

*Отзыв официального оппонента  
на диссертацию Фоминой Е.О. «Конгруэнции цепей и циклов»,  
представленную к защите на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук*

Понятие конгруэнции относится к числу общих конструкций для различных алгебр, которое оказалась очень полезным при разработке теории алгебраических систем. Ряд результатов упомянутой теории привлек внимание специалистов, занимающихся исследованием конкретных дискретных систем различного рода, и послужил базой для создания алгебраических основ теорий таких систем. В качестве примера можно указать на алгебраическую структурную теорию автоматов, развитую Хартманисом и Стирнсом. Как известно, автоматы являются весьма распространенной математической моделью многих дискретных технических систем, имеющих обширные практические приложения. Заметим, что понятие конгруэнции естественным образом переносится и на графы, которые также часто используются в качестве моделей технических систем.

Диссертация Фоминой Е.О. носит теоретический характер и посвящена изучению различных свойств цепных и циклических конгруэнций графов, что представляет несомненный научный интерес. В связи со сказанным выше можно сделать вывод об актуальности темы диссертации.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и четырех приложений.

Во введении приводится краткий обзор публикаций, примыкающих по тематике к области исследования диссертанта, сформулирована цель работы, перечислены использованные методы исследования и результаты, выносимые на защиту. Здесь же приводятся данные апробации полученных результатов на ряде международных и всероссийских конференций.

В первой главе автор приводит и иллюстрирует основные понятия теории графов, используемые в дальнейшем изложении, определяет понятие конгруэнции графа. Основное содержание этой главы посвящено подробному исследованию свойств конгруэнций двух типов графов – цепей и циклов.

Второй параграф этой главы посвящен цепным конгруэнциям графов. Здесь сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия «быть конгруэнцией» и «быть факторграфом» цепи в терминах независимых множеств вершин и, соответственно, обходов графа. Приведено доказательство того, что любой связный граф является

факторграфом подходящей цепи. При доказательстве упомянутых результатов Фомина Е.О. продемонстрировала умение строить многоступенчатые оригинальные процедуры, которые потребовались при этом, что указывает на ее хорошую математическую подготовку.

При изучении свойств цепных конгруэнций автором диссертации определена мощность множества всех таких конгруэнций для  $m$ -реберных цепей с использованием числа Белла  $E(m)$ . Получена оценка для  $p(G)$  - длины минимальной цепи, факторграфом которой является граф  $G$ , а для связного графа – точное значение  $p(G)$ . В качестве следствия из этой оценки получены точные значения  $p(G)$  для полных графов  $K_n$  и звезд  $S_m$  с  $m$  ребрами. Для графов-деревьев  $T$  получено точное значение  $p(T)$  через диаметр графа  $T$  и число его ребер.

Третий параграф главы посвящен циклическим конгруэнциям графов. Здесь приводятся и доказываются результаты, аналогичные полученным для конгруэнций цепей. Доказано какие именно графы являются факторграфами цикла  $C_m$ . При изучении свойств конгруэнций циклов определена мощность множества всех таких конгруэнций с использованием числа Белла, подсчитано количество цепных конгруэнций  $m$ -реберного четного цикла  $C_m$ . Для заданного связного графа  $G$  найден цикл с минимально возможным числом ребер  $c(G)$ , факторграфом которого является данный граф. В качестве следствия из этой оценки получены точные значения  $c(K_n)$  для полных графов  $K_n$  и звезд  $S_m$  с  $m$  ребрами. Для любых связных графов  $G$  с  $m$  ребрами доказано, что  $m \leq c(G) \leq 2m$ .

Вторая глава диссертации посвящена исследованию свойств полурешеток конгруэнций для цепей и циклов. В первом параграфе вводятся все основные понятия, связанные с полурешетками, используемые в дальнейшем изложении.

В следующем параграфе установлена структура главной конгруэнции цепи, порожденной парой несмежных ее вершин. Здесь же подсчитано число главных конгруэнций, получена формула для вычисления высоты конгруэнции, найдена длина полурешетки конгруэнций, порожденной операцией включения множеств. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия максимальности конгруэнции в полурешетке конгруэнций. Введено понятие типа решетки и доказана теорема о том, что главные идеалы, порожденные конгруэнциями одного и того же типа, являются изоморфными решетками. В этом же разделе доказана теорема о том, что любая конечная решетка вложима в решетку

четных конгруэнций подходящей цепи. При исследовании полурешеток так называемых  $\delta$ -конгруэнций цепи  $P_n$  доказано, что они дуально изоморфны полурешетке неединичных делителей числа  $n$ .

