Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Саратовский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи

Фомина Евгения Олеговна

# Конгруэнции цепей и циклов

Специальность:
01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
к.ф.-м.н., проф. Салий В.Н.

Саратов

2013

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Нормальные подгруппы, введенные Галуа в начале XIX века, привели к определению факторгрупп и к доказательству теорем о гомоморфизмах, сыгравших основополагающую роль в развитии теории групп. Точно так же идеалы колец, введенные Дедекиндом во второй половине XIX века, позволили определить факторкольца и получить соответствующие теоремы о гомоморфизмах для колец. Эта аналогия не могла не навести на мысль о существовании некоторых общих конструкций, имеющих смысл для алгебр в самом широком понимании этого слова. Такой объединяющей идеей явило сь понятие конгруэнции и тесно связанные с ним понятия факторалгебры и гомоморфизма. Доказанные Нетер в 1920-х годах теоремы о гомоморфизмах для произвольных алгебр заложили основы теории алгебраических систем, в разработке которой важное место заняли методы универсальной алгебры и теории решеток (см [3], [4], [11], [13], [14]). Достижения в этой области математики вызвали интерес у исследователей, работавших с дискретными системами различной природы, и стимулировали развитие алгебраической теории для соответствующих объектов (см. [23], [25], [27], [31]), в первую очередь в теории автоматов (см. [18], [34]).

Понятие конгруэнции было перенесено и на случай графов.

Под ориентированным графом (далее орграфом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где $V$ – конечное непустое множество, а $\alpha$ – отношение на $V$. Множество $V$ называется множеством вершин, отношение $\alpha$ – отношением смежности, а пары, входящие в $\alpha$, дугами орграфа $G$. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина $v$ смежна с вершиной $u$. Основные понятия приводятся в соответствии с [5].

Графовые модели широко используются во многих областях человеческой деятельности. Транспортные системы, информационные сети, компьютерные программы, отношение зависимости в социальных группах – все могут моделироваться графами.

Существуют различные методы преобразования графовых систем для приложений к проблемам оптимизации в вышеупомянутых ситуациях. В качестве допустимых реконструкций данного графа обычно рассматриваются следующие [19]:

1) ориентация ребер данного неориентированного графа (например, известная теорема Оре – критерий ориентируемости графа в сильно связный орграф [17]);

2) добавление новых дуг (ребер) (эта реконструкция используется, например, для построения отказоустойчивых реализаций по Хейзу – Абросимову [1], [32]);

3) удаление некоторых дуг (ребер) (здесь общеизвестными результатами являются, например, алгоритмы построения минимального остовного дерева для связной сети, так называемые минимальные расконтуривания сетей в технической диагностике [6]);

4) отождествление некоторых вершин графа.

Последний вид реконструкций формализуется следующим образом.

Гомоморфизмом орграфа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в орграф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется отображение $\varphi$: $V_1 \to V_2$ такое, что $(u, v) \in \alpha_1 \to (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$ для любых $u$, $v \in V_1$. Отметим следующие работы, посвященные гомоморфизмам графов: [29], [33].

В алгебре конгруэнции тесно связаны с гомоморфизмами: каждая конгруэнция является ядром подходящего гомоморфизма. Для графов подобный подход представляется мало интересным: любая эквивалентность на множестве вершин графа может рассматриваться как ядро некоторого гомоморфизма. Например, если $\varphi$ – произвольное отображение множества вершин $V_1$ орграфа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в некоторое непустое множество $V_2$, то существует орграф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ такой, что $\varphi$ будет гомоморфизмом орграфа $G_1$ в орграф $G_2$: нужно задать отношение $\alpha_2$ следующим образом: $\alpha_2 = \{(\bar{u}, \bar{v}) \in V_2 \times V_2: (\exists u, v \in V_1)(\varphi(u) = \bar{u}\ \&\ \varphi(v) = \bar{v}\ \&\ (u, v) \in \alpha_1)\}$. Отсюда следует, что если определить конгруэнцию орграфа как ядро Ker $\varphi$ некоторого его гомоморфизма $\varphi$, то конгруэнциями окажутся все эквивалентности на множестве его вершин, так что изучение конгруэнций и факторграфов в общем случае теряет смысл. Чтобы эти понятия приобрели содержание, нужно наложить некоторые дополнительные ограничения.

Пусть $\varepsilon$ – некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин $V$. Факторграфом орграфа $G$ по эквивалентности $\varepsilon$ называется орграф $G/\varepsilon$ = $(V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где $V/\varepsilon$ – множество классов эквивалентности $\varepsilon$, а $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2))$: $(\exists u_1 \in \varepsilon(v_1), \exists u_2 \in \varepsilon(v_2))((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Если $K$ – некоторый класс графов и $G \notin K$, то под $K$-конгруэнцией графа $G$ понимается такая эквивалентность $\theta \subseteq V \times V$, что $G/\theta \in K$. Одна из известных задач следующая: как устроены минимальные (по включению) $K$-конгруэнции данного графа?

Например, если $K$ – класс бесконтурных графов, то отношение $\sigma$ взаимной достижимости вершин данного графа $G$ является его наименьшей $K$-конгруэнцией. Факторграф $G/\sigma$ называется конденсацией графа $G$, эта конструкция хорошо известна в прикладных разделах теории графов.

Для класса $K$ функциональных графов М.А. Кабанов [7] указал наименьшую $K$-конгруэнцию на произвольном графе и установил некоторые свойства решетки функциональных конгруэнций графа. Он же решил аналогичные задачи для классов входящих и выходящих ориентированных деревьев, описал графы со специальными решетками циклических и ациклических конгруэнций.

Также известны результаты М.Р. Мирзаянова [16], который рассматривал случай, когда $K$ – класс сильно связных орграфов, и предложил способ построения сильно связной конгруэнции произвольного орграфа, наибольшей по числу вершин в факторграфе. Им установлено также [15], что $n$-элементная ориентированная цепь имеет $2^{n-3}$ минимальных сильно связных конгруэнций.

Пусть $K$ – некоторый класс орграфов. Конгруэнцией $K$-графа $G$ называется такое отношение эквивалентности $\theta$ на $V$, что факторграф $G/\theta$ является $K$-графом.

Здесь известны результаты, описанные в заметке А.В.Киреевой [8], посвященной древесным конгруэнциям ориентированных деревьев. Она охарактеризовала также в своей работе [10] функциональные графы, у которых каждый подграф изоморфен подходящему факторграфу, и функциональные графы, у которых каждый факторграф изоморфен подходящему подграфу. Работа [9] посвящена конгруэнциям турниров.

В [5] рассматривались конгруэнции бесконтурных графов.

Возьмём в качестве класса $K$ класс неориентированных графов.

Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где $\alpha$ – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин $V$. В неориентированном графе пара встречных дуг $(u, v)$,$(v, u)$ рассматривается как один элемент графа, называемый ребром $\{u, v\}$. Ребро $x$, соединяющее вершины $u$ и $v$, называют инцидентным вершине $u$ и вершине $v$. При изображении неориентированного графа ребро изображается ненаправленной линией.

Путем в графе $G = (V, \alpha)$ называется последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза. При этом считается, что оба конца каждого ребра, кроме первого и последнего, являются концами соседних с ним ребер пути. Говорят, что путь проходит через вершины, соединенные его ребрами. Путь в графе удобно задавать перечислением входящих в него вершин в порядке их прохождения. Если начальная и конечная вершины пути совпадают, путь называется циклическим. Путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его ребрам, по определению, является простым.

Простой циклический путь называется циклом. Цикл с $m$ ребрами будем обозначать $C_m$. В цикле $C_m$ вершины обозначены натуральными числами 1, …, $m$ следующим образом: возьмем произвольную вершину $v_i$ цикла $C_m$ обозначим её 1, далее двигаясь по часовой стрелке, будем обозначать вершины цикла числами 2, …, $m$, пока всем вершинам цикла не будут присвоены метки.

Связный граф, в котором нет циклов, называется деревом. Будем обозначать дерево через $T$. Если простой путь не является циклом, в нем существуют вершины, принадлежащие только одному ребру этого пути. Очевидно, что таких вершин точно две. Их называют концами данного пути, а сам путь – цепью, соединяющей указанные вершины. Цепь с $m$ ребрами будем обозначать $P_m$.

Звезда – это граф, все ребра которого инцидентны одной и той же вершине. Звезду с $m$ ребрами будем обозначать $S_m$. Граф называется полным, если любые две его вершины смежны. Полный граф с $n$ вершинами обозначим через $K_n$.

Множество вершин называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

Очевидно, что отношение эквивалентности $\theta$ на множестве вершин графа $G = (V, \alpha)$ тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый $\theta$-класс образует в $G$ независимое подмножество.

Известен следующий результат Продингера и Тихого [35]: $i(P_n) = F(n+2)$, где $i(G)$ – число независимых множеств в графе $G$, $F(n)$ – числа Фибоначчи.

Верхней оценке числа максимальных независимых множеств в графе посвящена работа В.Е. Алексеева [2].

Известна следующая задача о факторизации: можно ли для заданного графа сказать, является ли он факторграфом другого заданного графа? Эта задача является NP – полной [28].

К числу нерешенных проблем комбинаторной теории графов относятся следующие задачи: сколько неизоморфных факторграфов имеет $m$-реберная цепь; сколько неизоморфных факторграфов имеет $m$-реберный цикл?

Для неориентированных графов понятие конгруэнции тесно связано с раскрасками.

Самой знаменитой проблемой в теории графов на протяжении последнего столетия являлась проблема четырех красок. Проблема четырех красок пришла в теорию графов из картографии. Задача заключается в том, чтобы определить минимальное число красок, необходимое для раскрашивания карты таким образом, что области, имеющие общие границы, получили разные цвета. Любая карта может быть представлена в виде графа такого, что каждой области соответствует вершина графа, и две вершины будут смежными, т.е. $(u,v) \in \alpha$, если соответствующие им области имеют общую границу. Раскраска карты соответствует раскраске графа $G$, которая разбивает множество вершин $V$ графа $G$ на независимые классы, т.е. разбиение $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ множества вершин $V$, где каждое подмножество $V_i \subseteq V$ и если $u, v \in V_i$, то $u, v \notin \alpha$. Графы, ассоциированные с картами таким образом, будут планарными. Проблема четырех красок может быть переформулирована по-другому: можно ли любой планарный граф окрасить в четыре цвета? Проблема четырех красок была решена в [20]. Более общей проблемой является определение наименьшего $n$, для которого граф $G$ имеет $n$-раскраску, а именно нахождение хроматического числа $\chi(G)$ графа $G$.

Переведем проблему раскрасок на язык конгруэнций. В контексте конгруэнций, $n$-раскраска неориентированного графа $G$ – это разбиение множества вершин графа $G$ на $n$ независимых классов, т.е. конгруэнция с $n$ классами. Полной раскраской графа $G$ является конгруэнция $\theta$ такая, что факторграф $G/\theta$ будет полным графом. Если граф $G/\theta$ имеет $n$ вершин, то мы говорим о полной $n$-раскраске. Известна теорема об интерполяции: если граф $G$ допускает полную $k$-раскраску и полную $l$-раскраску, $k \leq l$, тогда он допускает полную $i$-раскраску для любых $k \leq i \leq l$ [21].

Хроматическое число $\chi(G)$ графа $G$ можно рассматривать как число классов конгруэнции $\theta$ графа $G$ с наименьшим возможным числом классов, причем $G/\theta$ будет полным графом. Довольно легко определить хроматические числа некоторых известных графов: $\chi(K_p) = p$, $\chi(K_{m,n}) = 2$, где $K_{m,n}$ – двудольный граф, $\chi(C_{2n}) = 2$, $\chi(C_{2n-1}) = 3$ и $\chi(T) = 2$ для любого нетривиального дерева $T$. Очевидно, что граф является 1-хроматическим, тогда и только тогда, когда он вполне несвязен. С точки зрения сложности, проблема нахождения хроматического числа для произвольного графа является NP-сложной.

Ахроматическим числом будет число классов конгруэнции графа $G$ с наибольшим возможным числом классов, причем, заметим, что факторграф по данной конгруэнции будет полным графом. Другими словами, если $n$ – ахроматическое число, то полный граф с наибольшим возможным числом вершин, на который факторизуется граф $G$, будет $n$-вершинным. В [37] показано, что проблема нахождения ахроматического числа является NP-полной.

Ахроматическое число графа рассматривалось в работах [26], [30].

**Цель работы.** Исследовать конгруэнции цепей и циклов; выяснить какие графы являются факторграфами заданной цепи и заданного цикла; подсчитать количество всех конгруэнций для заданной цепи и для заданного цикла; найти цепь с минимальным количество ребер, которая будет факторизоваться на заданный граф и цикл с минимальным количество ребер, который будет факторизоваться на заданный граф; описать и исследовать свойства полурешетки конгруэнций цепи и полурешетки конгруэнций цикла.

**Методы исследования.** При выполнении работы применялись различные методы исследования теории графов, комбинаторики, теории алгоритмов.

**Научная новизна и положения, выносимые на защиту.**

1. Показано, что каждый связный граф является факторграфом подходящей цепи.
2. Подсчитано количество конгруэнций и цепных конгруэнций заданной цепи.

3. Найдена длина наикратчайшей цепи, факторизующейся на данный связный граф, получены точные оценки для этой величины.
4. Выделены циклические конгруэнции $m$-реберной цепи, связанные с делителями числа $m+1$.
5. Результаты, аналогичные 1–4, получены также для циклов.
6. Подсчитана высота конгруэнции в полурешетке конгруэнций цепи.
7. Показано, что главные идеалы полурешетки Con $P_m$, порожденные однотипными конгруэнциями, являются изоморфными решетками.
8. Показано, что каждая конечная решетка вложима в решетку четных конгруэнций подходящей цепи.
9. Результаты, аналогичные 6–8, получены также для циклов.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях в теории графов.

**Апробация результатов.** Результаты представляемой работы обсуждались на научных семинарах кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского (г. Саратов, 2009–2013 года). Результаты исследований также докладывались на следующих научных мероприятиях: Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» (г. Саратов, 2009, 2010, 2012 года); XVIII и XIX Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2011» и «Ломоносов – 2012» (г. Москва, 2011 и 2012 год соответственно); XVI Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (г. Нижний Новгород, 2011 год); 2011 Fall Central Section Meeting: University of Nebraska–Lincoln (Lincoln, NE, October 14–16, 2011); X Сибирская научная школа-семинар с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» – SIBECRYPT’11 (г. Томск, 2011 год); XI Сибирская научная школа-семинар с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» – SIBECRYPT’12 (г. Иркутск, 2012 год); 55-й научная конференция МФТИ: Всероссийская научная конференция «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Научная конференция «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики и астрономии», Всероссийской молодёжной научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (г. Москва, 2012 год); семинар по теории графов в университете Пьера и Марии Кюри (г. Париж, 2012 год).

**Публикации.** Основные результаты опубликованы в работах автора [А1–А13]. Работы автора [А5], [А9], [А13] опубликованы в изданиях, включенных в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий» ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников, включающего 37 наименований, и четырех приложений. Диссертация изложена на 100 листах.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, формулируется цель работы, приводится перечень задач, решаемых для достижения поставленной цели, даётся характеристика методов исследования, приводится краткое содержание работы по главам, перечень новых научных результатов, содержащихся в работе и выносимых на защиту, характеристика практической ценности и полезности работы, сведения об апробации результатов работы.

Глава 1. В первом параграфе вводятся все основные определения теории графов, используемые в работе.

Множество вершин называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

**Теорема 1.** Отношение эквивалентности $\theta$ на множестве вершин графа $G = (V, \alpha)$ тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый $\theta$-класс образует в $G$ независимое подмножество.

Во втором параграфе рассматриваются конгруэнции цепей. Показано, какие графы являются факторграфами цепи $P_m$.

Маршрут в связном графе $G$ называется обходом, если он содержит все ребра графа $G$. Длиной маршрута называется количество ребер, содержащихся в данном маршруте.

**Теорема 2.** Связный граф $G$ тогда и только тогда является факторграфом $m$-реберной цепи, когда в нем есть обход длины $m$.

**Теорема 3.** Любой связный граф является факторграфом подходящей цепи.

Подсчитано количество конгруэнций для цепи $P_m$.

Через Con $P_m$ обозначим множество всех конгруэнций цепи $P_m$, а через $\mathrm{E}(m)$ – множество всех эквивалентностей на $m$-элементном множестве. Количество элементов в $\mathrm{E}(m)$ называется числом Белла $B(m)$.

**Теорема 4.** $|\mathrm{Con}\ P_m| = |\mathrm{E}(m)|$.

Определим цепную конгруэнцию цепи как такую конгруэнцию, факторграфом по которой будет цепь.

**Теорема 5.** Количество цепных конгруэнций $m$-реберной цепи $P_m$ равно $2^{m-1}$.

К числу конгруэнций цепи $P_m$ относятся особые конгруэнции, связанные с делителями числа $m$+1.

В контексте таких конгруэнций, для удобства будем рассматривать цепь $P_n$, где $n = m+1$.

Пусть $d$ – делитель числа $n$, т.е. $n = dk$. Разобьем множество вершин цепи $P_n$ на классы вычетов по модулю $d$. Получим разбиение $\theta_d$ с блоками $\{1, 1+d, 1+2d, \ldots, 1+d(k–1)\}$, $\{2, 2+d, 2+2d, \ldots, 2+d(k–1)\}$, …, $\{d, 2d, 3d, \ldots, d+d(k–1)\}$. Так как у этого разбиения все классы будут независимыми подмножествами, то мы получаем конгруэнцию цепи $P_n$. Конгруэнции вида $\theta_d$ будем называть $\delta$-конгруэнциями цепи $P_n$.

**Теорема 6**. Пусть $\theta_d$, $d \neq n$, является $\delta$-конгруэнцией цепи $P_n$. Тогда факторграф $P_n/\theta_d$ будет циклом.

Найдена цепь с минимальным возможным числом ребер $p(G)$, факторграфом которой является данный граф $G$.

**Теорема 7.** Пусть $G$ – связный граф. Тогда $p(G) = m+l–k$, где $m$ – количество ребер графа $G$, $l$ – количество ребер в минимальном цепном паросочетании на множестве нечетных вершин графа $G$, $k$ – максимальная из длин цепей в таких паросочетаниях.

Из теоремы 7 получены два следствия.

**Следствие 1.** Для полного графа $K_n$ имеем:

1. $p(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$, если $n$ – нечетно;
2. $p(K_n) = \frac{n^2}{2} - 1$, если $n$ – четно.

**Следствие 2**. Для звезды $S_m$ с $m$ ребрами имеем $p(S_m) = 2m–2$.

Найдены верхняя и нижние оценки для $p(G)$.

**Теорема 8.** Для связного графа $G$ с $m$ ребрами $m \le p(G) \le 2m–2$.

Для дерева $T$ подсчет $p(T)$ с помощью алгоритма, предложенного в теореме 7, довольно трудоемок.

Диаметром дерева $T$ называется максимальное расстояние между его вершинами.

**Теорема 9.** Если $T$ – дерево с $m$ ребрами, имеющее диаметр $d$, то $p(T) = 2m—d$.

Во втором параграфе рассматриваются конгруэнции циклов по аналогии с конгруэнциями цепей.

Показано, какие графы являются факторграфами цикла $C_m$.

**Теорема 10.** Связный граф $G$ тогда и только тогда является факторграфом $m$-реберного цикла, когда в нем есть циклический обход длины $m$.

Далее с помощью несложных рассуждений можно показать, то любой граф является факторграфом подходящего четного цикла.

С нечетными циклами ситуация обстоит иначе.

**Теорема 11.** Если граф является факторграфом нечетного цикла, то он содержит циклы нечетной длины.

Подсчитано количество всех конгруэнций цикла $C_m$. Через Con $C_m$ обозначим множество всех конгруэнций цикла $C_m$.

**Теорема 12.** $|\mathrm{Con}\ C_m| = \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k B(m-k-1)$, где $B(n)$ – число Белла.

Подсчитано количество цепных конгруэнций для четного цикла $C_m$.

**Теорема 13.** Количество цепных конгруэнций $m$-реберного четного цикла $C_m$ равно $2^{\frac{m}{2}-1}$.

Рассмотрим особые конгруэнции цикла $C_m$, связанные с делителями числа $m$, по аналогии с цепями.

Пусть $d$ – делитель числа $m$, т.е. $m = dk$. Разобьем множество вершин цикла $C_m$ на классы вычетов по модулю $d$. Получим разбиение $\theta_d$ с блоками $\{1, 1+d, 1+2d, \ldots, 1+d(k–1)\}$, $\{2, 2+d, 2+2d, \ldots, 2+d(k–1)\}$, …, $\{d, 2d, 3d, \ldots,$

$d+d(k–1)\}$. Так как у этого разбиения все классы будут независимыми подмножествами, то мы получаем конгруэнцию цикла $C_m$. Конгруэнции вида $\theta_d$ будем называть $\delta$-конгруэнциями цикла $C_m$.

Количество классов $\delta$-конгруэнции $\theta_d$ цикла $C_m$ будет $d$.

Заметим, что если $d$=1, то разбиение $\theta_d$ не является конгруэнцией цикла $C_m$, так как в этом случае все вершины цикла попадут в один единственный класс, и, очевидно, что он не будет независимым. Таким образом, количество $\delta$-конгруэнций цикла $C_m$ будет $\tau(m)–1$, т.е. количество нееденичных делителей числа $m$.

**Теорема 14**. Пусть $\theta_d$ является $\delta$-конгруэнцией цикла $C_m$. Тогда факторграф ${}^{C_m}\!/_{\theta_d}$ будет циклом.

Для данного связного графа $G$ найден цикл с минимальным возможным числом ребер $c(G)$, факторграфом которой является данный граф.

**Теорема 15.** Пусть $G$ – связный граф. Тогда $c(G) = m+l$, где $m$ – количество ребер графа $G$, $l$ – количество ребер в минимальном цепном паросочетании на множестве нечетных вершин графа $G$.

**Следствие 1.** Для полного графа $K_n$ имеем:

1. $c(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$, если $n$ – нечетно;

2. $c(K_n) = \frac{n^2}{2}$, если $n$ – четно.

**Следствие 2.** Для звезды $S_m$ с $m$ ребрами имеем $c(S_m) = 2m$.

Найдены верхняя и нижняя оценка для $c(G)$.

**Теорема 16.** Для любого связного графа с $m$ ребрами $m \le c(G) \le 2m$.

Глава 2. В первом параграфе вводятся все основные определения теории графов и теории решеток, используемые в работе.

Говорят, что в упорядоченном множестве $(S, \le)$ элемент $b$ является верхним соседом элемента $a$, если $a < b$ и не существует $x \in S$ такого, что $a < x < b$, при этом говорят, что $a$ – нижний сосед для $b$. Верхние соседи наименьшего элемента называются атомами упорядоченного множества $S$.

Нижние соседи наибольшего элемента называются коатомами упорядоченного множества $S$.

Во втором параграфе рассматривается полурешетка конгруэнций цепи.

Пара (Con $P_m$, $\subseteq$) будет упорядоченным множеством, так как множество всех конгруэнций цепи $P_m$ упорядочено по включению.

Главной конгруэнцией цепи $P_m$, порожденной парой несмежных вершин $u$, $v$, называется наименьшая конгруэнция $\theta(u,v)$, отождествляющая данные $u$ и $v$. Несложно подсчитать, что количество главных конгруэнций цепи $P_m$ равно $\frac{m(m-1)}{2}$.

Так как для любых двух элементов $\theta_1$ и $\theta_2$ в упорядоченном множестве (Con $P_m$, $\subseteq$) существует $\inf(\theta_1,\theta_2) = \theta_1 \cap \theta_2$, то (Con $P_m$, $\subseteq$) – нижняя полурешетка.

В теореме 1 найдена высота заданной конгруэнции в полурешетке конгруэнций цепи $P_m$, в теореме 2 подсчитана длина полурешетки конгруэнций цепи $P_m$.

**Теорема 1.** В полурешетке (Con $P_m$, $\subseteq$) высота конгруэнции $\theta$ равна $h(\theta) = m+1-c(\theta)$, где $c(\theta)$ – число классов конгруэнции $\theta$.

**Теорема 2.** Полурешетка (Con $P_m$, $\subseteq$) имеет длину $m-1$.

Показано, при каком условии конгруэнция будет максимальной.

**Теорема 3.** Конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $P_m$, $\subseteq$), тогда и только тогда, когда факторграф $P_m/\theta$ будет полным графом.

Главным идеалом, порожденным конгруэнцией $\theta$, называется подмножество полурешетки (Con $P_m$, $\subseteq$), образуемое всеми конгруэнциями $\theta^*$ такими, что $\theta^* \subseteq \theta$. Очевидно, что главный идеал является решеткой.

Типом конгруэнции называется последовательность мощностей классов конгруэнции, записанная в порядке убывания. Обозначим тип конгруэнции $\theta$ как $t(\theta)$.

**Теорема 4.** Главные идеалы, порожденные конгруэнциями одного типа в полурешетке (Con $P_m$, $\subseteq$), являются изоморфными решетками.

Далее в этом же параграфе подсчитано количество элементов главного идеала Id $\theta$, порожденного конгруэнцией $\theta$ типа $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$: $B(t_1)B(t_2)\ldots B(t_n)$, количество коатомов главного идеала $s_2(t_1,2)+ s_2(t_2,2)+\ldots+ s_2(t_n,2) = \sum_{i=1}^{n} s_2(t_i,2)$ и количество атомов главного идеала $C_{t_1}^2+C_{t_2}^2+\ldots+C_{t_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} C_{t_i}^2$ .

Конгруэнция $\theta$ цепи $P_m$ называется правильной, если $(i, j) \in \theta$:$\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – вершины цепи $P_m$ одной четности). Обозначим множество правильных конгруэнций через $\mathrm{Con}_{\text{пр}}$ $P_m$. Определим четную конгруэнцию цепи $P_m$ как такую конгруэнцию $\theta$, что $(i, j) \in \theta$:$\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – четные вершины цепи $P_m$), а нечетную конгруэнцию $\theta$, как $(i, j) \in \theta$:$\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – нечетные вершины цепи $P_m$). Обозначим множество четных конгруэнций через $\mathrm{Con}_{\text{ч}}$ $P_m$. Аналогично определим множество нечетных конгруэнций $\mathrm{Con}_{\text{н}}\,P_m$.

Так как ($\mathrm{Con}_{\text{пр}}$ $P_m$, $\subseteq$) является нижней полурешеткой и в ней есть наибольший элемент, то ($\mathrm{Con}_{\text{пр}}$ $P_m$, $\subseteq$) – решетка (наибольшим элементом в ($\mathrm{Con}_{\text{пр}}$ $P_m$, $\subseteq$), очевидно, будет конгруэнция с двумя классами, в одном классе которой будут все четные вершины цепи $P_m$, в другом – все нечетные).

**Теорема 5.** $\mathrm{Con}_{\text{пр}}\,P_m \cong \mathrm{Con}_{\text{ч}}\,P_m \times \mathrm{Con}_{\text{н}}\,P_m$.

В своей работе [36] Пудлак и Тума показали, что любая конечная решетка вложима в подходящую конечную решетку эквивалентностей.

**Теорема 6.** Любая конечная решетка вложима в решетку четных конгруэнций подходящей цепи.

Обозначим совокупность всех $\delta$-конгруэнций цепи $P_n$ через $\mathrm{Con}_\delta$ $P_n$.

Так как для любых двух элементов $\theta_{d_1}$ и $\theta_{d_2}$ в упорядоченном множестве ($\mathrm{Con}_\delta$ $P_n$, $\subseteq$) существует $\inf(\theta_{d_1}, \theta_{d_2}) = \theta_{d_1} \cap \theta_{d_2}$, то ($\mathrm{Con}_\delta$ $P_n$, $\subseteq$) – нижняя полурешетка. Наименьшим элементом ее является тождественная конгруэнция $\Delta$, а именно конгруэнция $\theta_d$, где $d = n$.

**Теорема 7.** Полурешетка $\delta$-конгруэнций цепи $P_n$ дуально изоморфна полурешетке неединичных делителей числа $n$.

В третьем параграфе по аналогии с цепями рассматривается полурешетка конгруэнций цикла.

Совокупность всех конгруэнций цикла $C_m$, как уже было сказано выше, обозначается через Con $C_m$. Пара (Con $C_m$, $\subseteq$) будет упорядоченным множеством, так как множество всех конгруэнций цикла $C_m$ упорядочено по включению.

Так же, как и для цепи $P_m$, главными конгруэнциями цикла $C_m$ являются всевозможные конгруэнции, такие, что один класс данной конгруэнции состоит из двух элементов, все остальные классы – из одного элемента. Количество главных конгруэнций цикла $C_m$ равно $2(m–3)+(m–4)+(m–5)+\ldots+1$.

Так как для любых двух элементов $\theta_1$ и $\theta_2$ в упорядоченном множестве (Con $C_m$, $\subseteq$) существует $\inf(\theta_1,\theta_2) = \theta_1 \cap \theta_2$, то (Con $C_m$, $\subseteq$) – нижняя полурешетка.

Найдена высота конгруэнции $\theta$ в полурешетке (Con $C_m$, $\subseteq$) и длина полурешетки (Con $C_m$, $\subseteq$).

