На правах рукописи

ЯКОВЛЕВА Татьяна Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ В УСЛОВИЯХ ПРИМЕНИМОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЙСА

05.13.17 – теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук

Научный консультант:	Доктор физико-математических наук, академик Семенов Алексей Львович
Официальные оппоненты:	Сигов Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор, Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), президент
	Осипов Геннадий Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт системного анализа РАН, заместитель директора по научной работе
	Абросимов Леонид Иванович, доктор технических наук, Национальный исследовательский университет «МЭИ», профессор кафедры вычислительных машин, систем и сетей
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН)

Защита состоится *19 февраля 2015г. в 13:00* на заседании диссертационного совета *Д 002.017.02* при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук, расположенном по адресу: *119333, г. Москва, ул. Вавилова, д.40.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук, http://www.ccas.ru.

Автореферат разослан «___» января 2015г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.017.02,
д.ф.-м.н., профессор В.В.Рязанов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ В УСЛОВИЯХ ПРИМЕНИМОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЙСА

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа представляет собой развитие, теоретическое исследование и строгое математическое обоснование методов анализа и обработки стохастических данных путем совместного вычисления двух основных статистических параметров анализируемой величины, определяющих исходный, незашумленный сигнал и дисперсию шума, в условиях применимости статистической модели Райса. В диссертации развита теория двухпараметрического анализа райсовских данных методами математической статистики, изучены свойства решения задачи каждым из предложенных методов. Совместное определение райсовских параметров анализируемого сигнала позволяет восстановить исходную, не искаженную случайным шумом величину сигнала и, тем самым, эффективно решает задачу обработки данных, в частности, данных, формирующих изображение, посредством разделения информативной и шумовой составляющих с целью получения более точной информации об исследуемом объекте. В диссертации поставленная задача решается независимо на основе следующих трех методов математической статистики: метод максимума правдоподобия (глава 3); два варианта метода моментов (глава 4): метод, основанный на измерениях 2-го и 4-го моментов, и метод, основанный на измерениях 1-го и 2-го моментов случайной величины.

Актуальность темы исследования

Современная наука характеризуется динамичным развитием новых математических методов анализа и обработки сигналов и изображений. Эти методы формируют теоретические основы информационных технологий и информатики как науки, в значительной степени определяющей научно-технический прогресс.

Решение задачи получения и обработки информации, как правило, связано с анализом сигналов, формирующихся в условиях неопределенности, искажаемых в результате воздействия тех или иных факторов и неоднородностей среды, в которой данные сигналы распространяются. Другими словами, анализируемые данные являются случайными, носят стохастический характер. Поэтому в самых различных областях научных исследований и практических приложений при решении задач анализа и обработки данных давно и успешно используются методы, основанные на использовании принципов математической статистики.

В диссертации решаются математические задачи анализа данных и, в частности, изображений в условиях применимости статистической модели Райса.

Возросший в последние годы интерес к проблеме анализа райсовских данных связан с широким кругом научных и технических задач, которые адекватно описываются данной статистической моделью. К ним относятся задачи, в которых выходной сигнал представляет собой сумму детерминированного исходного сигнала и случайного шума, образованного многими независимыми нормально-распределенными слагаемыми с нулевым средним значением, а измеряемой и анализируемой величиной является амплитуда, или огибающая суммарного сигнала. Эта величина, как известно, подчиняется распределению Райса. Диапазон задач, математически описываемых распределением Райса, охватывает проблемы магнитно-резонансной визуализации; прием и обработку радиосигналов; анализ сигналов радара; задачи, связанные с анализом звукового эхосигнала, анализ оптического сигнала при определении свойств среды и др.

Традиционные методы анализа райсовских данных предполагают использование так называемого однопараметрического подхода, т.е. оценивание на основе выборочных измерений лишь одного из двух статистических параметров анализируемой величины – параметра величины сигнала, в предположении, что второй параметр – дисперсия шума – является известным *a priori* (Sijbers, J. et al. Maximum-Likelihood Estimation of Rician Distribution Parameters // IEEE Trans. Med. Imag.. 1998. Vol.17:3 P. 357—361). На практике данное условие никогда не выполняется и является серьезным ограничением однопараметрического подхода к анализу случайных сигналов. Этим обусловлена необходимость развития нового, двухпараметрического подхода к решению задачи анализа райсовских данных, который обеспечивает совместную оценку обоих статистических параметров анализируемой величины и тем самым – разделение информативных и шумовых составляющих и восстановление исходного, неискаженного сигнала.

Актуальность диссертационной работы обусловлена высокой научной и практической важностью задачи развития методов двухпараметрического анализа сигналов, в частности, данных изображений, обеспечивающих совместный расчет и эффективное разделение полезной, информативной составляющей анализируемого сигнала и неизбежно присутствующей шумовой компоненты.

Степень разработанности темы исследования

Ученые уже не одно десятилетие проявляют значительный интерес к решению задачи оценки сразу обоих параметров распределения Райса, при анализе стохастических процессов, описываемых данной статистической моделью. Этот так называемый двухпараметрический подход не ограничен никакими априорными предположениями и обеспечивает получение гораздо более корректных оценок. Однако решение такой задачи сопряжено со значительными трудностями как теоретического, так и вычислительного характера, поскольку приходится рассматривать систему двух существенно нелинейных уравнений. Отчасти поэтому до недавнего времени теоретическое изучение задачи ограничивалось лишь оценками стандартного отклонения по методу Крамера-Рао (Benedict, T.R., Soong T. The joint estimation of signal and noise from the sum envelope // IEEE Trans. Inf. Theory. 1967. Vol. IT-13:3. P. 447-454) и предположениями относительно свойств решения задачи, основанными на графических иллюстрациях, а не на строгом анализе.

В диссертации представлено теоретическое развитие и исчерпывающее математическое обоснование группы методов двухпараметрического анализа райсовских сигналов, основанное на строгом доказательстве существования и единственности решения соответствующих задач.

Рассмотренные в диссертации задачи анализа райсовского случайного сигнала объединяются единой концепцией совместного расчета параметров полезного сигнала и шума на основе различных статистических методов, а именно: метода максимума правдоподобия и вариантов метода моментов. Несмотря на различие статистических подходов к решению поставленных задач, их объединяет общий базовый принцип, вытекающий из единой «двухпараметрической» концепции, который заключается в совместном вычислении обоих неизвестных статистических параметров райсовского распределения анализируемой величины. Задача определения обоих указанных параметров изображения имеет особую важность при обработке данных, так как она напрямую связана с решением проблемы разделения информативных и шумовых составляющих сигнала, в частности - при восстановлении изображений в системах магнитно-резонансной визуализации.

В большинстве задач визуализации шумы образуются суммированием большого числа независимых составляющих и поэтому шумовые искажения подчиняются, как правило, гауссовскому распределению. Задачу подавления шумовой составляющей в анализируемых данных можно представить как частный случай задачи определения неизвестных параметров распределения этих данных. Для получения корректной оценки важно применение статистической модели, адекватно описывающей соответствующий физический процесс.

Среди широкого круга задач, которые описываются статистической моделью Райса, важное место занимает задача анализа магнитно-резонансного изображения, особенность которой состоит в том, что при восстановлении такого изображения принято работать с величиной амплитуды (магнитуды) сигнала изображения, которая подчиняется распределению Райса.

Анализируемое изображение в каждой его точке характеризуется статистическим параметром средней величины сигнала, формирующего изображение, а основной характеристикой шума является его дисперсия. На каждом участке анализируемого изображения, в пределах которого уровень исходного сигнала можно считать постоянным, эти параметры оцениваются на основе данных выборок измерений. Как отмечалось выше, традиционный однопараметрический подход к решению задач обработки магнитно-резонансного изображения, основанный на оценке величины сигнала в каждой исследуемой точке изображения, в предположении, что дисперсия шума является известной *a priori*, имеет существенные ограничения в силу невыполнимости на практике условия априорной известности дисперсии шума. В диссертационной работе впервые решается задача совместного определения параметров райсовского сигнала, определяющих как исходный сигнал, так и дисперсию шума, что позволяет добиться существенно более точного восстановления исходного, незашумленного, изображения, обеспечивает эффективное решение задачи шумоподавления при обработке данных.

Помимо задач магнитно-резонансной визуализации эта задача является актуальной также в решении ряда других задач обработки сигнала, а именно, тех задач, в которых анализируется огибающая исследуемого сигнала и, тем самым, выполняются условия применимости статистической модели Райса. Возможным приложением развитой теории является, в частности, ультразвуковая медицинская диагностика. Другой областью эффективного применения развитых в диссертации методов стало исследование электрооптических свойств среды путем изучения изменений отраженного оптического сигнала из-за электрооптического эффекта.

