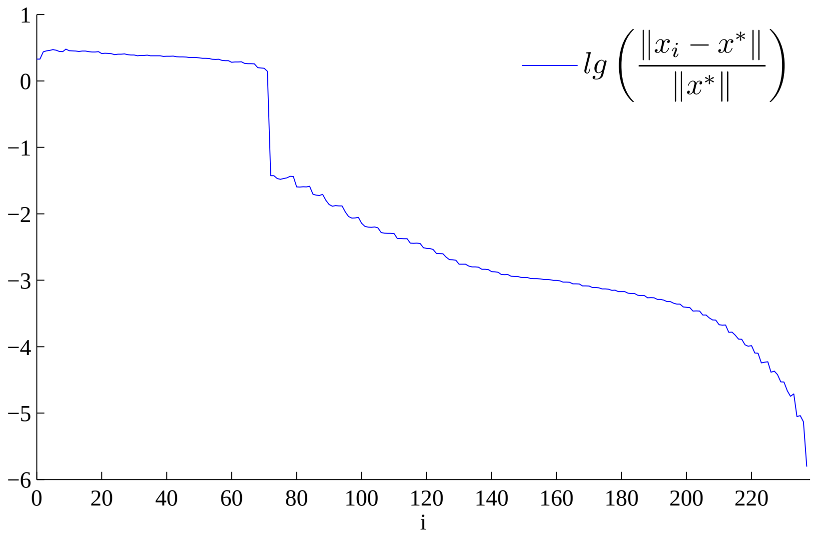

Рис. 3.49. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции SwP^H задачи mondou2

Алгоритм выполнил 240 итераций за 313,639 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{SwP^H}\left(\tilde{x^*}\right) = 2,00006509753956 2$. Евклидова норма мат-

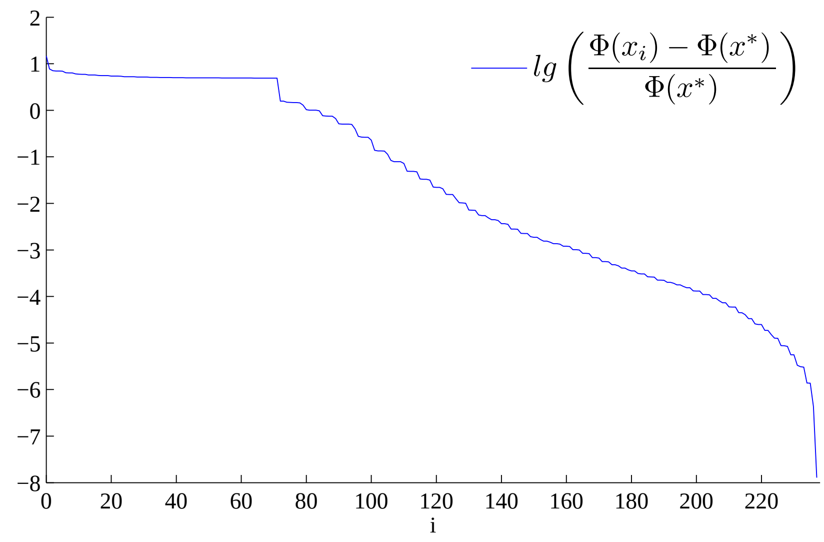

Рис. 3.50. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции SwP^H задачи mondou2

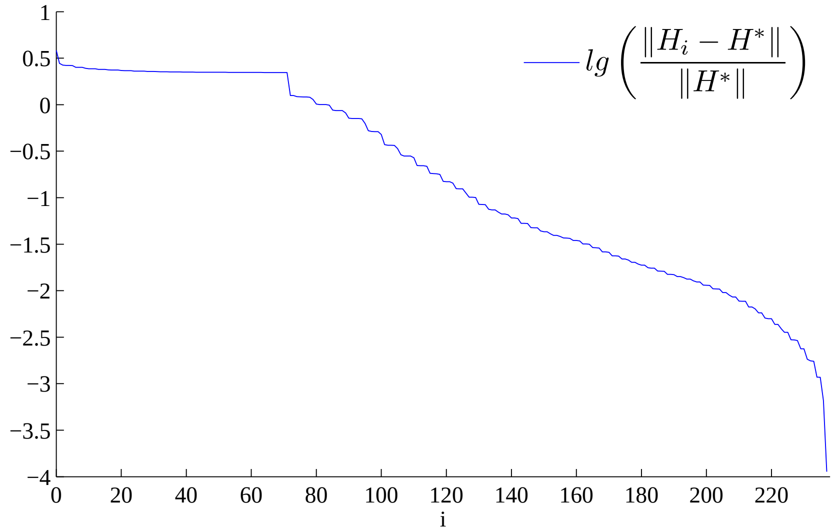

Рис. 3.51. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции SwP^H задачи mondou2

рицы коррекции $\|H\| = \ 1,414236577641648.$

3.2.7. Постановка и решение задачи mondou2 $SwP^{[H\ -h]}$

Корректировались обе части системы ограничений. В качестве начального приближения был выбран

$$\tilde{x}^0 = \left(\tilde{x}_i^0\right) \left|\tilde{x}_i^0 = 100 \ \ \forall i \in 1, 2, \ldots 604 \right. .$$

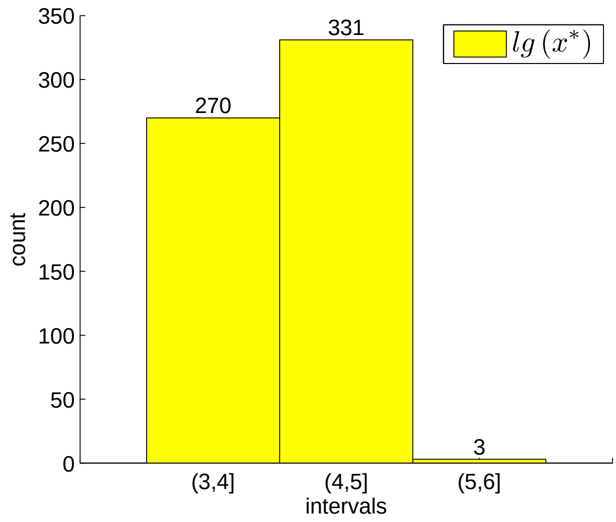

Рис. 3.52. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции SwP^H задачи mondou2