Третий параграф главы посвящен исследованию полурешеток конгруэнций циклов. Диссертантом доказано, что фактически все результаты, полученные для полурешеток конгруэнций цепей, иногда с небольшими видоизменениями, переносятся и на случай циклов. Техника доказательств соответствующих утверждений также аналогична технике, использованной в предыдущем параграфе.

Заключение диссертации состоит просто из краткого перечисления полученных результатов.

Диссертация содержит четыре приложения, в которых приводятся все конгруэнции и факторграфы для цепей и циклов с числом вершин до 6 включительно (приложения 1 и 2), а также полурешетки конгруэнций цепей и циклов (приложения 3 и 4) с числом вершин до 5 включительно.

Хочу отметить внутреннее единство работы, в которой последовательно и почти исчерпывающе исследованы различные алгебраические аспекты конгруэнций двух типов графов – цепей и циклов. Доказательства ряда утверждений потребовали от автора изобретательности и являются далеко нетривиальными. В качестве примера укажу на доказательства теорем 2,7 и 9 первой главы, теорем 3 и 4 второй главы.

Диссертация Фоминой Е.О. оставляет общее хорошее впечатление, однако считаю необходимым сделать следующие замечания:

- 1). В разделе «Краткое содержание» во введении приведены полные формулировки всех доказанных в диссертации теорем, что занимает много места (9 стр.). В главах 1 и 2 все эти формулировки, естественно, повторены. Вряд ли можно считать такое дублирование оправданным.
- 2). Аналогичные повторы имеют место и с определениями (например, обходов графов, независимых подмножеств вершин графа и др.).
- 3). В тексте встречаются места как с излишними, так и с недостающими запятыми (с.7,9,15).
- 4). Встречаются опечатки (с.4,8,15,25,53,54 и др.).
- 5). Имеются и другие погрешности оформления. Например, на рисунке графа на с.63 надписи у вершин графа и подрисуночную подпись можно рассмотреть только под микроскопом.

Сделанные замечания не носят принципиального характера и не снижают общей положительной оценки диссертации.

По поводу обоснованности полученных Фоминой Е.О. результатов следует сказать, что все они сопровождаются корректными

математическими доказательствами и согласуются с ранее известными научными фактами. Полученные в диссертации результаты на мой взгляд представляют несомненный интерес для специалистов в области дискретной математики и математической кибернетики. Основные результаты диссертации являются новыми и опубликованы в 13 работах, в том числе в трех статьях в изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация Е.О. Фоминой является законченной научно-квалификационной работой. Совокупность полученных автором результатов можно квалифицировать как решение задачи, имеющей существенное научное значение для ряда разделов дискретной математики, в том числе для теории графов и ее приложений.

Полагаю, что диссертация Фоминой Е.О. удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям.

Считаю, что Евгения Олеговна Фомина достойна присуждения ей степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика.

Профессор, доктор технических наук

Д.В. Сперанский

Подпись Д.В. Сперанского

09 02 2015



Заместитель начальника управления кадров  
Е.А. Ямщикова

Сведения об оппоненте

1. ФИО - Сперанский Дмитрий Васильевич.
2. Ученая степень и звание – доктор технических наук, профессор, докторская диссертация защищена по специальностям 05.13.01 Техническая кибернетика и теория информации; 05.13.13 Организация структур и вычислительных процессов в ЭВМ, комплексах и системах.

3. Место работы и должность – Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), профессор кафедры «Высшая и прикладная математика».
4. Некоторые публикации:
  - Сперанский Д.В. Лекции по теории экспериментов с конечными автоматами.- М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.- 287 с.
  - Speranskiy D.V. Fuzzy simulation of discrete systems given on finite fields// Automatic Control and Computer Science. - 2014, Vol.48, №1.- p.p. 37-46.
  - Сперанский Д.В. Задача распознавания входного слова линейного автомата в интервальной постановке// Автоматика и вычислительная техника.-2012, №2.- с. 50-56.