Цели и задачи

Цель проведенного диссертационного исследования – развитие теории и строгое математическое обоснование новых методов анализа и обработки стохастических данных посредством совместного расчета обоих параметров райсовского распределения.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

- развитие концепции двухпараметрического подхода к решению задач анализа данных как методологического принципа, состоящего в совместном вычислении обоих основных статистических параметров исследуемой случайной величины, определяющих исходный, незашумленный сигнал и дисперсию шума;

- обоснование необходимости использования статистической модели Райса для решения задач анализа амплитуды случайного сигнала;

- развитие теории метода двухпараметрического анализа райсовских данных на основе принципа максимума правдоподобия:

  - получение системы уравнений максимума правдоподобия для искомых параметров сигнала и шума;
  - изучение и обоснование свойств решения двухпараметрической задачи методом максимума правдоподобия;

- численное тестирование полученных теоретических результатов посредством компьютерного моделирования двухпараметрического метода максимума правдоподобия для анализа райсовских данных;

- сопоставление результатов одно- и двухпараметрических подходов к решению задачи анализа райсовских данных методом максимума правдоподобия;

- развитие теории и математическое обоснование двухпараметрического подхода к решению задачи совместного определения параметров райсовских данных на основе метода моментов в двух вариантах, а именно – на основе измерений 2-го и 4-го моментов, и на основе измерений 1-го и 2-го моментов:

  - получение системы уравнений для искомых параметров сигнала и шума, соответствующей каждому из вариантов метода моментов;
  - изучение и обоснование свойств решения двухпараметрической задачи вариантами метода моментов

- численное тестирование развитых методов моментов для решения двухпараметрической задачи анализа райсовских данных;

- изучение возможности аналитического решения двухпараметрической задачи и получение аналитических формул для расчета информативной и шумовой составляющих сигнала в предельных случаях малого и большого отношения сигнала к шуму;

- сопоставление развитых методов двухпараметрического анализа райсовских данных по характерным величинам смещения и разброса результатов расчета искомых параметров;

- проверка соответствия полученных теоретических выводов результатам физического эксперимента на примере решения задачи исследования свойств оптической среды: определение электрооптических коэффициентов и расчет величины спекл-шума методом двухпараметрического анализа райсовских данных, отображающих величину отраженной световой волны при электрооптической модуляции коэффициента отражения.

В процессе решения поставленных задач использовались методы математического анализа, методы математической статистики и теории вероятностей, численное моделирование.

Научная новизна

Основными результатами, которыми определяется научная новизна работы, являются следующие:

- развита концепция и методология двухпараметрического подхода к решению задач анализа и обработки стохастических данных посредством совместного вычисления двух основных статистических параметров исследуемой величины;

- предложен, теоретически развит и строго математически обоснован двухпараметрический метод максимума правдоподобия для совместного расчета обоих статистических параметров анализируемой величины в условиях распределения Райса;

- доказана теорема существования и единственности решения двухпараметрической задачи расчета обоих статистических параметров райсовского сигнала методом максимума правдоподобия;

- получены аналитические формулы для решения двухпараметрической задачи расчета параметров райсовского сигнала методом максимума правдоподобия в предельных случаях большой и малой величины отношения сигнала к шуму;

- предложены и обоснованы два варианта метода моментов для решения двухпараметрической задачи совместного расчета обоих статистических параметров, определяющих величину исходного сигнала и дисперсию шума анализируемых райсовских, а именно - метод, основанный на измерении 2-го и 4-го моментов, и метод, основанный на измерении 1-го и 2-го моментов;

- доказаны теоремы существования и единственности решения двухпараметрической задачи расчета искомых статистических параметров райсовских данных для обоих рассматриваемых вариантов метода моментов;

- решение двухпараметрической задачи совместного расчета параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных посредством рассматриваемых в работе статистических методов сводится к решению одного уравнения с одним неизвестным, и поэтому не приводит к заметному увеличению объема вычислений по сравнению с однопараметрическим случаем.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы определяется актуальностью, востребованностью решения поставленной задачи развития новых методов анализа и обработки стохастических данных, обеспечивающих совместный расчет и эффективное разделение информативной составляющей анализируемого сигнала и его шумовой компоненты. Решение этой задачи формирует теоретическую базу для будущих информационных технологий в самых различных приложениях, объединенных условием применимости статистической модели Райса, т.е. в тех случаях, когда измеряемой и анализируемой величиной является амплитуда, или огибающая сигнала.

Из доказанных автором ряда теорем о существовании и единственности решений рассматриваемых задач следует практически значимый вывод, состоящий в следующем: при проведении экспериментальных измерений и расчетов исследователь, получивший хотя бы одно решение для значений сигнала и шума на основании данных выборок измерений, может быть уверен в том, что это найденное решение и является искомым решением для значений сигнала и шума, что существенно сокращает компьютерные ресурсы, необходимые для численного решения задачи. Строгое доказательство существования и единственности решения задачи двухпараметрической оценки райсовской случайной величины определяет теоретическую состоятельность и повышает практическую ценность полученных результатов для потенциальных приложений. Другой значимый для практики результат состоит в том, что сложная и ресурсоемкая численная задача нахождения решения системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными сводится к решению одного уравнения для одной неизвестной величины, что означает существенное упрощение численной задачи и повышение точности ее решения.

Развитые в диссертации методы двухпараметрического анализа легли в основу алгоритмов при разработке программного обеспечения «Расчет параметров райсовсого сигнала методами математической статистики» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014616282), которое может эффективно применяться в составе будущих приборов для обработки райсовских данных, в частности, в системах магнитно-резонансной или ультразвуковой визуализации в медицине.

Приведенные в диссертации результаты физического эксперимента демонстрируют один из примеров применения развитой теории на практике как эффективного средства определения электрооптических коэффициентов среды.

Результаты диссертационной работы используются в научно-исследовательской деятельности Всероссийского научно-исследовательского института оптико-физических измерений (ФГУП «ВНИИОФИ») при разработке алгоритмов анализа данных, полученных при измерениях амплитуды оптического сигнала для определения среднеинтегрального значения показателя преломления атмосферного воздуха вдоль протяженной трассы, необходимого для создания эталонных дальномеров с целью достижения тактико-технических характеристик системы ГЛОНАСС, о чем свидетельствует соответствующий Акт о внедрении.

Большая научная и практическая значимость предложенного и разработанного автором метода решения задачи двухпараметрического анализа стохастических данных признана мировым научным сообществом, в частности ведущими мировыми учеными в области анализа данных магнитно-резонансных изображений.

Развитые в диссертации методы решения задач расчета параметров случайного сигнала являются эффективным инструментом для дальнейшего развития теории двухпараметрического анализа и обработки стохастических данных и использования методов математической статистики не только в условиях распределения Райса, но и для решения задач в условиях применимости других статистических моделей. Полученные результаты, определяющие возможность однозначной оценки обоих неизвестных параметров сигнала и шума без существенного увеличения объемов вычислений по сравнению с однопараметрическим случаем, открывают большие перспективы использования результатов работы во многих научно-технических приложениях, связанных с задачами обработки стохастических данных и, в частности, изображений.

Методология и методы исследования

В основе методологии, используемой в диссертационной работе, лежит строгое теоретическое исследование поставленных задач методами математического анализа. В качестве исходного методологического принципа развита концепция так называемого двухпараметрического анализа сигналов и изображений. Такой анализ предполагает совместное оценивание на основе данных выборочных измерений обоих статистических параметров, определяющих как исходный, незашумленный сигнал, так и дисперсию шума. Данная методология открывает новые широкие возможности для эффективного решения задач анализа и обработки информации в условиях стохастичности. В рамках развитой концепции двухпараметрического анализа райсовских данных найдены решения задачи расчета указанных параметров, посредством использования методов математической статистики, таких как метод максимума правдоподобия и варианты методы моментов.

На основе методов математического анализа как основного инструмента при проведении исследований, ставших предметом диссертационной работы, получено строгое теоретическое обоснование представленных вариантов решения поставленной двухпараметрической задачи: доказаны теоремы существования и единственности решений систем уравнений, соответствующих рассмотренным в диссертации методам математической статистики (метод максимума правдоподобия и варианты метода моментов) для определения искомых параметров.

Полученные теоретические результаты подтверждаются результатами численных экспериментов, а также посредством физических экспериментов по определению свойств оптической среды как одного из возможных направлений применения развитой информационной методологии.

Таким образом, основные методы исследования, ставшего предметом диссертационной работы, включают:

- методы математического анализа,
- методы математической статистики и теории вероятностей,
- численное моделирование,
- обработка данных физических экспериментов.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные положения и результаты:

- концепция и методология двухпараметрического подхода к решению задач анализа и обработки стохастических данных, состоящая в совместном вычислении двух основных статистических параметров исследуемого райсовского сигнала, определяющих исходный, незашумленный сигнал и дисперсию шума, путем решения системы уравнений на основе данных выборок измерений;

- двухпараметрический метод максимума правдоподобия для решения задачи совместного определения статистических параметров исследуемого сигнала в условиях распределения Райса;

- доказательство существования и единственности решения двухпараметрической задачи определения статистических параметров райсовского сигнала методом максимума правдоподобия;

- результаты численного моделирования процесса реализации двухпараметрического метода максимума правдоподобия;

- двухпараметрический метод моментов для совместного определения статистических параметров исследуемого сигнала на основе данных выборок измерений в условиях распределения Райса в двух вариантах его осуществления: метод моментов, основанный на измерении 2-го и 4-го моментов, и метод моментов, основанный на измерении 1-го и 2-го моментов;

- доказательство существования и единственности решения двухпараметрической задачи определения методом моментов основных статистических параметров райсовского сигнала;

- результаты численного моделирования двухпараметрического метода моментов в двух рассматриваемых вариантах: на основе измерений 2-го и 4-го моментов, и на основе измерении 1-го и 2-го моментов;

- результаты аналитического решения задачи расчета сигнала и шума при анализе райсовских данных методом максимума правдоподобия в предельных случаях малого и большого отношения сигнала к шуму.