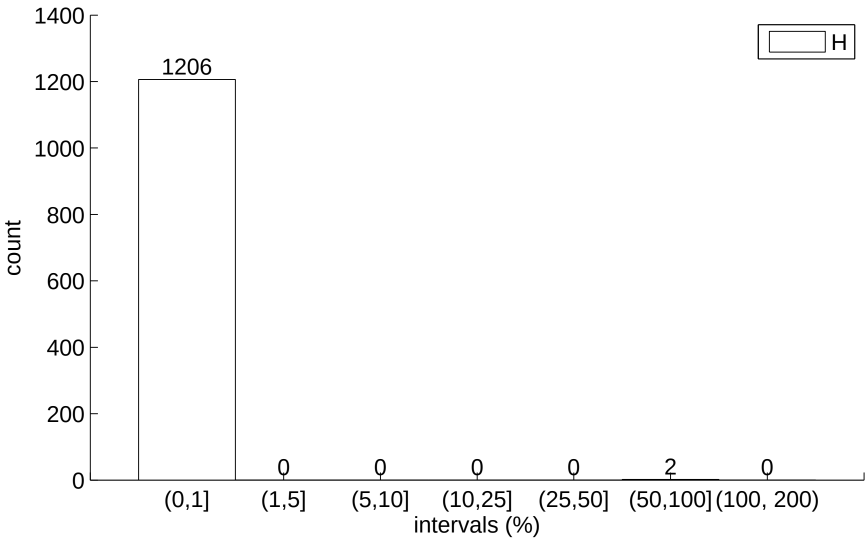

Рис. 3.53. Интервальный ряд распределения значений элементов расширенной матрицы коррекции для целевой функции SwP^H задачи mondou2

Корректируются ненулевые элементы системы ограничений, таким образом шаблоны, задающие позицию корректируемых элементов определяются (3.1) и (3.2). Весовые коэффициенты элементов задаются (3.3) и (3.4). Матричная коррекция производилась на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Сходимость аргумента, целевой функции и евклидовой нормы расширенной матрицы коррекции представлена на рис. 3.54 – 3.56. Значение аргумента после матричной коррекции представлено на рис. 3.57. Расширенная матрица коррекции представлена диаграммой рис. 3.58.

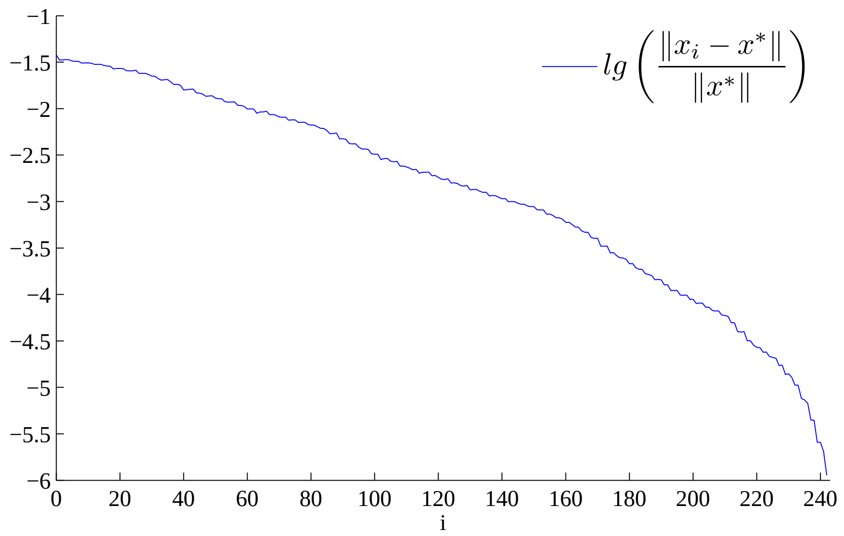

Рис. 3.54. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по аргументу для целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

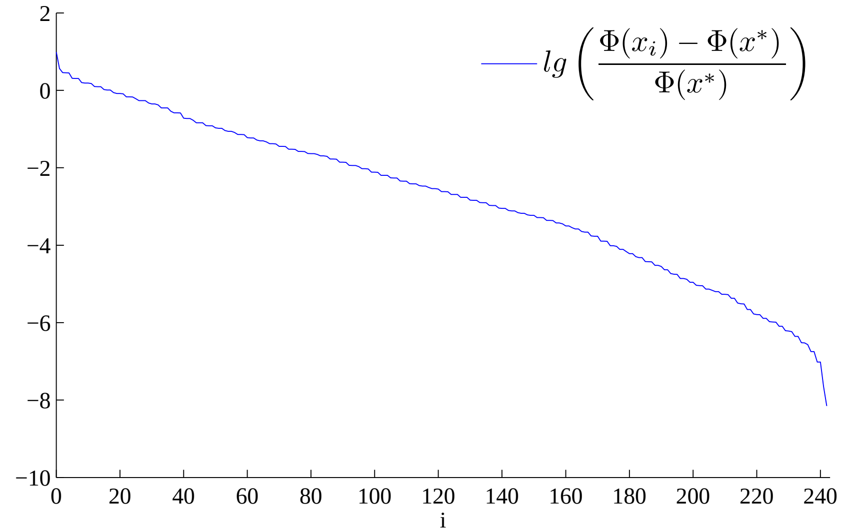

Рис. 3.55. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

Алгоритм выполнил 245 итераций за 245,485 с. Значение величины целевой функции $\Phi^{SwP^{[H\ -h]}}\left(\tilde{x^*}\right) = 2,000029805006946$. Евклидова норма расширенной матрицы коррекции $\|[H\ \ -h]\| = 1,147791392970291e\ +\ 003$.

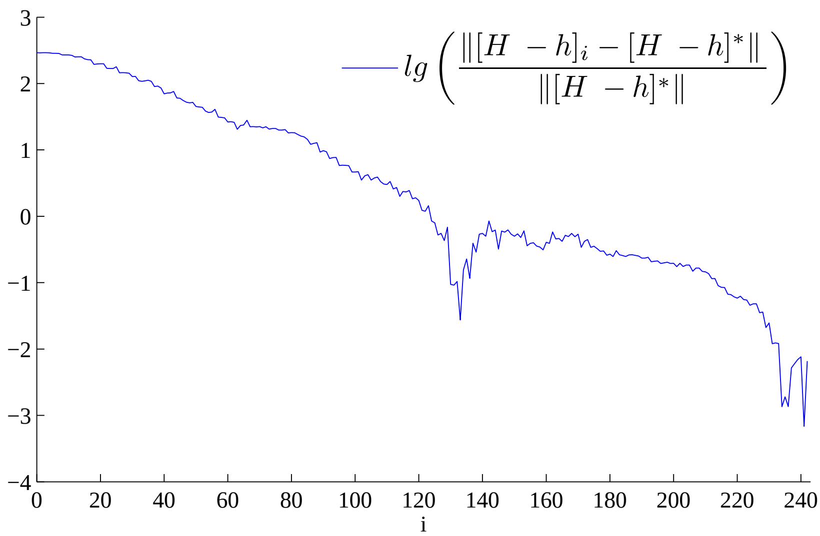

Рис. 3.56. Иллюстрация сходимости алгоритма минимизации по евклидовой норме матрицы коррекции для целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