**Теорема 8.** В полурешетке (Con $C_m$, $\subseteq$) высота конгруэнции $\theta$ равна $h(\theta) = m–c(\theta)$, где $c(\theta)$ – число классов конгруэнции $\theta$.

**Теорема 9.** Полурешетка (Con $C_m$, $\subseteq$) имеет длину $m$–2, если $m$ – четное, и длину $m$–3, если $m$ – нечетное.

**Теорема 10.** Конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $C_m$, $\subseteq$), тогда и только тогда, когда факторграф $C_m/\theta$ будет полным графом.

Главным идеалом, порожденным конгруэнцией $\theta$, называется подмножество полурешетки (Con $C_m$, $\subseteq$), образуемое всеми конгруэнциями $\theta^*$ такими, что $\theta^* \subseteq \theta$. Очевидно, что главный идеал является решеткой.

**Теорема 11.** Главные идеалы, порожденные конгруэнциями одного типа в полурешетке (Con $C_m$, $\subseteq$), являются изоморфными решетками.

Так же, как и для цепи $P_m$, подсчитано количество элементов главного идеала Id $\theta$, порожденного конгруэнцией $\theta$ типа $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$: $B(t_1)B(t_2) \ldots B(t_n)$, количество коатомов главного идеала $s_2(t_1,2)+s_2(t_2,2)+\ldots+s_2(t_n,2) = \sum_{i=1}^{n} s_2(t_i,2)$ и количество атомов главного идеала $C_{t_1}^2+C_{t_2}^2+\ldots+C_{t_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} C_{t_i}^2$.

Конгруэнция $\theta$ четного цикла $C_m$ называется правильной, если $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – вершины цикла $C_m$ одной четности). Обозначим множество правильных конгруэнций через Con$_{\text{пр}}$ $C_m$. Определим четную конгруэнцию цикла $C_m$ как такую конгруэнцию $\theta$, что $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – четные вершины цикла $C_m$), а нечетную конгруэнцию $\theta$, как $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – нечетные вершины цикла $C_m$). Обозначим множество четных конгруэнций через Con$_{\text{ч}}$ $C_m$. Аналогично определим множество нечетных конгруэнций Con$_{\text{н}}$ $C_m$.

Рассмотрим полурешетку конгруэнций четного цикла $C_m$. Так как (Con$_{\text{пр}}$ $C_m$, $\subseteq$) является нижней полурешеткой и в ней есть наибольший элемент, то (Con$_{\text{пр}}$ $C_m$, $\subseteq$) – решетка (наибольшим элементом в (Con$_{\text{пр}}$ $C_m$, $\subseteq$), очевидно, будет конгруэнция с двумя классами, в одном классе которой будут все четные вершины цикла $C_m$, в другом – все нечетные).

**Теорема 12.** Con$_{\text{пр}}$ $C_m \cong$ Con$_{\text{ч}}$ $C_m \times$ Con$_{\text{н}}$ $C_m$.

Согласно Пудлак и Тума [36], так же, как и для цепи, имеет место

**Теорема 13.** Любая конечная решетка вложима в решетку четных конгруэнций подходящего четного цикла.

Обозначим совокупность всех $\delta$-конгруэнций цикла $C_m$ через Con$_\delta$ $C_m$.

Так как для любых двух элементов $\theta_{d_1}$ и $\theta_{d_2}$ в упорядоченном множестве (Con$_\delta$ $C_m$, $\subseteq$) существует $\inf(\theta_{d_1}, \theta_{d_2}) = \theta_{d_1} \cap \theta_{d_2}$, то (Con$_\delta$ $C_m$, $\subseteq$) – нижняя полурешетка.

**Теорема 14.** Полурешетка циклических $\delta$-конгруэнций цикла $C_m$ дуально изоморфна полурешетке неединичных делителей числа $m$.

<u>Заключение.</u> В заключении подводятся итоги исследований и формулируются основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Приложение 1. Здесь указываются все конгруэнции и факторграфы цепей $P_2$, $P_3$, $P_4$ и $P_5$, а также все неизоморфные факторграфы цепей $P_2$, $P_3$, $P_4$ и $P_5$.

Приложение 2. Здесь указываются все конгруэнции и факторграфы циклов $C_4$, $C_5$ и $C_6$, а также все неизоморфные факторграфы циклов $C_4$, $C_5$ и $C_6$.

Приложение 3. Здесь показаны диаграммы полурешеток конгруэнций для цепей $P_2$, $P_3$, $P_4$ и $P_5$.

Приложение 4. Здесь показаны диаграммы полурешеток конгруэнций для циклов $C_4$, $C_5$ и $C_6$.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю В.Н. Салию за помощь и внимание к работе.

# ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА КОНГРУЭНЦИЙ ЦЕПЕЙ И ЦИКЛОВ

## § 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под ориентированным графом (далее орграфом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где $V$ – конечное непустое множество, а $\alpha$ – отношение на $V$. Множество $V$ называется множеством вершин, отношение $\alpha$ – отношением смежности, а пары, входящие в $\alpha$, дугами орграфа $G$. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина $v$ смежна с вершиной $u$.

Пусть $\varepsilon$ – некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин $V$. Фактографом орграфа $G$ по эквивалентности $\varepsilon$ называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где $V/\varepsilon$ – множество блоков эквивалентности $\varepsilon$, а $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)): (\exists u_1 \in \varepsilon(v_1), \exists u_2 \in \varepsilon(v_2))((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть $K$ – некоторый класс орграфов. Конгруэнцией $K$-графа $G = (V, \alpha)$ называется такое отношение эквивалентности $\theta$ на $V$, что фактограф $G/\theta$ является $K$-графом.

Возьмём в качестве класса $K$ класс неориентированных графов.

Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, $\alpha$ – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин $V$.

В неориентированном графе пара встречных дуг $(u, v)$, $(v, u)$ рассматривается как один элемент графа, называемый ребром $\{u, v\}$. Антирефлексивность обеспечивает отсутствие петель в графе $G$, то есть ребер с совпадающими началом и концом. Ребро $x$, соединяющее вершины $u$ и $v$, называют инцидентным вершине $u$ и вершине $v$. При изображении неориентированного графа ребро изображается ненаправленной линией.

Путем в графе $G = (V, \alpha)$ называется последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза. При этом считается, что оба конца каждого ребра, кроме первого и последнего, являются концами соседних с ним ребер пути. Говорят, что путь проходит через вершины, соединенные его ребрами.

Путь в графе удобно задавать перечислением входящих в него вершин в порядке их прохождения.

Если начальная и конечная вершины пути совпадают, путь называется циклическим.

Путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его ребрам, по определению, является простым.

Простой циклический путь называется циклом. Цикл с $m$ ребрами будем обозначать $C_m$. В цикле $C_m$ вершины обозначены натуральными числами 1, …, $m$ следующим образом: возьмем произвольную вершину $v_i$ цикла $C_m$ обозначим её 1, далее двигаясь по часовой стрелке, будем обозначать вершины цикла числами 2, …, $m$, пока всем вершинам цикла не будут присвоены метки.

Если простой путь не является циклом, в нем существуют вершины, принадлежащие только одному ребру этого пути. Очевидно, что таких вершин точно две. Их называют концами данного пути, а сам путь – цепью, соединяющей указанные вершины. Цепь с $m$ ребрами будем обозначать $P_m$. В цепи $P_m$ вершины пронумерованы натуральными числами 0, 1, …, $m$ в порядке их прохождения.

Вершины $u$ и $v$ графа $G$ называются связанными, если в графе $G$ существует проходящий через них путь. Довольно легко заметить, что две разные вершины будут связанными тогда и только тогда, когда в графе найдется соединяющая их цепь. Считается, что каждая вершина связана с собой. Если вершины $u$ и $v$ связаны, то наименьшая из длин цепей, соединяющих $u$ и $v$, называется расстоянием между этими вершинами.

Очевидно, что отношение связанности является эквивалентностью на множестве вершин графа. Классы этого отношения называются компонентами связности графа. Граф с универсальным отношением связанности называется связным. В дальнейшем мы будем рассматривать только связные графы.

Звезда – это граф, все ребра которого инцидентны одной и той же вершине. Звезду с $m$ ребрами будем обозначать $S_m$.

Граф называется полным, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с $n$ вершинами обозначается символом $K_n$. Каждая его вершина имеет степень $n$–1. Число ребер в полном графе $K_n$ равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Путь длины $m$ в $m$-реберном графе $G$ называется эйлеровым путем, а граф, в котором существует циклический эйлеров путь – эйлеровым графом. Эйлеров путь проходит по каждому ребру графа точно один раз, но одна и та же вершина может встретиться неоднократно.

Мультиграфом называется граф, в котором может быть пара вершин, которая соединена более чем одним ребром.

Пусть $a$, $m \in \mathbf{Z}$, $a > 1$. Говорят, что число $a$ делится на число $m$ с остатком $r$, если существует такое $k \in \mathbf{Z}$, что $a = km+r$, при этом $0 \leq r < m$.

Пусть $a$, $b$, $m \in \mathbf{Z}$, $m > 1$. Говорят, что число $a$ сравнимо с $b$ по модулю $m$, если $a$ и $b$ при делении на $m$ дают одинаковые остатки. Запись этого факта выглядит так: $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

Пусть $a$ – натуральное число. Классом вычетов $\bar{a}$ по модулю $m$ называется множество чисел $\bar{a} = \{x \equiv a(\mathrm{mod}\, m), x \in Z\}$, или другими словами, множеством, состоящим из целых чисел, которые дают остаток $a$ при делении на $m$.

Множество вершин графа называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

**Теорема 1.** Отношение эквивалентности $\theta$ на множестве вершин графа $G = (V, \alpha)$ тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый $\theta$-класс образует в $G$ независимое подмножество.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\theta$ – конгруэнция графа $G = (V, \alpha)$. Поскольку факторграф $G/\theta$ не содержит петель, то $(u, v) \notin \alpha$ для всех $u$, $v \in V$ таких, что $(u,v) \in \theta$. Следовательно, $\theta$-классы являются независимыми подмножествами графа $G$.

Достаточность. Пусть отношение эквивалентности $\theta \subseteq V \times V$ обладает свойством, указанным в условии теоремы. Рассмотрим факторграф $G/\theta$. Тогда если $(u, v) \in \theta$, то $(u, v) \notin \alpha$, то есть в нашем факторграфе не будет петель, а это значит, что отношение эквивалентности $\theta$ является конгруэнцией. □

Известна следующая задача о факторизации: можно ли для заданного графа сказать, является ли он факторграфом другого заданного графа? Эта задача является NP – полной.

Например, возьмем пятиреберную цепь $P_5$. Пятиреберный цикл $C_5$ будет её факторграфом, а четырехконечная звезда $S_4$ – нет (Рисунок 1). Заметим, что цикл $C_5$ получается путем отождествления первой и последних вершин цепи. $P_5$. Что касается звезды $S_4$, то далее докажем следствие 2 из теоремы 7, согласно которому звезда $S_4$ не является факторграфом цепи $P_5$.

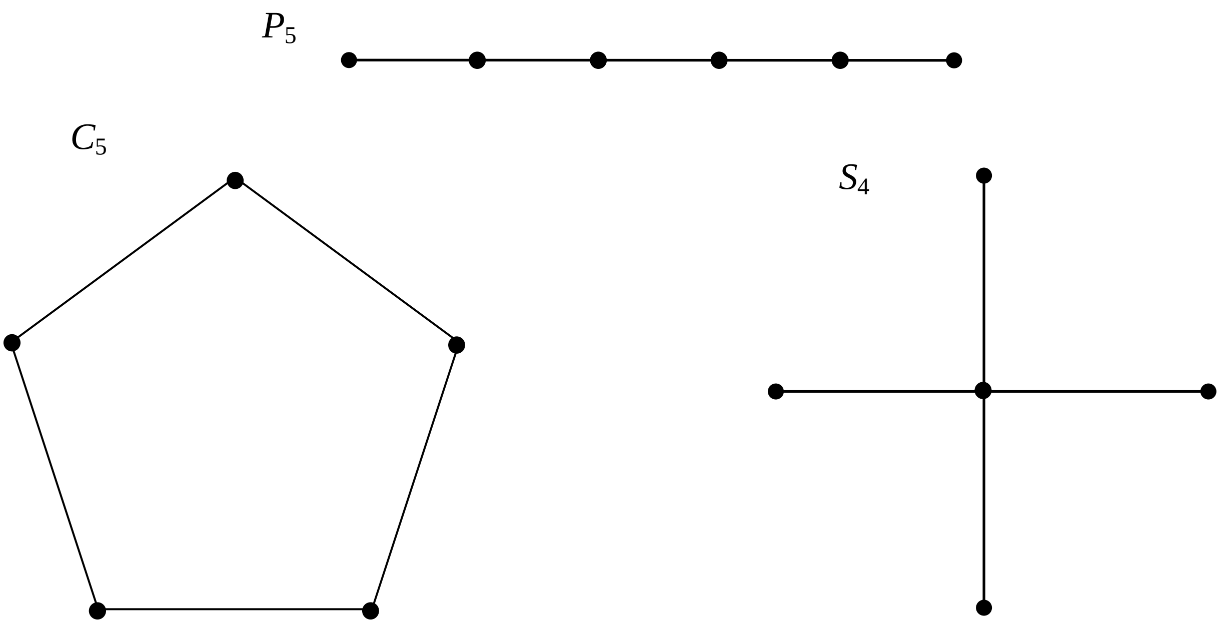



Рисунок 1

Так как задача о факторизации для произвольного графа является NP – полной, то мы можем выделять определенные классы графов и рассматривать уже для заданного класса задачу о факторизации. В данном случае возможно получение конкретных результатов. В качестве таких классов графов будем рассматривать цепи и циклы.

## § 1. КОНГРУЭНЦИИ ЦЕПЕЙ

Пусть дана $m$–реберная цепь. Какие графы являются ее фактографами?

Маршрут в связном графе $G$ называется обходом, если он содержит все ребра графа $G$. Длиной маршрута называется количество ребер, содержащихся в данном маршруте.

**Теорема 2.** Связный граф $G$ тогда и только тогда является фактографом $m$-реберной цепи, когда в нем есть обход длины $m$.

Доказательство. Необходимость. Пусть связный граф $G$ является фактографом $m$-реберной цепи $P_m$ по конгруэнции $\theta$. Покажем, что в нем есть обход длины $m$.

В цепи $P_m$ вершины пронумерованы натуральными числами 0, 1, …, $m$.

Каждая вершина графа $G$ является $\theta$-классом. При этом $\theta(i)$ и $\theta(j)$ смежны в $G$ тогда и только тогда, когда существуют $i' \in \theta(i)$ и $j' \in \theta(j)$ такие, что $|i'–j'| = 1$.

Рассмотрим в $G$ маршрут $M$: $\theta(0)$, $\theta(1)$, …, $\theta(m)$. Покажем, что это – обход, т.е. любое ребро графа $G$ входит в состав маршрута. В самом деле, пусть $\{\theta(k), \theta(l)\}$ – ребро в $G$. Так как $\theta(k)$ и $\theta(l)$ смежны в $G$, то найдутся $k' \in \theta(k)$ и $l' \in \theta(l)$ такие, что $k'$ и $l'$ смежны в цепи $P_m$, т. е. $|k'–l'| = 1$. Пусть $l' = k'+1$. Тогда в $M$ встретится фрагмент …, $\theta(k'–1)$, $\theta(k')$, $\theta(l')$, …, и значит, ребро $\{\theta(k), \theta(l)\}$ входит в состав $M$. Таким образом, $M$ – обход и его длина равна $m$.

Достаточность. Пусть $G$ – произвольный связный граф и в нем есть обход длины $m$. Построим цепь, фактографом которой является граф $G$.

Так как в графе $G$ есть обход длины $m$, то каждая вершина при нумерации вершин вдоль обхода получит одну или более меток из натуральных чисел 0, 1, …, $m$–1, $m$.

Наибольшая метка равна $m$. В $m$-реберной цепи $P_m$, вершины которой пронумерованы натуральными числами 0, 1 ,…, $m$–1, $m$, рассмотрим отношение $(i, j) \in \theta :\Leftrightarrow$ ($i$ и $j$ – метки одной и той же вершины графа $G$).

Очевидно, что отношение $\theta$ – эквивалентность на множестве вершин цепи.

Пусть $(i, j) \in \theta$ и $i < j$, это означает, что при прохождении обхода некоторая вершина $v$ графа $G$ встретилась на шаге $i$, а затем на шаге $j$. Понятно, что $j \geq i+2$. Следовательно, вершины $i$ и $j$ не являются смежными в цепи $P_m$. Это означает, что все $\theta$-классы являются независимыми подмножествами, и значит, $\theta$ – конгруэнция цепи $P_m$.

Покажем, что граф $G$ изоморфен факторграфу ${}^{P_m}\!/_{\theta}$.

Каждой вершине $v$ графа $G$ сопоставим множество всех её меток. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между вершинами графа $G$ и $\theta$-классами. Покажем, что это соответствие сохраняет отношение смежности.

Пусть вершины $u$ и $v$ смежны в графе $G$.

Это означает, что при обходе они были пройдены последовательно, например, после вершины $u$ мы пришли в вершину $v$. Тогда существуют такие метки $i$ у вершины $u$ и $j$ у вершины $v$, что $j = i+1$. Отсюда следует, что класс $\theta(i)$ и класс $\theta(j)$ смежны в факторграфе ${}^{P_m}\!/_{\theta}$.

С другой стороны, если класс $\theta(i)$ и класс $\theta(j)$ смежны в факторграфе ${}^{P_m}\!/_{\theta}$, то в $P_m$ существуют вершины $i' \in \theta(i)$ и $j' \in \theta(j)$ такие, что $|i'-j'| = 1$.

Это означает, что в графе $G$ вершины, соответствующие классам $\theta(i)$ и $\theta(j)$, являются смежными.

Таким образом, граф $G$ изоморфен факторграфу ${}^{P_m}\!/_{\theta}$.□

**Теорема 3.** Любой связный граф является факторграфом подходящей цепи.

Доказательство. Докажем теорему с помощью метода, восходящего к Тарри [17].

Пусть $G = (V, \alpha)$ – связный граф с $m$ ребрами. Покажем, что в графе $G$ можно построить циклический маршрут, содержащий все ребра графа в точности два раза, по одному в каждом направлении, то есть можно построить обход длины $2m$.

Построим следующий маршрут $R$.

Пусть $v_0$ – произвольная вершина графа $G$, начальная вершина маршрута $R$. Так как $G$ – связный граф, то существует вершина $v_1$, смежная с $v_0$. Ребро $\{v_0 , v_1\}$ может быть пройдено либо от $v_0$ к $v_1$, в этом случае отмечаем его стрелкой вида «→», либо от $v_1$ к $v_0$, тогда отмечаем стрелкой вида «←». Так как $v_0$ – начальная вершина маршрута $R$, пройдем ребро $v_0v_1$, отмечая его стрелкой «→». Так как вершина $v_1$ смежна с некоторой вершиной $v_2$ в силу связности $G$, пройдем ребро $v_1v_2$. Каждый раз, попадая в вершину $v_i$, проходим такое ребро $v_iv_j$ ($i \neq j$ и $i, j = \overline{1,n}$), которое либо не проходили ни разу (не отмеченное никакой стрелкой), либо, по которому прибыли в эту вершину (отмеченное только стрелкой вида «→»). И если ребро $v_iv_j$ ($i \neq j$ и $i, j = \overline{1,n}$) впервые пройдено, то ребро $v_jv_i$ будет пройдено в том и только в том случае, когда оно останется единственным возможным выходом из вершины $v_j$.

Таким, образом, строим маршрут $R$, пока это возможно. Заметим, что каждую вершину $v_i$ графа $G$ можно использовать в качестве входа и выхода одинаковое число раз. Следовательно, маршрут $R$ может начаться и закончиться только в одной и той же вершине $v_0$.

Итак, $R = v_0v_1\, v_1v_2\ldots.\, v_iv_j\ldots\, v_1v_0$.

Вершина $v_0$ – начальная и конечная вершина маршрута $R$. Покажем, что маршрут $R$ является обходом графа $G$, т.е. что он содержит все ребра графа $G$, и имеет длину $2m$. Итак, $v_0$ – конечная вершина маршрута $R$, в противном случае наш маршрут продолжался бы. Ребер, инцидентных с вершиной $v_0$ и отмеченных только стрелкой вида «→», нет, так как число входов равно числу выходов для вершины $v_0$. Видим, что ребро $\{v_0, v_1\}$ пройдено от $v_0$ к $v_1$ и от $v_1$ к $v_0$ в маршруте $R$. Таким образом, все ребра, инцидентные вершине $v_1$, также пройдены в обоих направлениях в маршруте $R$, так как ребро $\{v_0, v_1\}$, по которому впервые попали в вершину $v_1$ (пройдено от $v_0$ к $v_1$), будет пройдено от $v_1$ к $v_0$ в маршруте $R$ только тогда, когда оно останется единственным выходом из вершины $v_1$.

Аналогично будем действовать с ребром $\{v_1, v_2\}$ и следующей вершиной $v_1$ и т. д. Так как граф $G$ связный и имеет конечное число вершин и ребер, то такие рассуждения можно применить ко всем его вершинам и ребрам.

Таким образом, показали, что маршрут $R$ является обходом, поскольку содержит все ребра графа $G$. □

Через Con $P_m$ обозначим множество всех конгруэнций цепи $P_m$, а через $\mathrm{E}(m)$ – множество всех эквивалентностей на $m$-элементном множестве. Количество элементов в $\mathrm{E}(m)$ называется числом Белла $B(m)$.

Числом Стирлинга второго рода $s_2(m,k)$ называется количество всех эквивалентностей с $k$ классами на $m$-элементном множестве. Очевидно, что $\sum_{n=1}^{m} s_2(m,n) = B(m)$. Известно, что $s_2(m,k) = s_2(m–1,k–1)+k\cdot s_2(m–1,k)$, для $0 < k < m$ (рекуррентная формула для чисел Стирлинга второго рода). Числа Белла и Стирлинга для графов рассматривались, например, в работе [24].

Пусть $c(P_m,k)$ – количество всех конгруэнций цепи $P_m$ с $k$ классами. Очевидно, что если Con $P_m$ – множество всех конгруэнций цепи $P_m$, то $|\mathrm{Con}\ P_m| = \sum_{k=2}^{m+1} c(P_\mathrm{m},k)$.

**Теорема 4.** $|\mathrm{Con}\ P_m| = |\mathrm{E}(m)|$.

Доказательство. С помощью математической индукции докажем равенство $c(P_m,k+1) = s_2(m,k)$ для $1 \le k \le m$.

Базис индукции: $m = 2$. Цепь $P_2$ имеет две конгруэнции: одна с двумя классами $\{0,2\},\{1\}$, вторая с тремя классами $\{0\},\{1\},\{2\}$, таким образом, $c(P_2,2) = 1$ и $c(P_2,3) = 1$. Так как двухэлементное множество $\{0,1\}$ имеет два разбиение: одно с одним блоком $\{0,1\}$, второе с двумя блоками $\{0\},\{1\}$, то $s_2(2,1) = 1$, $s_2(2,2) = 1$.

Шаг индукции.

Предположим, что $c(P_m,k+1) = s_2(m,k)$, $1 \le k \le m$, верно для цепи $P_m$ и цепей длины меньше $m$, и покажем, что $c(P_{m+1},k+1) = s_2(m+1,k)$, $1 \le k \le m+1$.`

Заметим, что из каждой конгруэнции $\theta$ с $k+1$ классами цепи $P_m$ мы можем получить конгруэнции с $k+1$ классами цепи $P_{m+1}$ двумя способами.

Первый способ: добавив в один из $k$ $\theta$-классов (кроме класса $\theta(m)$) вершину $m+1$, получаем разбиение множества вершин цепи $P_{m+1}$, все $k+1$ классов которого будут независимыми, и, следовательно, разбиение является конгруэнцией цепи $P_{m+1}$. Таких возможностей имеется $kc(P_m,k+1)$.

Второй способ: создание нового класса $\{m+1\}$, который вместе с классами конгруэнции $\theta$ образует разбиение множества вершин цепи $P_{m+1}$. У этого разбиения все классы будут независимыми подмножествами, т.е. мы получаем конгруэнцию цепи $P_{m+1}$. Таким методом может быть получено $c(P_m,k)$ конгруэнций цепи $P_{m+1}$.

В итоге получаем, что $c(P_{m+1},k+1) = c(P_m,k) + kc(P_m,k+1)$.

Тогда из предположения индукции и согласно рекуррентной формуле для чисел Стирлинга второго рода: $c(P_{m+1},k+1) = c(P_m,k) + kc(P_m,k+1) = s_2(m,k-1)+ + ks_2(m,k) = s_2(m+1,k)$. Таким образом, показано, что равенство $c(P_m,k+1) = s_2(m,k)$, $1 \le k \le m$ верно.

Докажем теперь, что $|\mathrm{Con}\ P_m| = |\mathrm{E}(m)|$. В самом деле,

$$|\mathrm{Con}\ P_m| = \sum_{k=2}^{m+1} c(P_{\mathrm{m}},k) = \sum_{k=1}^{m} c(P_{\mathrm{m}},k+1) = \sum_{k=1}^{m} s_2(m,k) = |\mathrm{E}(m)|. \ \square$$

Данные о количестве конгруэнций и факторграфов для цепей $P_1$, $P_2$, …., $P_{10}$ представлены в следующей таблице.

| $m$ | $\lvert\mathrm{Con}\ P_m\rvert$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 5 |
| 4 | 15 |
| 5 | 52 |

| | |
|---|---|
| 6 | 203 |
| 7 | 877 |
| 8 | 4140 |
| 9 | 21147 |
| 10 | 115975 |

Все конгруэнции и факторграфы цепей $P_2$, $P_3$, $P_4$ и $P_5$ представлены в приложении 1. Через $q(P_m)$ обозначим количество различных (т.е. неизоморфных) факторграфов цепи $P_m$. Как видно из рассматриваемых примеров в приложении 1, $q(P_2) = 2$; $q(P_3) = 4$; $q(P_4) = 8$; $q(P_5) = 15$. Неизвестно, чему равно число $q(P_m)$ для произвольного $m$.

Определим цепную конгруэнцию цепи как такую конгруэнцию, факторграфом по которой будет цепь.

**Теорема 5.** Количество цепных конгруэнций $m$-реберной цепи $P_m$ равно $2^{m-1}$.

Доказательство. Проведем доказательство с помощью математической индукции.

Рассмотрим 1-реберную цепь $P_1$. Она имеет единственную конгруэнцию – тождественное отношение на множестве вершин. Очевидно, что любая цепь является своим собственным факторграфом по тождественной конгруэнции.

Количество цепных конгруэнций для цепи $P_2$ равно двум, а именно это будут тождественная конгруэнция и конгруэнция с классами $\{0,2\},\{1\}$.

Пусть дана $k$-реберная цепь $P_k$. По предположению индукции она имеет $2^{k-1}$ цепных конгруэнций.

Покажем, что каждая цепная конгруэнция цепи $P_k$ дает две цепные конгруэнции $(k+1)$-реберной цепи $P_{k+1}$.

Пусть $\theta$ – конгруэнция цепи $P_k$, факторграфом по которой является цепь $P_n$, $1 \le n \le k$. У всякой конгруэнции цепи $P_k$ классы являются независимыми подмножествами, то есть $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – несмежные вершины цепи $P_k$).

Рассмотрим случай, когда класс $\theta(k)$ конгруэнции $\theta$ цепи $P_k$ имеет два соседних с ним класса в факторцепи $P_n$.

Добавив в один из соседних $\theta$-классов вершину $k+1$, получаем разбиение множества вершин цепи $P_{k+1}$, все классы которого будут независимыми, так как класс $\theta(k+1)$ не имеет вершин, смежных с $k+1$, поскольку все вершины, кроме $k+1$, имеют метки меньшие $k$. То есть мы получили конгруэнцию цепи $P_{k+1}$.

Факторграфом по этой конгруэнции будет цепь $P_n$.

Точно так же, присоединяя к другому соседнему с $\theta(k)$ классу вершину $k+1$, получим вторую конгруэнцию цепи $P_{k+1}$, факторграфом по которой будет цепь $P_n$.

В случае, когда класс $\theta(k)$ имеет один соседний с ним класс в $P_n$, мы можем создать новый класс $\{k+1\}$, который вместе с вершинами цепи $P_n$ образует цепь $P_{n+1}$, если считать новый класс смежным в ней с классом $\theta(k)$. У полученного разбиения все классы будут независимыми подмножествами. Таким образом, мы получаем конгруэнцию цепи $P_{k+1}$, факторграфом по которой будет цепь $P_{n+1}$.

Итак, получаем, что каждая цепная конгруэнция цепи $P_k$ дает две цепные конгруэнции цепи $P_{k+1}$.

Отсюда следует, что количество цепных конгруэнций $(k+1)$-реберной цепи $P_{k+1}$ равно $2^k$.

Согласно принципу индукции, теорема доказана. □

К числу конгруэнций цепи $P_m$ относятся особые конгруэнции, связанные с делителями числа $m+1$.

В контексте таких конгруэнций, для удобства будем рассматривать цепь $P_n$, где $n = m+1$.