- математическое обоснование возможности решения двухпараметрической задачи совместного расчета сигнала и шума на основе развитых методов путем решения одного уравнения для одного неизвестного, что означает существенное сокращение объема вычислительных ресурсов, необходимых для решения задачи, и обеспечивает практическую реализуемость разработанных в диссертации методов;

- результаты исследования характерных величин смещения и разброса данных, полученных в результате расчета искомых параметров райсовского сигнала развитыми в диссертации методами;

- метод определения электрооптического коэффициента среды и расчета спекл-шума как пример практического применения развитого двухпараметрического подхода к анализу данных в условиях распределения Райса.

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты диссертационной работы прошли апробацию на научных семинарах, симпозиумах, конференциях:

Международная конференция «Лазеры, измерения, информация-2014», 2014г., Санкт-Петербург, Двадцать первая международная конференция МКО-2014 «Математика, компьютер, образование», 2014г., Дубна; III всероссийская конференция по фотонике и информационной оптике, 2014 г., Москва, НИЯУ МИФИ; Конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Л. Лившица, 31 октября 2014г., Москва, ОАО «ГСКБ «Алмаз-Антей»; Второй научный семинар, посвященный 90-летию со дня рождения выдающегося ученого З. М. Бененсона, 2012г., Москва, ВЦ РАН; Third International Workshop on Image Mining, Theory and Applications, 2010, Angers, France; Second International Workshop on Image mining, Theory and Applications in conjunction with VISAAP 2009, Lisboa, Portugal; 9-ая международная конференция «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии», 2008г., Н. Новгород; Scientific Session on Ultrasound Imaging in the Bioacoustic Research laboratory, 2000, University of Illinois, USA; 9th European Workshop on Ultrasonic Tissue Characterization and Echographic Imaging ,1992, Nejmegen, The Netherlands; 6-th World Congress in Ultrasound, Copenhagen, September, 1991; VIII Международная конференция по когерентной и нелинейной оптике, Минск, 1988; V Всесоюзная конференция “Оптика лазеров”, Ленинград, 1986.

Публикации

Содержание диссертационной работы отражено в 31 публикации, из них 16 работ опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

Личный вклад автора

Диссертация написана автором самостоятельно.

Все теоретические результаты диссертационной работы получены автором лично. Для численного тестирования использовалось программное обеспечение, созданное совместно с Н.С. Кульбергом Н.С. на основе алгоритмов, разработанных автором диссертации. Экспериментальное тестирование работы проводилось в соавторстве с А.В. Князьковым.

Структура и объем работы.

Материал диссертации, состоящий из введения, 6 глав, заключения и списка литературы, изложен на 260 страницах, включая 41 рисунок. Список цитируемой литературы включает 140 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обоснована актуальность темы диссертации, определена цель работы, показаны степень разработанности темы исследования, научная новизна результатов работы и их практическая ценность, приведены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава диссертации представляет собой обзор и анализ существующих методов обработки данных, формирующих изображения, путем оценивания параметров исходного сигнала, отображаемого точками изучаемого изображения. Методы, представленные в обзоре, классифицируются на основе используемых принципов анализа сигналов. Рассмотрены основные направления развития, существующие ограничения и возможности совершенствования методов, применяемых для анализа райсовских сигналов, на примере решения задач восстановления магнитно-резонансных изображений.

Методы фильтрации данных, традиционно используемые в составе информационных технологий при формировании, анализе и обработке магнитно-резонансных изображений, можно объединить в следующие основные группы:

– методы анизотропной фильтрации, основанные на процессе диффузии;

– методы, основанные на разложении по определенным базисным функциям (вейвлет-преобразования, а также преобразования ridgelet и curvelet);

– методы фильтрации, основанные на принципах математической статистики, главным образом – на методе максимального правдоподобия. При этом задача традиционно решается в рамках однопараметрической модели, состоящей в предположении о том, что неизвестной величиной является лишь один параметр задачи – параметр средней величины сигнала, в то время как второй значимый статистический параметр – дисперсия шума – предполагается априорно известной величиной, что никогда не реализуется на практике. Показано важное преимущество развитого в диссертации двухпараметрического подхода, состоящего в возможности расчета не одного, а обоих *a priori* неизвестных статистических параметров анализируемого райсовского сигнала: величины исходного полезного сигнала и дисперсии гауссовского шума, что позволяет корректно разделить информативную и шумовую составляющие сигнала.

Из изложенного в первой главе следует, что двухпараметрические методы анализа райсовской случайной величины, развитые в диссертации, обладают принципиальными преимуществами по сравнению с традиционными подходами:

- возможность применения развитых методов при решении существенно нелинейных задач, каковыми являются задачи шумоподавления в условиях распределения Райса, что отличает развитую методологию от первых двух групп традиционных методов;

- отсутствие ограничений, характерных для однопараметрического приближения, представленного третьей из упомянутых выше групп методов.

Во второй главе сформулирована решаемая в диссертации задача анализа райсовских данных и обоснованы условия ее решения, не ограниченные какими-либо априорными предположениями относительно параметров анализируемых данных. Представлена и обоснована концепция двухпараметрического подхода к анализу данных, лежащая в основе развитых методов решения задачи. Суть данной концепции заключается в понимании необходимости совместного расчета обоих априорно неизвестных параметров ν и σ анализируемого райсовского сигнала.

Исходя из сути поставленной задачи как задачи совместного расчета параметров сигнала и шума в условиях, когда измеряемой и анализируемой величиной является амплитуда, или огибающая, случайного сигнала, а шумовые составляющие подчиняются гауссовской статистике, обоснован выбор статистической модели Райса для ее решения.

Исследованы и сопоставлены условия применимости райсовского и гауссовского распределений при решении задачи анализа амплитуды гауссовского сигнала. Расхождение функций плотности вероятности Гаусса и Райса в области не очень высоких значений отношения сигнала к шуму $(\nu/\sigma < 7)$ приводит к появлению сдвига в измеряемом уровне сигнала при использовании гауссовского приближения вместо адекватного райсовского.

Таким образом, в данной главе формулируется постановка задачи и дается обоснование того, что только статистическая модель Райса является адекватной для решения поставленной задачи в общем случае произвольного соотношения параметров задачи, в то время как распределения Гаусса и Рэлея могут рассматриваться как ее частные случаи при предельных значениях величины отношения сигнала к шуму.

В третьей главе диссертации излагается двухпараметрический метод максимума правдоподобия для совместного определения искомых параметров анализируемого сигнала, проведено глубокое теоретическое изучение и дано строгое обоснование применимости метода максимума правдоподобия для решения двухпараметрической задачи.

В параграфе 3.1 формулируется математическая постановка задачи и выводится система уравнений максимума правдоподобия для совместного определения обоих искомых параметров: величины ν исходного сигнала и дисперсии σ^2 гауссовского шума, формирующих анализируемые райсовские данные с плотностью вероятности $P\left(x|\nu,\sigma^2\right)$:

$$P\left(x|\nu,\sigma^2\right)=\frac{x}{\sigma^2}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+\nu^2}{2\sigma^2}\right)\cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right), \qquad (1)$$

характеризующей распределение райсовской случайной величины x, которая представляет собой амплитуду $x=\sqrt{x_{\mathrm{Re}}^2+x_{\mathrm{Im}}^2}$ комплексного сигнала, действительная x_{Re} и мнимая x_{Im} части которого являются независимыми случайными величинами, имеющими нормальное распределение с одинаковыми дисперсиями σ^2 и ненулевыми математическими ожиданиями ν. В (1) $I_\alpha(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода (или функция Инфельда) порядка α. Ниже используются также следующие обозначения: x_i – величина сигнала i-ой выборки; n – количество элементов в выборке, называемое также длиной выборки. Величина ν/σ характеризует отношение сигнала к шуму.