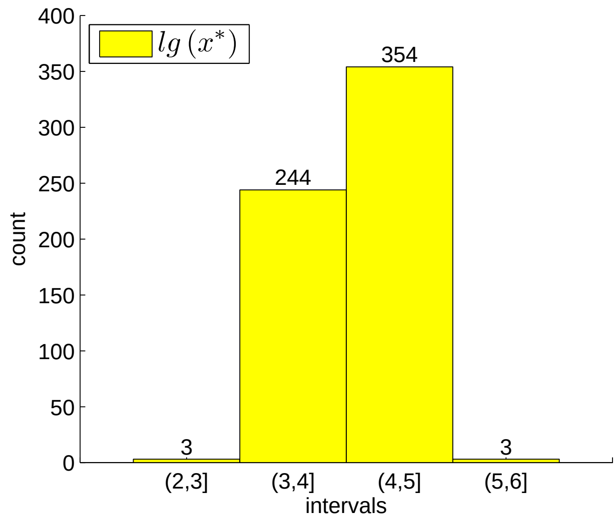

Рис. 3.57. Интервальный ряд распределения десятичных логарифмов значений элементов аргумента после коррекции целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

3.3. Анализ результатов вычислительных экспериментов

При матричной коррекции обеих задач среденей размерности в постановках bgdbg1 P^H, bgdbg1 $P^{[H\ -h]}$, mondou2 P^H, mondou2 $P^{[H\ -h]}$ была продемонстрирована работоспособность предложенного алгоритма. Так, если для задач в постановках mondou2 P^H, mondou21 $P^{[H\ -h]}$ наблюдается общая тенденция к квадратичной скорости сходимости при приближении к точке решения (рис. 3.32), то для задач в постановках: mondou2 P^H,

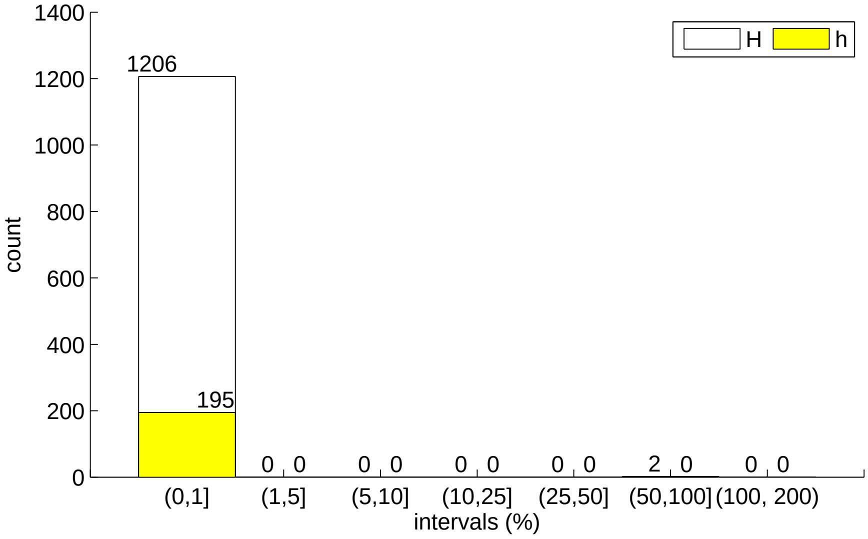

Рис. 3.58. Интервальный ряд распределения значений элементов расширенной матрицы коррекции для целевой функции $SwP^{[H\ -h]}$ задачи mondou2

mondou2 $P^{[H\ -h]}$ – квадратичная скорость сходимости вблизи точки решения очевидна (рис. 3.3). Следует отметить, что для всех задач в перечисленных выше постановках решение находится за сопоставимое с размером аргумента число шагов.

Решение задач структурной матричной коррекции в постановках bgdbg1 SP^H, bgdbg1 $SP^{[H\ -h]}$, mondou2 SP^H, mondou2 $SP^{[H\ -h]}$ является более трудоемким (рис. 3.11, 3.16, 3.40, 3.45), чем для задач бесструктурной матричной коррекции, за счет ограничений на позиции корректируемых элементов. Указанные ограничения резко сокращают количество корректируемых элементов, а это, в свою очередь, приводит к значительному росту величин элементов матрицы коррекции (рис. 3.14, 3.19, 3.43, 3.48). В результате скорректированная задача может значительно отличаться от исходной: некоторые элементы матрицы системы ограничений могут изменить знак, измениться по величине на несколько порядков. Несмотря на это, примеры mondou2 SP^H и mondou2 $SP^{[H\ -h]}$, и особенно bgdbg1 SP^H и bgdbg1 $SP^{[H\ -h]}$ демонстрируют эффективность представленного алгоритма при выполнении большого числа итераций. Так как в рамках одной итерации выполняется вычисление градиента, нахождение приблляжения к псевдообратной матрице Гессеана, поиск вдоль прямой, то важным становится требование к высокой эффективности алгоритма в части сокращения затрат машинного времени на осуществление одной итерации. Отсюда следует необходимость использования результатов теорем 1.2.8, 1.2.9, 1.4.5, 1.4.6, 1.6.5 1.6.6, а также применение метода Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно.

Решение задач структурной взвешенной матричной коррекции в постановках bgdbg1 SwP^H, bgdbg1 $SwP^{[H\ -h]}$, mondou2 SwP^H, mondou2 $SwP^{[H\ -h]}$, несмотря на дальнейшее усложнение вида целевой функции и ее производной, демонстрирует эффективность алгоритма Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно при достаточно большом количестве итераций, а также большой потенциал для возможных модернизаций. Причем, полученные матрицы коррекции состоят из элементов с меньшим относительным отклонением от элементов исходных матриц систем ограничений (рис. 3.24, 3.29, 3.53, 3.58) чем матрицы коррекции задач bgdbg1 SP^H, bgdbg1 $SP^{[H\ -h]}$, mondou2 SP^H, mondou2 $SP^{[H\ -h]}$. Таким образом, указанный подход позволяет решить проблему возникновения скорректированной задачи, принципиально отличной от исходной, за счет малой по абсолютной (но значительной по относительной) величине коррекции небольших по модулю элементов.

Заключение

В работе рассмотрены задачи оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственной задачи ЛП первого рода, которая, помимо несобственности, может обладать дополнительным свойством, а именно, определенной структурой, связанной с запретом изменения произвольных элементов. Все классы задач рассматривались в двух постановках: коррекции подвергается матрица коэффициентов системы ограничений (матрица A), или расширенная матрица ($[A\ b]$).

Основные выводы:

1. Теоретически обосновано достаточное условие существования решения задачи матричной коррекции несобственной задачи линейного программирования 1-го рода, выражающееся в существовании решения задачи матричной коррекции допустимой области указанной задачи. Рассматриваются следующие разновидности матричной коррекции задач ЛП:

– без структурных ограничений по минимуму евклидовой нормы;

– со структурными ограничениями по минимуму евклидовой нормы;

– со структурными ограничениями по минимуму взвешенной евклидовой нормы.

2. Разработан алгоритм оптимальной матричной коррекции данных несобственной задачи ЛП первого рода, включающий в себя

– использование минимального по евклидовой или взвешенной евклидовой норме матричного решения обратной задачи линейного программирования;

– алгоритмический учет неотрицательности части переменных;

– использование штрафных функций в случае запрета коррекции отдельных строк корректируемой задачи;

– редукцию задачи матричной коррекции данных двойственной пары несобственных задач линейного программирования к вспомогательной задаче безусловной минимизации;

– применение расчетной схемы Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно с использованием аналитического представления производной целевой функции задачи оптимальной матричной коррекции данных несобственной задачи ЛП первого рода с возможными ограничениями в виде некоторой совокупности фиксированных элементов.