Пусть $d$ – делитель числа $n$, т.е. $n = dk$. Разобьем множество вершин цепи $P_n$ на классы вычетов по модулю $d$. Получим разбиение $\theta_d$ с блоками $\{1,$

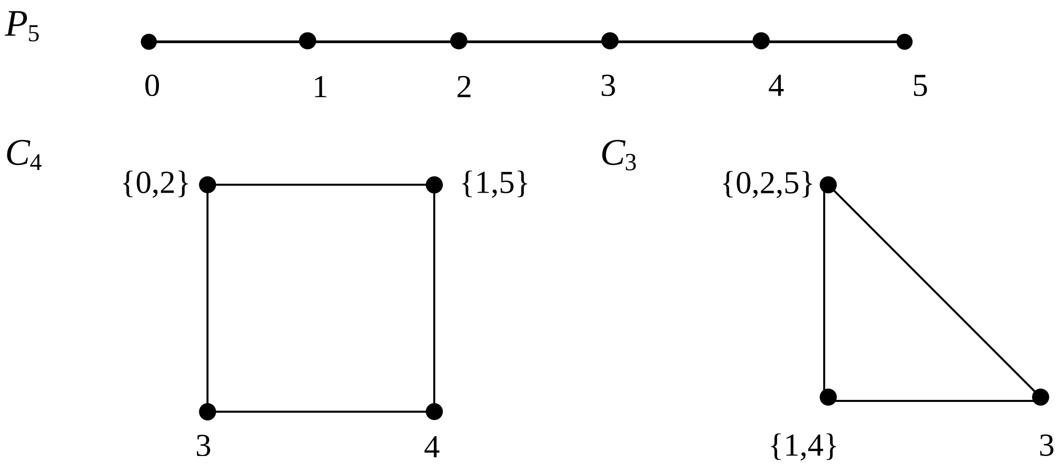
$1+d$, $1+2d$, …, $1+d(k–1)\}$, $\{2, 2+d, 2+2d, …, 2+d(k–1)\}$, …, $\{d, 2d, 3d, …, d+d(k–1)\}$. Так как у этого разбиения все классы будут независимыми подмножествами, то мы получаем конгруэнцию цепи $P_n$. Конгруэнции вида $\theta_d$ будем называть $\delta$-конгруэнциями цепи $P_n$.

Количество классов $\delta$-конгруэнции $\theta_d$ цепи $P_n$ будет $d$.

Заметим, что если $d = 1$, то разбиение $\theta_d$ не является конгруэнцией цепи $P_n$, так как в этом случае все вершины цепи попадут в один единственный класс, и, очевидно, что он не будет независимым подмножеством. Таким образом, количество $\delta$-конгруэнций цепи $P_n$ будет $\tau(n)–1$, т.е. количество нееденичных делителей числа $n$.

Определим циклическую конгруэнцию цепи как такую конгруэнцию, факторграфом по которой будет цикл.

Пример 1.




Следующая теорема показывает, что все нетождественные $\delta$-конгруэнции цепи $P_n$ являются циклическими.

**Теорема 6**. Пусть $\theta_d$, $d \neq n$, является $\delta$-конгруэнцией цепи $P_n$. Тогда факторграф $P_n/\theta_d$ будет циклом.

Доказательство.

Каждая вершина графа $P_n/\theta_d$ является $\theta_d$-классом. При этом $\theta_d(i)$ и $\theta_d(j)$ смежны в $P_n/\theta_d$ тогда и только тогда, когда существуют $i' \in \theta_d(i)$ и $j' \in \theta_d(j)$ такие, что $|i'–j'| = 1$.

Пусть $d$ – делитель числа $n$, $n = dk$. Конгруэнция $\theta_d$ имеет $d$ классов, а именно $\theta_d(1)$, $\theta_d(2)$, …, $\theta_d(d)$. Покажем, что $\theta_d(i)$, $2 \le i \le d–1$, смежна с $\theta_d(i–1)$ и смежна с $\theta_d(i+1)$ в $P_n/\theta_d$.

Классы $\theta_d(i–1)$, $\theta_d(i)$ и $\theta_d(i+1)$ в $P_n/\theta_d$ будут иметь следующий вид $\{i–1, i–1+d, i–1+2d, …, i–1+d(k–1)\}$, $\{i, i+d, i+2d, …, i+d(k–1)\}$, $\{i+1, i+1+d, i+1+2d, …, i+1+d(k–1)\}$. Так как найдутся $i–1+dk^* \in \theta_d(i–1)$ и $i+dk' \in \theta_d(i)$, $k^*,k' = 1, …, k–1$ такие, что $i–1+dk^*$ и $i+dk'$ смежны в цепи $P_n$, то $\theta_d(i–1)$ и $\theta_d(i)$ смежны в $P_n/\theta_d$. Аналогичным образом рассмотрим классы $\theta_d(i)$ и $\theta_d(i+1)$. Так как найдутся $i+dk^* \in \theta_d(i)$ и $i+1+dk' \in \theta_d(i+1)$, $k^*,k' = 1, …, k–1$ такие, что $i+dk^*$ и $i+1+dk'$ смежны в цепи $P_n$, то $\theta_d(i)$ и $\theta_d(i+1)$ смежны в $P_n/\theta_d$. При этом, классы $\theta_d(i–1)$ и $\theta_d(i+1)$ не смежны, так как $|i+1+dk^*–i+1+dk'| \ge 2$.

Покажем, что $\theta_d(1)$ и $\theta_d(d)$ смежны в $P_n/\theta_d$. Так как $d \ne n$, то количество элементов в каждом классе конгруэнции $\theta_d$ будет больше одного. Таким образом, в классе $\theta_d(1)$ всегда найдется элемент $d+1$, а в классе $\theta_d(d)$ – элемент $d$. Очевидно, что $d$ и $d+1$ будут смежными в цепи $P_n$, тогда классы $\theta_d(1)$ и $\theta_d(d)$ смежны в $P_n/\theta_d$.

Таким образом, получаем, что в графе $P_n/\theta_d$ каждая вершина соединена ребром со следующей в последовательности вершин, т.е. каждая вершина графа инцидентна двум его ребрам. Таким образом, получаем, что граф $P_n/\theta_d$ является циклом. □

Пример 2. На рисунке 2 изображены два факторграфа по циклическим конгруэнциям цепи $P_5$. Заметим, что цикл слева является факторграфом по циклической $\delta$-конгруэнции цепи $P_5$, а цикл справа – нет.

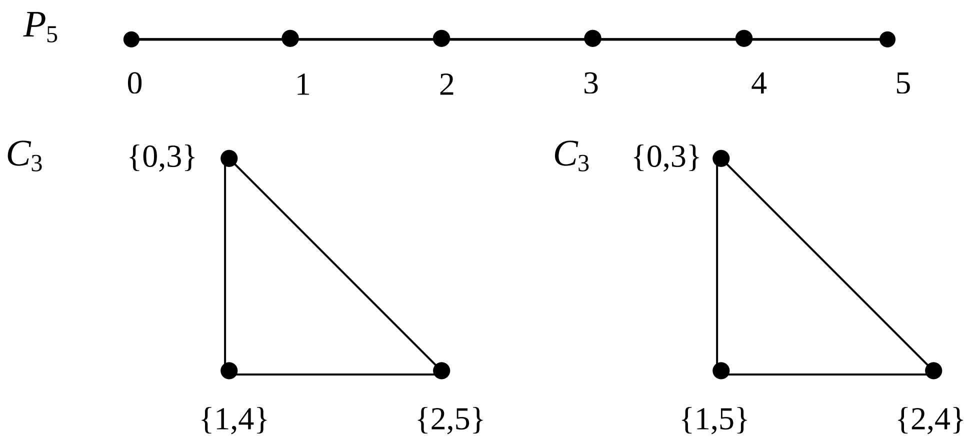



Рисунок 2

Данные о количестве циклических конгруэнций и $\delta$-конгруэнций для цепей $P_2$, $P_3$, $P_4$ и $P_5$ представлены в следующей таблице.

| $m$ | Количество циклических конгруэнций | Количество $\delta$-конгруэнций |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2 |
| 4 | 5 | 1 |
| 5 | 14 | 3 |

Одной из проблем является следующая: для данного связного графа $G$ найти цепь с минимальным возможным числом ребер, факторграфом которой является данный граф. Обозначим длину такой цепи через $p(G)$.

Задача китайского почтальона для произвольного связного графа [12] состоит в нахождении кратчайшего обхода, начинающегося и заканчивающегося в одной и той же вершине. Другими словами, строится эйлеров цикл в графе таким образом, что ребра в этом цикле могут «повторяться» в случае необходимости.

Используя один из алгоритмов, связанных с этой задачей [22], докажем следующую теорему.

**Теорема 7.** Пусть $G$ – связный граф. Тогда $p(G) = m+l–k$, где $m$ – количество ребер графа $G$, $l$ – количество ребер в минимальном цепном паросочетании на множестве нечетных вершин графа $G$, $k$ – максимальная из длин цепей в таких паросочетаниях.

Доказательство. Пусть дан произвольный связный граф $G$ с $m$ ребрами и $n$ вершинами. Найдем длину наименьшей цепи $P_r$, факторизующейся на $G$. Так как, по теореме 2, связный граф тогда и только тогда является факторграфом $r$-реберной цепи, когда в нем есть обход длины $r$, то найдем длину $r$ минимального обхода $R$.

Рассмотрим случай, когда граф $G$ не эйлеров и не имеет эйлерова пути, поскольку иначе этот граф имеет обход длины $m$. Таким образом, в связном графе $G$ существуют ребра, проходимые в $R$ более чем один раз.

Так как граф $G$ – связный, то построим обход графа $G$, используя алгоритм решения задачи китайского почтальона.

Пусть $V^*$ – множество вершин графа $G$, имеющих нечетную степень. Так как граф $G$ не эйлеров, то количество вершин, имеющих нечетную степень, будет больше двух и число таких вершин будет четным.

Пусть $M$ – множество цепей между концевыми вершинами $v_i$ и $v_j$, $v_i,v_j \in V^*$, $i \neq j$, в графе $G$ таких, что никакие две цепи не имеют одинаковых концевых вершин, и ребра, соединяющие различные пары вершин из $V^*$, покрывают все вершины множества $V^*$. Такое множество цепей $M$ называется цепным паросочетанием. Так как количество нечетных вершин четно, что количество таких цепей $\frac{1}{2}|V^*|$.

Следуя [22], строим все минимальные цепные паросочетания на множестве нечетных вершин $V^*$ графа $G$. В силу минимальности никакие две цепи в таком паросочетании не могут иметь общих ребер.

Выберем цепь наибольшей длины из всех минимальных цепных паросочетаний. Пусть это будет цепь длины $k$, соединяющая вершины $u$ и $v$, из цепного паросочетания $M^*$. Далее, удвоим все ребра, входящие в $M^*$, кроме ребер, входящих в цепь максимальной длины.

Таким образом, получим мультиграф $G^*$ с двумя нечетными вершинами $u$ и $v$. Мультиграф $G^*$ имеет эйлеров путь из $u$ в $v$ (или из $v$ в $u$). Следовательно, граф $G$ имеет минимальный обход $R$ длины $m+l–k$, где $l$ – количество ребер в минимальном цепном паросочетании $M^*$ на множестве нечетных вершин $V^*$ графа $G$. Значит, $p(G) = m+l–k$. □

**Следствие 1.** Для полного графа $K_n$ имеем:

3. $p(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$, если $n$ – нечетно;

4. $p(K_n) = \frac{n^2}{2} - 1$, если $n$ – четно.

Доказательство. Первый случай очевиден, так как полный граф с нечетным количеством вершин будет эйлеровым.

Во втором случае используем результат теоремы 7: $p(G) = m+l–k$. Так как все вершины полного графа $K_n$ при четном $n$ являются нечетными, то $l = \frac{n}{2}$. Используя тот факт, что в полном графе каждая вершина соединена со всеми другими, получаем $k = 1$. В итоге имеем $p(G) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} - 1 = \frac{n^2}{2} - 1$.□

**Следствие 2**. Для звезды $S_m$ с $m$ ребрами имеем $p(S_m) = 2m–2$.

Доказательство. Так как у звезды $S_m$ нечетными будут либо все вершины, либо $m$ вершин, то, очевидно, что все ребра звезды $S_m$ входят в минимальное цепное паросочетание на множестве её нечетных вершин, то есть $l = m$. Длина наибольшей цепи в паросочетании будет $k = 2$. Таким образом, $p(G) = m+l–k = = m+m–2 = 2m–2$. □

Пример 3. Возьмем звезду $S_3$. Найдем цепь с наименьшим количеством ребер, которая будет факторизоваться на звезду $S_3$: $p(S_3) = 2m–2 = 2 \cdot 3 – 2 = 4$ (Рисунок 3).

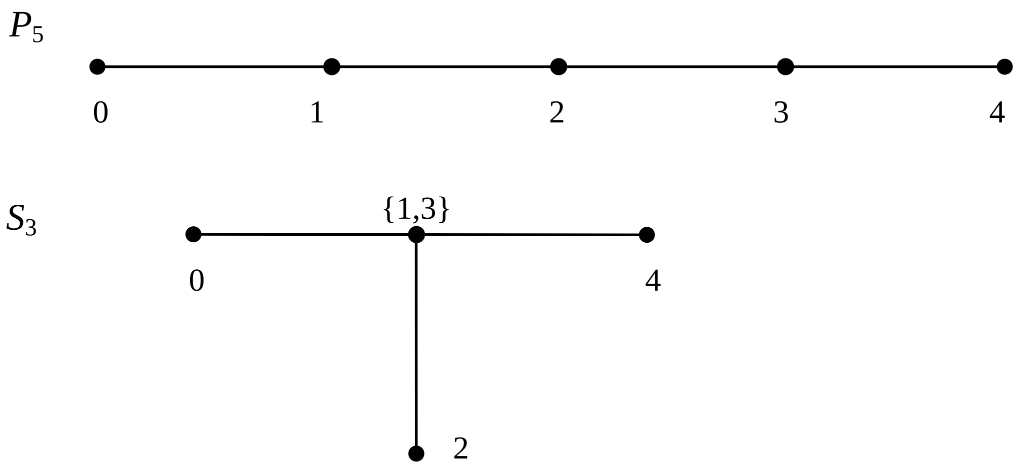



Рисунок 3

Вершина графа, имеющая степень 1, называется концевой или висячей. Вершина $v$ в графе $G$ называется точкой сочленения, если ее удаление увеличивает число компонент связности.

**Теорема 8.** Для связного графа $G$ с $m$ ребрами $m \le p(G) \le 2m–2$.

Доказательство**.** Первое неравенство очевидным образом следует из того, что количество ребер в факторграфе не может превышать количества ребер в исходном графе.

Далее покажем, что в каждом связном графе $G$ с $m$ ребрами существует обход длины $2m–2$.

Согласно алгоритму построения обхода в доказательстве теоремы 3, обход графа $G$ имеет длину $2m$, так как каждое ребро графа $G$ в данном обходе проходилось в обоих направлениях.

Заметим, что мы можем не возвращаться по последнему ребру в исходную вершину, так как оно уже пройдено, т.е. можно получить обход длиной $2m–1$.

Рассмотрим два случая.

а) Граф $G$ имеет висячие вершины.

Возьмем произвольную висячую вершину $u$. Пройдем исходящее из неё ребро, пусть другим его концом будет вершина $v$.

Полученный граф $G^* = G–u$ связный и имеет $m^* = m–1$ ребер. Мы можем организовать его обход с помощью выше описанного метода. Таким образом, мы получаем обход графа $G^*$ длины $2m^*–1 = 2(m–1)–1 = 2m–3$, а обход графа $G$ длины $(2m–3)+1 = 2m–2$.

б) Граф не имеет висячих вершин.

Отметим произвольную вершину $u$, не являющуюся точкой сочленения. Возьмем некоторое исходящее из неё ребро, пусть другим его концом будет вершина $v$.

Граф $G^* = G–u$ связный и имеет $m^* = m–d$ ребер, где $d$ – степень вершины $u$. Организуем обход, как было описано выше, графа $G^*$ из вершины $v$, он будет иметь длину $2(m–d)$.

Вершина $u$ с непройденными ребрами образует $d$-реберную звезду. Обойдем эту звезду, отправляясь из вершины $v$. Согласно следствию 2 из теоремы 7 этот обход имеет длину $2d–2$.

Таким образом, получаем обход графа $G$ длины $2(m–d)+2d–2 = 2m–2d+2d– \quad –2 = 2m–2$.

Заметим, что если в $m$-реберном графе есть эйлеров путь, то этот граф является факторграфом цепи длины $m$ (наименьшая возможная длина для цепи, факторизуемой на $m$-реберный граф). С другой стороны звезда $S_m$, имеющая $m$ ребер, не может быть получена как факторграф цепи, длиной меньше, чем $2m–2$. Следовательно, обе оценки являются точными. □

Граф $T$ тогда и только тогда является деревом, когда в нем выполняется одно из следующих условий:

1) любые две вершины графа $T$ соединены единственной цепью;
2) $T$ – связный граф и число вершин в нем на единицу больше числа ребер: $n = m+1$;
3) $T$ не содержит циклов и $n = m+1$.

Диаметром дерева $T$ называется максимальное расстояние между его вершинами.

**Теорема 9.** Если $T$ – дерево с $m$ ребрами, имеющее диаметр $d$, то $p(T) = 2m—d$.

Доказательство. Любой граф с $m$ ребрами имеет обход длины $2m$ (это было показано выше в доказательстве теоремы 3).

Пусть $R$ – минимальный обход дерева $T$ и пусть его длина $r < 2m$. Значит, в $R$ есть ребро, проходимое один раз. Пусть таких ребер $k$ штук.

Пронумеруем их в порядке обхода $R$.

Покажем, что ребра, проходимые один раз, образуют в $T$ цепь.

Предположим, что это не так.

Пусть ребра $1 = \{u_0, u\}$ и 2 с началом $v$ не инцидентны.

Рассмотрим в составе $R$ маршрут $R(u, v)$. Он содержит цепь $P(u, v)$. Пусть ее первым ребром будет $uu'$.

Ребро $\{u, u'\}$ в обходе $R$ проходится больше одного раза.

Представим обход $R$ в виде $R = R_{in}u_0u\,R_u^1\,uu'\,R_{u'}^1\,u'u\,R_u^2\,uu'\,R_{u'}^2\ldots uu'R_{fin}$, где $R_{in}$ – подмаршрут, соединяющий начальную вершину обхода $R$ с вершиной $u_0$, $R_{fin}$ – подмаршрут, соединяющий вершину $u'$ с конечной вершиной обхода $R$, $R_u^i$ – подмаршруты обхода $R$ с началом и концом в $u$, а $R_{u'}^j$ – с началом и концом в $u'$.

Заметим, что второй раз ребро $\{u, u'\}$ не может быть пройдено от $u$ к $u'$, так как иначе после прохождения ребра от $u$ к $u'$ мы должны попасть из $u'$ в $u$ по некоторому подмаршруту $R(u', u)$ маршрута $R$, а тогда в составе маршрута $uu'R(u', u)$ будет цикл, что невозможно для дерева $T$. Таким образом, в составе $R$ ребро $\{u, u'\}$ второй раз будет проходиться от $u'$ в $u$.

Теперь построим маршрут $R_{in}u_0u\,R_u^1\,R_u^2\ldots R_u^s\,uu'\,R_{u'}^1\,R_{u'}^2\ldots R_{u'}^s\,R_{fin}$. Этот маршрут является обходом, так как он содержит все ребра, пройденные в составе $R$, а значит все ребра дерева $T$. Его длина меньше, чем у $R$, что невозможно, ибо $R$ минимален. Таким образом, получили противоречие. И значит, наше предположение о том, что ребра, проходимые один раз, не образуют в $T$ цепь, неверно. Таким образом, получаем, что в составе обхода $R$ есть цепь $P$, состоящая из ребер, проходимых один раз.

Длина цепи из один раз проходимых ребер равна $k$. Но $k \le d$, так как $d$ – наибольшая длина цепи в дереве $T$.

Пусть $s_{m-k}$ – длина части обхода $R$, проходимая по ребрам кратности $\ge 2$ в $R$. Тогда $2m > r = s_{m-k}+k \ge 2(m-k)+k = 2m-k \ge 2m-d$. Итак, каждый обход дерева $T$ имеет длину не меньше, чем $2m-d$. Следовательно, $2m-d$ – это минимальная возможная длина обхода дерева $T$. Покажем, что обход длины $2m-d$ существует.

Изобразим дерево $T$ следующим образом. Пусть $P_d$ – цепь длины $d$ в дереве $T$, $v_i \in P_d$, $i = \overline{0, d-1}$.

Выберем висячую вершину $v_0 \in P_d$ в качестве корневой. Так как $d$ – расстояние от вершины $v_0$ до наиболее удаленной от нее вершины дерева $T$ (другая висячая вершина цепи $P_d$), припишем уровень $i$ каждой вершине $v_i$ цепи $P_d$, нумеруя их снизу вверх числами 0, 1, …, $d$–1. Каждая вершина $v_i$ может быть смежной с некоторыми вершинами, не входящими в цепь $P_d$, они в свою очередь с другими вершинами, и т.д.

Таким образом, каждая вершина $v_i \in P_d$, $i = \overline{1, d-2}$, является корнем некоторого дерева $T_i$ (среди этих деревьев могут быть пустые).

Построим обход $v_0v_1T_1v_1v_2T_2 \ldots v_{d-3}v_{d-2}\,T_{d-2}v_{d-2}v_{d-1}$.

Согласно доказательству теоремы 3, если граф $G$ – связный, то можно построить циклический маршрут, содержащий все ребра графа в точности два раза, по одному в каждом направлении. Таким образом, каждое дерево $T_i$ имеет гарантированный обход длины, равной удвоенному числу его ребер, причем начинается и заканчивается он в одной и той же вершине $v_i \in P_d$, $i = \overline{1, d-2}$ графа $T$.

Отсюда и из теоремы 2 следует доказываемое утверждение. Получаем, что длина построенного обхода дерева $T$ с $m$ ребрами и диаметром $d$ равна $2m-d$. Причем, этот обход минимален. □

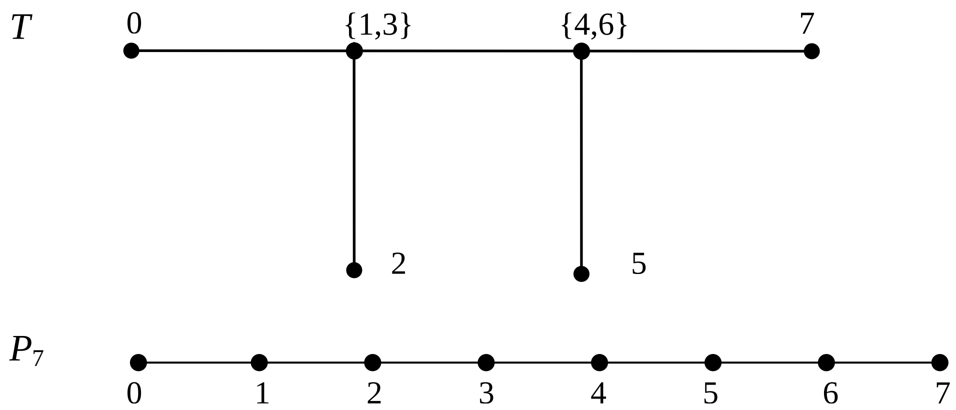



Рисунок 4

Пример 4. Возьмем дерево $T$ (Рисунок 4). Подсчитаем по формуле, доказанной в теореме 9, количество ребер в цепи минимальной длины, факторизующейся на данное дерево: $p(T) = 2m–d = 2 \cdot 5 – 3 = 7$.

## § 2. КОНГРУЭНЦИИ ЦИКЛОВ

Следующая теорема дает описание графов, являющихся факторграфами циклов.

**Теорема 10.** Связный граф $G$ тогда и только тогда является факторграфом $m$-реберного цикла, когда в нем есть циклический обход длины $m$.

Доказательство. Необходимость. Пусть связный граф $G$ является факторграфом $m$-реберного цикла $C_m$ по конгруэнции $\theta$. Покажем, что в нем есть обход длины $m$, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине.

В графе $G$ каждая вершина является $\theta$-классом. Рассмотрим в $G$ циклический маршрут $M$: $\theta(1)$, $\theta(2)$, …, $\theta(m)$, $\theta(1)$. Согласно построениям в доказательстве теоремы 3, такой маршрут существует в любом связном графе. Пусть в $G$ есть ребро $\{\theta(i), \theta(j)\}$. Согласно определению конгруэнции, так как классы $\theta(i)$ и $\theta(j)$ смежны в $G$, то найдутся такие $i' \in \theta(i)$ и $j' \in \theta(j)$, что $i'$ и $j'$ смежны в цикле $C_m$. Пусть $j' = i'+1$. Тогда в составе маршрута $M$ есть последовательность вершин …, $\theta(i'–1)$, $\theta(i')$, $\theta(j')$, …, и, следовательно, ребро

$\{\theta(i), \theta(j)\} \in M$. Таким образом, было показано, что этот маршрут является обходом, так как любое ребро графа $G$ входит в состав маршрута. Получаем, что $M$ – обход длины $m$, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине.

Достаточность. Пусть $G$ – произвольный связный граф, и в нем есть циклический обход длины $m$. Построим цикл, факторграфом которого он является.

Осуществим обход данного графа. Двигаясь по нему, будем помечать вершины в порядке их прохождения натуральными числами. При этом вершина может получить больше одной метки. Пусть обход начнется и закончится в вершине 1.

Пусть наибольшая метка равна $m$. В $m$-вершинном цикле $C_m$, вершины которого пронумерованы натуральными числами 1, 2, …, $m$, рассмотрим отношение $(i, j) \in \theta :\Leftrightarrow i$ и $j$ – метки одной и той же вершины графа $G$.

Очевидно, что отношение $\theta$ – эквивалентность на множестве вершин цикла.

Пусть $(i, j) \in \theta$ и $i < j$, это означает, что при прохождении обхода некоторая вершина $v$ графа $G$ встретилась на шаге $i$, а затем на шаге $j$.

Понятно, что $j \geq i+2$.

Следовательно, вершины $i$ и $j$ не являются смежными в цикле $C_m$.

Это означает, что все $\theta$-классы являются независимыми подмножествами, и значит, $\theta$ – конгруэнция цикла $C_m$.

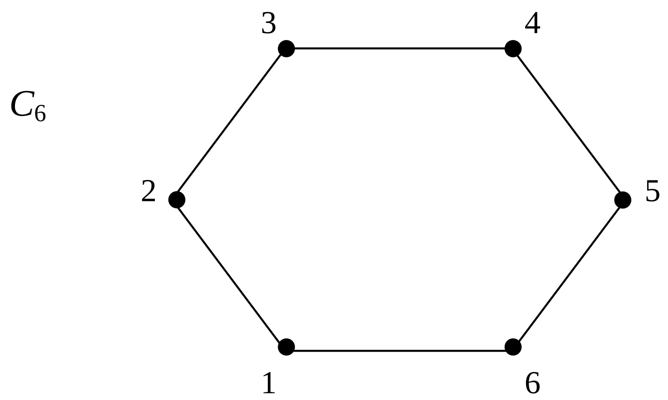
Далее вполне аналогично соответствующему фрагменту доказательство теоремы 2 устанавливаем, что граф $G$ изоморфен факторграфу $C_m/\theta$ .□

Пусть дан цикл $C_m$, $m$ – четное. Возьмем цепь $P_k$ такую, что $c(P_k) = m$, т.е. для цепи $P_k$ цикл с минимально возможным числом ребер, факторизующийся на данную цепь, будет $C_m$. Таким образом, согласно ниже доказанной теореме 14, получаем, что $m = c(P_k) = k+l = k+k = 2k \Rightarrow k = \frac{c(P_k)}{2} =$

$\frac{m}{2}$. Довольно, легко показать, что цепь $P_k$ является цепью максимальной длины, на которую факторизуется цикл $C_m$. Возьмем цепь $P_{k+1}$, найдем для данной цепи цикл с наименьшей длины, который будет факторизоваться на данную цепь: $c(P_{k+1}) = = k+1+l = k+1+k+1 = 2k+2 = m+2$. Таким образом, цепь $P_k$ является цепью максимальной длины, на которую факторизуется цикл $C_m$, так как для цепи $P_{k+1}$ циклом с минимально возможным числом ребер, факторизующимся на данную цепь, будет цикл $C_{m+2}$.

Построим цепь максимальной длины, на которую факторизуется цикл $C_m$. Длина данной цепи, согласно выше проведенным рассуждениям, будет $\frac{m}{2}$. Такую цепь можно построить следующим образом: возьмем вершину 1, поместим ее в отдельный класс $\{1\}$, затем вершины 2 и $m$ отождествим, получим класс $\{2, m\}$, возьмем вершину 3 и отождествим ее с вершиной $m$–1, получим класс $\{3, m–1\}$ и так далее, пока не дойдем до вершины $\frac{m}{2}+1$, ее помещаем в отдельный класс $\{\frac{m}{2}+1\}$, таким образом получаем конгруэнцию цикла $C_m$: $\{1\}$, $\{2,m\}$, $\{3,m–1\}$, …, $\{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+2\}$, $\{\frac{m}{2}+1\}$, факторграфом по которой будет цепь максимальной длины.