Математическая задача двухпараметрического анализа данных при обработке магнитно-резонансного изображения состоит в расчете обоих параметров ν и σ^2 для каждой анализируемой точки изображения и восстановлении тем самым исходного, незашумленного изображения, определяемого величиной ν. В данной главе эта задача решается методом максимального правдоподобия, но, в отличие от традиционного однопараметрического приближения, в диссертации этот метод развивается и строго обосновывается для решения двухпараметрической задачи. Система уравнений правдоподобия для определения искомых параметров ν и σ^2 получена приравниванием нулю частных производных логарифмической функции правдоподобия $\ln L\left(\nu,\sigma^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln P\left(x_i|\nu,\sigma^2\right)$ по обоим параметрам сигнала и преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \nu - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) = 0 \\ \sigma^2 - \frac{1}{2 \cdot n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + \nu^2\right) + \frac{\nu}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где $\tilde{I}(z)$ - функция, определяющая свойства решения системы (2):

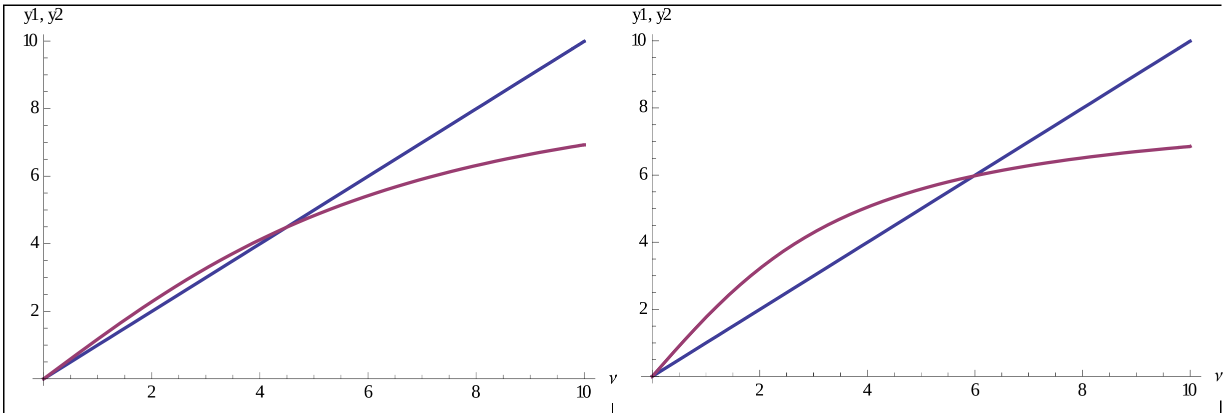
$$\tilde{I}(z) = \frac{d}{dz}\ln I_0(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)} \tag{3}$$

В параграфе 3.2 дается теоретический анализ решения задачи на основе ряда доказанных вспомогательных математических утверждений в отношении свойств райсовской величины и функции (3). В частности, доказано, что функция $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$ является монотонно возрастающей и выпуклой вверх на интервале $(0, +\infty)$, $\forall z > 0\, \tilde{I}(z) \in (0,1)$, получены формулы для разложения в ряд: $\tilde{I}(z) \simeq \frac{z}{2}\cdot\left(1 - \frac{z^2}{8} + O\left(z^4\right)\right)$ при $z \to 0$ и асимптотическая оценка: $\tilde{I}(z) \underset{z \gg 1}{\sim} 1 - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)$.

В параграфе 3.3 изложены полученные оригинальные результаты для решения задачи в однопараметрическом приближении, т.е. рассмотрено уравнение для одного неизвестного ν (первое из системы (2)), когда параметр σ^2 предполагается известным:

$$\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) \cdot x_i \tag{4}$$

Впервые строго доказано существование и единственность решения однопараметрической задачи методом максимума правдоподобия. Рис. 1 иллюстрирует это доказательство. Кривая и прямая линии на Рис. 1 а) и б) отображают правую и левую части уравнения, а точка их пересечения соответствует решению уравнения (4).



а) $\nu = 5.; \sigma = 7.; \nu / \sigma = 0,71$	б) $\nu = 5.; \sigma = 5.; \nu / \sigma = 1.$

Рис. 1. Иллюстрация доказательства существования и единственности решения однопараметрического уравнения максимума правдоподобия.

В ходе изучения свойств решения был проанализирован знак второй производной функции правдоподобии и показано, что единственное ненулевое решение задачи соответствует именно максимуму, а не минимуму функции правдоподобия. Получены следующие выводы:

- нулевой корень уравнения (4) в ситуации, когда распределение Райса не сводится к рэлеевскому распределению, соответствует минимуму, а не максимуму функции правдоподобия, и поэтому фактически не является искомым решением;

- в силу свойства гладкости логарифмической функции правдоподобия и всех ее производные, второй экстремум при $\nu > 0$ может быть только максимумом.

- при малых значениях сигнала ($\langle x^2 \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 2\sigma^2$), вторая производная функции правдоподобия в нуле отрицательна, и решением уравнения (4) является тривиальное решение: $\nu = 0$. В других случаях нулевой корень уравнения (4) определяет минимум, а единственное ненулевое решение соответствует максимуму функции правдоподобия.

Развитая в параграфе 3.3 теория и проведенный математический анализ свойств функции правдоподобия позволили автору разработать логически последовательный метод решения задачи и для двухпараметрического случая

В параграфе 3.4 методом максимума правдоподобия решается двухпараметрическая задача совместного определения неизвестных параметров райсовской величины. Система уравнения (2) преобразуется в виду:

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \tilde{I}\left(\dfrac{2\cdot x_i \cdot \nu}{\left\langle x^2 \right\rangle - \nu^2}\right) \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\left\langle x^2 \right\rangle - \nu^2\right) \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь и ниже угловыми скобками обозначено усреднение по выборке: $\left\langle x^k \right\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$, а чертой сверху - усреднение при бесконечно большой длине выборки: $\overline{x^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$. Первое из уравнений (5) представляет собой уравнение с одной неизвестной переменной ν. Таким образом, задачу решения системы двух уравнений (2) для двух неизвестных ν и σ^2 удалось свести к решению одного уравнения для одной переменной ν, что означает существенное упрощение и минимизацию вычислительных ресурсов.

Можно показать, что при достаточного большой длине выборки n всегда выполняется условие $\left\langle x^2 \right\rangle - \nu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \nu^2 > 0$, так как $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \nu^2 = 2\sigma^2 > 0$, т.е. знаменатель аргумента функции $\tilde{I} = \frac{I_1}{I_0}$ в уравнении для ν системы (5) всегда положителен. Для изучения свойств системы (5) вводится переменная

$$g(\nu) = \frac{2\cdot\langle x\rangle\cdot\nu}{\left\langle x^2 \right\rangle - \nu^2} \qquad (6)$$

Тогда первое из уравнений системы (5) принимает вид:

$$\xi(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{I}\left(\frac{x_i}{\langle x\rangle} g\right) \qquad (7)$$

где левая часть представляет собой величину ν как обратную функцию аргумента g: $\nu = \xi\left(g(\nu)\right)$. Проведен анализ свойств функции $g(\nu)$, доказана ее монотонность, и, следовательно, однозначность функции $g(\nu)$ и обратной функции $\nu = \xi(g)$ в области физически значимых положительных значений параметра ν.

Доказано существование и единственность нетривиального решения уравнения (7): показано, что его правая $\psi_r(g)$ и левая $\psi_l(g)$ части являются монотонно возрастающими выпуклыми функциями, выходящими из начала координат и имеющими разные асимптотики. Показано, что при $\nu \neq 0$ функции $\psi_r(g)$ и $\psi_l(g)$ неизбежно имеют единственную точку пересечения, т.е. решение для пары (ν, σ) существует и единственно.

В отсутствии полезного сигнала ($\nu = 0$), т.е. в случае когда распределения Релея, обе выпуклые линии, отображающие функции $\psi_l(g)$ и $\psi_r(g)$, выходя из начала координат под одним и тем же углом, расходятся, не пересекаясь, так как имеют разные асимптотики, что соответствует единственному тривиальному решению $\nu = 0$ уравнения (7) для ν.

Для определения характера экстремума функции правдоподобия был проанализирован знак второй производной и получен вывод о том, что при наличии нетривиального решения для параметра ν оно всегда соответствует максимуму функции правдоподобия. В частном случае распределения Рэлея максимум функции правдоподобия определяется единственным экстремумом этой функции, соответствующим решению $\nu = 0$.

На Рисунке 2 приведены полученные численным моделированием трехмерные графики функции правдоподобия $L(\nu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | \nu, \sigma^2)$ как функции двух переменных ν и σ, при различных значениях отношения сигнала к шуму. Эти графики иллюстрируют существование и единственность максимума функции правдоподобия, причем с ростом отношения сигнала к шуму ν / σ этот максимум приобретает более острую форму. Справа представлены сечения функции правдоподобия плоскостями $\sigma = const$ и $\nu = const$ в окрестности точки максимума. Из графиков следует, что характерная ширина функции, правдоподобия в зависимости от ν (при $\sigma = const$) заметно больше, чем характерная ширина этой функции как функции σ (при $\nu = const$), что влечет за собой важное для практических приложений следствие: точность определения параметра σ как аргумента более узкой функции в сечении $\nu = const$, превосходит точность определения ν как аргумента с большей характерной шириной функции правдоподобия в сечении $\sigma = const$.