3. В результате тестирования на несобственных задачах линейного программирования средней размерности из репозитория netlib/lp/infeas показана работоспособность полученного алгоритма.

Литература

1. *Астафьев Н.Н.* Некоторые элементарные преобразования двойственных задач линейного программирования. Попарная альтернативность // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики: сб. науч. тр. - Новосибирск: Наука, 2003. - С. 46-55.

2. *Астафьев Н.Н.* Одновременная регуляризация пары двойственных задач линейного программирования // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всероссийской конф. - Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004. - С. 250-251.

3. *Астафьев Н.Н.* О мере несовместности системы линейных уравнений с требованием неотрицательности // Дискретный анализ и исследование операций: М-лы Российской конф. - Новосибирск: Изд-во Ин-та Математики СО РАН, 2004. - С. 120.

4. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. - М.: Наука, 1982. 134 с.

5. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. - М.: Наука, 1991. 448 с.

6. *Банди Б.* Основы линейного программирования. М.: Радио и связь, 1989. 176 с.

7. *Баркалова О.С.* Коррекция несобственных задач линейного программирования в канонической форме по минимаксному критерию // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012. - т. 52. - №12. - С. 1624-1634.

8. *Баркалова О.С.* Коррекция несобственных задач классификации по минимуму различных видов полиэдральных норм // Качество. Инновации. Образование. - М.: Европейский Центр по Качеству, 2013. - №2. - С. 39-43.

9. *Баркалова О.С.* Применение методов коррекции по минимуму полиэдральных норм к задачам регрессии // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. - М.: МЭСИ, 2013. Ц №2. - С. 98-102.

10. *Баркалова О.С.* Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования по минимуму полиэдральных норм и их применение в процессах обработки информации: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. - М., 2013.

11. *Барсов А.С.* Линейное программирование в технико-экономических задачах. М.: Наука, 1964. 280 с.

12. *Башхиян Б.Ц.* Гарантированные характеристики точности линейного оценивания, их свойства и применение. Препринт Института космических иследований №1332, - М: АН СССР, 1987.

13. *Березнев В.А.* Математические методы планирования производственной программы предприятий легкой промышленности. М.: Легкая индустрия, 1980. 144 с.

14. *Браверман Э.М.* Математические модели планирования и управления в экономических системах. М.: Наука, 1976. 368 с.

15. *Вапник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. - М.: Наука, 1979. 448 с.

16. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов. Статистические проблемы обучения, 1974. 415 с.

17. *Васильев Ф.П.* К вопросу устойчивости методов регуляризации в линейном программировании // Вестник Московск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн., 1998. №3. - С. 19-23.

18. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. - М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2003. 352 с.

19. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю., Морозов В.А.* Оценка скорости сходимости метода невязки для задач линейного программирования с

приближенными данными // Ж. вычислит. матем. и матем. физики, 1990. Т. 30. №8. - С. 1257-1262.

20. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю., Морозов В.А.* Метод поточечной невязки для решения некоторых задач линейной алгебры и линейного программирования. Сб. работ НИВЦ МГУ «Информатика и вычислительные системы». - М.: Изд-во Московск. ун-та, 1993. С. 46-65.

21. *Васильев Ф.П.* О регуляризации некорректных задач миниминимизации на множествах, заданных приближенно. - Ж. вычислит. матем. и матем. физики, 1980. Т. 20. №1. С. 38-50.

22. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов. 2-е. изд., перераб. и доп. - М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 552 с.

23. *Ватолин А.А.* Метод апроксимации несобственной задачи выпуклого программирования. В кн.: Несобственные задачи оптимизации. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. - С. 67-74.

24. *Ватолин А.А.* Об аппроксимации несобственных задач линейного программирования.- Деп. в ВИНИТИ, №3501-84 Деп., 1984. - 31 с.

25. *Ватолин А.А.* Апроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1984. Т. 24. №12. - С. 1907-1908.

26. *Ватолин А.А.* Методы анализа несобственных задач математического программирования: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09.- Свердловск, 1984.

27. *Ватолин А.А.* Множества разрешимости и коррекции седловых функций и систем неравенств. Препринт. Свердловск: ИММ Уро РАН, 1989. - 90 с.

28. *Ватолин А.А.* Об одной общей реализации схемы двойственности для несобственной задачи линейного программирования. В кн.: Противоречивые модели оптимизации. - Свердловск: УНЦ РАН, 1987. - С. 21-27.

29. *Ватолин А.А.* О коррекции расширенной матрицы несовместной системы линейных неравенств и уравнений // Комбинаторные, алгебраические и вероятностные методы дискретного анализа. - Горький, 1989. - С. 40-54.

30. *Ватолин А.А.* Несобственные задачи математического программирования и методы их коррекции: Дисс. ... д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.09.- Екатеринбург, 1992.

31. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. - 320 с.

32. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. - 552 с.

33. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: Иностр. литер., 1963. 418 с.

34. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Модифицированная функция лагранжа для задач линейного программирования // Известия высших учебных заведений. Математика. 1997. №12. С. 45-48.

35. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Применение теорем об альтернативах к нахождению нормальных решений линейных систем // Известия высших учебных заведений. Математика. 2001. №12. С. 21-31.

36. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Регуляризация и нормальные решения систем линейных уравнений и неравенств // Труды института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. №2. С. 113-121.

37. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №3. С. 354-375.

38. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н.* Применение метода ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. №9. С. 1564-1573.

39. *Головкин Б.А.* Машинное распознавание и линейное программирование. Под ред. Н. А. Лившица. Серия: Библиотека технической кибернетики. М.: Сов. радио. 1973. 99 с.

40. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. - 548 с.

41. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 384 с.

42. *Горелик А.Л., Гуреевич И.Б. Скрипкин В.А.* Современное состояние проблемы распознавания. Некоторые аспекты. М.: Радио и связь, 1985. 162 с.

43. *Горелик В.А.* Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2001. Т.41. №11. С. 1697-1705.

44. *Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В.* Минимаксная матричная коррекция несовместимых систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Изв. РАН ТиСУ, 2006. №5. С. 52-62.

45. *Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В.* Идентификация сигнала в виде суммы экспонент с помощью методов матричной коррекции несовместных линейных систем с матрицами Тёплица // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. - М: ВЦ РАН, 2003. С.74-88.

46. *Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В.* Матричная коррекция несовместных линейных систем с матрицами Тёплица (Ганкеля) // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. - М: ВЦ РАН, 2003. С. 41-73.

47. *Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В.* Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2005. Т. 12. №2. С. 3-22.

48. *Горелик В.А., Ерохин В.И.* Интервальная коррекция непродуктивной матрицы прямых затрат в линейной модели межотраслевого баланса // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. - М.: ВЦ РАН, 2001. - С.51-56.