Пример 5. Возьмем цикл $C_6$. Найдем цепь максимальной длины, на которую факторизуется цикл $C_6$. Такая цепь будет иметь длину $\frac{m}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Пусть конгруэнция $\theta$ будет $\{1\},\{2,6\},\{3,5\},\{4\}$, факторграф по данной конгруэнции изображен на рисунке 5.



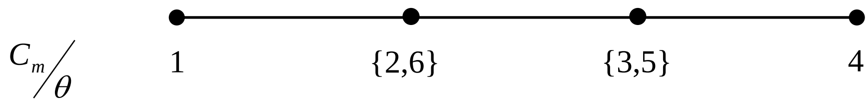



Рисунок 5

Пусть дан цикл $C_m$, $m$ – нечетное. В случае с нечетными циклами ситуация обстоит иначе. Не каждый граф является факторграфом подходящего нечетного цикла. Следующая теорема дает необходимое условие для этого.

**Теорема 11.** Если граф является факторграфом нечетного цикла, то он содержит циклы нечетной длины.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $G$ – связный граф, не имеющий циклов нечетной длины. Предположим, что $G$ – факторграф подходящего нечетного цикла $C_m$.

Построим факторграф $G/\theta$ по конгруэнции $\theta$ с двумя классами следующим образом:

1. возьмем вершину $u$ графа $G$ поместим ее в один из классов конгруэнции $\theta$ (для удобства, назовем его первым классом, а другой класс – вторым);
2. если вершина $v$ уже оказалась в первом классе, то все смежные с ней вершины помещаем во второй класс; если вершина $w$ находится во втором классе, то все смежные с ней помещаем в первый класс.

Так как граф $G$ – связен, то каждая его вершина рано или поздно попадет либо в первый класс, либо во второй класс, причем никакие две смежные вершины $u$ и $v$ графа $G$ не попадут в один и тот же класс, так как иначе вершины $u$ и $v$ находились бы на цикле нечетной длины, что противоречит нашему предположению.

Очевидно, что если граф $G$ является факторграфом нечетного цикла $C_m$, а $G/\theta$ факторграфом графа $G$, то $G/\theta$ также является факторграфом нечетного цикла $C_m$. Но это невозможно, так как нельзя разбить множество вершин нечетного цикла $C_m$ на два класса, таким образом, что каждый класс будет независимым подмножеством. □

Через Con $C_m$ обозначим множество всех конгруэнций цикла $C_m$.

**Теорема 12.** $|\mathrm{Con}\ C_m| = \sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k B(m-k-1)$.

Доказательство. Пусть дан цикл $C_m$. Возьмем цепь $P_k$ и для удобства доказательства обозначим вершины цепи 1, …, $k$+1, и пусть $m = k+1$. Заметим, что цикл $C_m$ получается из цепи $P_{k+1}$ путем добавления ребра, соединяющего концевые вершины цепи $P_{k+1}$, т.е. $C_m = P_{k+1}+\{1,k+1\}$. Рассмотрим все конгруэнции цепи $P_{k+1}$.

У всякой конгруэнции $\theta$ неориентированного графа классы являются независимыми подмножествами, т. е. $(i, j) \in \theta$:$\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – несмежные вершины данного неориентированного графа). Так как $C_m = P_{k+1}+\{1,k+1\}$, то получается, что все конгруэнции цепи $P_{k+1}$ являются конгруэнциями цикла $C_m$, кроме тех, у которых концевые вершины 1 и $k$+1 попадают в один $\theta$-класс, так как вершины 1 и $m$ у цикла $C_m$ будут смежными (напомним, что $m = k+1$).

Таким образом, необходимо выявить все конгруэнции цепи $P_{k+1}$, у которых первая и последние вершины попадают в один класс, и вычесть из общего числа конгруэнций цепи $P_{k+1}$.

Рассмотрим цепь $P_k$. Известно, что из каждой конгруэнции $\theta^*$ цепи $P_k$, мы можем получить конгруэнции цепи $P_{k+1}$ двумя способами.

1) создание нового класса $\{k+1\}$;

2) добавив в один из $\theta^*$-классов (кроме класса $\theta^*(k)$) вершину $k$+1.

Первый случай нам не представляется интересным, так как он не влияет на попадание вершин 1 и $k$+1 в один $\theta^*$-класс.

Во втором случае, добавление вершины $k$+1 в $\theta^*$-класс, содержащий вершину 1, происходит в любой конгруэнции $\theta^*$ цепи $P_k$, кроме тех, где вершина 1 и вершина $k$ содержатся в одном $\theta^*$-классе, так вершины $k$ и $k$+1 являются смежными в цепи $P_{k+1}$. Нам известно, что количество конгруэнций цепи $P_k$ будет В($k$) = В($m$–1). Таким образом, нам необходимо выявить среди всех конгруэнций цепи $P_k$ такие, что содержат вершины 1 и $k$ в одном $\theta$*-классе, и добавить к уже получившейся разности В($k$+1)–В($k$) = В($m$)–В($m$–1).

Продолжая аналогичные рассуждения, получим следующую формулу для подсчета количества конгруэнций цикла $C_m$: |Con $C_m$| = В($m$)–В($m$–1)+В($m$–2)–… ± В(2) = $\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k B(m-k-1)$. □

Данные о количестве факторграфов для циклов $C_1$, $C_2$, …, $C_{10}$ представлены в следующей таблице.

| $m$ | \|Con $C_m$\| |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 4 |
| 5 | 11 |
| 6 | 41 |
| 7 | 162 |
| 8 | 715 |
| 9 | 3425 |
| 10 | 17722 |

В приложении 2 представлены все конгруэнции и факторграфы циклов длины 4, 5 и 6. Через $q(C_m)$ обозначим количество неизоморфных факторграфов цикла $C_m$. Как видно из рассматриваемых примеров в приложении 2, $q(C_4)$ = 3; $q(C_5)$ = 3; $q(C_6)$ = 10. Неизвестно, чему равно число $q(C_m)$ для произвольного $m$.

**Теорема 13.** Количество цепных конгруэнций $m$-реберного четного цикла $C_m$ равно $2^{\frac{m}{2}-1}$.

Доказательство. Выше было показано, что цепь максимальной длины, на которую факторизуется цикл $C_m$, имеет длину $\frac{m}{2}$. Согласно теореме 5, количество цепных конгруэнций цепи $P_k$ равно $2^{k-1}$. Таким образом, используя эти два факта, получаем, что количество цепных конгруэнций $m$-реберного четного цикла $C_m$ равно $2^{\frac{m}{2}-1}$. □

Рассмотрим особые конгруэнции цикла $C_m$, связанные с делителями числа $m$ по аналогии с цепями.

Пусть $d$ – делитель числа $m$, т.е. $m = dk$. Разобьем множество вершин цикла $C_m$ на классы вычетов по модулю $d$. Получим разбиение $\theta_d$ с блоками $\{1, 1+d, 1+2d, \ldots, 1+d(k–1)\}$, $\{2, 2+d, 2+2d, \ldots, 2+d(k–1)\}$, …, $\{d, 2d, 3d, \ldots, d+d(k–1)\}$. Так как у этого разбиения все классы будут независимыми подмножествами, то мы получаем конгруэнцию цикла $C_m$. Конгруэнции вида $\theta_d$ будем называть $\delta$-конгруэнциями цикла $C_m$.

Количество классов $\delta$-конгруэнции $\theta_d$ цикла $C_m$ будет $d$.

Заметим, что если $d$=1, то разбиение $\theta_d$ не является конгруэнцией цикла $C_m$, так как в этом случае все вершины цепи попадут в один единственный класс, и, очевидно, что он не будет независимым. Таким образом, количество $\delta$-конгруэнций цикла $C_m$ будет $\tau(m)–1$, т.е. количество неединичных делителей числа $m$.

Определим циклическую конгруэнцию цикла как такую конгруэнцию, факторграфом по которой будет цикл. Следующая теорема показывает, что все $\delta$-конгруэнции цикла являются циклическими.

**Теорема 14**. Пусть $\theta_d$ является $\delta$-конгруэнцией цикла $C_m$. Тогда факторграф $C_m/\theta_d$ будет циклом.

Доказательство. Каждая вершина графа $C_m/\theta_d$ является $\theta_d$-классом. При этом $\theta_d(i)$ и $\theta_d(j)$ смежны в $C_m/\theta_d$ тогда и только тогда, когда существуют $i' \in \theta_d(i)$ и $j' \in \theta_d(j)$ такие, что $|i'–j'| = 1$.

Пусть $d$ – делитель числа $m$, $m = dk$. Конгруэнция $\theta_d$ имеет $d$ классов, а именно $\theta_d(1)$, $\theta_d(2)$, …, $\theta_d(d)$. Покажем, что $\theta_d(i)$, $2 \le i \le d-1$, смежна с $\theta_d(i-1)$ и смежна с $\theta_d(i+1)$ в $C_m/\theta_d$.

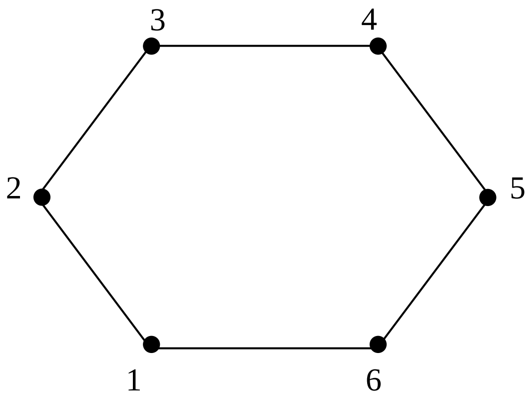
Классы $\theta_d(i-1)$, $\theta_d(i)$ и $\theta_d(i+1)$ в $C_m/\theta_d$ будут иметь следующий вид $\{i-1, i-1+d, i-1+2d, \ldots, i-1+d(k-1)\}$, $\{i, i+d, i+2d, \ldots, i+d(k-1)\}$, $\{i+1, i+1+d, i+1+2d, \ldots, i+1+d(k-1)\}$. Так как найдутся $i-1+dk^* \in \theta_d(i-1)$ и $i+dk' \in \theta_d(i)$, $k^*,k' = 1, \ldots, k-1$ такие, что $i-1+dk^*$ и $i+dk'$ смежны в цикле $C_m$, то $\theta_d(i-1)$ и $\theta_d(i)$ смежны в $C_m/\theta_d$. Аналогичным образом рассмотрим классы $\theta_d(i)$ и $\theta_d(i+1)$. Так как найдутся $i+dk^* \in \theta_d(i)$ и $i+1+dk' \in \theta_d(i+1)$, $k^*,k' = 1, \ldots, k-1$ такие, что $i+dk^*$ и $i+1+dk'$ смежны в цикле $C_m$, то $\theta_d(i)$ и $\theta_d(i+1)$ смежны в $C_m/\theta_d$. При этом, классы $\theta_d(i-1)$ и $\theta_d(i+1)$ не смежны, так как $|i+1+dk^*-i+1+dk'| \ge 2$.

Покажем, что $\theta_d(1)$ и $\theta_d(d)$ смежны в $C_m/\theta_d$. Класс $\theta_d(d)$ в $C_m/\theta_d$ будет иметь следующий вид: $\{d, 2d, 3d, \ldots, d+d(k-1)\}$. Заметим, что $d+d(k-1) = dk = n$. Так как 1 и $n$ смежны в цикле $C_m$, то $\theta_d(1)$ и $\theta_d(d)$ смежны в $C_m/\theta_d$.

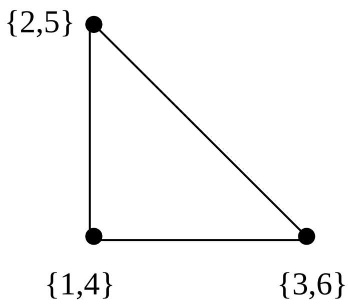
Таким образом, получаем, что в графе $C_m/\theta_d$ каждая вершина соединена со следующей в последовательности вершин ребром, т.е. каждая вершина графа инцидентна двум его ребрам. Таким образом, мы показали, что граф $C_m/\theta_d$ является циклом. □

Пример 6. На рисунке 6 изображены два факторграфа по циклическим конгруэнциям цикла $C_6$. Заметим, что цикл слева является факторграфом по циклической $\delta$-конгруэнции цикла $C_6$, а цикл справа – нет.

$C_6$




$C_3$




$C_3$

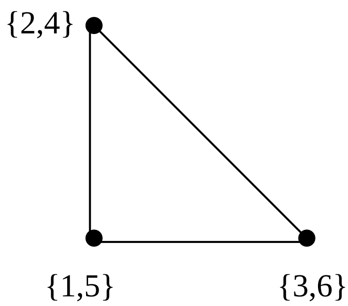



Рисунок 6

Данные о количестве циклических конгруэнций и $\delta$-конгруэнций для циклов $C_3$, $C_4$, $C_5$ и $C_6$ представлены в следующей таблице.

| $m$ | Количество циклических конгруэнций | Количество $\delta$-конгруэнций |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 2 |
| 5 | 6 | 1 |
| 6 | 12 | 3 |

Рассмотрим для цикла $C_m$ следующую задачу: для данного связного графа $G$ найти цикл с минимальным возможным числом ребер $c(G)$, факторграфом которого является данный граф.

**Теорема 15.** Пусть $G$ – связный граф. Тогда $c(G) = m+l$, где $m$ – количество ребер графа $G$, $l$ – количество ребер в минимальном цепном паросочетании на множестве нечетных вершин графа $G$.

Доказательство. Пусть дан произвольный связный граф $G$ с $m$ ребрами. Найдем длину наименьшего цикла $C_r$, факторизующегося на $G$. Согласно теореме 10, связный граф тогда и только тогда является факторграфом $r$-реберного цикла, когда в нем есть обход длины $r$, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине. Найдем длину $r$ такого минимального обхода $R$.

Алгоритм построения минимального обхода $R$ состоит в нахождении минимального (по количеству ребер) цепного паросочетания для множества вершин нечетной степени графа $G$. Алгоритм построения такого минимального обхода $R$ уже описывался выше в доказательстве теоремы 7.

После применения данного алгоритма, строим мультиграф $G^*$ путем удвоения всех ребер, входящих в минимальное цепное паросочетание. У такого мультиграфа все вершины будут четными, т.е. он будет иметь эйлеров цикл.

Таким образом, граф $G$ имеет минимальный обход $R$ длины $m+l$, где $l$ – количество ребер в минимальном цепном паросочетании на множестве нечетных вершин графа $G$. Значит, $c(G) = m+l$. □

**Следствие 1.** Для полного графа $K_n$ имеем:

5. $c(K_n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, если $n$ – нечетно;

6. $c(K_n) = \dfrac{n^2}{2}$, если $n$ – четно.

Доказательство. Первый случай очевиден, так как полный граф с нечетным количеством вершин будет эйлеровым.

Во втором случае используем результат теоремы 14: $c(G) = m+l$. Так как все вершины полного графа $K_n$ при четном $n$ являются нечетными, то $l = \dfrac{n}{2}$. В итоге имеем $c(G) = \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n}{2} = \dfrac{n^2}{2}$.□

**Следствие 2.** Для звезды $S_m$ с $m$ ребрами имеем $c(S_m) = 2m$.

Доказательство. Так как у звезды $S_m$ нечетными будут либо все вершины, либо $m$ вершин, то, очевидно, что все ребра звезды $S_m$ входят в минимальное цепное паросочетание на множестве её нечетных вершин, то есть $l = m$. Таким образом, $c(G) = m+l = m+m = 2m$. □

Пример 7. Возьмем звезду $S_3$. Найдем цикл с наименьшим количеством ребер, который будет факторизоваться на звезду $S_3$: $p(S_3) = 2m = 2 \cdot 3 = 6$ (Рисунок 7).

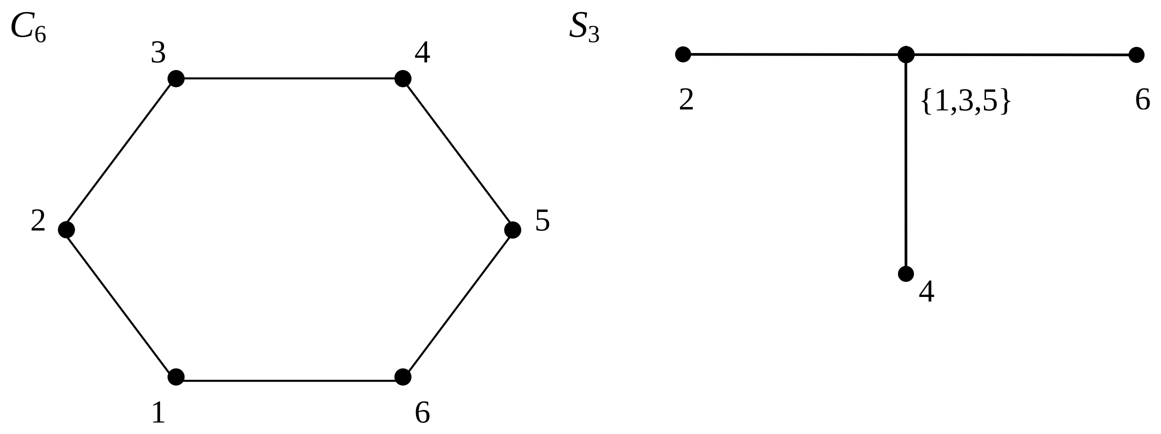



Рисунок 7

**Теорема 16.** Для любого связного графа с $m$ ребрами $m \le c(G) \le 2m$.

Доказательство. Первое неравенство следует из того факта, что количество ребер в факторграфе не может превышать количества ребер в исходном графе. Неравенство выполняется, когда граф $G$ будет эйлеровым.

Покажем, что второе неравенство верно.

Пусть $G$ – связный граф с $m$ ребрами. Отметим в графе $G$ произвольную вершину $u$, не являющуюся точкой сочленения. Возьмем некоторое исходящее из неё ребро, пусть другим его концом будет вершина $v$.

Полученный граф $G^* = G–u$ связный и имеет $m^* = m–d$ ребер, где $d$ – степень вершины $u$. С помощью обхода, описанного в доказательстве теоремы 3, организуем циклический обход графа $G^*$ из вершины $v$, он будет иметь длину $2(m–d)$.

Вершина $u$ с непройденными ребрами образует $d$-вершинную звезду. Согласно следствию 2 из теоремы 14, получаем, что $d$-вершинная звезда имеет обход длиной $2d$.

Таким образом, получаем обход графа $G$ длины $2(m–d)+2d = 2m–2d+2d$ $= = 2m$.

Заметим, что верхняя оценка достигается, когда граф G будет звездой. Таким образом, обе оценки являются точными. □

# ГЛАВА 2. ПОЛУРЕШЕТКА КОНГРУЭНЦИЙ ДЛЯ ЦЕПИ И ДЛЯ ЦИКЛА

## § 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Отношение $\omega$ на множестве $S$ называется отношением порядка, если оно рефлексивно, транзитивно, и антисимметрично: $\omega$ – порядок на $S$ $\Leftrightarrow$ $\Delta \subseteq \omega \ \& \ \omega \circ \omega \subseteq \omega \ \& \ \omega \cap \omega^{-1} \subseteq \Delta$.

Пусть $S$ – непустое множество, и $\omega$ – отношение порядка на нем. Пара $(S, \omega)$ называется упорядоченным множеством.

Наименьшим элементом упорядоченного множества $(S, \le)$ называется элемент $s$, удовлетворяющий в $(S, \le)$ тождественному неравенству $s \le x$. Наибольший элемент определяется в $(S, \le)$ тождественным неравенством: $x \le s$.

Говорят, что в упорядоченном множестве $(S, \le)$ элемент $b$ является верхним соседом элемента $a$, если $a < b$ и не существует $x \in S$ такого, что $a < x < b$, при этом говорят, что $a$ – нижний сосед для $b$. Верхние соседи наименьшего элемента называются атомами упорядоченного множества $S$. Нижние соседи наибольшего элемента называются коатомами упорядоченного множества $S$.

Пусть $S^*$ – некоторое подмножество упорядоченного множества $(S, \le)$. Элемент $a \in S$ называется нижней гранью подмножества $S^*$, если $a \le x$ для всех $x \in S^*$ и верхней гранью для $S^*$, если $a \ge x$ для всех $x \in S^*$. Под наибольшей нижней гранью подмножества $S^*$ в упорядоченном множестве $(S, \le)$ понимается наибольший (если он существует) элемент в множестве всех нижних граней для $S^*$. Аналогично определяется наименьшая верхняя грань подмножества $S^*$; это наименьший элемент (если он существует) в множестве всех верхних граней для $S^*$. Очевидно, что любое подмножество $S^* \subseteq S$ имеет не более одной наибольшей нижней грани и не более одной наименьшей верхней грани. Эти элементы обозначают соответственно $\inf S^*$ (инфимум) и $\sup S^*$ (супремум), и называют также точными (нижней и верхней соответственно) гранями подмножества $S^*$. Под нижней полурешеткой понимается упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов $x, y$ существует $\inf(x, y)$.

Упорядоченное множество $(S, \leq)$ называется решеткой, если каждое его конечное подмножество имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани.

Высотой элемента в конечном упорядоченном множестве называется наибольшая из длин убывающих цепей, начинающихся с этого элемента. За длину конечной убывающей цепи $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ принимается уменьшенное на единицу число элементов в ней. Высота элемента $a$ обозначается через $h(a)$. Например, любой минимальный элемент имеет высоту 0.

Длиной конечного упорядоченного множества называется наибольшая из высот его элементов, т.е. наибольшая из длин его убывающих цепей.

Введем понятие типа конгруэнции.

Типом конгруэнции называется последовательность мощностей классов конгруэнции, записанная в порядке убывания. Обозначим тип конгруэнции $\theta$ как $t(\theta)$.

Пример 1. Конгруэнции $\{0,2,4\},\{1,3\},\{5\}$ и $\{0,2,5\},\{1,4\},\{3\}$ цепи $P_5$ имеют один тип (3,2,1), конгруэнция $\{0,2\},\{1,5\},\{3\},\{4\}$ цепи $P_5$ имеет тип (2,2,1,1), а тождественная конгруэнция $\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$ цепи $P_5$ имеет тип (1,1,1,1,1,1). Конгруэнции $\{1,3\},\{2,5\},\{4\}$ и $\{1,4\},\{2\},\{3,5\}$ цикла $C_5$ имеют один тип (2,2,1), конгруэнция $\{0,2,4\},\{1\},\{3\},\{5\}$ цикла $C_5$ имеет тип (3,1,1,1), а тождественная конгруэнция $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$ цикла $C_5$ имеет тип (1,1,1,1,1).

Изоморфизмом между двумя упорядоченными множествами $S$ и $T$ называется взаимно однозначное соответствие $\varphi\colon S \to T$ между ними, которое удовлетворяет следующим двум условиям для любых $x, y \in S$:

1) из $x \leq y$ следует, что $\varphi(x) \leq \varphi(y)$;

2) из $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ следует, что $x \leq y$.

Изоморфность упорядоченных множеств $S$ и $T$ будем обозначать как $S \cong T$.

Дуальным изоморфизмом между двумя упорядоченными множествами $S$ и $T$ называется взаимно однозначное соответствие $\varphi^*$: $S \to T$ между ними, которое удовлетворяет следующим двум условиям для любых $x, y \in S$:

1) из $x \leq y$ следует, что $\varphi^*(x) \geq \varphi^*(y)$;

2) из $\varphi^*(x) \leq \varphi^*(y)$ следует, что $x \geq y$.

Прямым произведением $S \times T$ двух упорядоченных множеств $S$ и $T$ называется множество всех пар $(x,y)$, где $x \in S$ и $y \in T$, причем $(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leq x_2$ в $S$ и $y_1 \leq y_2$ в $T$.

Обозначим через $(\mathrm{L}(n), \mid)$ упорядоченное делимостью множество неединичных делителей числа $n$. Так как для любых двух элементов $d_1$ и $d_2$ в упорядоченном множестве $(\mathrm{L}(n), \mid)$ существует $\sup(d_1, d_2)$ = НОК$(d_1, d_2)$, то $(\mathrm{L}(n), \mid)$ – верхняя полурешетка (так как мы рассматриваем только неединичные делители числа $n$, то не для любых двух элементов $d_1$ и $d_2$ в $(\mathrm{L}(n), \mid)$ существует $\inf(d_1, d_2)$ = НОД$(d_1, d_2)$).

## § 2. ПОЛУРЕШЕТКА КОНГРУЭНЦИЙ ЦЕПИ

Напомним, что совокупность всех конгруэнций цепи $P_m$ обозначается через Con $P_m$. Пара (Con $P_m$, $\subseteq$) будет упорядоченным множеством, так как множество всех конгруэнций цепи $P_m$ упорядочено по включению.

Конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $P_m$, $\subseteq$), если в этом упорядоченном множестве нет конгруэнции $\theta^*$ такой, что $\theta^* \supset \theta$. Конгруэнция $\theta$ будет минимальной в (Con $P_m$, $\subseteq$), если в этом упорядоченном множестве нет конгруэнции $\theta^*$ такой, что $\theta \supset \theta^*$.

Главной конгруэнцией цепи $P_m$, порожденной парой несмежных вершин $u$, $v$, называется наименьшая конгруэнция $\theta(u,v)$, отождествляющая данные $u$ и $v$. Легко заметить, что такие конгруэнции являются атомами в полурешетке (Con $P_m$, $\subseteq$), так как не существует такой конгруэнции $\theta^*$, что $\Delta \subset \theta^* \subset \theta(u,v)$. Следовательно, главными конгруэнциями являются всевозможные конгруэнции, такие, что один класс данной конгруэнции состоит из двух элементов, все остальные классы – из одного элемента. Таким образом, посчитать количество главных конгруэнций цепи $P_m$ значит посчитать количество всевозможных пар несмежных вершин цепи $P_m$. Делаем это следующим образом: берем вершину 0 и найдем все вершины, с которыми ее можно отождествить, вершина 0 не смежна с вершинами 2, 3, …, $m$, возможностей для построения таких пар будет $m$; берем вершину 1, она не смежна с вершинами 3, 4, …, $m$, таких пар с участием вершины 1 можно построить $m$–1; берем вершину 2, она не смежна с вершиной 0 и с вершинами 4, 5, …, $m$, учитывая, что пара (0,2) уже построена, то число пар с участием вершины 2 будет $m$–2 и т.д. Таким образом, количество главных конгруэнций цепи $P_m$, т.е. атомов в (Con $P_m$, $\subseteq$), равно $m+(m-1)+(m-2)+\ldots+1$ $= = \dfrac{m(m-1)}{2}$.

Рассмотрим экстремальные элементы в упорядоченном множестве всех конгруэнций цепи $P_m$. Так как в упорядоченном множестве (Con $P_m$, $\subseteq$) одна минимальная конгруэнция, которой является тождественная конгруэнция $\Delta$, то эта конгруэнция будет также наименьшим элементом упорядоченного множества всех конгруэнций цепи $P_m$.

Наибольшего элемента в (Con $P_m$, $\subseteq$) при $m \geq 3$ нет. Возьмем, например, главные конгруэнции $\theta(0,2)$ и $\theta(0,3)$, которые есть у любой цепи $P_m$ при $m \geq 3$. У этих конгруэнций нет общей верхней грани: если $\theta$ содержит $\theta(0,2)$ и $\theta(0,3)$, то в силу транзитивности пара $(2,3) \in \theta$, что невозможно, так как вершины 2 и 3 смежные в $P_m$. В (Con $P_m$, $\subseteq$), при $m > 2$, будет более одной максимальной конгруэнции, таким образом, наибольшего элемента в таких упорядоченных множествах не будет.

Так как для любых двух элементов $\theta_1$ и $\theta_2$ в упорядоченном множестве (Con $P_m$, $\subseteq$) существует $\inf(\theta_1,\theta_2) = \theta_1 \cap \theta_2$, то (Con $P_m$, $\subseteq$) – нижняя полурешетка.

**Теорема 1.** В полурешетке (Con $P_m$, $\subseteq$) высота конгруэнции $\theta$ равна $h(\theta) = = m+1–c(\theta)$, где $c(\theta)$ – число классов конгруэнции $\theta$.

Доказательство. Докажем теорему с помощью математической индукции по $m$.

Базис индукции. Для случаев $m = 1$ и $m = 2$ утверждение очевидным образом выполняется. Пусть $m = 3$. Полурешетка (Con $P_3$, $\subseteq$) имеет три уровня: на нулевом уровне находится тождественная конгруэнция $\theta_1 = \Delta$, на первом – три конгруэнции: $\theta_2 = \{0,2\},\{1\},\{3\}$, $\theta_3 = \{0,3\},\{1\},\{2\}$, $\theta_4 = \{0\},\{1,3\},\{2\}$, на втором – конгруэнция $\theta_5 = \{0,2\},\{1,3\}$, откуда

$h(\theta_1) = 3+1–c(\theta_1) = 3+1–4 = 0;$

$h(\theta_2) = 3+1–c(\theta_2) = 3+1–3 = 1;$

$h(\theta_3) = 3+1–c(\theta_3) = 3+1–3 = 1;$

$h(\theta_4) = 3+1–c(\theta_4) = 3+1–3 = 1;$

$h(\theta_5) = 3+1–c(\theta_5) = 3+1–2 = 2.$

Таким образом, утверждение теоремы выполняется.