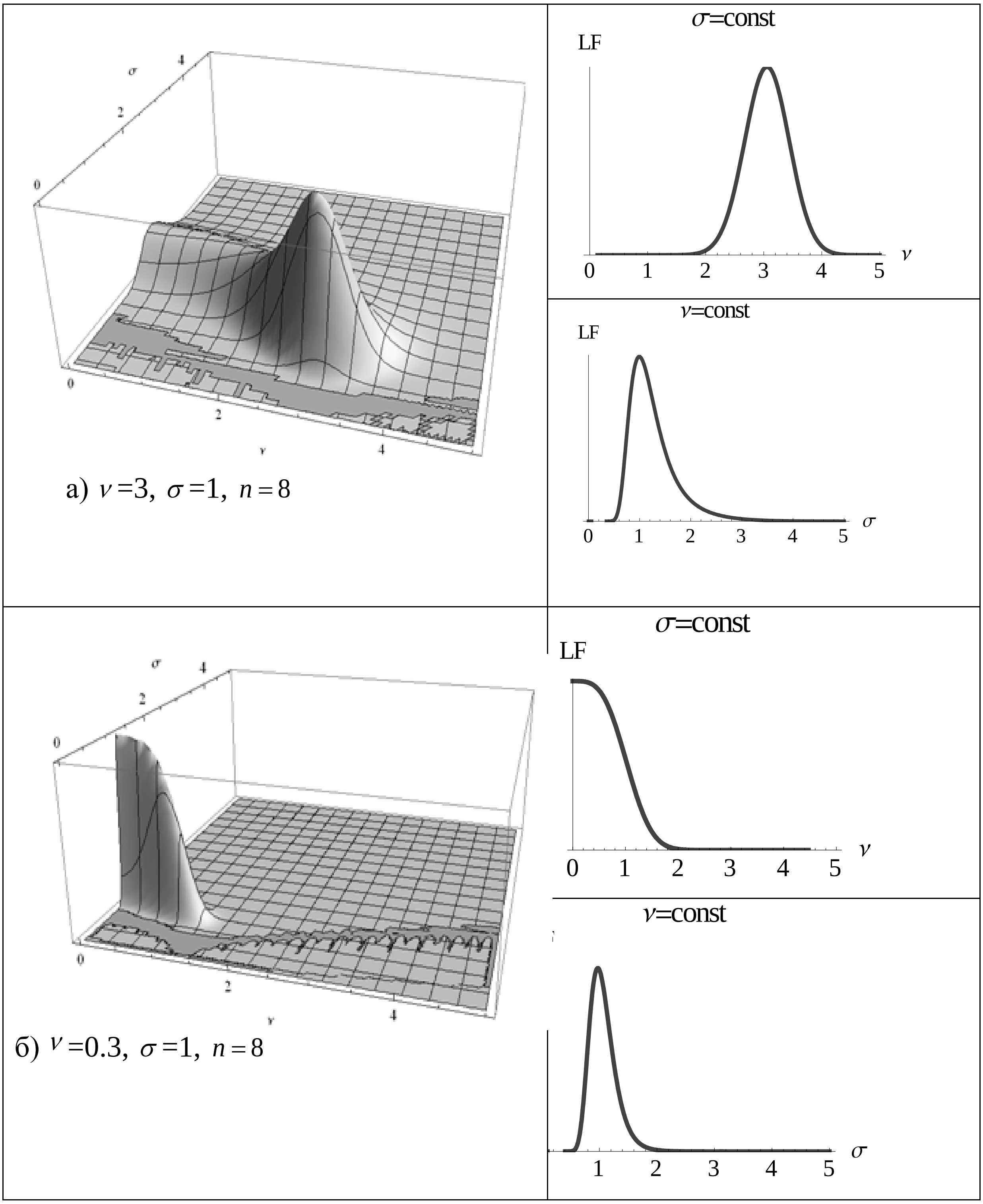


Рис. 2. Функция правдоподобия и ее сечения при различных ν, σ

В параграфе 3.5. развит дополнительный вариант метода максимума правдоподобия для решения двухпараметрической задачи, основанный на переходе от переменных (ν,σ^2) к переменным $(\nu,\gamma=\frac{\nu}{\sigma^2})$. Получено доказательство существования и единственности решения системы уравнений для ν и γ, которое фактически является еще одним, независимым доказательством существования и единственности решения максимума правдоподобия для искомых параметров ν и σ^2. Переход к переменным ν и γ позволяет свести решение задачи к решению системы уравнений для ν и γ :

$$\begin{cases} \nu = S(\gamma) \\ \gamma = \dfrac{2\nu}{\langle x^2 \rangle + \nu^2 - 2\nu S(\gamma)} \end{cases} \tag{8}$$

Функция $S(\gamma)$ является линейной комбинацией функций $\tilde{I}(z)=\frac{I_1(z)}{I_0(z)}$:

$$S(\gamma) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{I}(x_i\gamma) \tag{9}$$

Свойства функции $\tilde{I}(z)$ определяют свойства функции $S(\gamma)$: гладкость, монотонность, выпуклость вверх. Из (8) получаем уравнение для γ:

$$\gamma = \frac{2S(\gamma)}{\langle x^2 \rangle - S^2(\gamma)} \tag{10}$$

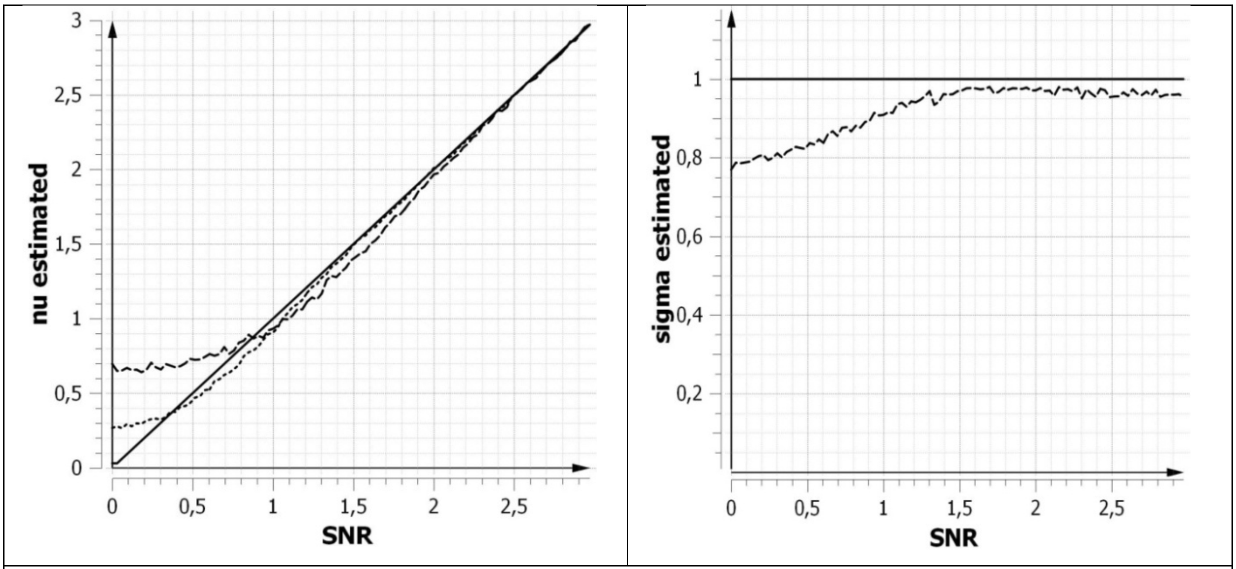
Таким образом, в переменных (ν,γ), как и в переменных (ν,σ^2) решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными удалось свести к решению одного уравнения с одной неизвестной. Доказано существование и единственность решения уравнения (10) для положительного параметра γ.

В параграфе 3.6 для предельных случаев большого и малого значений отношения сигнала к шуму из уравнений максимума правдоподобия получены аналитические формулы для расчета ν и σ^2 как для однопараметрического приближения (параграф 3.6.1), так и для двухпараметрической задачи (параграф 3.6.2). Из результатов численного решения задачи следует, что дисперсию σ^2 в условиях слабого сигнала $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$ можно рассчитывать с высокой точностью по аналитическим формулам. Непосредственное вычисление искомых параметров по формулам в том или ином предельном случае позволяет избежать необходимости численного решения уравнений и существенно сокращает время обработки данных. При $\frac{\nu}{\sigma} \gg 1$ получаем для расчета ν формулу, совпадающую с аналогичной формулой для однопараметрической задачи: $\nu \underset{\nu/\sigma \gg 1}{\simeq} \langle x \rangle$. Для величины σ^2 в этом предельном случае получаем: $\sigma^2 = \sigma_x^2$, где величина $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ представляет собой дисперсию измеряемой райсовской величины $x = \sqrt{x_{\mathrm{Re}}^2 + x_{\mathrm{Im}}^2}$