49. *Горелик В.А., Ерохин В.И.* Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы. М.: ВЦ РАН, 2004. - 193 с.

50. *Горелик В.А., Ерохин В.И.* Оптимальная (по минимуму полиэдральной нормы) матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. - М: ВЦ РАН, 2004. С. 35-63.

51. *Горелик В.А., Ерохин В.И., Муравьева О.В.* Некоторые задачи аппроксимации матриц коэффициентов несовместных систем линейных уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2001. - С.57-88.

52. *Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В.* Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений. М.: ВЦ РАН, 2006. - 150 с.

53. *Горелик В.А., Золтоева И.А.* Матричная коррекция несовместных линейных систем с разреженными матрицами // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов - М.: ВЦ РАН, 2006. С.47-57.

54. *Горелик В.А., Золтоева И.А., Печенкин Р.В.* Методы коррекции несовместных линейных систем с разреженными матрицами // Дискретный анализ и исследование операций. Июль – декабрь 2007. Сер 2. Том 14, №2. С. 62-75.

55. *Горелик В.А., Муравьева О.В., Золтоева И.А.* Некоторые методы коррекции экспертных оценок задачи многокритериальной оптимизации

// Некоторые вопросы математики, информатики и методики их преподавания - МПГУ, 2006. С. 55-60.

56. *Горелик В.А., Ибатуллин Р.Р.* Задача нахождения интерполяционного полинома минимальной степени при наличии ограничений на его коэффициенты. // Тезисы докладов 1-й Московской конференции Декомпозиционные методы в математическом моделировании.- М.:ВЦ РАН, 2001. С.34-35

57. *Горелик В.А., Ибатуллин Р.Р.* Correcting the system of constaints of a linear program with the aid of minima* criterion. // Тезисы докладов 3-й Московской международной конференции по исследованию операций. - М.: ВЦ РАН, 2001. С.42

58. *Горелик В.А., Ибатуллин Р.Р.* Коррекция системы ограничений задачи линейного программирования с минимаксным критерием. //Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. - М: ВЦ РАН, 2001, С. 89-107.

59. *Горелик В.А., Кондратьева В.А.* Параметрическое программирование и несобственные задачи линейной оптимизации. Сб. работ ВЦ РАН «Моделирование, декомпозиция и оптимизация». - М.: Изд-во ВЦ РАН, 1999. С. 57-82.

60. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Необходимые и достаточные условия существования минимальной матрицы в задаче коррекции несовместной системы линейных уравнений. // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. - М.: ВЦ РАН, 2000. С. 14-20.

61. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Задача аппроксимации с коррекцией всех данных. // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. - М.: ВЦ РАН, 2000. С. 21-32.

62. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Коррекция несовместной системы линейных уравнений с дополнительными ограничениями // Декомпо-

зиционные методы в математическом моделировании. Тез. докл. 1-й Московской конференции. - М.: ВЦ РАН, 2001. - С.36-37

63. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Методы коррекции данных в задаче распознавания образов // Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике. Тез. докл. 2-й Московской конференции. - М.: ВЦ РАН, 2004. - С.39.

64. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Устойчивость решения системы линейных неравенств // Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике. Тез. докл. 2-й Московской конференции. - М.: ВЦ РАН, 2004. - С.40.

65. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Матричная коррекция данных в задачах оптимизации и классификации // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. - М.: ВЦ РАН, 2004. - С.94-120.

66. *Горелик В.А., Муравьева О.В.* Методы коррекции несобственных задач и их применение к проблемам оптимизации и классификации. - М.: ВЦ РАН, 2012. - 148 с.

67. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966. 600 с.

68. *Дмитриев А.Н. Журавлев Ю.И. Кренделев Ф.П.* О математических принципах классификации предметов и явлений // Дискретный анализ: Сб. ст. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1966. Вып. 7. - С. 3-15.

69. *Дуда Р., Харт П.* Распознавание образов и анализ сцен. Издательство «Мир», Москва, 1976, 511 с.

70. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Двойственные барьерно-проективные и барьерно-ньютоновские методы для линейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1994. Т. 36. №7. С. 30.

71. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. - М.: Наука, 1982. 432 с.

72. *Еремин И.И.* Двойственность в линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. 179 с.

73. *Еремин И.И.* Двойственность для несобственной задачи линейного программирования и методы их коррекции. В кн.: Несобственные задачи оптимизации. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. - С. 3-10.

74. *Еремин И.И.* Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования и методы их коррекции // Изв. АН СССР. Сер. Техн. киберн. - 1983, №1. - С. 20-32.

75. *Еремин И.И.* Двойственность и апроксимация для несобственных задач математического программирования //для несобственных задач линейного и выпуклого программирования и методы их коррекции // Изв. АН СССР. Сер. Техн. киберн. - 1987, №1. - С. 70-81.

76. *Еремин И.И.* Вопросы двойственности для несобственной задачи многокритериальной линейной оптимизации. В кн.: Исследования по несобственным задачам оптимизации. - Свердловск; УНЦ АН СССР, 1988. С. 27-33.

77. *Еремин И.И.* О системах неравенств с выпуклыми функциями в левых частях. Известия АН СССР, серия математическая, 30 (1966), стр. 265-278.

78. *Еремин И.И., Астафьев Н.Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. - М.: Наука, 1976. - 192 с.

79. *Еремин И.И.* Противоречивые модели оптимального планирования. - М.: Наука, 1988. - 160 с.

80. *Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. - М.: Наука, 1983. - 336 с.

81. *Еремин И.И.* Противоречивые модели планирования и управления. В кн.: Противоречивые модели оптимизации. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. - С. 28-37.

82. *Еремин И.И., Попов Л.Д.* Фейеровские итерационные процессы для несовместных систем линейных неравенств и несобственных задач линейного программирования // Дискретный анализ и исследование операций: М-лы Российской конф. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2002. - С. 46-50.

83. *Еремин И.И., Соколинская И.М.* Фейеровские итерационные процессы для несобственных задач линейного программирования // Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр. - Омск: Омск. гос. ун-т. - 2002. - Вып. 9. - С. 10-26.

84. *Еремин И.И., Попов Л.Д.* Фейеровские итерационные процессы применительно к несовместным системам линейных неравенств и несобственным задачам линейного программирования // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики: сб. научн. тр. - Новосибирск: Наука, 2003. - С. 46-55.

85. *Ерохин В.И.* Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2007. Т.47. №4. С. 587-601.

86. *Ерохин В.И.* Матричная коррекция несобственных задач линейного программирования по минимуму евклидовой нормы с произвольными весами и фиксированными элементами // Математическое программирование: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2-8 июля 2005 года. Том I: Иркутск, ИСЭМ СО РАН. - 2005. С. 105-110.

87. *Ерохин В.И.* Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования : Дис. д-ра физ.-мат. наук. Москва, 2005 346 с.