Шаг индукции. Предположим, доказываемое утверждение верно для $m = k$, т.е. $h(\theta) = k+1–c(\theta)$ для любой конгруэнции $\theta \in$ Con $P_k$. Докажем, что оно верно и для $m = k+1$, т.е. что $h(\theta^*) = k+2–c(\theta^*)$ для любой конгруэнции $\theta^* \in$ Con $P_{k+1}$.

Каждая конгруэнция $\theta^* \in$ Con $P_{k+1}$ получается из некоторой конгруэнции $\theta \in$ Con $P_k$ одним из двух способов:

1) присоединением нового класса $\{k+1\}$;

2) добавлением в один из $\theta$–классов вершины $k+1$, кроме класса, содержащего вершину $k$.

В первом случае $h(\theta^*) = h(\theta)$ в полурешетках (Con $P_{k+1}$, $\subseteq$) и (Con $P_k$, $\subseteq$) соответственно и $c(\theta^*) = c(\theta)+1$, откуда $h(\theta^*) = h(\theta) = k+1–c(\theta) = k+1–(c(\theta^*)–1) = = k+2–c(\theta^*)$, а во втором $h(\theta^*) = h(\theta)+1$ и $c(\theta^*) = c(\theta)$, откуда $h(\theta^*) = h(\theta)+1 = k+1—c(\theta)+1 = k+2–c(\theta^*)$. Исходя из этого, получаем, что для любой конгруэнции $\theta^* \in$ Con $P_{k+1}$ верно равенство $h(\theta^*) = k+2–c(\theta^*)$. □

**Теорема 2.** Полурешетка (Con $P_m$, $\subseteq$) имеет длину $m–1$.

Доказательство. Максимальной конгруэнцией с наименьшим количеством классов будет конгруэнция $\theta$, состоящая из двух классов, в одном классе – все четные вершины цепи $P_m$, в другом – все нечетные. Таким образом, высота данной конгруэнции по теореме 1 будет $h(\theta) = m+1-c(\theta) = m+1-2 = m-1$. □

**Теорема 3.** Конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $P_m$, $\subseteq$), тогда и только тогда, когда факторграф $P_m/\theta$ будет полным графом.

Доказательство. Необходимость. Пусть конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $P_m$, $\subseteq$), то есть в (Con $P_m$, $\subseteq$) нет конгруэнции $\theta^*$, такой что $\theta^* \supset \theta$. У всякой конгруэнции $\theta$ цепи $P_m$ классы являются независимыми подмножествами, т. е. $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – несмежные вершины цепи $P_m$).

Предположим, что $P_m/\theta$ не будет полным графом. Тогда существуют классы $\theta(u)$ и $\theta(v)$, не смежные в $P_m/\theta$, то есть никакие $u' \in \theta(u)$ и $v' \in \theta(v)$ не будут смежными в цепи $P_m$. Объединив классы $\theta(u)$ и $\theta(v)$, получим новую конгруэнцию $\theta^*$ цепи $P_m$. При этом получается, что $\theta^* \supset \theta$ в (Con $P_m$, $\subseteq$), т.е. конгруэнция $\theta$ не будет максимальной, а это противоречит условию.

Достаточность. Пусть $P_m/\theta$ будет полным графом. Покажем, что конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $P_m$, $\subseteq$).

Так как $P_m/\theta$ – полный граф, то каждая его вершина смежна со всеми другими, то есть любые классы $\theta(u)$ и $\theta(v)$ соединены ребром $\{\theta(u), \theta(v)\}$ в $P_m/\theta$, а значит, найдутся такие $u' \in \theta(u)$ и $v' \in \theta(v)$, что $u'$ и $v'$ смежны в цепи $P_m$.

Предположим, что конгруэнция $\theta$ не будет максимальной в (Con $P_m$, $\subseteq$), т.е. $\theta^* \supset \theta$ в (Con $P_m$, $\subseteq$) для некоторой $\theta^* \in$ Con $P_m$.

Пусть $u$ и $v$ – вершины цепи $P_m$, такие что $(u,v) \notin \theta$, т.е. $\theta(u) \neq \theta(v)$ в $P_m/\theta$, и $(u,v) \in \theta^*$. Тогда $(\exists u' \in \theta(u), v' \in \theta(v))((u',v') \in \alpha)$ и $(u',v') \in \theta^*$, что невозможно, так как вершины $u'$ и $v'$ смежны в цепи $P_m$.

Таким образом, показано, что не существует такой конгруэнции $\theta^*$ в (Con $P_m$, $\subseteq$), что $\theta^* \supset \theta$, т. е. конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $P_m$, $\subseteq$). □

Согласно теореме 3, число максимальных конгруэнций в полурешетке (Con $P_m$, $\subseteq$) будет равно числу полных графов, на которые факторизуется цепь $P_m$. Найдем среди них полный граф $K_n$ с наибольшим количеством вершин $n$. Заметим, что если цепь $P_m$ будет факторизоваться на полный граф $K_n$, то также она будет факторизоваться на любой полный граф $K_l$, $l = 2, \ldots, n-1$. Ссылаясь на следствие 1 из теоремы 7 в главе 1, видим, что длина кратчайшей цепи, факторизующейся на $K_n$, есть $p(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$ при $n$ нечетном и $p(K_n) = \frac{n^2}{2} - 1$ при $n$ четном.

Если $K_n$ является полным графом с наибольшим возможным числом вершин, на который факторизуется цепь $P_m$, то $n$ – ахроматическое число цепи $P_m$. Найдем его значение. Для полного графа $K_n$ с наибольшим четным количеством вершин $n$, являющегося факторграфом цепи $P_m$, получаем $n = \lfloor \sqrt{2(m+1)} \rfloor_{-}$. Далее проверяем, является ли граф $K_n$ факторграфом цепи $P_m$, имеющим наибольшее количество вершин, или цепь $P_m$ факторизуется на граф $K_{n+1}$. Так как $n+1$ – нечетное число, то должно быть $m \geq \frac{n(n-1)}{2}$. Если $m$ удовлетворяет данному условию, то полный граф $K_{n+1}$ является факторграфом цепи $P_m$ и наибольшим по числу вершин. Эти результаты согласуются с результатами из [26].

Главным идеалом, порожденным конгруэнцией $\theta$, называется подмножество полурешетки (Con $P_m$, $\subseteq$), образуемое всеми конгруэнциями $\theta^*$ такими, что $\theta^* \subseteq \theta$. Очевидно, что главный идеал является решеткой.

**Теорема 4.** Главные идеалы, порожденные конгруэнциями одного типа в полурешетке (Con $P_m$, $\subseteq$), являются изоморфными решетками.

Доказательство. Возьмем главные идеалы Id $\theta_1$ и Id $\theta_2$ в полурешетке (Con $P_m$, $\subseteq$), порожденные однотипными конгруэнциями $\theta_1$ и $\theta_2$ соответственно. Покажем, что Id $\theta_1 \cong$ Id $\theta_2$.

Рассмотрим конгруэнции $\theta_1$ и $\theta_2$. Так как $\theta_1$ и $\theta_2$ – конгруэнции одного типа, то количество их классов будет одинаково. Запишем классы конгруэнций в порядке убывания по количеству элементов в каждом классе, а сами элементы в каждом классе запишем в порядке их возрастания. Таким способом выстроим последовательность вершин цепи в порядке их следования в каждой конгруэнции. Для $\theta_1$ получим $u_0$, $u_1$, …, $u_m$, а для $\theta_2$ получим $v_0$, $v_1$, …, $v_m$. Очевидно, что каждая последовательность перечисляет в некотором порядке все вершины цепи $P_m$. Определим биекцию на множестве вершин цепи, полагая $\varphi(u_i) = v_i$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Возьмем конгруэнцию $\theta \in$ Id $\theta_1$, т.е. $\theta \subseteq \theta_1$. Произведем замену каждого элемента $u_i$ в каждом классе конгруэнции $\theta$ на $\varphi(u_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$. Получим $\varphi(\theta)$ – некоторый набор подмножеств множества вершин цепи $P_m$. Так как $\varphi$ – биекция и в $\theta$ задействованы все вершины цепи $P_m$, то и $\varphi(\theta)$ содержит все вершины цепи $P_m$, значит $\varphi(\theta)$ – классы, образующие покрытие множества вершин $V$. Если классы перекрываются, то $\varphi(u) = \varphi(v)$ для некоторых $u, v \in V$, но тогда $u = v$, что невозможно. Таким образом, $\varphi(\theta)$ будет разбиением множества $V$. Из некоторого класса разбиения $\varphi(\theta)$ возьмем вершины $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$, тогда $(\varphi(u),\varphi(v)) \in \varphi(\theta) \Rightarrow \Rightarrow (u,v) \in \theta \Rightarrow (u,v) \in \theta_1 \Rightarrow (\varphi(u),\varphi(v)) \in \theta_2 \Rightarrow (\varphi(u),\varphi(v)) \notin \alpha$ ($\alpha$ – отношение смежности в цепи $P_m$). Таким образом, $\varphi(\theta)$ – разбиение на множестве вершин цепи $P_m$, все классы которого будут независимыми, т.е. $\varphi(\theta)$ – конгруэнция на множестве вершин цепи $P_m$.

Покажем, что $\varphi(\theta) \in$ Id $\theta_2$, для этого установим тот факт, что любой класс конгруэнции $\varphi(\theta)$ входит в состав некоторого класса конгруэнции $\theta_2$. Ранее было показано, что любые $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$, находящиеся в одном классе конгруэнции $\varphi(\theta)$, попадут в один класс конгруэнции $\theta_2$, т.е. $(\varphi(u),\varphi(v)) \in \varphi(\theta)$

$\Rightarrow$ ($\varphi(u),\varphi(v)$) $\in$ $\theta_2$. Таким образом, получаем, что любой класс $\varphi(\theta)$ является подклассом некоторого класса конгруэнции $\theta_2$, следовательно $\varphi(\theta) \in \mathrm{Id}\ \theta_2$.

С помощью $\varphi$ установлено взаимно однозначное соответствие между главными идеалами Id $\theta_1$ и Id $\theta_2$. Теперь под $\varphi$ будем понимать $\varphi$: Id $\theta_1 \to$ Id $\theta_2$. Из приведенных выше рассуждений следует, что это соответствие сохраняет порядок, т.е. если $\theta^* \subseteq \theta$, то $\varphi(\theta^*) \subseteq \varphi(\theta)$ и обратно. В результате получим, что $\varphi$ – изоморфизм. □

Пример 2.

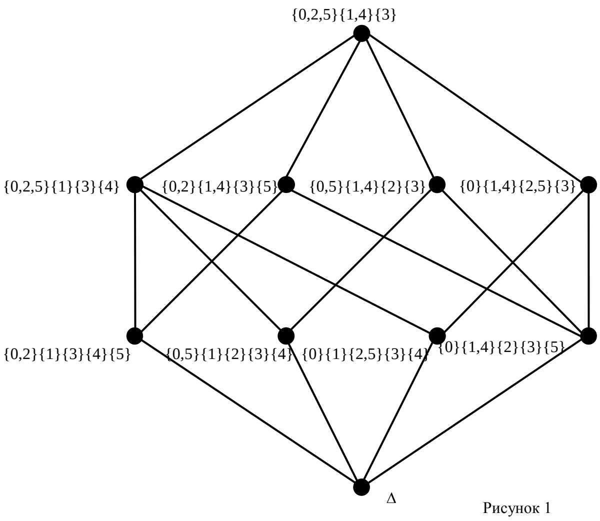



Рисунок 1

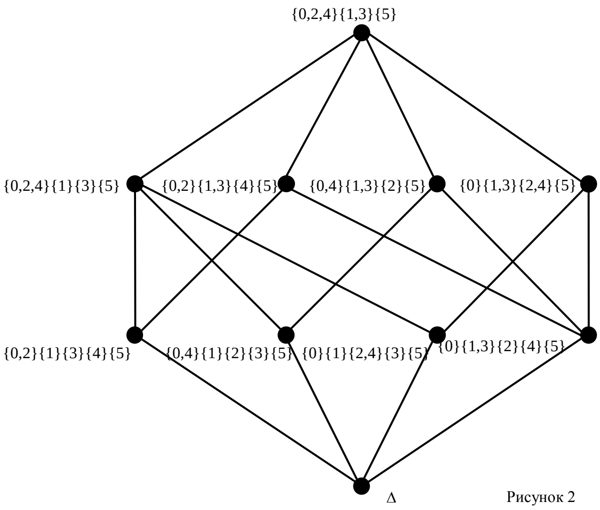



Рисунок 2

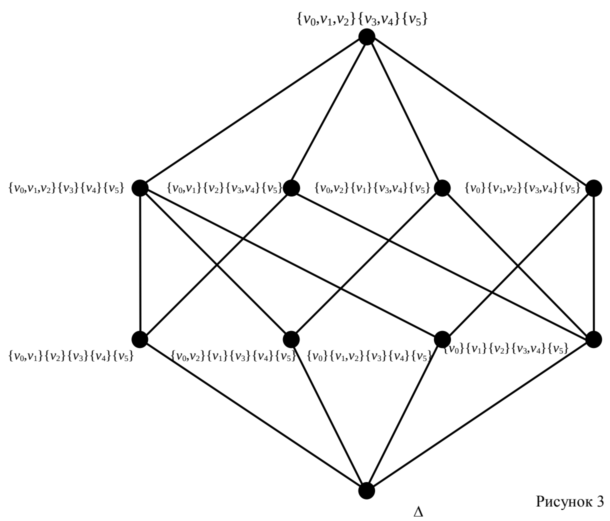



Рисунок 3

На рисунках 1 и 2 представлены изоморфные решетки, порожденные конгруэнциями {0,2,4},{1,3},{5} и {0,2,5},{1,4},{3} цепи $P_5$ одного типа (3,2,1). На рисунке 3 изображена решетка, порожденная произвольной конгруэнцией типа (3,2,1).

Подсчитаем общее количество элементов решетки Id $\theta$, порожденной конгруэнцией $\theta$. Пусть конгруэнция $\theta$ имеет тип $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Элементами решетки Id $\theta$ будут всевозможные конгруэнции $\theta^*$ такие, что любой класс конгруэнции $\theta^*$ входит в состав некоторого класса конгруэнции $\theta$.

Пусть $\theta^* \in$ Id $\theta$. Так как любой класс конгруэнции $\theta^*$ входит в состав некоторого класса конгруэнции $\theta$, то конгруэнция $\theta^*$ будет подразбиением конгруэнции $\theta$.

Таким образом, необходимо подсчитать всевозможные разбиения классов конгруэнции $\theta$. Так как нам известна мощность каждого класса конгруэнции $\theta$, а количество разбиений $n$–элементного множества – это число Белла $B(n)$, то общее количество элементов решетки Id $\theta$, порожденной конгруэнцией $\theta$ типа $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, можно подсчитать по формуле: $B(t_1)B(t_2) \ldots B(t_n)$.

Найдем количество коатомов в главном идеале Id $\theta$, порожденном конгруэнцией $\theta$ типа $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Конгруэнция $\theta$ имеет $n$ классов и будет наибольшим элементом в решетке Id $\theta$. Так как коатомы являются нижними соседями наибольшего элемента, то конгруэнция, являющаяся коатомом, имеет $n$+1 классов.

Возьмем произвольный класс конгруэнции $\theta$, разобьем его на два класса. Получим новую конгруэнцию $\theta^*$ с $n$+1 классами. Найдем все возможные разбиения на два класса произвольного $\theta$–класса мощности $t$, их количество будет $s_2(t,2)$ (число Стирлинга). Таким образом, возьмем каждый класс конгруэнции $\theta$, и найдем его всевозможные разбиения на два класса, каждое такое разбиение будет коатомом. Таким образом, общее количество коатомов можно посчитать по формуле $s_2(t_1,2)+ s_2(t_2,2)+\ldots+ s_2(t_n,2) = \sum_{i=1}^{n} s_2(t_i,2)$.

Подсчитаем количество атомов в главном идеале Id $\theta$, порожденном конгруэнцией $\theta$ типа $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Атомами являются верхние соседи наименьшего элемента, т.е. это главные конгруэнции.

Пусть $\theta^* \in \mathrm{Id}\,\theta$ будет главной конгруэнцией. Согласно определению главной конгруэнции, очевидно, что один из классов конгруэнции $\theta^*$ будет иметь мощность два, все остальные мощность один. Так как $\theta^* \in \mathrm{Id}\,\theta$, то любой класс конгруэнции $\theta^*$ входит в состав некоторого класса конгруэнции $\theta$, значит, конгруэнция $\theta^*$ будет подразбиением конгруэнции $\theta$. Таким образом, найдем всевозможные пары элементов каждого класса конгруэнции $\theta$. Так как мы знаем мощность каждого класса конгруэнции $\theta$, то количество всех атомов главного идеала Id $\theta$ можно посчитать по формуле: $C_{t_1}^2 + C_{t_2}^2 + \ldots + C_{t_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} C_{t_i}^2$.

Пример 3. Подсчитаем количество элементов, коатомов и атомов в главных идеалах Id ({0,2,4},{1,3},{5}) и Id ({0,2,5},{1,4},{3}) для цепи $P_5$ из примера 2. Так как они изоморфны, то достаточно подсчитать для одного главного идеала. Конгруэнция, порождающая главный идеал Id ({0,2,4},{1,3},{5}) для цепи $P_5$, имеет тип (3,2,1). Найдем общее количество элементов решетки Id ({0,2,4},{1,3},{5}) для цепи $P_5$: $B(3)B(2)B(1) = 5 \cdot 2 \cdot 1 =$

10. Подсчитаем общее количество коатомов главного идеала Id ({0,2,4},{1,3},{5}) для цепи $P_5$: $s_2(3,2)+s_2(2,2)+s_2(1,2)$ = 3 + 1 + 0 = 4. Найдем количество атомов в главном идеале Id ({0,2,4},{1,3},{5}) для цепи $P_5$: $C_3^2+C_2^2+C_1^2$ = 3 + 1 + 0 = 4.

Конгруэнция $\theta$ цепи $P_m$ называется правильной, если $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – вершины цепи $P_m$ одной четности). Обозначим множество правильных конгруэнций через $\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, P_m$. Определим четную конгруэнцию цепи $P_m$ как такую конгруэнцию $\theta$, что $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – четные вершины цепи $P_m$), а нечетную конгруэнцию $\theta$, как $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – нечетные вершины цепи $P_m$). Обозначим множество четных конгруэнций через $\mathrm{Con}_{\text{ч}}\, P_m$. Аналогично определим множество нечетных конгруэнций $\mathrm{Con}_{\text{н}}\, P_m$.

Так как $(\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, P_m, \subseteq)$ является нижней полурешеткой и в ней есть наибольший элемент, то $(\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, P_m, \subseteq)$ – решетка (наибольшим элементом в $(\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, P_m, \subseteq)$, очевидно, будет конгруэнция с двумя классами, в одном классе которой будут все четные вершины цепи $P_m$, в другом – все нечетные).

**Теорема 5.** $\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, P_m \cong \mathrm{Con}_{\text{ч}}\, P_m \times \mathrm{Con}_{\text{н}}\, P_m$.

Доказательство. Согласно определению, прямым произведением $\mathrm{Con}_{\text{ч}}\, P_m \times \times \mathrm{Con}_{\text{н}}\, P_m$ будет множество всех пар $(\theta_{\text{ч}}, \theta_{\text{н}})$, где $\theta_{\text{ч}} \in \mathrm{Con}_{\text{ч}}\, P_m$ и $\theta_{\text{н}} \in \mathrm{Con}_{\text{н}}\, P_m$, причем $(\theta^1{}_{ч}, \theta^1{}_{н}) \le (\theta^2{}_{ч}, \theta^2{}_{н})$ тогда и только тогда, когда $\theta^1{}_{ч} \subseteq \theta^2{}_{ч}$ в $\mathrm{Con}_{\text{ч}}\, P_m$ и $\theta^1{}_{н} \subseteq \theta^2{}_{н}$ в $\mathrm{Con}_{\text{н}}\, P_m$.

Требуемый изоморфизм получается, если каждой конгруэнции $\theta \in \mathrm{Con}_{\text{пр}}\, P_m$ сопоставить пару $(\theta_1, \theta_2)$, где $\theta_1$ – эквивалентность, нетривиальными классами которой являются в точности $\theta$–классы, состоящие из четных вершин цепи, а $\theta_2$ имеет нетривиальными классами в точности $\theta$–классы, состоящие из нечетных вершин. Очевидно, что $\theta_1 \in \mathrm{Con}_{\text{ч}}\, P_m$ и $\theta_2 \in \mathrm{Con}_{\text{н}}\, P_m$. □

В своей работе [36] Пудлак и Тума показали, что любая конечная решетка вложима в подходящую конечную решетку эквивалентностей. Докажем следующую теорему.

**Теорема 6.** Любая конечная решетка вложима в решетку четных конгруэнций подходящей цепи.

Доказательство. Покажем, что всякая решетка эквивалентностей конечного множества изоморфна решетке четных конгруэнций подходящей цепи.

Рассмотрим решетку ($\mathrm{E}(m)$, $\subseteq$) всех эквивалентностей на множестве $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Возьмем произвольную эквивалентность $\varepsilon$ на множестве $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Каждый элемент $i$, $i=\overline{0,m}$, в каждом $\varepsilon$–классе заменим на $2i$. Получим эквивалентность $\theta(\varepsilon)$ на множестве четных чисел $\leq 2m$, все классы которой будут независимыми подмножествами цепи $P_{2m}$, т.е. получим четную конгруэнцию цепи $P_{2m}$. С другой стороны, если $\theta \in \mathrm{Con}_{ч} P_{2m}$, то заменив в каждом $\theta$–классе элемент $i \in \{0, 2, 4, \ldots, 2m\}$ на $i/2$, получим эквивалентность $\varepsilon(\theta)$ на множестве $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$. При этом если $\varepsilon_1 \subseteq \varepsilon_2$ в $\mathrm{E}(m)$, то $\theta(\varepsilon_1) \subseteq \theta(\varepsilon_2)$, и обратно если $\theta_1 \subseteq \theta_2$, то $\varepsilon(\theta_1) \subseteq \varepsilon(\theta_2)$. Значит, решетки ($\mathrm{E}(m)$, $\subseteq$) и ($\mathrm{Con}_{ч} P_{2m}$, $\subseteq$) изоморфны. Таким образом, так как всякая решетка эквивалентностей конечного множества изоморфна решетке четных конгруэнций подходящей цепи, то любая конечная решетка вложима в решетку четных конгруэнций подходящей цепи. □

Обозначим совокупность всех $\delta$–конгруэнций цепи $P_n$ через $\mathrm{Con}_{\delta} P_n$.

Заметим, что $(x, y) \in \theta_{d_1}$, если $x$ и $y$ имеют одинаковые остатки при делении на $d_1$, т.е. $x \equiv y (\mathrm{mod}\ d_1)$, а $(w, z) \in \theta_{d_2}$, если $w$ и $z$ имеют одинаковые остатки при делении на $d_2$, т.е. $w \equiv z (\mathrm{mod}\ d_2)$, таким образом $(u, v) \in \theta_{d_1} \cap \theta_{d_2}$, если $(u, v)$ имеют одинаковые остатки при делении на $d_1$ и при делении на $d_2$, т.е. $u \equiv v(\mathrm{mod}\ НОК(d_1, d_2))$. Таким образом, получаем, что $\theta_{d_1} \cap \theta_{d_2} = \theta_{НОК(d_1,d_2)}$.

Так как для любых двух элементов $\theta_{d_1}$ и $\theta_{d_2}$ в упорядоченном множестве ($\mathrm{Con}_{\delta} P_n$, $\subseteq$) существует $\inf(\theta_{d_1}, \theta_{d_2}) = \theta_{d_1} \cap \theta_{d_2}$, то ($\mathrm{Con}_{\delta} P_n$, $\subseteq$) – нижняя полурешетка. Наименьшим элементом ее является тождественная конгруэнция $\Delta$, а именно конгруэнция $\theta_d$, где $d = n$.

**Теорема 7.** Полурешетка $\delta$–конгруэнций цепи $P_n$ дуально изоморфна полурешетке неединичных делителей числа $n$.

Доказательство.

Определим отображение: $\varphi^*$: $\mathrm{L}(n) \to \mathrm{Con}_\delta\, P_n$, $d \mapsto \theta_d$. При $n = dk$ конгруэнция $\theta_d$ имеет классы $\{1, 1+d, 1+2d, \ldots, 1+d(k–1)\}$, $\{2, 2+d, 2+2d, \ldots, 2+d(k—1)\}$, …, $\{d, 2d, 3d, \ldots, d+d(k–1)\}$.

Отображение $\varphi^*$ взаимно однозначно. Действительно, пусть $n = k_1d_1$, $n = k_2d_2$. Конгруэнция $\theta_{d_1}$ имеет $d_1$ классов, а конгруэнция $\theta_{d_2}$ имеет $d_2$ классов. Если $\theta_{d_1} = \varphi^*(d_1) = \varphi^*(d_2) = \theta_{d_2}$, то $d_1 = d_2$.

Покажем, что если $d_1|d_2$, то $\varphi^*(d_1) \supset \varphi^*(d_2)$ для любых делителей $d_1$, $d_2$, числа $n$.

Пусть $n = d_1k_1 = d_2k_2$, $d_2 = d_1k^*$. Тогда $n = d_2k_2 = d_1(k^*k_2)$, и получаем, что $k^*k_2 = k_1$. Общий вид элементов $\theta_{d_2}$–класса будет следующим: $i+d_2k$, $1 \le i \le d_2$, $0 \le k \le k_2–1$. Представим $i = j+d_1l$, где $1 \le j \le d_1$, $0 \le l \le k^*–1$. Тогда $i+d_2k = j+d_1l+ +d_2k = j+d_1l+(d_1k^*)k = j+d_1(l+k^*k)$, где $1 \le j \le d_1$, $0 \le l+k^*k \le k^*–1+k^*(k_2–1) = k^*k_2– –1 = k_1–1$. Таким образом, элемент $i+d_2k$ находится в $\theta_{d_1}$–классе, содержащим элемент $j$. В итоге получаем, что при $d_1|d_2$ будет $\varphi^*(d_2) = \theta_{d_2} \supset \theta_{d_1} = \varphi^*(d_1)$.

С другой стороны, пусть $\varphi^*(d_1) \supset \varphi^*(d_2)$, т.е. $\theta_{d_1} \supset \theta_{d_2}$. Каждый $\theta_{d_1}$–класс имеет $k_1$ элементов и разбивается на $\theta_{d_2}$–классы, каждый из которых содержит $k_2$ элементов. Следовательно, $k_1$ делится на $k_2$. Если $k^*k_2 = k_1$, то $d_2k_2 = n = d_1k_1 = d_1(k^*k_2) = (d_1k^*)k_2$, откуда $d_2 = d_1k^*$, т.е. $d_1|d_2$. Таким образом, полурешетки $\mathrm{L}(n)$ и $\mathrm{Con}_\delta\, P_n$ дуально изоморфны. □

## § 3. ПОЛУРЕШЕТКА КОНГРУЭНЦИЙ ЦИКЛА

Рассмотрим аналогичным образом множество конгруэнций цикла $C_m$. Напомним, что совокупность всех конгруэнций цикла $C_m$ обозначается через Con $C_m$. Пара (Con $C_m$, $\subseteq$) будет упорядоченным множеством, так как множество всех конгруэнций цикла $C_m$ упорядочено по включению.

Конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $C_m$, $\subseteq$), если в этом упорядоченном множестве нет конгруэнции $\theta^*$ такой, что $\theta^* \supset \theta$.

Конгруэнция $\theta$ будет минимальной в (Con $C_m$, $\subseteq$), если в этом упорядоченном множестве нет конгруэнции $\theta$* такой, что $\theta \supset \theta$*.

Так же, как и для цепи $P_m$, главными конгруэнциями цикла $C_m$ являются всевозможные конгруэнции, такие, что один класс данной конгруэнции состоит из двух элементов, все остальные классы – из одного элемента. Подсчитаем количество главных конгруэнций цикла $C_m$. Сделаем это следующим образом: берем вершину 1 и найдем все вершины, с которыми ее можно отождествить, вершина 1 не смежна с вершинами 3, 4, …, $m$–1, возможностей для построения таких пар будет $m$–3; берем вершину 2, она не смежна с вершинами 4, 5, …, $m$, таких пар с участием вершины 2 можно также построить $m$–3; берем вершину 3, она не смежна с вершиной 1 и с вершинами 5, 6, …, $m$, учитывая, что пара (1,3) уже построена, то число пар с участием вершины 3 будет $m$–4 и т.д. Таким образом, количество главных конгруэнций цикла $C_m$, т.е. атомов в (Con $C_m$, $\subseteq$), равно $(m–3)+(m–3)+(m–4)+(m–5)+…+1 = 2(m–3)+(m–4)+(m–5)+…+1$.

Рассмотрим экстремальные элементы в упорядоченном множестве всех конгруэнций цикла $C_m$. Так как в упорядоченном множестве (Con $C_m$, $\subseteq$) одна минимальная конгруэнция, которой является тождественная конгруэнция $\Delta$, то эта конгруэнция будет также наименьшим элементом упорядоченного множества всех конгруэнций цикла $C_m$.