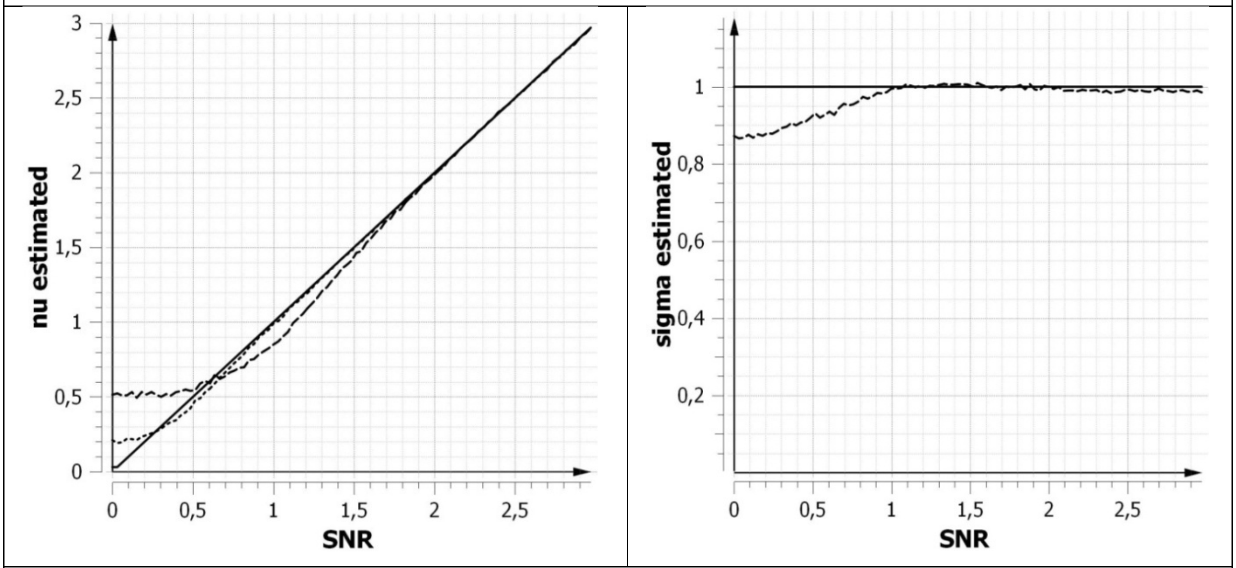
В параграфе 3.6.3 рассмотрен предельный случай распределения Релея, соответствующий наличию случайного шума в отсутствии полезного сигнала. В этом случае $\nu = 0$, и в задаче остается только один параметр: дисперсия σ^2, решение уравнения максимального правдоподобия для которого имеет вид: $\sigma^2 = \frac{1}{2}\langle x^2 \rangle$, что совпадает с известной формулой для распределения Релея.

В параграфе 3.7 приведены результаты численного моделирования изложенных вариантов решения задачи расчета параметров райсовского сигнала методом максимума правдоподобия: моделировались райсовские данные, с различными исходными значениями параметров ν и σ^2, путем численного решения уравнений максимума правдоподобия вычислялись искомые параметры и анализировалась точность полученного решения как в однопараметрическом приближении, так и для двухпараметрической задачи.

На Рисунке 3 представлены графики, иллюстрирующие результаты численного эксперимента по расчету ν и σ в сечениях $\sigma = const$, в то время как параметр ν изменялся от 0 до 3 с шагом 0,03.



а) $\sigma = 1$, n=16, $N_{aver} = 1000$



б) $\sigma = 1$, n=64, $N_{aver} = 1000$

Рис. 3. Результаты численных расчетов параметров ν (слева) и σ (справа) методом максимума правдоподобия

На Рис. 3 графики слева характеризуют точность расчета ν при решении двухпараметрической задачи (пунктирная линия) и в однопараметрическом приближении (точечная линия) в зависимости от заданной реальной величины этого параметра (сплошная прямая линия). Полученным расчетным значениям ν соответствуют точки оси ординат, обозначенной соответственно как «nu estimated». Реальная величина параметра σ была принята равной 1, так что точки оси абсцисс соответствуют величине $SNR = \nu / \sigma$ Графики справа иллюстрируют точность расчета σ в зависимости от изменения параметра ν при решении двухпараметрической задачи. Расчетным значениям σ соответствуют точки оси ординат, обозначенной соответственно как «sigma estimated», в то время как заданная величина этого параметра отображается прямой, параллельной оси абсцисс. Данные соответствуют усреднению по $N_{aver} = 1000$ выборкам.

С целью выявления статистических характеристик смещения и разброса данных для обоих (одно- и двухпараметрического) методов были проведены численные эксперименты с усреднением по очень большому числу измерений. На Рис. 4 приведены некоторые результаты таких расчетов при длине выборки $n = 64$ и усреднении по 10^5 измерениям.

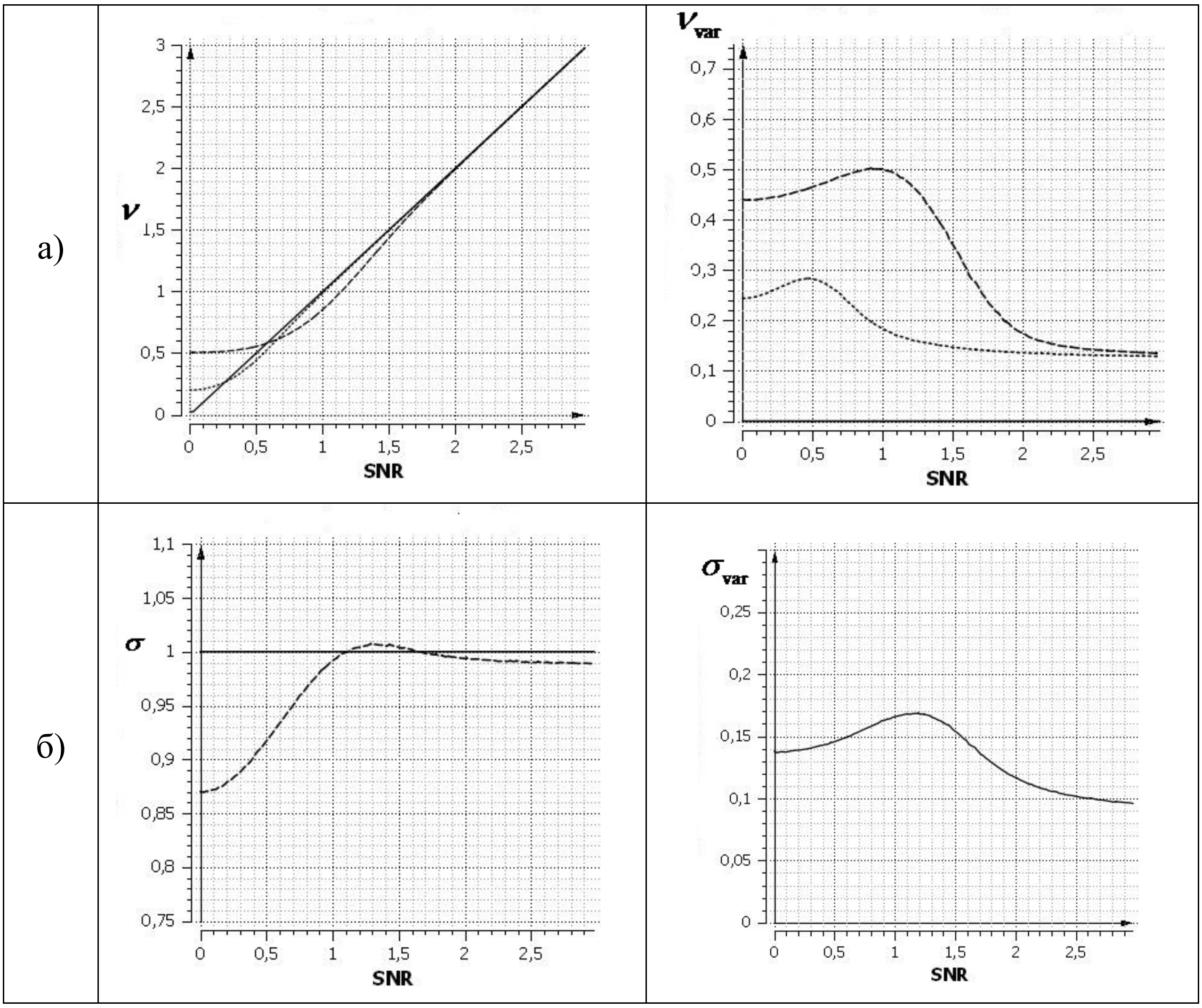


Рис. 4. Графики, характеризующие смещение (слева) и разброс (справа) данных при расчете параметров ν (а) и σ (б) методом максимума правдоподобия

На Рис. 4а) представлены графики, характеризующие смещение (слева) и разброс (справа) данных при расчете параметра ν и его среднеквадратичных отклонений ν_{var}, соответственно, посредством однопараметрического (точечная линия) и двухпараметрического (пунктирная линия) методов максимума правдоподобия при изменении исходно заданной величины ν (сплошная линия) в диапазоне от 0 до 3, в то время как исходно заданная величина параметра σ была принята равной 1, (горизонтальная линия) , так что точки оси абсцисс соответствуют величине отношения сигнала к шуму $SNR = \nu / \sigma$. На Рис. 4б) слева приведены графики рассчитанных значений σ (пунктирная линия) а справа - графики их среднеквадратичных отклонений σ_{var}, в зависимости от $SNR = \nu / \sigma$.

Графические данные иллюстрируют следующие ожидаемые выводы:

- точность расчетов искомых параметров возрастает с увеличением отношения сигнала к шуму, а также с увеличением длины выборки n;

- точность расчетов параметра ν однопараметрическим методом превосходит точность его расчета двухпараметрическим методом, так как в двухпараметрической задаче мы имеем две неизвестные величины ν и σ, и на ошибку при оценке ν неизбежно влияет и ошибка в оценке σ, а в однопараметрической задаче параметр σ точно известен. Однако, поскольку априорная заданность параметра σ на практике никогда не реализуется, сравнение одно- и двухпараметрических методов является весьма условным.