88. *Ерохин В.И., Красников А.С.* Использование метода Марквардта для матричной коррекции несобственных задач линейного программирования // Материалы ежегодной научной конференции преподавателей и студентов. Работы преподавателей. / Под ред. Н.М. Муравьевой. - Борисоглебск: ГОУ ВПО «БГПИ», 2009. С. 143 - 146.

89. *Ерохин В.И., Красников А.С.* Матричная коррекция блочных несобственных задач линейного программирования // Совершенствование преподавания физико-математических дисциплин в педвузе и школе: Сб. науч. тр. - Вып. 4. - Борисоглебск: Борисоглебский госпединститут, 2007. С. 75 - 87.

90. *Ерохин В.И., Красников А.С.* Матричная коррекция взаимодвойственных задач линейного программирования с условием неположительности матрицы коррекции // Материалы ежегодной научной конференции преподавателей и студентов БГПИ по итогам НИР за 2006 год. Естественные науки / Под ред. А.Ф.Тараканова. - Борисоглебск: ГОУ ВПО «БГПИ», 2007. С.19-21.

91. *Ерохин В.И., Красников А.С.* Матричная коррекция двойственной пары блочных несобственных задач линейного программирования // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Материалы конференции (Владивосток, 7 - 14 сентября 2007). - Новосибирск: Изд-во Института математики, 2007. С. 104.

92. *Ерохин В.И., Красников А.С.* Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования с блочной структурой // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 2008. Т. 48. №1. С. 80-89.

93. *Ерохин В.И., Красников А.С.* Матричная коррекция двойственной пары задач линейного программирования со специальной структурой // Информационные и коммуникационные технологии в образовании. Сборник материалов VII Всероссийской научно-практической конференции. - Борисоглебск: ГОУ ВПО «БГПИ», 2006. С. 110-114.

94. *Ерохин В.И., Красников А.С.* Матричная коррекция несобственных задач линейного программирования с теплицевой матрицей ограничений // Информационные и коммуникационные технологии в образовании. Сборник материалов IX Международной научно-практической конференции. - Борисоглебск: ГОУ ВПО «БГПИ», 2008. С. 194-199.

95. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Квазиньютоновские алгоритмы матричной коррекции несобственных задач линейного программирования с произвольным множеством корректируемых коэффициентов // 970. Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). 2014. №23. С. 87-92.

96. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Квазиньютоновский алгоритм структурной матричной коррекции несобственных задач линейного программирования с разреженными матрицами коэффициентов // Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». Свидетельство о регистрации электронного ресурса №19696. 21 ноября 2013 г. (государственный информационный фонд неопубликованных документов ФНГУ ЦИТИС №50201351112).

97. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Коррекция несобственных задач линейного программирования с разреженными матрицами коэффициентов // Материалы научной конференции, посвященной 185-й годовщине образования Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). Санкт-Петербург, Издательство Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). 2013. С 264-265.

98. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Минимальное матричное решение обратной задачи линейного программирования с использованием векторизации // Информационные и коммуникационные технологии в образовании. Сборник материалов X Международной

научно-практической конференции в 2-х томах. Т. 2. Борисоглебск: ГОУ ВПО БГПИ, 2009. С. 207-211.

99. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Минимальные по евклидовой норме матричные коррекции задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2012. №2. С. 11-24.

100. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений // Труды института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. №2. С. 144-156.

101. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* О разрешимости задачи линейного программирования при матричной коррекции ее допустимой области // VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013): Москва, 15 – 19 октября 2013 г.: Труды: Том 2 - М.: МАКС Пресс, 2013. С. 37-39.

102. *Ерохин В.И., Хвостов М.Н.* Достаточные условия разрешимости несобственных задач линейного программирования после матричной коррекции их допустимой области // Материалы научно-практической конференции, посвященной 184-й годовщине образования Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). Санкт-Петербург, Издательство Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). 2012. С 169-170.

103. *Журавлев Ю.И., Гуревич И.Б.* Распознавание образов и распознавание изображений // Распознавание. Классификация. Прогноз. Математические методы и их применения. Вып. 2. М.: Наука, 1989. 72 с.

104. *Журавлев Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В.* Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. - М.: Фазис, 2006. 176 с.

105. *Журавлев Ю.И.* Экстремальные задачи, возникающие при обосновании эвристических процедур // Проблемы прикладной математики и механики. - М,: Наука, 1971. С. 67-75.

106. *Золтоева И.А.* Методы коррекции данных для формализации и решения задач многокритериальной оптимизации: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. - М., 2006.

107. *Зуховицкий С.И., Радчик И.А.* Сатематические методы сетевого планирования. М.: Наука, 1965. 296 с.

108. *Ибатуллин Р.Р.* Методы коррекции и аппроксимации несобственных задач оптимизации и управления с минимаксным критерием: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. - М., 2002.

109. *Канторович Л.В.* Математические методы в организации и планировании производства. Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1939. 68 с.

110. *Канторович Л.В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 347 с.

111. *Кибзун А.И., Нурминский Е.А., Хачай М.Ю.* Современные проблемы математического программирования. // Автоматика и телемеханика. 2012. №2. С. 3-4.

112. *Кондратьева В. А.* Hyperbolic transformations in solution of LP problem with empty set. Н Тезисы докладов 2-й международной конференции по исследованию операций. - М.: ВЦ РАН, 1998. С.17.

113. *Кондратьева В.А.* Использование гиперболических преобразований для решения задачи линейного программирования с пустым множеством допустимых планов. // Научные труды Московского педагогического государственного университета. Серия: Естественные науки. - М.: Прометей, 1999. С. 8-9.

114. *Кондратьева В.А.* Несобственные задачи линейной оптимизации и параметрическое программирование: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. - М., 2000.

115. *Красников А.С., Ерохин В.И.* Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования с блочной структурой // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й Региональной молодежной конференции. - Екатеринбург: УрО РАН, 2007. - С 330-334.

116. *Красников А.С.* Необходимое условие разрешимости проблемы оптимальной матричной коррекции двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Научное обозрение, 2009, №4. - С. 39-42.

117. *Красников А.С.* О матричном решении обратной задачи линейного программирования с минимальной евклидовой нормой // Научное обозрение, 2009, №4. - С. 37-39.

118. *Красников А.С.* Матричная коррекция противоречивых данных в линейных оптимизационных моделях: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. - Борисоглебск, 2010. - 180 С.

119. *Ле Н.З.*Ле Ньят Зюи. Метод декомпозиции в задачах коррекции несовместных систем линейных неравенств с матрицами блочной структуры. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. №10. С. 1796-1805.

120. *Ле Н.З.*Коррекция несовместных систем линейных неравенств с матрицами блочной структуры по минимаксному критерию // Сборник материалов Всероссийской конференции «Математика, информатика и методика их преподавания» - М.: МПГУ, 2011. - С 66-68.

121. *Ле Н.З.*Ле Н.З. Коррекция несовместных систем линейных неравенств с матрицами блочной структуры по минимаксному критерию // Вестник МГУ. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2011. Т. 4. С. 18-25.

122. *Ле Н.З.* Методы коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств с блочной структурой и их применение к задачам

обработки информации Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. - М., 2012.