Наибольшего элемента в (Con $C_m$, $\subseteq$) при $m \geq 5$ нет. Возьмем, например, главные конгруэнции $\theta(1,3)$ и $\theta(1,4)$, которые есть у любой цикла $C_m$ при $m \geq 5$. У этих конгруэнций нет общей верхней грани: если $\theta$ содержит $\theta(1,3)$ и $\theta(1,4)$, то в силу транзитивности пара $(3,4) \in \theta$, что невозможно, так как вершины 3 и 4 смежные. В (Con $P_m$, $\subseteq$), при $m > 4$, будет более одной максимальной конгруэнции, таким образом, наибольшего элемента в таких упорядоченных множествах не будет.

Так как для любых двух элементов $\theta_1$ и $\theta_2$ в упорядоченном множестве (Con $C_m$, $\subseteq$) существует $\inf(\theta_1,\theta_2) = \theta_1 \cap \theta_2$, то (Con $C_m$, $\subseteq$) – нижняя полурешетка.

Найдем высоту конгруэнции $\theta$ в полурешетке (Con $C_m$, $\subseteq$) и длину полурешетки (Con $C_m$, $\subseteq$).

**Теорема 8.** В полурешетке (Con $C_m$, $\subseteq$) высота конгруэнции $\theta$ равна $h(\theta) = m - c(\theta)$, где $c(\theta)$ – число классов конгруэнции $\theta$.

Доказательство. Докажем теорему с помощью математической индукции по $m$.

Базис индукции. Для случаев $m = 3$ утверждение очевидным образом выполняется. Пусть $m = 4$. Полурешетка (Con $P_4$, $\subseteq$) имеет два уровня: на нулевом уровне находится тождественная конгруэнция $\theta_1 = \Delta$, на первом – две конгруэнции: $\theta_2 = \{1,3\},\{2\},\{4\}$, $\theta_3 = \{1\},\{2,4\},\{3\}$, на втором – конгруэнция $\theta_4 = \{1,3\},\{2,4\}$, откуда

$h(\theta_1) = 4 - c(\theta_1) = 4 - 4 = 0;$

$h(\theta_2) = 4 - c(\theta_2) = 4 - 3 = 1;$

$h(\theta_3) = 4 - c(\theta_3) = 4 - 3 = 1;$

$h(\theta_4) = 4 - c(\theta_4) = 4 - 2 = 2.$

Таким образом, утверждение теоремы выполняется.

Шаг индукции. Предположим, доказываемое утверждение верно для $m = k$, т.е. $h(\theta) = k - c(\theta)$ для любой конгруэнции $\theta \in$ Con $C_k$. Докажем, что оно верно и для $m = k+1$, т.е. что $h(\theta^*) = k+1-c(\theta^*)$ для любой конгруэнции $\theta^* \in$ Con $C_{k+1}$.

Каждая конгруэнция $\theta^* \in$ Con $C_{k+1}$ получается из некоторой конгруэнции $\theta \in$ Con $C_k$ одним из двух способов:

1) присоединением нового класса $\{k+1\}$;

2) добавлением в один из $\theta$-классов вершины $k+1$, кроме классов, содержащих вершины 1 или $k$.

В первом случае $h(\theta^*) = h(\theta)$ в полурешетках (Con $C_{k+1}$, $\subseteq$) и (Con $C_k$, $\subseteq$) соответственно и $c(\theta^*) = c(\theta)+1$, откуда $h(\theta^*) = h(\theta) = k - c(\theta) = k+1-c(\theta^*)$, а во втором $h(\theta^*) = h(\theta)+1$ и $c(\theta^*) = c(\theta)$, откуда $h(\theta^*) = h(\theta)+1 = k - c(\theta)+1 = k+1-c(\theta^*)$. Исходя из этого, получаем, что для любой конгруэнции $\theta^* \in$ Con $C_{k+1}$ верно равенство $h(\theta^*) = k - c(\theta^*)$. □

**Теорема 9.** Полурешетка (Con $C_m$, $\subseteq$) имеет длину $m$–2, если $m$ – четное, и длину $m$–3, если $m$ – нечетное.

Доказательство. Для циклов четной длины максимальной конгруэнцией с наименьшим количеством классов будет конгруэнция $\theta$, состоящая из двух классов, в одном классе – все четные вершины цикла $C_m$, в другом – все нечетные. Таким образом, высота данной конгруэнции по теореме 8 будет $h(\theta) = m–c(\theta) = m—2$.

Покажем, что для циклов нечетной длины максимальной конгруэнцией с наименьшим количеством классов будет конгруэнция $\theta$, состоящая из трех классов, факторграф по которой будет $C_3$. Согласно теореме 10 из главы 1, связный граф тогда и только тогда является факторграфом цикла $C_m$, когда в нем есть циклический обход длины $m$. Покажем, что $C_3$ является факторграфом любого цикла $C_m$, $m \geq 3$, $m \neq 4$. Пусть дан граф $C_m$. Построим обход длины $m$ в графе $C_3$ следующим образом: возьмем произвольную вершину $v_i$ цикла $C_m$ обозначим её 1, далее двигаясь по часовой стрелке, будем обозначать вершины цикла числами 2, …, $m$. Таким образом, каждая вершина цикла при обходе получит одну или более меток из натуральных чисел 1, …, $m$–1, $m$, т.е. в графе $C_3$ вершины будут иметь метки: {1, 4, …, $m$–2}, {2, 5, …, $m$–1}, {3, 6, …., $m$}. Если получится, так что при обходе метка $m$ будет попадать в класс, содержащий вершину 1, то мы всегда можем поместить ее в класс, содержащий вершину $m$–2. Так как в цикле $C_3$ каждая вершина соединена со всеми другими, то обход всегда будет циклическим, то есть вершина $m$ в любом случае окажется смежной с вершиной 1. Таким образом, мы показали, что $C_3$ является факторграфом любого цикла $C_m$, $m \geq 3$, $m \neq 4$.

Следовательно, так как цикл нечетной длины не может иметь максимальной конгруэнцией с наименьшим количеством классов конгруэнцию, состоящую из двух классов, но может иметь конгруэнцию с наименьшим количеством классов конгруэнцию $\theta$ с тремя классами, то данная конгруэнция и будет максимальной, таким образом, высота данной конгруэнции по теореме 8 будет $h(\theta) = m–c(\theta) = m–3$. □

**Теорема 10.** Конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $C_m$, $\subseteq$), тогда и только тогда, когда факторграф $C_m/\theta$ будет полным графом.

Доказательство. Структура доказательства будет такой же как и для цепи $P_m$. Необходимость. Пусть конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $C_m$, $\subseteq$), то есть в (Con $C_m$, $\subseteq$) нет конгруэнции $\theta^*$, такой что $\theta^* \supset \theta$. У всякой конгруэнции $\theta$ цикла $C_m$ классы являются независимыми подмножествами, т. е. $(i, j) \in \theta{:}\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – несмежные вершины цикла $C_m$).

Предположим, что $C_m/\theta$ не будет полным графом. Тогда существуют классы $\theta(u)$ и $\theta(v)$, не смежные в $C_m/\theta$, то есть никакие $u' \in \theta(u)$ и $v' \in \theta(v)$ не будут смежными в цикле $C_m$. Объединив классы $\theta(u)$ и $\theta(v)$, получим новую конгруэнцию $\theta^*$ цикла $C_m$. При этом получается, что $\theta^* \supset \theta$ в (Con $C_m$, $\subseteq$), т.е. конгруэнция $\theta$ не будет максимальной, а это противоречит условию.

Достаточность. Пусть $C_m/\theta$ будет полным графом. Покажем, что конгруэнция $\theta$ будет максимальной в (Con $C_m$, $\subseteq$).

Так как $C_m/\theta$ – полный граф, то каждая его вершина смежна со всеми другими, то есть любые классы $\theta(u)$ и $\theta(v)$ соединены ребром $\{\theta(u), \theta(v)\}$ в $C_m/\theta$, а значит, найдутся такие $u' \in \theta(u)$ и $v' \in \theta(v)$, что $u'$ и $v'$ смежны в цикле $C_m$.

Предположим, что конгруэнция $\theta$ не будет максимальной в (Con $C_m$, $\subseteq$), т.е. $\theta^* \supset \theta$ в (Con $C_m$, $\subseteq$) для некоторой $\theta^* \in$ Con $C_m$.

Пусть $u$ и $v$ – вершины цикла $C_m$, такие что $(u,v) \notin \theta$, т. е. $\theta(u) \neq \theta(v)$ в $C_m/\theta$, и $(u,v) \in \theta^*$. Тогда $(\exists u' \in \theta(u), v' \in \theta(v))((u',v') \in \alpha)$ и $(u',v') \in \theta^*$, что невозможно, так как вершины $u'$ и $v'$ смежны в цикле $C_m$.

Таким образом, показано, что не существует такой конгруэнции $\theta^*$ в $(\mathrm{Con}\ C_m, \subseteq)$, что $\theta^* \supset \theta$, т. е. конгруэнция $\theta$ будет максимальной в $(\mathrm{Con}\ C_m, \subseteq)$. □

Таким образом, согласно теореме 10, число максимальных конгруэнций в полурешетке $(\mathrm{Con}\ C_m, \subseteq)$ будет равно числу полных графов, на которые факторизуется цикл $C_m$. Найдем среди них полный граф $K_n$ с наибольшим количеством вершин $n$. Заметим, что если цикл $C_m$ будет факторизоваться на полный граф $K_n$, то также она будет факторизоваться на любой полный граф $K_l$, $l = 2, \ldots, n–1$. Ссылаясь на следствие 1 из теоремы 14 из главы 1, видим, что длина кратчайшей цепи, факторизующейся на $K_n$, есть $c(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$ при $n$ нечетном и $c(K_n) = \frac{n^2}{2}$ при $n$ четном.

Алгоритм нахождения полного графа с наибольшим числом вершин будет аналогичен алгоритму для цепи $P_m$. Если $K_n$ является полным графом с наибольшим возможным числом вершин, на который факторизуется цикл $C_m$, то $n$ – ахроматическое число цикла $C_m$. Найдем его значение. Для полного графа $K_n$ с наибольшим четным количеством вершин $n$, являющегося факторграфом цикла $C_m$, получаем $n = \lfloor \sqrt{2(m+1)} \rfloor$. Далее проверяем, является ли граф $K_n$ факторграфом цикла $C_m$, имеющим наибольшее количество вершин, или цикл $C_m$ факторизуется на граф $K_{n+1}$. Так как $n+1$ – нечетное число, то должно быть $m \geq \frac{n(n-1)}{2}$. Если $m$ удовлетворяет данному условию, то полный граф $K_{n+1}$ является факторграфом цикла $C_m$ и наибольшим по числу вершин. Эти результаты согласуются с результатами из [26].

Главным идеалом, порожденным конгруэнцией $\theta$, называется подмножество полурешетки $(\mathrm{Con}\ C_m, \subseteq)$, образуемое всеми конгруэнциями $\theta^*$ такими, что $\theta^* \subseteq \theta$. Очевидно, что главный идеал является решеткой.

**Теорема 11.** Главные идеалы, порожденные конгруэнциями одного типа в полурешетке $(\mathrm{Con}\ C_m, \subseteq)$, являются изоморфными решетками.

Доказательство. Схема построения доказательства будет той же, что и для цепи $P_m$. Возьмем главные идеалы Id $\theta_1$ и Id $\theta_2$ в полурешетке (Con $C_m$, $\subseteq$), порожденные однотипными конгруэнциями $\theta_1$ и $\theta_2$ соответственно. Покажем, что Id $\theta_1 \cong$ Id $\theta_2$.

Рассмотрим конгруэнции $\theta_1$ и $\theta_2$. Так как $\theta_1$ и $\theta_2$ – конгруэнции одного типа, то количество их классов будет одинаково. Запишем классы конгруэнций в порядке убывания по количеству элементов в каждом классе, а сами элементы в каждом классе запишем в порядке их возрастания. Таким способом выстроим последовательность вершин цикла в порядке их следования в каждой конгруэнции. Для $\theta_1$ получим $u_0$, $u_1$, …, $u_m$, а для $\theta_2$ получим $v_0$, $v_1$, …, $v_m$. Очевидно, что каждая последовательность перечисляет в некотором порядке все вершины цикла $C_m$. Определим биекцию на множестве вершин цепи, полагая $\varphi(u_i) = v_i$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Возьмем конгруэнцию $\theta \in$ Id $\theta_1$, т.е. $\theta \subseteq \theta_1$. Произведем замену каждого элемента $u_i$ в каждом классе конгруэнции $\theta$ на $\varphi(u_i)$, $i = \overline{0,m}$. Получим $\varphi(\theta)$ – некоторый набор подмножеств множества вершин цикла $C_m$. Так как $\varphi$ – биекция и в $\theta$ задействованы все вершины цикла $C_m$, то и $\varphi(\theta)$ содержит все вершины цикла $C_m$. Значит $\varphi(\theta)$–классы образуют покрытие множества вершин $V$. Если классы перекрываются, то $\varphi(u) = \varphi(v)$ для некоторых $u, v \in V$, но тогда $u = v$, что невозможно. Таким образом, $\varphi(\theta)$ будет разбиением множества $V$. Из некоторого класса разбиения $\varphi(\theta)$ возьмем вершины $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$, тогда $(\varphi(u),\varphi(v)) \in \varphi(\theta) \Rightarrow \Rightarrow (u,v) \in \theta \Rightarrow (u,v) \in \theta_1 \Rightarrow (\varphi(u),\varphi(v)) \in \theta_2 \Rightarrow (\varphi(u),\varphi(v)) \notin \alpha$ ($\alpha$ – отношение смежности в цикле $C_m$). Таким образом, $\varphi(\theta)$ – разбиение на множестве вершин цикла $C_m$, все классы которого будут независимыми, т.е. $\varphi(\theta)$ – конгруэнция на множестве вершин цикла $C_m$.

Покажем, что $\varphi(\theta) \in$ Id $\theta_2$, для этого установим тот факт, что любой класс конгруэнции $\varphi(\theta)$ входит в состав некоторого класса конгруэнции $\theta_2$. Ранее было показано, что любые $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$, находящиеся в одном классе конгруэнции $\varphi(\theta)$, попадут в один класс конгруэнции $\theta_2$, т.е. $(\varphi(u),\varphi(v)) \in \varphi(\theta)$

$\Rightarrow$ $(\varphi(u),\varphi(v)) \in \theta_2$. Таким образом, получаем, что любой класс $\varphi(\theta)$ является подклассом некоторого класса конгруэнции $\theta_2$, следовательно $\varphi(\theta) \in \mathrm{Id}\ \theta_2$.

С помощью $\varphi$ установлено взаимно однозначное соответствие между главными идеалами $\mathrm{Id}\ \theta_1$ и $\mathrm{Id}\ \theta_2$. Теперь под $\varphi$ будем понимать $\varphi$: $\mathrm{Id}\ \theta_1 \to \mathrm{Id}\ \theta_2$. Из приведенных выше рассуждений следует, что это соответствие сохраняет порядок, т.е. если $\theta^* \subseteq \theta$, то $\varphi(\theta^*) \subseteq \varphi(\theta)$ и обратно. В результате получим, что $\varphi$ – изоморфизм. □

Подсчитаем общее количество элементов решетки $\mathrm{Id}\ \theta$, порожденной конгруэнцией $\theta$. Пусть конгруэнция $\theta$ имеет тип $(t_1, t_2, ..., t_n)$. Элементами решетки $\mathrm{Id}\ \theta$ будут всевозможные конгруэнции $\theta^*$ такие, что любой класс конгруэнции $\theta^*$ входит в состав некоторого класса конгруэнции $\theta$.

Пусть $\theta^* \in \mathrm{Id}\ \theta$. Так как любой класс конгруэнции $\theta^*$ входит в состав некоторого класса конгруэнции $\theta$, то конгруэнция $\theta^*$ будет подразбиением конгруэнции $\theta$.

Таким образом, необходимо подсчитать всевозможные разбиения классов конгруэнции $\theta$. Так как нам известна мощность каждого класса конгруэнции $\theta$, а количество разбиений $n$-элементного множества – это число Белла $B(n)$, то общее количество элементов решетки $\mathrm{Id}\ \theta$, порожденной конгруэнцией $\theta$ типа $(t_1, t_2, ..., t_n)$, можно подсчитать по формуле: $B(t_1)B(t_2) \dots B(t_n)$.

Найдем количество коатомов в главном идеале $\mathrm{Id}\ \theta$, порожденном конгруэнцией $\theta$ типа $(t_1, t_2, ..., t_n)$. Конгруэнция $\theta$ имеет $n$ классов и будет наибольшим элементом в решетке $\mathrm{Id}\ \theta$. Так как коатомы являются нижними соседями наибольшего элемента, то конгруэнция, являющаяся коатомом, имеет $n$+1 классов.

Возьмем произвольный класс конгруэнции $\theta$, разобьем его на два класса. Получим новую конгруэнцию $\theta^*$ с $n$+1 классами. Найдем все возможные разбиения на два класса произвольного $\theta$-класса мощности $t$, их количество будет $s_2(t,2)$. Таким образом, возьмем каждый класс конгруэнции $\theta$, и найдем его всевозможные разбиения на два класса, каждое такое разбиение будет коатомом. Таким образом, общее количество коатомов можно посчитать по формуле $s_2(t_1,2)+ +s_2(t_2,2)+\ldots+ s_2(t_n,2) = \sum_{i=1}^{n} s_2(t_i,2)$.

Подсчитаем количество атомов в главном идеале Id $\theta$, порожденном конгруэнцией $\theta$ типа $(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_n)$. Атомами являются верхние соседи наименьшего элемента, т.е. это главные конгруэнции.

Пусть $\theta^* \in$ Id $\theta$ будет главной конгруэнцией. Согласно определению главной конгруэнции, очевидно, что один из классов конгруэнции $\theta^*$ будет иметь мощность два, все остальные мощность один. Так как $\theta^* \in$ Id $\theta$, то любой класс конгруэнции $\theta^*$ входит в состав некоторого класса конгруэнции $\theta$, значит, конгруэнция $\theta^*$ будет подразбиением конгруэнции $\theta$. Таким образом, найдем всевозможные пары элементов каждого класса конгруэнции $\theta$. Так как мы знаем мощность каждого класса конгруэнции $\theta$, то количество всех атомов главного идеала Id $\theta$ можно посчитать по формуле: $C_{t_1}^2 + C_{t_2}^2 + \ldots + C_{t_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} C_{t_i}^2$.

Пример 4. Подсчитаем количество элементов, коатомов и атомов в главных идеалах Id ({1,3},{2,5},{4}) и Id ({1,4},{2},{3,5}) цикла $C_5$. Так как они изоморфны, то достаточно подсчитать для одного главного идеала. Конгруэнция, порождающая главный идеал Id ({1,3},{2,5},{4}) цикла $C_5$, имеет тип (2,2,1). Найдем общее количество элементов решетки Id ({1,3},{2,5},{4}) цикла $C_5$: $B(2)B(2)B(1) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$. Подсчитаем общее количество коатомов главного идеала Id ({1,3},{2,5},{4}) цикла $C_5$: $s_2(2,2)+s_2(2,2)+s_2(1,2) = 1 + 1 + 0 = 2$. Найдем количество атомов в главном идеале Id ({1,3},{2,5},{4}) цикла $C_5$: $C_2^2 + C_2^2 + C_1^2 = = 1 + 1 + 0 = 2$.

Конгруэнция $\theta$ цикла $C_m$ называется правильной, если $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – вершины цикла $C_m$ одной четности). Обозначим множество правильных конгруэнций через Con$_{пр}$ $C_m$. Определим четную конгруэнцию цикла $C_m$ как такую конгруэнцию $\theta$, что $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – четные вершины цикла $C_m$), а нечетную конгруэнцию $\theta$, как $(i, j) \in \theta :\Rightarrow$ ($i$ и $j$ – нечетные вершины цикла

$C_m$). Обозначим множество четных конгруэнций через $\mathrm{Con}_{\text{ч}}\, C_m$. Аналогично определим множество нечетных конгруэнций $\mathrm{Con}_{\text{н}}\, C_m$.

Рассмотрим полурешетку конгруэнций четного цикла $C_m$. Так как ($\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, C_m$, $\subseteq$) является нижней полурешеткой и в ней есть наибольший элемент, то ($\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, C_m$, $\subseteq$) – решетка (наибольшим элементом в ($\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, C_m$, $\subseteq$), очевидно, будет конгруэнция с двумя классами, в одном классе которой будут все четные вершины цикла $C_m$, в другом – все нечетные).

**Теорема 12.** $\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, C_m \cong \mathrm{Con}_{\text{ч}}\, C_m \times \mathrm{Con}_{\text{н}}\, C_m$.

Доказательство. Согласно определению, прямым произведением $\mathrm{Con}_{\text{ч}}$ $C_m \times \times\, \mathrm{Con}_{\text{н}}\, C_m$ будет множество всех пар ($\theta_{\text{ч}}$, $\theta_{\text{н}}$), где $\theta_{\text{ч}} \in \mathrm{Con}_{\text{ч}}\, C_m$ и $\theta_{\text{н}} \in \mathrm{Con}_{\text{н}}$ $C_m$, причем $(\theta^1{}_{ч}, \theta^1{}_{н}) \leq (\theta^2{}_{ч}, \theta^2{}_{н})$ тогда и только тогда, когда $\theta^1{}_{ч} \subseteq \theta^2{}_{ч}$ в $\mathrm{Con}_{\text{ч}}$ $C_m$ и $\theta^1{}_{н} \subseteq \theta^2{}_{н}$ в $\mathrm{Con}_{\text{н}}\, C_m$.

Требуемый изоморфизм получается, если каждой конгруэнции $\theta \in$ $\mathrm{Con}_{\text{пр}}\, C_m$ сопоставить пару ($\theta_1$, $\theta_2$), где $\theta_1$ – эквивалентность, нетривиальными классами которой являются в точности $\theta$-классы, состоящие из четных вершин цикла, а $\theta_2$ имеет нетривиальными классами в точности $\theta$–классы, состоящие из нечетных вершин. Очевидно, что $\theta_1 \in \mathrm{Con}_{\text{ч}}\, C_m$ и $\theta_2 \in \mathrm{Con}_{\text{н}}\, C_m$. □

Согласно Пудлак и Тума [36], так же, как и для цепи, имеет место

**Теорема 13.** Любая конечная решетка вложима в решетку четных конгруэнций подходящего четного цикла.

Доказательство. Покажем, что всякая решетка эквивалентностей конечного множества изоморфна решетке четных конгруэнций подходящего четного цикла.

Рассмотрим решетку ($\mathrm{E}(m)$, $\subseteq$) всех эквивалентностей на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$. Возьмем произвольную эквивалентность $\varepsilon$ на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$. Каждый элемент $i$, $i=\overline{0,m}$, в каждом $\varepsilon$–классе заменим на $2i$. Получим эквивалентность $\theta(\varepsilon)$ на множестве четных чисел $\leq 2m$, все классы которой будут независимыми подмножествами цепи $C_{2m}$, т.е. получим четную конгруэнцию цикла $C_{2m}$. С другой стороны, если $\theta \in \mathrm{Con}_{\text{ч}}\, C_{2m}$, то заменив в каждом $\theta$–классе элемент $i \in \{2, 4, \ldots, 2m\}$ на $i/2$, получим эквивалентность

$\varepsilon(\theta)$ на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$. При этом если $\varepsilon_1 \subseteq \varepsilon_2$ в $E(m)$, то $\theta(\varepsilon_1) \subseteq \theta(\varepsilon_2)$, и обратно если $\theta_1 \subseteq \theta_2$, то $\varepsilon(\theta_1) \subseteq \varepsilon(\theta_2)$. Значит, решетки $(E(m), \subseteq)$ и $(\mathrm{Con}_ч\, C_{2m}, \subseteq)$ изоморфны. □

Обозначим совокупность всех $\delta$–конгруэнций цикла $C_m$ через $\mathrm{Con}_\delta\, C_m$.

Заметим, что $(x, y) \in \theta_{d_1}$, если $x$ и $y$ имеют одинаковые остатки при делении на $d_1$, т.е. $x \equiv y(\mathrm{mod}\ d_1)$, а $(w, z) \in \theta_{d_2}$, если $w$ и $z$ имеют одинаковые остатки при делении на $d_2$, т.е. $w \equiv z(\mathrm{mod}\ d_2)$, таким образом $(u, v) \in \theta_{d_1} \cap \theta_{d_2}$, если $u$ и $v$ имеют одинаковые остатки при делении на $d_1$ и при делении на $d_2$, т.е. $u \equiv v(\mathrm{mod}$ НОК$(d_1, d_2))$. Таким образом, получаем, что $\theta_{d_1} \cap \theta_{d_2} = \theta_{НОК(d_1,d_2)}$.

Так как для любых двух элементов $\theta_{d_1}$ и $\theta_{d_2}$ в упорядоченном множестве $(\mathrm{Con}_\delta\, C_m, \subseteq)$ существует $\inf(\theta_{d_1}, \theta_{d_2}) = \theta_{d_1} \cap \theta_{d_2}$, то $(\mathrm{Con}_\delta\, C_m, \subseteq)$ – нижняя полурешетка. Наименьшим элементом ее является тождественная конгруэнция $\Delta$, а именно конгруэнция $\theta_d$, где $d = m$.

**Теорема 14.** Полурешетка циклических $\delta$–конгруэнций цепи $C_m$ дуально изоморфна полурешетке нееденичных делителей числа $m$.

Доказательство.

Определим отображение: $\varphi^*$: $L(m) \to \mathrm{Con}_\delta\, C_m$, $d \mapsto \theta_d$. При $m = dk$ конгруэнция $\theta_d$ имеет классы $\{1, 1+d, 1+2d, \ldots, 1+d(k–1)\}$, $\{2, 2+d, 2+2d, \ldots, 2+d(k—1)\}$, …, $\{d, 2d, 3d, \ldots, d+d(k–1)\}$.

Отображение $\varphi^*$ взаимно однозначно. Действительно, пусть $m = k_1d_1$, $m = k_2d_2$. Конгруэнция $\theta_{d_1}$ имеет $d_1$ классов, а конгруэнция $\theta_{d_2}$ имеет $d_2$ классов. Если $\theta_{d_1} = \varphi^*(d_1) = \varphi^*(d_2) = \theta_{d_2}$, то $d_1 = d_2$.

Покажем, что если $d_1|d_2$, то $\varphi^*(d_1) \supset \varphi^*(d_2)$ для любых делителей $d_1$, $d_2$, числа $n$.

Пусть $m = d_1k_1 = d_2k_2$, $d_2 = d_1k^*$. Тогда $m = d_2k_2 = d_1(k^*k_2)$, и получаем, что $k^*k_2 = k_1$. Общий вид элементов $\theta_{d_2}$–класса будет следующим: $i+d_2k$, $1 \le i \le d_2$, $0 \le k \le k_2–1$. Представим $i = j+d_1l$, где $1 \le j \le d_1$, $0 \le l \le k^*–1$. Тогда $i+d_2k$ $= = j+d_1l+d_2k = j+d_1l+(d_1k^*)k = j+d_1(l+k^*k)$, где $1 \le j \le d_1$, $0 \le l+k^*k \le k^*–1+$

$k^*(k_2–1) = = k^*k_2–1 = k_1–1$. Таким образом, элемент $i+d_2k$ находится в $\theta_{d_1}$-классе, содержащем элемент $j$. В итоге получаем, что при $d_1|d_2$ будет $\varphi^*(d_2) = \theta_{d_2} \supset \theta_{d_1} = \varphi^*(d_1)$.

С другой стороны, пусть $\varphi^*(d_1) \supset \varphi^*(d_2)$, т.е. $\theta_{d_1} \supset \theta_{d_2}$. Каждый $\theta_{d_1}$-класс имеет $k_1$ элементов и разбивается на $\theta_{d_2}$-классы, каждый из которых содержит $k_2$ элементов. Следовательно, $k_1$ делится на $k_2$. Если $k^*k_2 = k_1$, то $d_2k_2 = m = d_1k_1 = = d_1(k^*k_2) = (d_1k^*)k_2$, откуда $d_2 = d_1k^*$, т.е. $d_1|d_2$. Таким образом, полурешетки $L(m)$ и $\mathrm{Con}_\delta\, C_m$ дуально изоморфны. □

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги исследований, представляемых в диссертации. В данной работе рассмотрены две основные темы и получены следующие результаты.

Глава 1. Основные свойства конгруэнций цепей и циклов

1. Показано, что каждый связный граф является факторграфом подходящей цепи.
2. Подсчитано количество конгруэнций и цепных конгруэнций заданной цепи.
3. Найдена длина наикратчайшей цепи, факторизующейся на данный связный граф, получены точные оценки для этой величины.
4. Выделены циклические конгруэнции $m$-реберной цепи, связанные с делителями числа $m$+1.
5. Результаты, аналогичные 1–4, получены также для циклов.