Повышение точности расчетов искомых параметров ν и σ методом максимума правдоподобия с ростом отношения сигнала к шуму обусловлено тем, что при этом максимум трехмерной функции правдоподобия становится более выраженным (см. Рис.2). Точность существенно повышается, начиная с некоторого граничного значения отношения сигнала к шуму ν / σ, причем для оценки параметра ν диапазон относительно высокой точности определяется соотношением $\frac{\nu}{\sigma} \geq 2$, в то время как для оценки параметра σ этот диапазон несколько больше: $\frac{\nu}{\sigma} \geq 1.5$. Этот вывод следует из особенностей формы функции правдоподобия: характерная ширина сечения этой функции плоскостью $\sigma = const$ заметно больше, чем характерная ширина ее сечения плоскостью $\nu = const$.

В параграфе 3.8 рассматриваются аспекты практической ценности развитого двухпараметрического метода максимума правдоподобия:

- отсутствие ограничений, присущих линейным методам анализа данных;

- возможность совместного определения обоих параметров: величины исходного сигнала и гауссовского шума, без привлечения дополнительных вычислительных ресурсов по сравнению с традиционно используемым однопараметрическим приближением.

- отсутствие необходимости использования какой-либо априорной информации об анализируемом случайном процессе, при том, что в практически значимых диапазонах значений параметров задачи развитый метод не уступает другим методам ни по точности, ни по вычислительной сложности.

Таким образом, проведенный анализ метода решения двухпараметрической задачи на основе принципа максимума правдоподобия позволил сделать следующий вывод: в задачах анализа амплитуды, или огибающей случайного сигнала в наиболее интересном для практических применений большом интервале отношения сигнала к шуму $7 > \nu / \sigma > 2$, в котором измеряемый сигнал адекватно описывается статистической моделью Райса и только ею, развитый в диссертации двухпараметрический метод максимума правдоподобия оказывается эффективным математическим инструментом восстановления полезной, информативной составляющей анализируемых стохастических данных.

В четвертой главе диссертации развивается двухпараметрический метод моментов как математический инструмент обработки райсовских данных: дается теоретическое обоснование и проводится математический анализ особенностей решения двухпараметрической задачи посредством двух вариантов метода моментов. При этом первый вариант метода моментов, обозначенный как ММ24, основан на измерении 2-го и 4-го моментов анализируемой величины, а во втором варианте, обозначенном как ММ12, искомые параметры определяются на основе измеренных данных для 1-го и 2-го моментов.

В параграфе 4.1 формулируется постановка задачи, состоящей в том, чтобы, используя известный из математической статистики метод моментов, определить оба искомых параметра задачи: ν и σ^2, и тем самым обеспечить эффективное разделение информативных и шумовых компонент в анализируемых данных.

В параграфе 4.2 развивается метод ММ24. В качестве системы уравнений для искомых параметров ν и σ^2 используются известные формулы для 2-го и 4-го начальных моментов случайной райсовской величины x,:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= 2\cdot\sigma^2 + \nu^2 \\ \overline{x^4} &= 8\cdot\sigma^4 + 8\cdot\sigma^2\cdot\nu^2 + \nu^4 \end{aligned} \qquad (11)$$

Решение системы уравнений (17) метода ММ24 существует и является единственным. Решая уравнения (17) и вводя обозначение $t = \frac{\overline{x^4}}{\left(\overline{x^2}\right)^2} - 1$, получаем:

$$\begin{aligned} \nu^2 &= \overline{x^2}\sqrt{1-t} \\ \sigma^2 &= \frac{\overline{x^2}}{2}\left(1-\sqrt{1-t}\right) \end{aligned} \qquad (12)$$

Нетрудно видеть, что $0 < t \le 1$. В случае распределения Рэлея $t = 1$ и $\sigma^2 = \frac{\overline{x^2}}{2}$.

Таким образом, метод ММ24, позволяя рассчитать искомые параметры ν и σ^2 по простым формулам (12) на основе выборок измерений, без затрат времени на численное решение уравнений, является весьма оригинальным и простым в практической реализации.

В параграфе 4.3 рассматривается метод ММ12, согласно которому искомые параметры исходного сигнала ν и дисперсии гауссовского шума σ^2, определяются по измеренным данным для 1-го и 2-го моментов анализируемой райсовской величины:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \sigma \cdot \sqrt{\pi / 2} \cdot L_{1/2}\left(-\nu^2 / 2\sigma^2\right) \\ \overline{x^2} &= 2 \cdot \sigma^2 + \nu^2 \end{aligned} \qquad (13)$$

где $L_{1/2}$ - полином Лагерра. Из (13) получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma \cdot \sqrt{\pi / 2} \cdot e^{-\frac{\nu^2}{4\sigma^2}} \left[\left(1 + \frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\nu^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) \right] = \overline{x} \\ 2\sigma^2 + \nu^2 = \overline{x^2} \end{cases} \qquad (14)$$

Анализ этой системы, определение условий существования и свойств ее решения удобно проводить, вводя новые переменные: $r = \frac{\nu^2}{2\sigma^2}$ и σ^2. Тогда, заменяя моменты $\overline{x}$ и $\overline{x^2}$ на средние значения по выборкам, систему (14) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot \left[(1+r) I_0\left(\frac{r}{2}\right) + r I_1\left(\frac{r}{2}\right) \right] = \langle x \rangle \\ 2\sigma^2 (1+r) = \langle x^2 \rangle \end{cases} \qquad (15)$$

Как и в случае метода максимума правдоподобия, в методе ММ12 решение системы (15) нелинейных уравнений для двух переменных r и σ^2 сводится к решению одного уравнения для одной переменной r:

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot \langle x^2 \rangle} \cdot \sqrt{1+r} \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right) \left[1 + \frac{r}{(1+r)} \cdot \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right) \right] = \langle x \rangle \qquad (16)$$

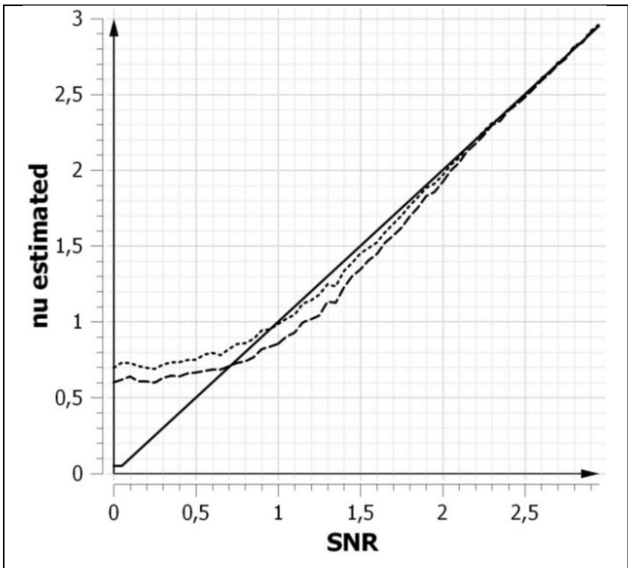
Доказана теорема о том, что в физически значимой области значений $r \geq 0$ решение уравнения (16) всегда существует, причем это решение является тривиальным в том и только в том случае, когда мы имеем дело с распределением Рэлея.

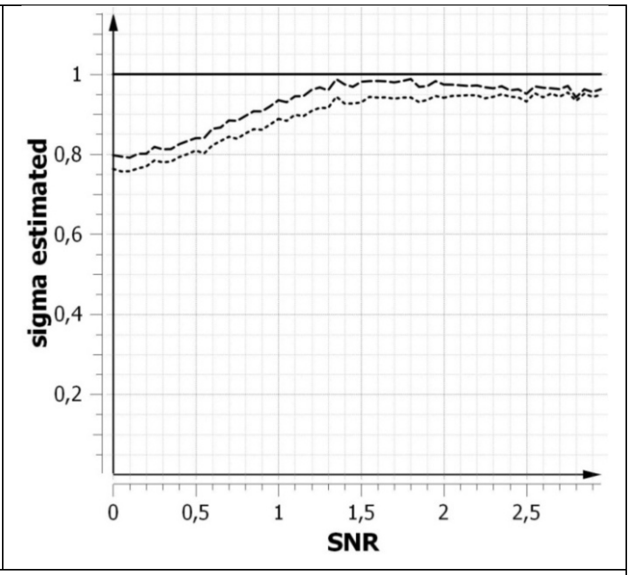
Решая уравнение (16) для r, получаем для искомых ν и σ^2:

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{\frac{r}{1+r}} \sqrt{\langle x^2 \rangle} \\ \sigma^2 &= \frac{\langle x^2 \rangle}{2(1+r)} \end{aligned} \qquad (17)$$

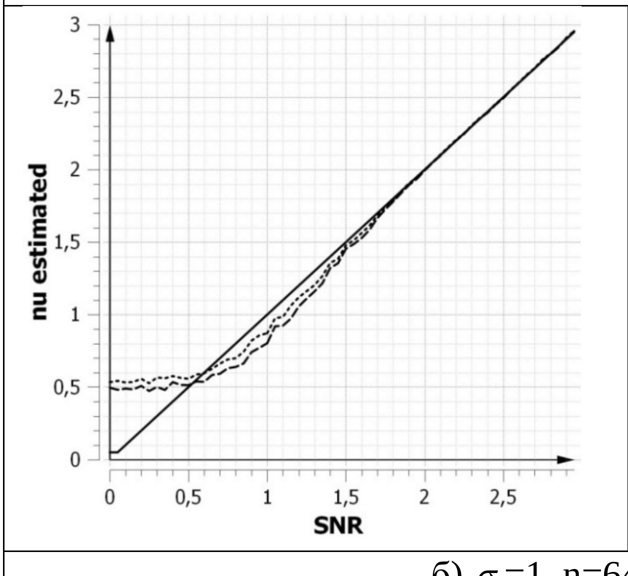
В параграфе 4.4. представлены результаты численного решения задачи методами ММ24 и ММ12, иллюстрирующие теоретические выводы.