123. *Лидов М.Л.* К оприорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космические исследования, 1964. Т.2. №5. С. 713-718.

124. *Лидов М.Л., Бахшиян Б.Ц., Матасов А.И.* Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания (обзор). // Космич. исслед. 1991. Т. 29. №5. С. 659-684.

125. *Лидов М.Л., Матасов А.И.* Об одном обобщении задачи о «наихудшей корреляции» // Космические исследования, 1989. Т.27. №3. С. 454-456.

126. *Лотов А.В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука. 1984. 392 с.

127. *Мазуров Вл.Д., Казанцев В.С., Белецкий Н.Г., Кривоногов А.И. Смирнов А.И.* Вопросы обоснования и применения комитетных алгоритмов распознавания // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение: Ежегодник / Под род. Ю.И. Журавлева. М.: Наука, 1988. Вып.1. С. 114-148.

128. *Мазуров Вл.Д.* Метод допустимых коррекций. В кн.: Несобственные задачи оптимизации. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. - С. 11-22.

129. *Мазуров Вл.Д.* Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. - М.: Наука, 1990. - 246 с.

130. *Мазуров Вл.Д., Хачай М.Ю.* Использование моделей математической экономики для исследования экономической динамики России // Вестник Уральского института экономики, управления и права. 2010. №2-11. С. 111-123.

131. *Матасов А.И.* Введение в теорию гарантирующего оценивания. Учебное пособие – Москва: МАИ, 1999.- 80 с.

132. *Матросов В.Л., Горелик В.А., Муравьева О.В.* Методы коррекции и аппроксимации несобственных задач линейного программирования и

их приложения // Научные труды Московского педагогического государственного университета. Серия: Естественные науки. - М.: Прометей, 2002. - С. 21-33.

133. *Матросов В.Л., Горелик В.А., Жданов С.А., Муравьева О.В.* Коррекция данных в задаче классификации // Математические методы распознавания образов: Доклады XI Всероссийской конф. (ММРО-11). - М.: ВЦ РАН, 2003. - С. 136-137.

134. *Матросов В.Л., Горелик В.А., Жданов С.А., Печенкин Р.В.* Применение техники регуляризации и методов решения несовместных систем со структурными ограничениями в задаче Ланшоца // Научные труды Московского педагогического государственного университета. Серия: Естественные науки. - М.: Прометей, 2005. - С. 17-23.

135. *Муравьева О.В.* Возмущение и коррекция систем линейных неравенств // Управление большими системами. 2010. №28 С. 40-57.

136. *Муравьева О.В.* Исследование параметрической устойчивости решений систем линейных неравенств и построение разделяющей гиперплоскости // Дискретный анализ и исследование операций, 2014. Т.21. №3(117). - С. 53-63.

137. *Муравьева О.В.* Матричная коррекция данных для несовместных систем линейных уравнений и ее применение в задачах оптимизации и классификации: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. - М., 2002.

138. *Муравьева О.В.* Применение методов матричной коррекции к решению задач линейной аппроксимации // Преподаватель XXI век. 2009. №2-2 С. 199-203.

139. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – 2-е изд., исп. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 176 с.

140. *Печенкин Р.В.* Методы коррекции несовместных систем со структурными ограничениями: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. - М., 2006.

141. *Попов Л.Д.*О методах аппроксимации для несобственной задачи выпуклого программирования второго и третьего рода. В кн.: Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. - С. 89-107.

142. *Попов Л.Д.* Об одном методе декомпозиции в несобственном линейном программировании. В кн.: Нерегулярная двойственность в математическом программировании. - Свердловск: УрО РАН, 1990. - С. 42-45.

143. *Попов Л.Д.* Несобственные задачи оптимизации, методы их оптимальной коррекции и приложения. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.09. - Новосибирск, 1997.

144. *Попов Л.Д.* Симметричные системы и Фейеровские процессы для несобственных задач линейного программирования // Математическое программирование: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». - Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2005. - Т.1. - С. 141-146.

145. *Рейклетис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике: В 2-ч кн. Кн. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 349 с., ил.

146. *Рудаков К.В.* Об основных понятиях алгебраического подхода к решению задач клас- сификации (соотношение разрешимости и полноты) // Математические методы рас- познавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. (Львов, 10-12 ноября 1987 г.) . Львов: ФМИ им. Г.В.Карпенко АН УССР, 1987. С. 17-18.

147. *Рудаков К.В.* О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие результаты) . М. : ВЦ АН СССР, 1980. 66 с.

148. *Скарин В.Д.* О применеии метода регуляризации для коррекции несобственной задачи линейного программирования первого рода. В кн.: Методы аппроксимации несобственной задачи линейного прггграммирования. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. - С. 39-54.

149. *Скарин В.Д.* Об одном алгоритме численного анализа несобственной задачи линейного программирования. В кн.: Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. - С. 63-69.

150. *Скарин В.Д.* Об одном регуляризующем алгоритме коррекции противоречивых задач выпуклого программирования с линейными ограничениями. В кн.: Исследования по несобственным задачам оптимизации. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1988. - С. 48-56.

151. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации: Учеб. пособие. - 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 368 с.

152. *Тихонов А.Н.* О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений // Докл. АН СССР, 1980, т. 254, 3, С. 549-554.

153. *Тихонов А.Н.* О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1980. т. 20. №6. С.1373-1383.

154. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1970. 288 с.

155. *Тихонов А.Н., Рютин А.А., Агаян Г.М.* Об устойчивом методе решения задачи линейного программирования с приближенными данными // Докл. АН СССР, 1983, т. 272, 5, С. 1058-1063.

156. *Тихонов А.Н., Морозов В.А., Карамзин В.Н.* О задаче коррекции линейных неравенств. Сб. работ НИВЦ МГУ «Численный анализ: методы, алгоритмы, приложения». М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. С.3-13.

157. *Трофимов С.П.* Анализ соотношений двойственности для задач полубесконечного и бесконечного линейного программирования. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. - Свердловск, 1988.

158. *Фролов В.Н.* Оптимизация плановых программ при слабо согласованных ограничениях. - М.: Наука, 1986. - 166 с.

159. *Фролов В.Н., Ватолин А.А.* Анализ противоречивых ситуаций в задачах текущего планирования производства. В кн.: Противоречивые модели оптимизации. - Свердловск: УНЦ РАН, 1987. - С. 79-92.

160. *Фролов В.Н.* Оптимизация плановых программ при слабо согласованных ограничениях. Дисс. ... докт. эконом. наук. М., 1987.

161. *Фролов В.Н., Чернавин П.Ф.* Построение непротиворечивых программ развития производственно-экономических объектов // Экономика и матем. методы. - 1987. - Т. 23, №6. - С. 1069-1076.

162. *Хачай М.Ю.* Комитетные решения несовместных систем ограничений и методы обучения распознаванию: автореф дис. ... д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.09. - Екатеринбург, 2004.

163. *Хачай М.Ю.* Об оценке числа членов минимального комитета системы линейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1997. Т. 37. №11. С. 1399.