Глава 2. Полурешетка конгруэнций для цепи и для цикла

6. Подсчитана высота конгруэнции в полурешетке конгруэнций цепи.
7. Показано, что главные идеалы полурешетки Con $P_m$, порожденные однотипными конгруэнциями, являются изоморфными решетками.
8. Показано, что каждая конечная решетка вложима в решетку четных конгруэнций подходящей цепи.
9. Результаты, аналогичные 6–8, получены также для циклов.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абросимов, М.Б. Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов / М.Б. Абросимов // Известия Саратовского университета. Серия. Математика. Механика. Информатика. – Саратов: СГУ, 2006. – Т. 6. Вып. 1/2.– С. 86-91.
2. Алексеев, В.Е. Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа / В.Е. Алексеев // Дискретная математика. – 2007. – Т. 19. Вып. 3. – С. 84-88.
3. Общая алгебра / В. А. Артамонов [и др.] ; ред. Л. А. Скорняков. – М.: Наука, 1991 – Т. 2. – 480 с. – (Справочная математическая библиотека). – ISBN 5-02-014427.
4. Теория решеток / Г. Биркгоф; пер. с англ. В. Н. Салий; под ред. Л. А. Скорнякова. – М : Наука, 1984. – 566 с.
5. Алгебраические основы теории дискретных систем: монография / А.М. Богомолов, В.Н. Салий. – М.: Наука; Физматлит, 1997. – 368 с. – ISBN 5-02-015033-9.
6. Введение в техническую диагностику / под общ. ред. чл.-кор. АН СССР К.Б. Карандеева. – М.: Энергия, 1968. – 224 с.
7. Кабанов, М.А. Функциональные конгруэнции ориентированных графов / М.А. Кабанов // Упорядоченные множества и решётки. — Саратов, 1995. — Вып. 11. — С. 15-23.
8. Киреева, А.В. О конгруэнциях и автоморфизмах корневых деревьев / А.В. Киреева // Теория полугрупп и ее приложения. — Саратов, 1991. — Вып. 10. — С. 37-42.
9. Киреева, А.В. Решетка конгруэнций турнира / А.В. Киреева // Студенты – ускорению научного прогресса. — Саратов, 1991. — Вып. 3. — С. 3-7.

10. Киреева, А.В. Подграфы и факторизации функциональных графов / А.В. Киреева // Успехи мат. наук. — 1993. — Т. 48, № 2 (290). — С. 183-184.
11. Универсальная алгебра = Universal Algebra: перевод с английского / П. М. Кон; под ред. А. Г. Курош. — Москва: Мир, 1968. — 351 с.
12. Теория графов: алгоритмический подход = Graph Theory: An Algorithmic Approach: перевод с английского / Н. Кристофидес; под ред. Г.П. Гаврилова. — Москва: Мир, 1978. — 432 с.: ил.
13. Общая алгебра (лекции 1969-1970 учебного года) / А. Г. Курош. — Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы [Физматлит], 1974. — 159 с.
14. Алгебраические системы: монография / А. И. Мальцев. — Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы [Физматлит], 1970. — 392 с.
15. Мирзаянов, М.Р. О минимальных сильно связных конгруэнциях ориентированных цепей / М.Р. Мирзаянов // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2006. — Т. 6, вып.1/2. — С. 91-95.
16. Мирзаянов, М.Р. Сильно связные конгруэнции ориентированных графов / М.Р. Мирзаянов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. — Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2006. — Вып. 7. — С. 104-114.
17. Теория графов = Theory Of Graphs = THEORY OF GRAPHS: перевод с английского / О. Оре; под ред. Н.Н. Воробьева. — Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы [Физматлит], 1968. — 352 с.
18. Салий, В.Н. Универсальная алгебра и автоматы: учебно-методическое пособие / В.Н. Салий. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1988. – 72 с. – ISBN 5-292-00263-1.

19. Салий, В.Н. Оптимальные реконструкции графов. / В кн.: Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2008. – С. 59-65.

20. Solution of the Four Color Map Problem / K. Appel, W. Haken // Scientific American – October, 1977. – Vol. 237, № 4. – p. 108–121.

21. A textbook of graph theory / R. Balakrishnan, K. Ranganathan. – Springer, 2012. – p. 305. – ISBN 1-4614-4528-0.

22. The Konigsberg bridges problem generalized / R. Bellman, K.L. Cooke // J. of Math. Anal. and Appl. – 1969. – № 25. – p. 1-7.

23. Universal algebra and automata / G. Birkhoff, J.D. Lipson // Proc. Tarski Symp. (Proc. Symp. Pure Math., V. 25).— Providence, R.I., 1974. — Vol. 2. — p. 41-51.

24. Bell and Stirling numbers for Graphs / D. Bryce, P. Rhodes // Journal of Integer Sequences. – 2009. – Vol. 12, Art. 09.7.1. — p. 13.

25. Farr, E.H. Lattice properties of sequential machines / E.H. Farr // J. Assoc. Comput. Mach. — 1963. — Vol. 10, № 3. — p. 365-385.

26. Further results on the achromatic number / D. Geller, H. Kronk // Fundamenta Mathematicae LXXXV — 1974. — p. 285-290.

27. Factorization, congruences, and the decomposition of automata and systems / J.A. Goguen, J.W. Thatcher, E.G. Wagner, J.B. Wright // Lect. Notes Comput. Sci. — 1975. — Vol. 28. — p. 33-45.

28. Graph homomorphisms II: Computational aspects and infinite graphs, preprint / G. Hahn, G. MacGillivray — Université de Montréal, 1997.

29. Graph homomorphisms: structure and symmetry / G. Hahn, C. Tardif // In Graph symmetry, ASI ser C, Kluwer. — 1997. — p. 107-166.

30. The achromatic number of a graph / F. Harary, S. Hedetniemi // Journal of Combinatorial Theory 8 — 1970. — p. 154-161.

31. Algebraic structure theory of sequential machines / J. Hartmanis, R.E. Stearns — Prentice Hall, 1966. — p. 210.

32. Hayes, J.P. A graph model for fault-tolerant computing systems / J.P. Hayes // IEEE Trans. Comput. — 1976. — № 9. — p. 25.
33. Graphs and Homomorphisms / P. Hell, J. Nešetřil // Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. — Oxford University Press. — 2004. — Vol. 20. — p. 244. — ISBN 0-19-852817-5.
34. Hoehnke, H.J. Allgemeine Algebra der Automaten / H.J. Hoehnke // Weiterbildungszentr. Math. Kybern. und Rechnentechn. Sekt. Math. — 1973. — № 2. — S. 21-43.
35. Fibonacci numbers of graphs / H. Prodinger, R.F. Tichy // Fibonachi Quarterly. – 1982. – Vol. 20, № 1. – p. 16-21.
36. Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice / P. Pudlák, J. Tuma // Algebra Universalis. — 1980. — Vol.10. — p.74-95.
37. Edge dominating sets in graphs / M. Yannakakis, F. Gavril // SIAM Journal on Applied Mathematics — 1980. — Vol. 38, № 3. — p. 364–372.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

А1. Карманова, Е.О. Конгруэнции цепей / Е.О. Карманова // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2009. – С. 238.

А2. Карманова, Е.О. О конгруэнциях цепей и циклов / Е.О. Карманова // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы науч. конф. Саратов, 1 июля 2010 г. – Саратов: Изд-во СГУ, 2010. – С. 70-74

А3. Карманова, Е.О. О факторизациях цепей / Е.О. Карманова // Ломоносов-2011: Материалы XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция «Вычислительная математика и кибернетика»; 11–15 апреля; Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК: Сборник тезисов. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ (лицензия ИД 05899 от 24.09.2001), 2011. – С. 17–18. ISBN 978-5-89407-450-4.

А4. Карманова, Е.О. О конгруэнциях графов / Е.О. Карманова // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. – С. 195–197. ISBN 978-5-91326-161-8.

А5. Карманова, Е.О. О конгруэнциях цепей / Е.О. Карманова // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 2 (12). – С. 96–100. ISSN 2071-0410.

А6. Карманова, Е.О. О конгруэнциях цепей / Е.О. Карманова // Прикладная дискретная математика. Приложение: Тезисы докладов X Сибирской научной школы-семинара с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография». – SYBECRYPT'11 (Томск, ТГУ, 5–10 сентября 2011 г.). – № 4, сентябрь 2011. – С. 91–92.

А7. Karmanova, E.O. On congruence relations of graphs [Электронный ресурс] / E.O. Karmanova // 2011 Fall Central Section Meeting (University of

Nebraska-Lincoln, Lincoln, NE October 14–16). – 2011. – Режим доступа: http://www.ams.org/amsmtgs/2185_abstracts/1074-00-14.pdf.

A8. Карманова, Е.О. Две теоремы о конгруэнциях цепей / Е.О. Карманова // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2012» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2011. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. - Систем. требования: ПК с процессором 486+; Windows 95; дисковод DVD-ROM; Adobe Acrobat Reader. — ISBN 978-5-317-04041-3.

A9. Карманова, Е.О. Конгруэнции цепей: некоторые комбинаторные свойства / Е.О. Карманова // Прикладная дискретная математика. – 2012. – № 2 (16). – С. 86–89. – ISSN 2071-0410.

A10. Карманова, Е.О. Упорядоченное множество конгруэнций цепи / Е.О. Карманова // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы междунар. науч. конф. – Саратов: Издат. центр "Наука", 2012. – С. 133-135. – ISBN 978-5-9999-1304-3.

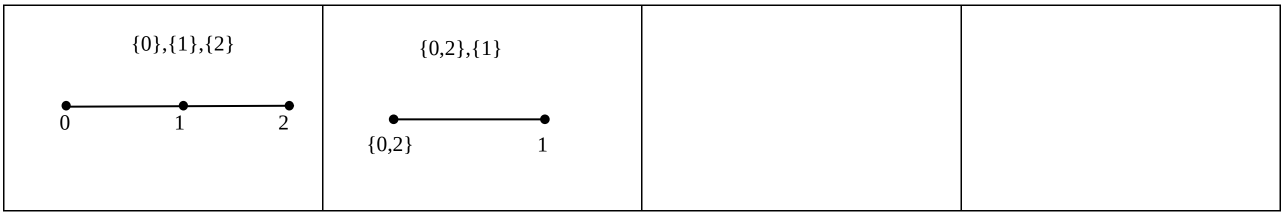
A11. Карманова, Е.О. Конгруэнции цепей: некоторые комбинаторные свойства / Е.О. Карманова // Прикладная дискретная математика. Приложение: Тезисы докладов Всероссийской конференции "XI Сибирская научная школа-семинар с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» – SYBECRYPT'12" (Иркутск, 3–8 сентября 2012 г.). – № 5, сентябрь 2012. – С. 93–94. – ISSN 2226-308X.

A12. Карманова, Е.О. О решетках конгруэнций цепи / Е.О. Карманова // Труды 55-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики и астрономии», Всероссийской молодёжной научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». Инновации и высокие технологии. – М.: МФТИ, 2012. – С. 22–24. – ISBN 978-5-7417-0408-0.

А13. Фомина, Е.О. Главные идеалы в полурешетке конгруэнций цепи / Е.О. Фомина // Известия СГУ. Серия Математика, механика, информатика. – 2013. – Т. 13, вып. 1. – С. 99-109.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ВСЕ КОНГРУЭНЦИИ И ФАКТОРГРАФЫ ЦЕПЕЙ $P_2$, $P_3$, $P_4$ И $P_5$.
# ВСЕ НЕИЗОМОРФНЫЕ ФАКТОРГРАФЫ ЦЕПЕЙ $P_2$, $P_3$, $P_4$ И $P_5$.

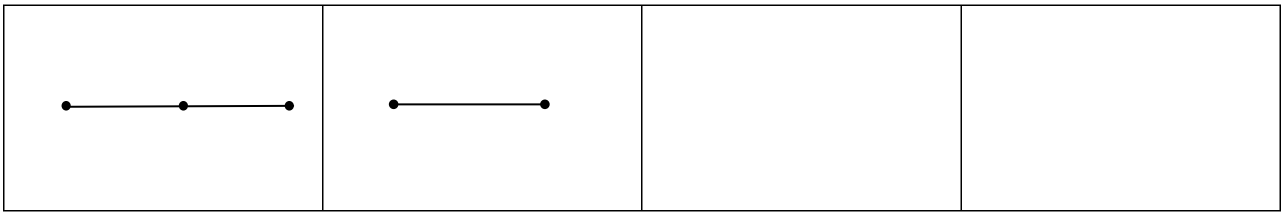
## Все конгруэнции и факторграфы цепи $P_2$




Цепь $P_2$ имеет два факторграфа, т.е. |Con $P_2$|=2.

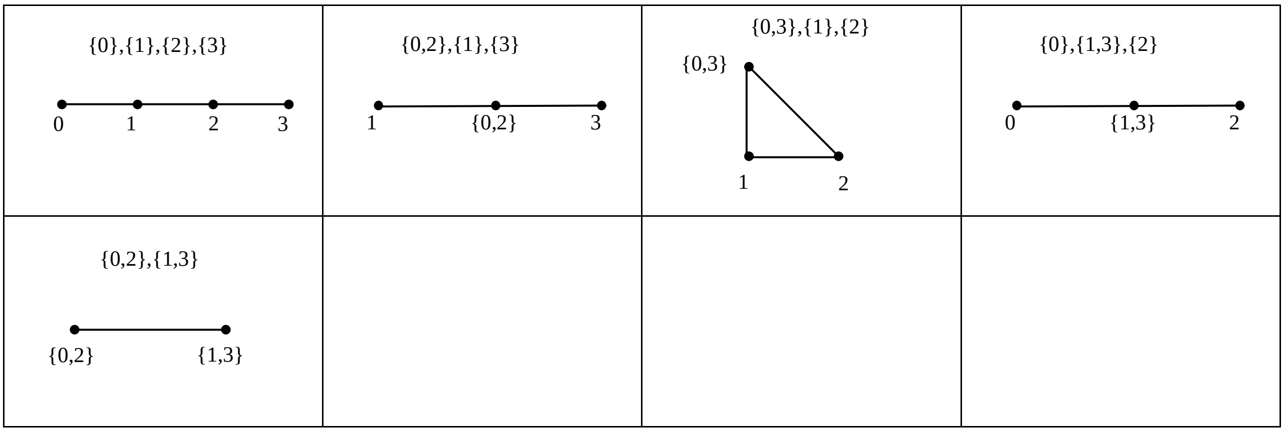
Цепь $P_2$ имеет одну циклическую конгруэнцию.

## Все неизоморфные факторграфы цепи $P_2$



Цепь $P_2$ имеет два неизоморфных факторграфа, т.е. $q(P_2)$=2.

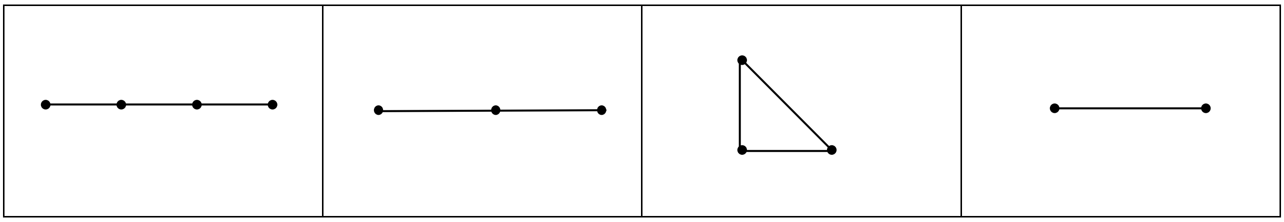
## Все конгруэнции и факторграфы цепи $P_3$




Цепь $P_3$ имеет пять факторграфов, т.е. |Con $P_3$|=5.

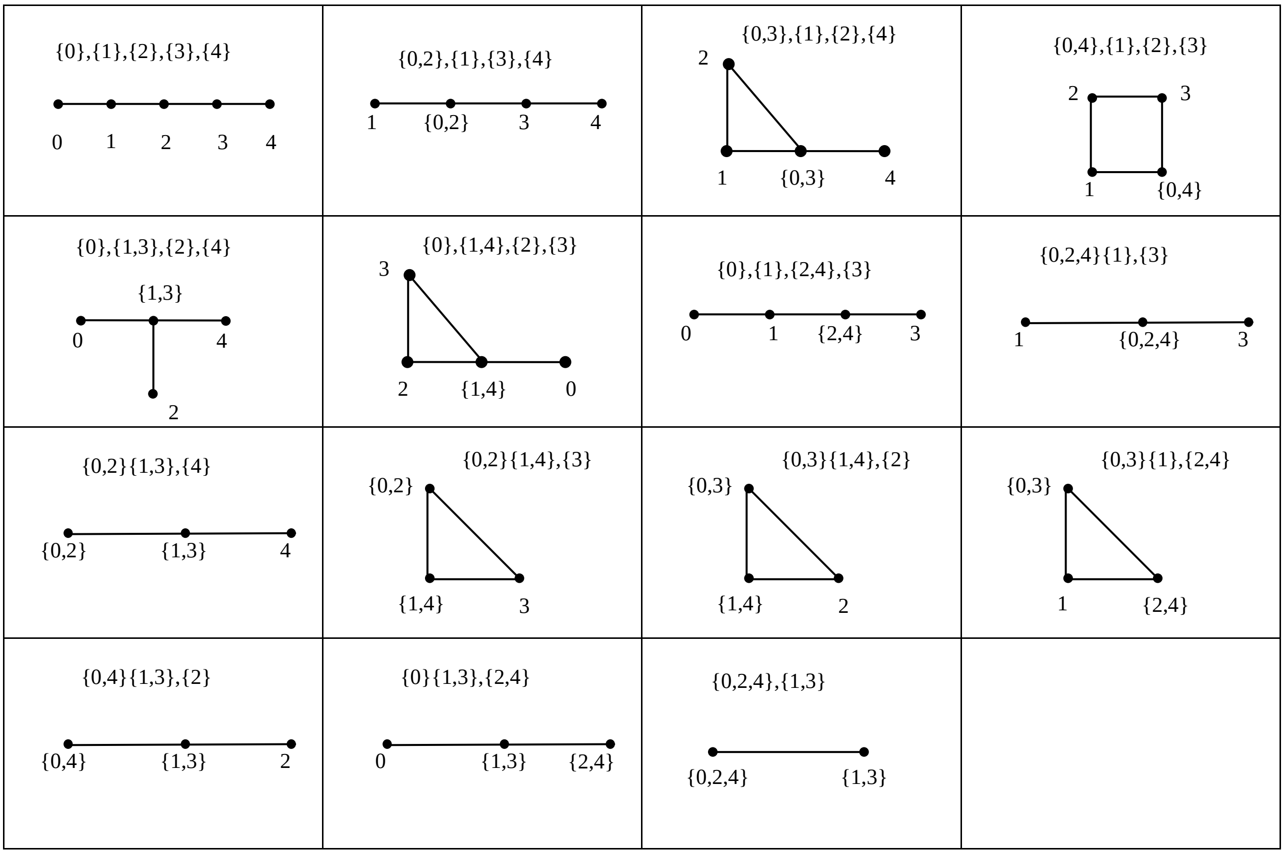
Цепь $P_3$ имеет две циклических конгруэнции, из них одна $\delta$-конгруэнция.

Все неизоморфные факторграфы цепи $P_3$



У цепи $P_3$ четыре неизоморфных факторграфа, т.е. $q(P_3)=4$.

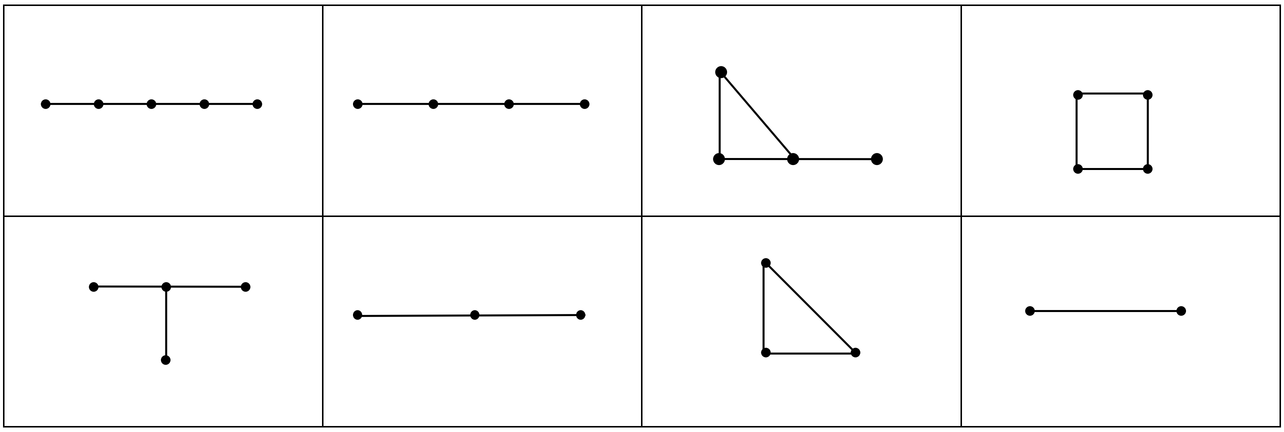
Все конгруэнции и факторграфы цепи $P_4$




Цепь $P_4$ имеет пятнадцать факторграфов, т.е. $|\mathrm{Con}\ P_4|=15$.

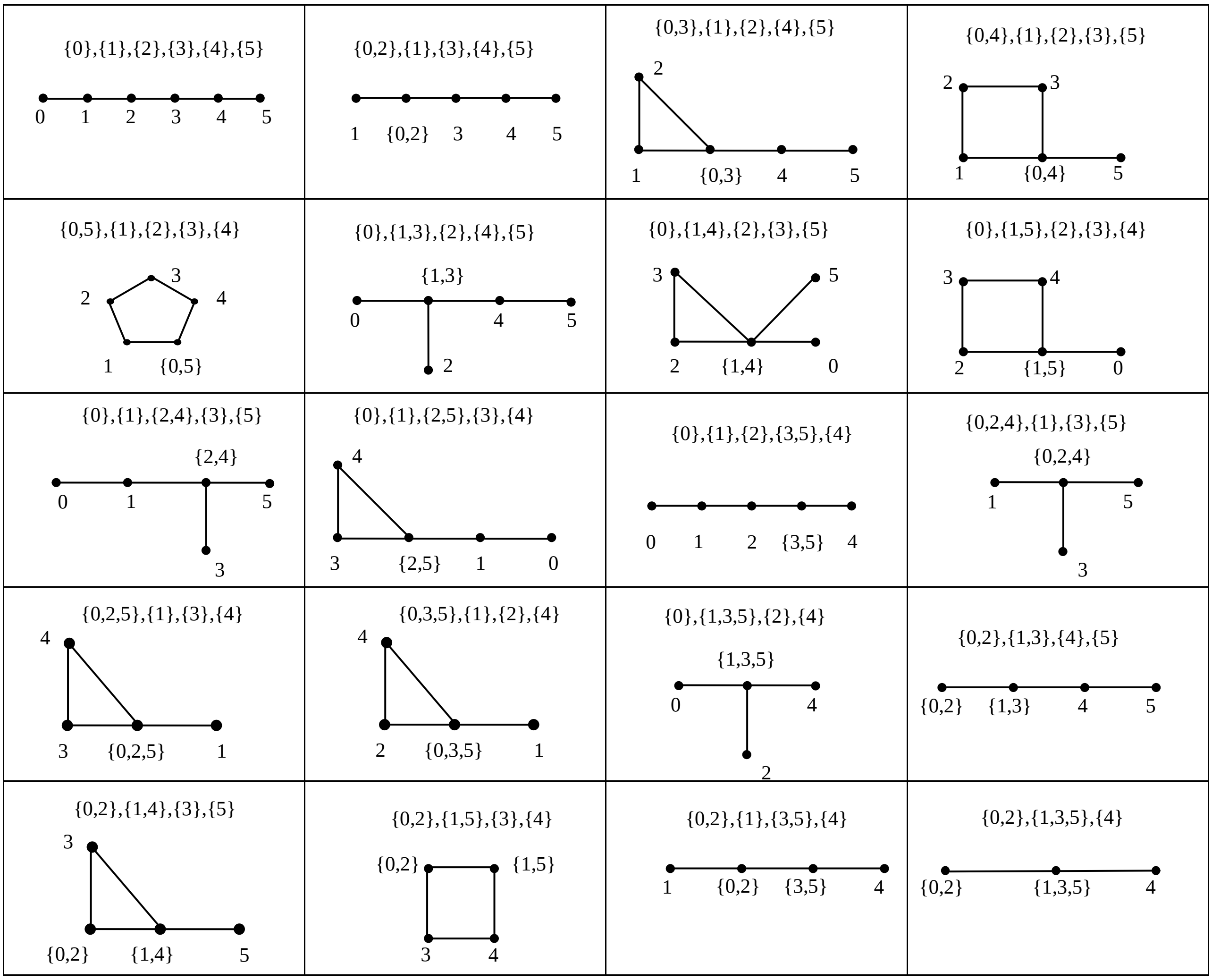
Цепь $P_4$ имеет пять циклических конгруэнций.

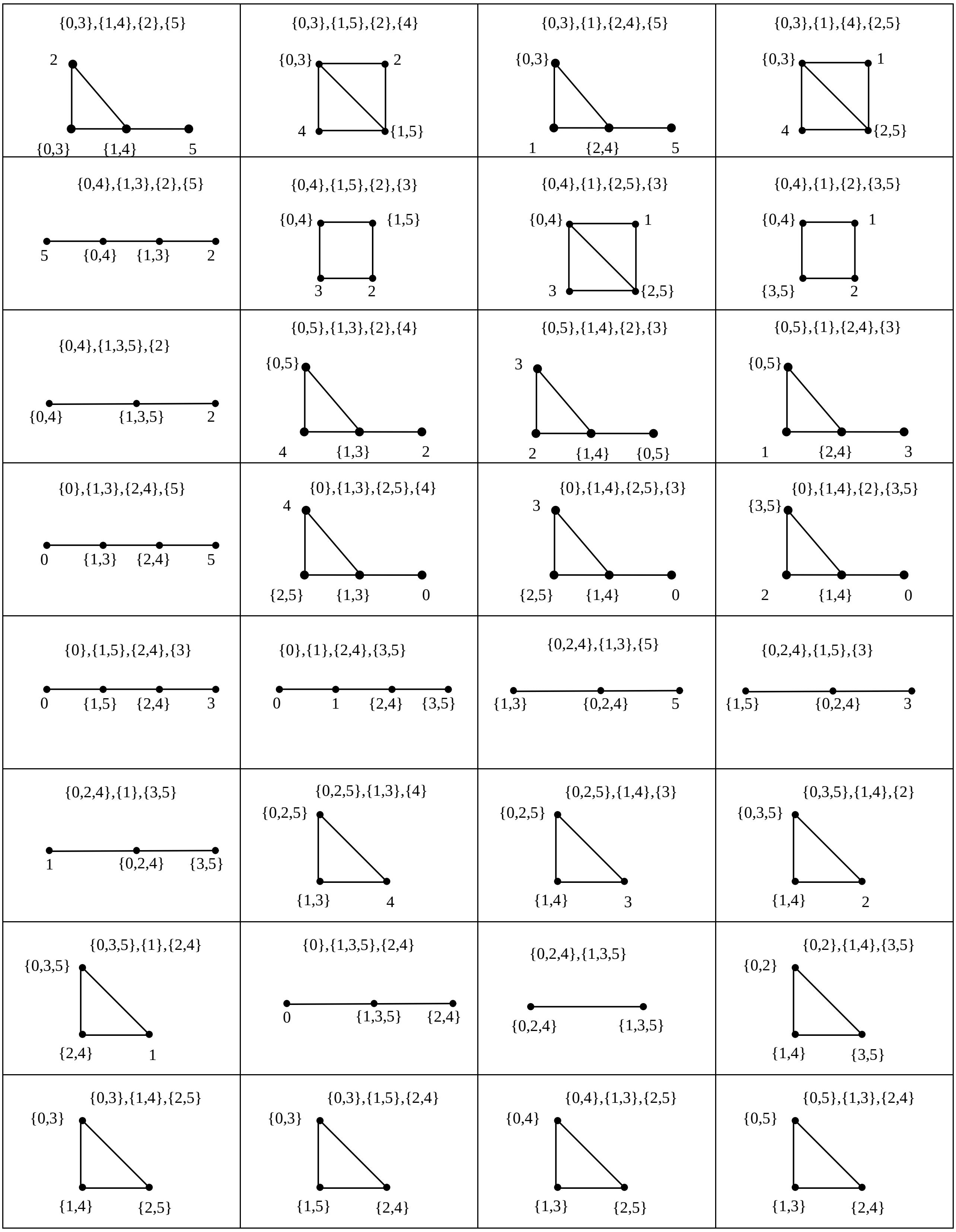
## Все неизоморфные факторграфы цепи $P_4$



У цепи $P_4$ восемь неизоморфных факторграфа, т.е. $q(P_4)$=8.

## Все конгруэнции и факторграфы цепи $P_5$

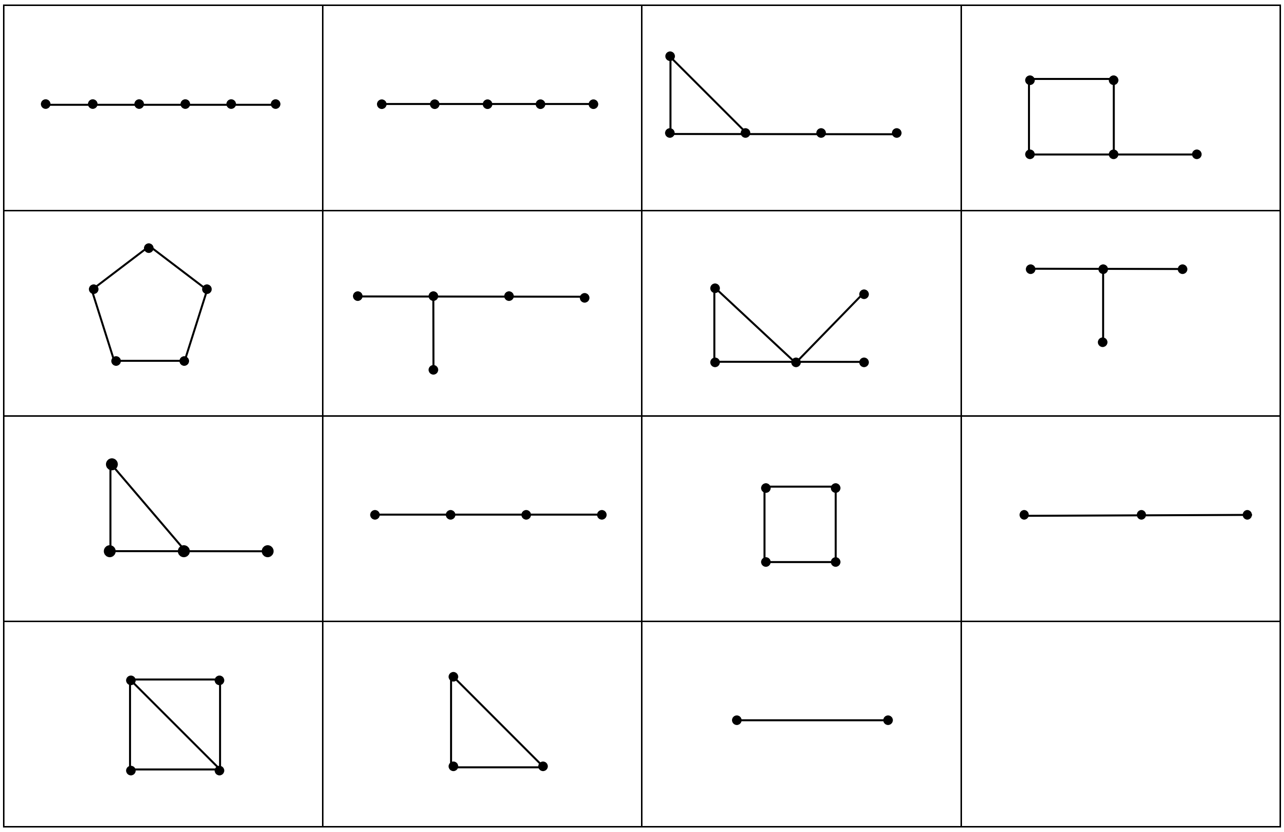





Цепь $P_5$ имеет пятьдесят два факторграфа, т.е. $|\mathrm{Con}\ P_5|=52$.

Цепь $P_5$ имеет четырнадцать циклических конгруэнций, из них две $\delta$-конгруэнции.

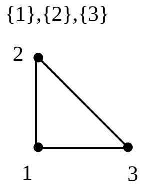
Все неизоморфные факторграфы цепи $P_5$



У цепи $P_5$ пятнадцать неизоморфных факторграфов, т.е. $q(P_5)$=15.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ВСЕ КОНГРУЭНЦИИ И ФАКТОРГРАФЫ ЦИКЛОВ $C_3$, $C_4$, $C_5$ И $C_6$.
# ВСЕ НЕИЗОМОРФНЫЕ ФАКТОРГРАФЫ ЦИКЛОВ $C_3$, $C_4$, $C_5$ И $C_6$.

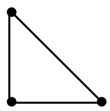
## Все конгруэнции и факторграфы цикла $C_3$

| | | | |
|---|---|---|---|
|  | | | |

Цикл $C_3$ имеет один факторграф, т.е. $|\mathrm{Con}\ C_3|=1$.

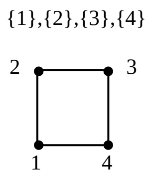
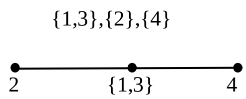
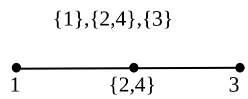
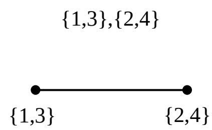
Цикл $C_3$ имеет одну циклическую конгруэнцию, она также является $\delta$-конгруэнцией.

## Все неизоморфные факторграфы цикла $C_3$

| | | | |
|---|---|---|---|
|  | | | |

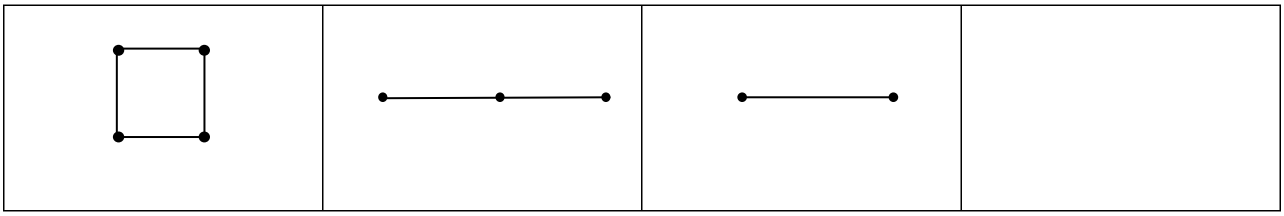
Цикл $C_3$ имеет один неизоморфный факторграф, т.е. $q(C_3)=1$.

## Все конгруэнции и факторграфы цикла $C_4$

| | | | |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

Цикл $C_4$ имеет четыре факторграфа, т.е. $|\mathrm{Con}\ C_4|=4$.

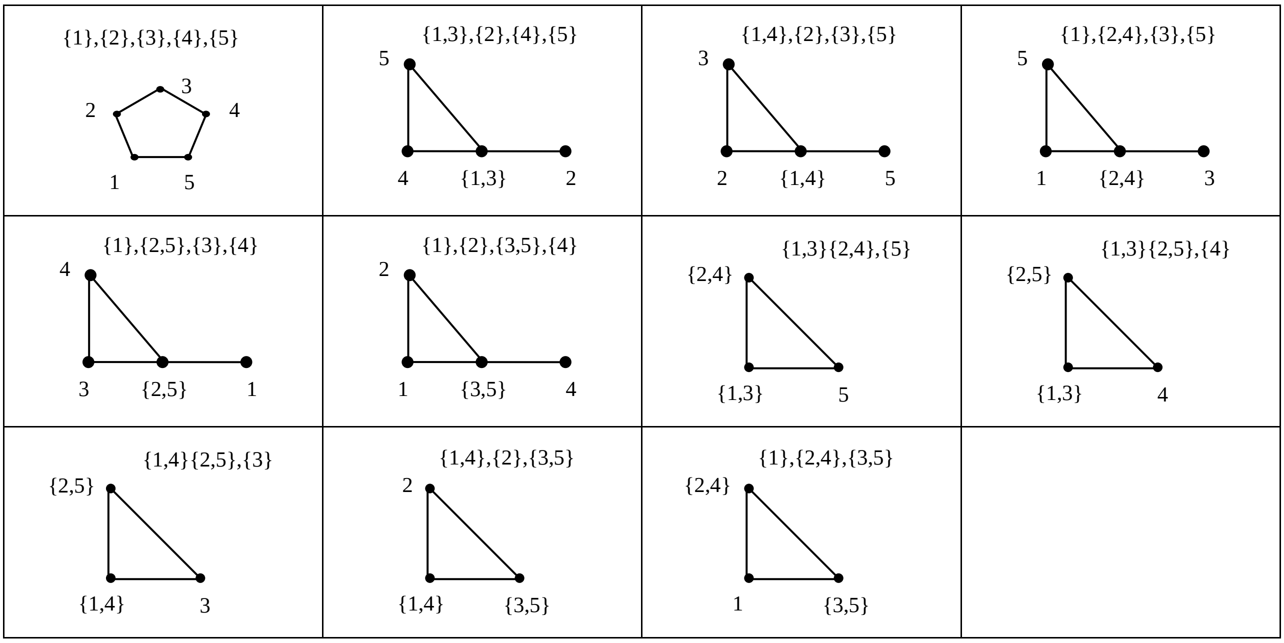
Цикл $C_4$ имеет две циклических конгруэнций, они же являются $\delta$-конгруэнциями.



Все неизоморфные факторграфы цикла $C_4$

Цикл $C_4$ имеет три неизоморфных факторграфа, т.е. $|q(C_4)|=3$.

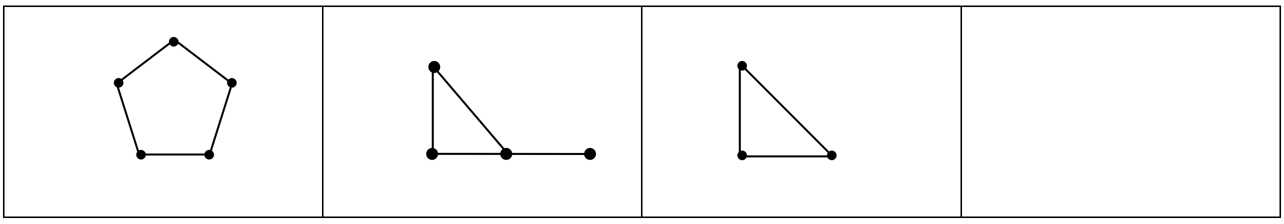
Все конгруэнции и факторграфы цикла $C_5$




Цикл $C_5$ имеет одиннадцать факторграфов, т.е. $|\mathrm{Con}\ C_5|=11$.

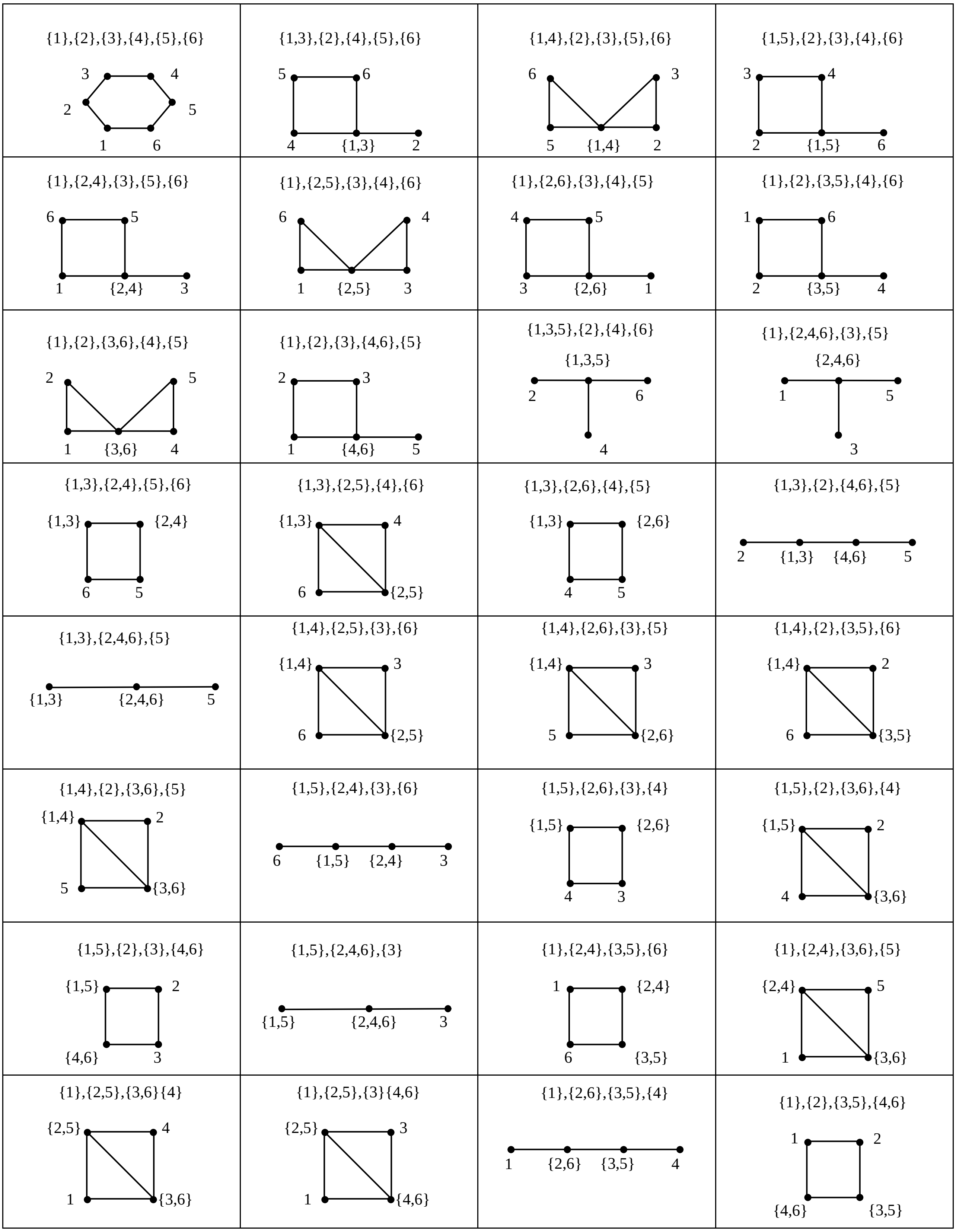
Цикл $C_5$ имеет шесть циклических конгруэнций, из них одна $\delta$-конгруэнция.

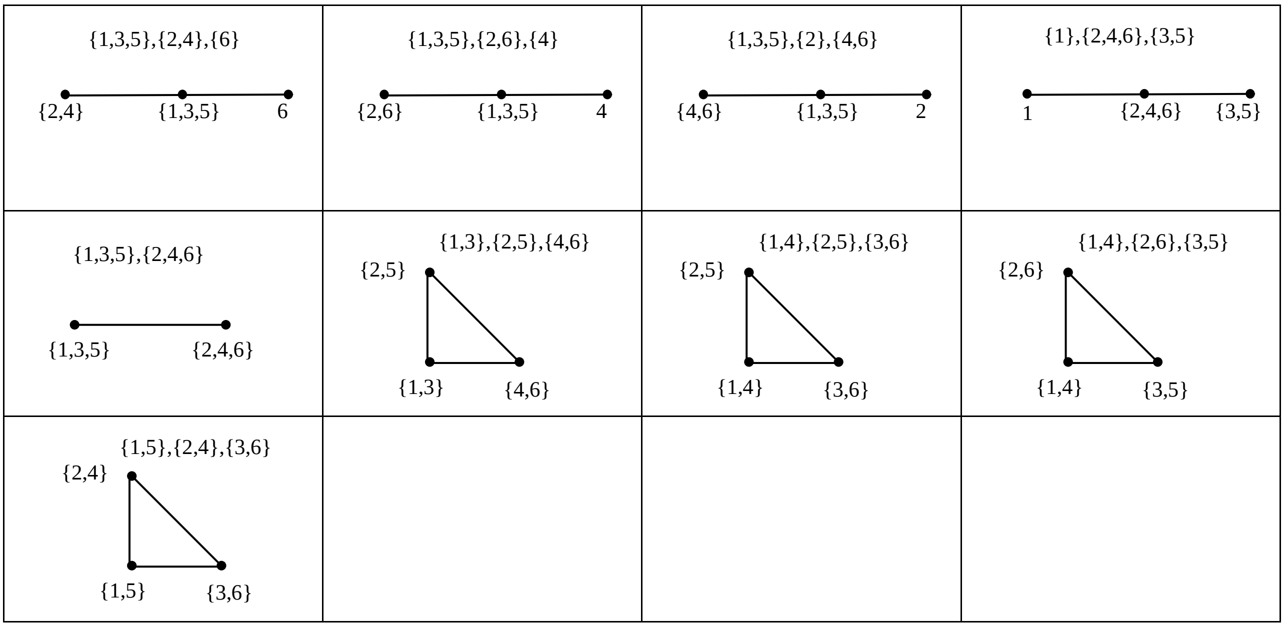
Все неизоморфные факторграфы цикла $C_5$



У цикла $C_5$ три неизоморфных факторграфа, т.е. $q(C_5)=3$.

## Все конгруэнции и факторграфы цикла $C_6$

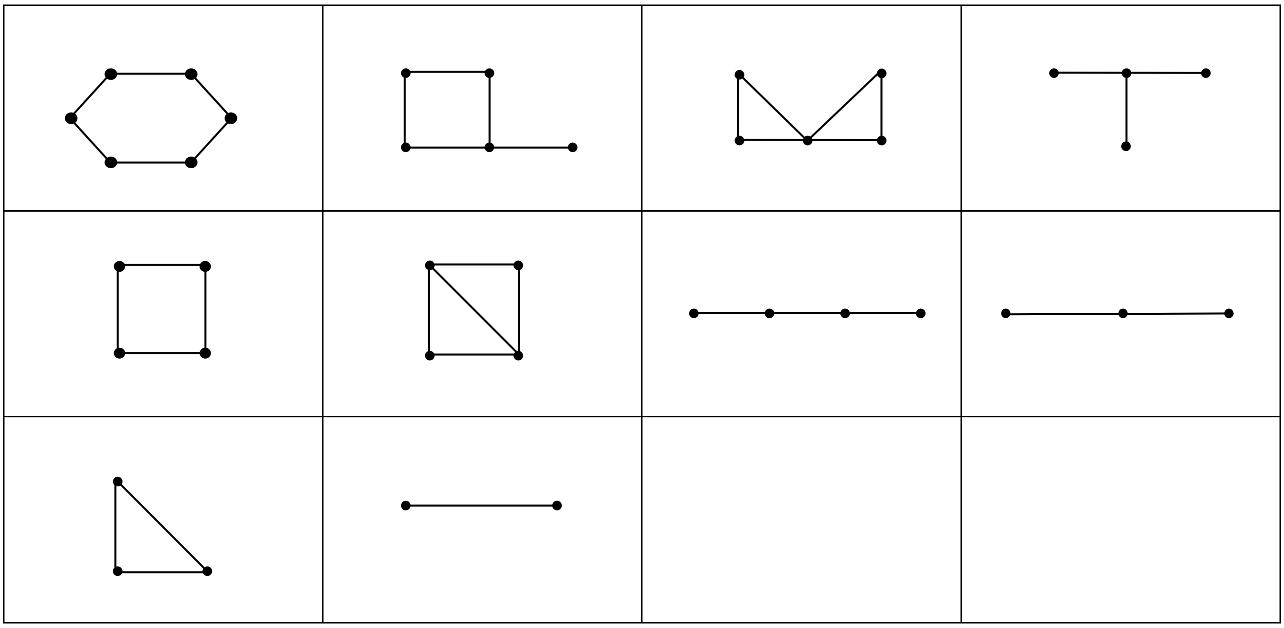





Цикл $C_6$ имеет сорок один факторграф, т.е. $|\mathrm{Con}\ C_6|=41$.

Цикл $C_6$ имеет двенадцать циклических конгруэнций, из них три $\delta$-конгруэнция.

Все неизоморфные факторграфы цикла $C_6$

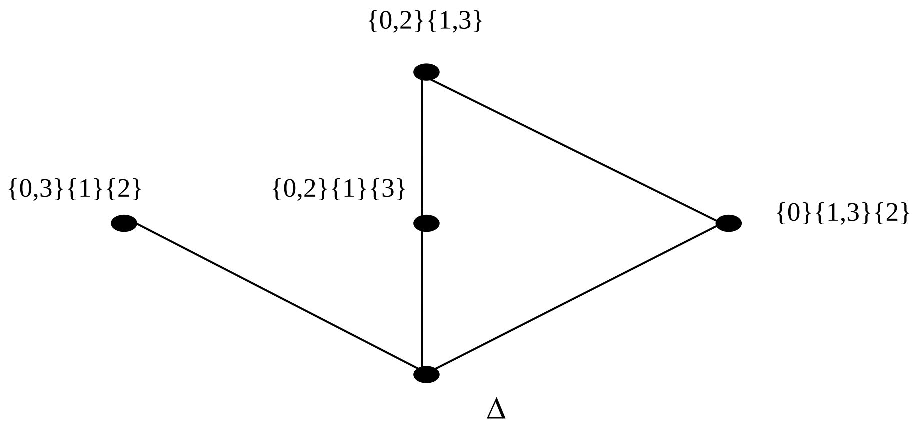


У цикла $C_6$ десять неизоморфных факторграфов, т.е. $q(C_6)=10$.

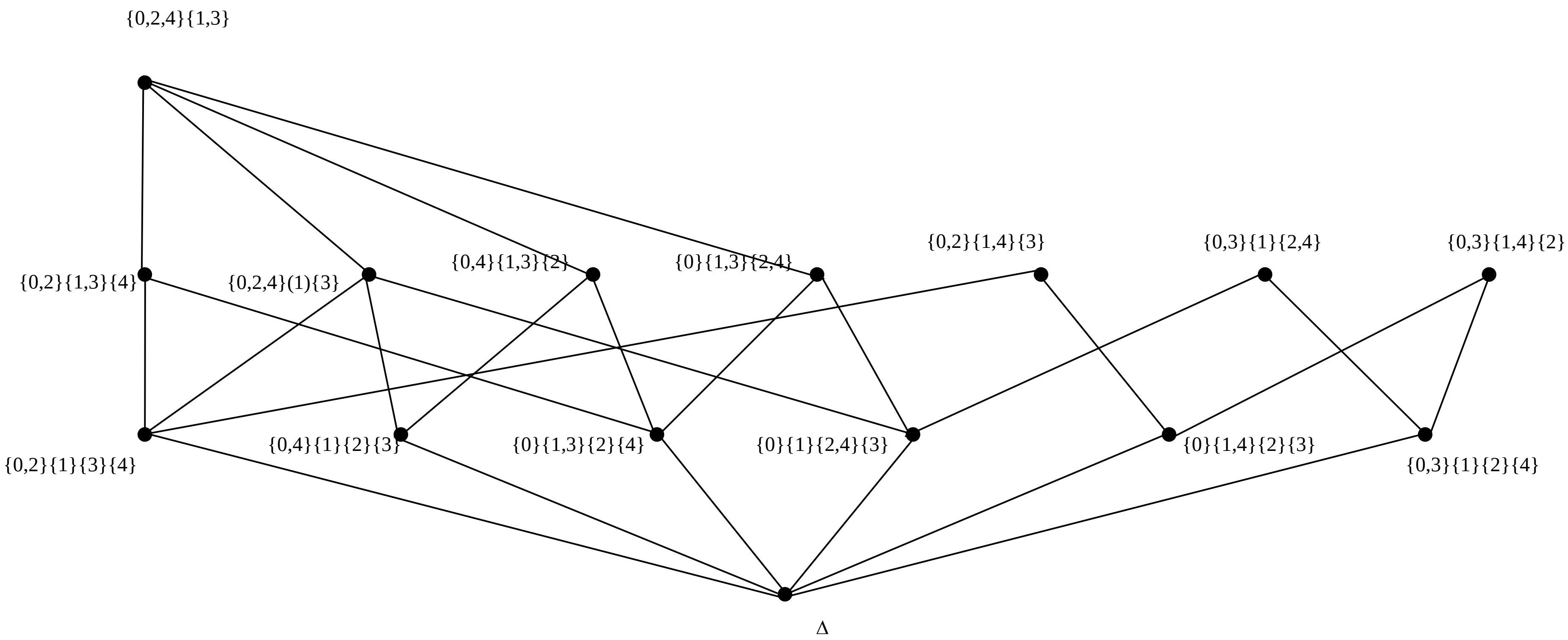
# ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ПОЛУРЕШЕТКИ КОНГРУЭНЦИЙ ЦЕПЕЙ $P_2$, $P_3$, $P_4$ И $P_5$

## Полурешетка конгруэнций цепи $P_2$

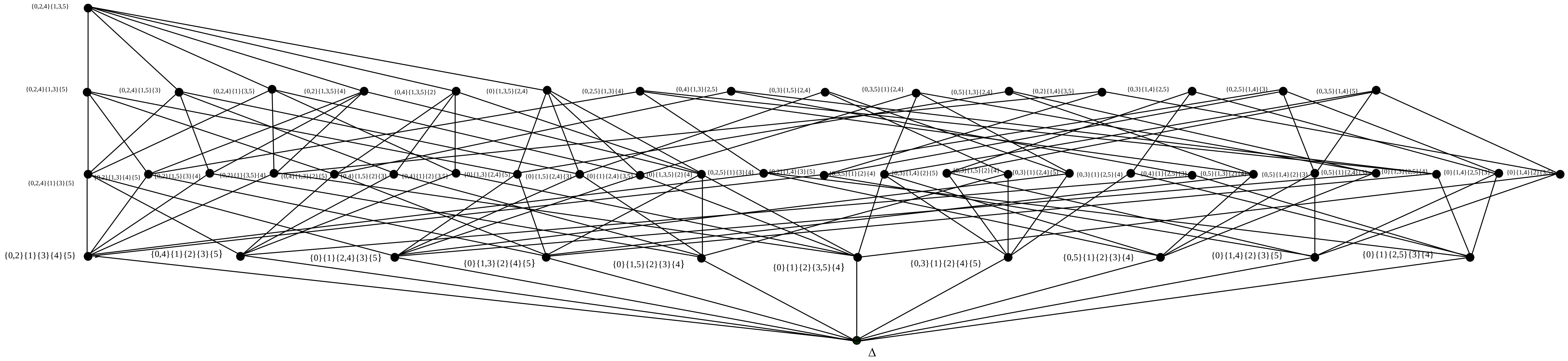

## Полурешетка конгруэнций цепи $P_3$



Полурешетка конгруэнций цепи $P_4$

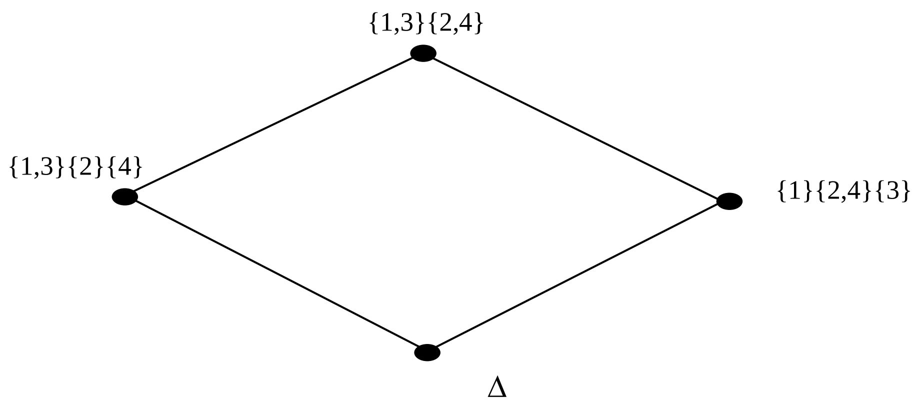


Полурешетка конгруэнций цепи $P_5$

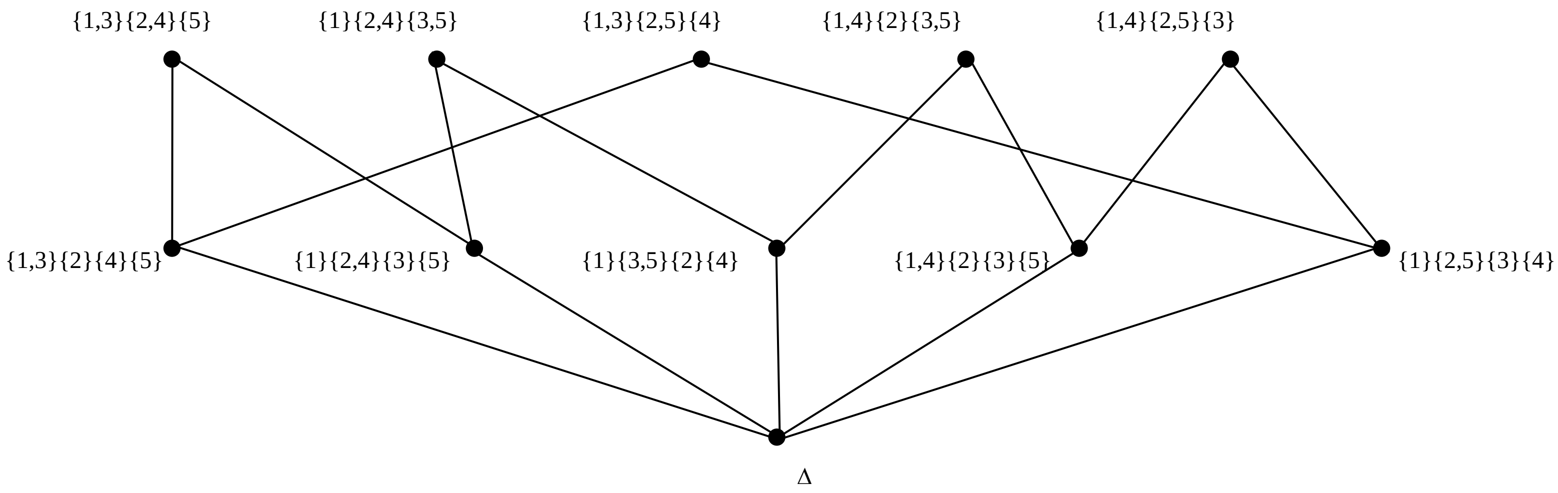


# ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ПОЛУРЕШЕТКИ КОНГРУЭНЦИЙ ЦИКЛОВ $C_4$, $C_5$ И $C_6$

## Полурешетка конгруэнций цикла $C_4$



Полурешетка конгруэнций цикла $C_5$



Полурешетка конгруэнций цикла $C_6$