164. *Хвостов М.Н.* О достаточных условиях разрешимости несобственных задач ЛП 1-го рода после матричной коррекции их допустимой области по минимуму взвешенной евклидовой нормы с учетом структурных ограничений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. №2. С. 150 – 167.

165. *Хвостов М.Н.* Применение штрафной функции при решении задачи структурной матричной коррекции несобственной задачи линейного программирования первого рода // Математические чтения РГСУ.Сборник материалов XXIII математической школы-семинара (28 января – 1 февраля 2014 года). - М.: Издательство РГСУ, 2015. С. 174 – 177.

166. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. - М.: Мир, 1989. 655 с.

167. *Цурков В.И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981. 352 с.

168. *Amaral P.* Contribuiзxes para o estudo de sistemas lineares inconsistentes. PhD dissertation, Faculty of Science and Technology, UNL, Lisbon, Portugal, 2001 (in Portuguese).

169. *Amaral P., Barahona P.* About infeasibility in the constraints of a linear model. Ricerca Operativa, 1999. №92. - P. 49-67.

170. *Amaral P., Barahona P.* A framework for optimal correction of inconsistent linear constraints. Constraints, 2005. №10 P. 67-86.

171. *Amaral P., Barahona P.* Connections between the total least squares and the correction of an infeasible system of linear inequalities. Linear Algebra and its Applications, 2005. №395. - P. 191-210.

172. *Amaral P., Barahona P.* On optimal correction of inconsistent linear constraints. In: Hentenryck PV, editor. Principles and practice of constraint programming, CP'2002 (Proceedings), Lecture notes in computer science, vol. 2470; 2002. - P. 33-46.

173. *Amaral P., Trosset M. W., Barahona P.* Correcting an Inconsistent System of Linear Inequalities by Nonlinear Programming, Technical Report 00Y 27, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, Houston, TX 77005.

174. *Dax A.* The Smallest Correction of an Inconsistent System of Linear Inequalities // Optimization and Engineering, 2001. №2. - P. 349-359.

175. *Fung G.M., Mangasarian O.L.* Multicategory Proximal Support Vector Machine Classifiers // Machine Learning, 2005, №59, - P. 77-97.

176. *Gorelik V.A., Ibatullin R.R.* Correcting the system of constraints of a linear program with the aid of minimax criterion // Тезисы докладов 3-й международной конференции по исследованию операций. - М.: ВЦ РАН, 2001. - С. 42.

177. *Gorelik V.A., Muravyova O.V.* Problem of approximating with variation of all data. // Тезисы докладов 3-й международной конференции по исследованию операций. - М.: ВЦ РАН, 2001. - С. 43.

178. *Gorelik V.A., Pechenkin R.V.* Decomposition approach for solving signal identification problem // Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике. Тез. докл. 2-й Московской конференции. - М.: ВЦ РАН, 2004. - С. 41-42.

179. *Greenberg HJ.* Murphy FH. Approaches to diagnosing infeasible linear programs. ORSA Journal on Computing, 1991 №31. - P. 79-97.

180. *Khachay M. Yu.* On Approximate Algorithm of a Minimal Committee of a Linear Inequalities System // Pattern Recognition and Zimage Analysis. - 2003. - Vol. 13, №3. - P. 459-464.

181. *Lemmerling P.* Structured total least squares: analysis, algorithmus and applications. PhD dissertation. Kattholieke Universiteit Leuven, Arenbergkasteel, Belgium, 1999. 189 p.

182. Linear programming test problems [Электронный ресурс] // Netlib : [сайт]. URL: http://http://www.netlib.org/lp/infeas (дата обращения: 15.11.2013).

183. *Mangasarian O.L.* Support Vector Machine Classification via Parameterless Robust Linear Programming // Optimization Methods and Software 2005, №20, - P. 115-125.

184. *Markovsky I.* Exact and approximate modeling in the behavioral setting // PhD dissertation. Kattholieke Universiteit Leuven, Arenbergkasteel, Belgium, 2005. 200 p.

185. *Markovsky I. and Willems J.C. and De Moor B. and Van Huffel S.* Exact and Approximate Modeling of Linear Systems: A Behavioral Approach. SIAM. 2006. March. Monographs on Mathematical Modeling and Computation.

186. *Marquardt D.W.* An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. - J. Soc. Indust. Appl. Math., 1963. V. 11. №2. - P. 431-441.

187. *Mazurov Vl.D., Khachay M. Yu., Rybin A.I.* Committee Constructions for Solving Problems of Selection, Diagnostics and Prediction // Proceeding of the Steklov Institute of mathematics/ - 2002/ - Suppl/ 1/ - З. - P. 67-101.

188. *Murty K.G.* Linear Programming. J. Wiley & Sons.Inc. New York, 1983. - P.254.

189. *Park H., Zhang L., Rosen J.B.* Exponential modeling with unknown model order using structured nonlinear total least norm, Advances in Computational Mathematics, 2003. №19: - P. 307-322.

190. *Pruessner A., O'Leary D.P.* Blind Deconvolution Using A Regularized Structured Total Least Norm Algorithm // SIAM J. on Matrix Analysis and Applications, 2003. Vol. 24. №4. - P. 1018-1037.

191. *Park H., Zhang L., Rosen J.B.* Exponential modeling with unknown model order using structured nonlinear total least norm, Advances in Computational Mathematics , 2003. No 19: - P. 307-322.

192. *Rosen J.B., Park H. Glick J.* Total least norm problems: formulation and solution // illUMSI research report. Minniapolis(Mn) Univ. of Minnesota. Supercomput. inst., 1993, 93/223. 18 p.

193. *Rosen J.B., Park H., Glick J.* Total least norm formulation and solution for strucured problems. SIAM Journal on Matrix Anal. Appl. 1996. Vol. 17. №1. P. 110-128.

194. *Rosen J.B., Park H., Glick J.* Structured nonlinear total least norm problems// UMSI reserch report. Minniapolis (Mn): Univ. of Minnesota. Supercomput. inst., 1995. 11 p.

195. *Rosen J.B., Park H., Glick J.* Total least norm for linear and nonlinear structured problems, Recent advances in total least squares techniques and errors-in-variables modellign. Ed. S. Van Huffel, SIAM, 1997. - P. 203-214,

196. *Vatolin A.A.* Parametric approximation of inconsistent systems of linear equations and inequalities. Seminarber., Humboldt-Univ. Berlin, Sekt. Math., 1986. - P. 145-154.

197. *Vatolin A.A.* An LP-based algorithm for the correction of inconsistent linear equation and inequality systems // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Resear ch, 1029-4945, Volume 24, Issue 1, 1992, - P. 157 - 164.

198. *Watanabe S.* Pattern recognition: Human and mechanical. N.Y.: Wiley, 1985. 592 p.

199. *Wisenhausen H.S.* Sets of Possible States of Linear Sisrems Given Perturber Observatons // IEEE Transactions Automatic Controls, 1968. vol. AC-13. P. 556-558.