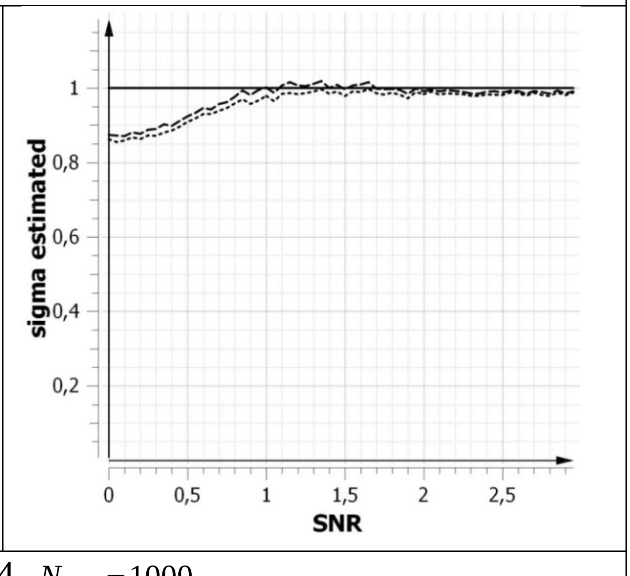
Графики на Рис. 5 слева характеризуют точность расчета ν методами ММ12 (пунктирная линия) и ММ24 (точечная линия) в зависимости от заданного ν (сплошная прямая) в интервале (0,3) с шагом 0.05 при $\sigma = 1$, т.е. ось абсцисс соответствуют величине $SNR = \nu / \sigma$ Графики справа иллюстрируют точность расчета σ в зависимости от заданного ν методами ММ12 (пунктирная линия) и ММ24 (точечная линия), заданная величина σ отображена прямой $\sigma = 1$, при усреднении по $N_{aver} = 1000$ выборкам.





а) σ=1, n=16, $N_{aver} = 1000$





б) σ=1, n=64, $N_{aver} = 1000$

Рис. 5. Результаты численных расчетов параметров ν (слева) и σ (справа) методами ММ12 и ММ24.

Представленные графики иллюстрируют вывод: точность расчета искомых параметров ν и σ^2 существенно повышается с ростом величины отношения сигнала к шуму и с увеличением длины выборки, причем диапазон относительно высокой точности вычислений, обеспечиваемой обоими методами ММ24 и ММ12, определяется условием $\dfrac{\nu}{\sigma} \geq 1.5 \div 2$ при небольшой длине выборки и расширяется с увеличением длины выборки.

В параграфе 4.5 рассматриваются аспекты практической значимости развитых двухпараметрических методов моментов ММ24 и ММ12 как эффективного инструмента в решении широкого круга задач анализа и обработки райсовских данных и изображений.

В пятой главе диссертации проводится сопоставление результатов численного решения двухпараметрической задачи анализа всеми развитыми методами: методом максимума правдоподобия (ниже обозначаемого МП), вариантами метода моментов ММ24 и ММ12. С целью выявления характерных статистических зависимостей величин смещения и разброса для параметров ν и σ^2 для каждого из методов были проведены численные эксперименты, в которых усреднение осуществлялось по очень большому числу (10^5) измерений.

На Рис. 6 представлены графики, характеризующие точность расчетов параметра ν методами МП, ММ12, ММ24. Исходно заданная величина параметра ν изменялась в диапазоне от 0 до 3, в то время как величина параметра σ была принята равной 1, так что точки оси абсцисс фактически соответствуют величине отношения сигнала к шуму $SNR = \nu / \sigma$ На Рис. 6 представлены графики рассчитанных значений ν (слева) и их среднеквадратичных отклонений (справа). Представленные графики соответствуют следующим значениям длины выборки: $n = 16$ (а) и $n = 256$ (б).

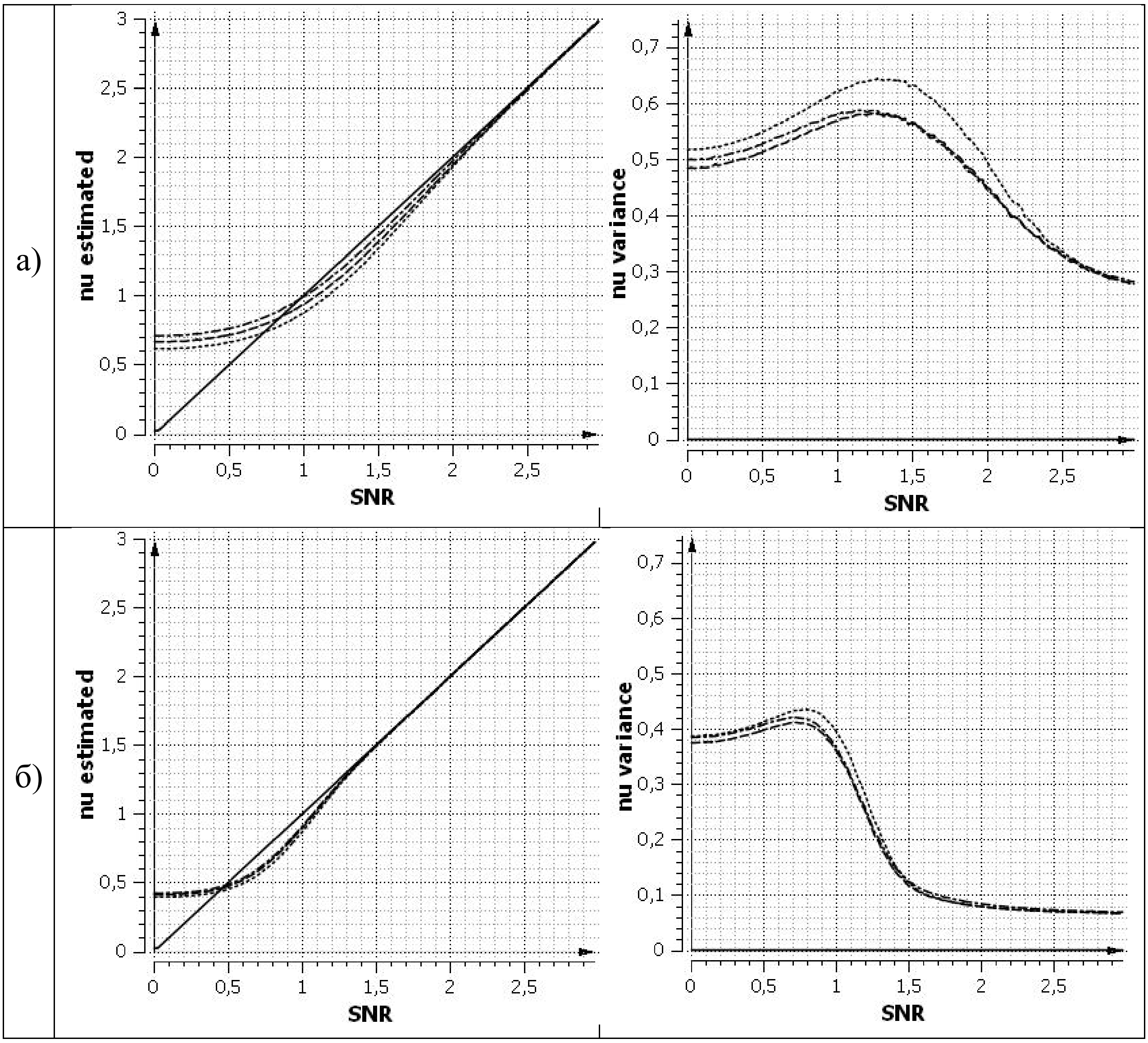


Рис. 6. Графики рассчитанных значений ν (слева) и их среднеквадратичных отклонений (справа) в зависимости от SNR при двухпараметрическом анализе методами ММ12 (точечная линия), методом ММ24 (штрихпунктирная линия) и МП (пунктирная линия) при длинах выборки $n = 16(а), 256(б)$.

На Рис. 7 приведены графики, иллюстрирующие точность расчетов параметра σ методами МП, ММ12, ММ24 при тех же условиях эксперимента, что и на Рис. 6. Горизонтальная линия соответствует заданному $\sigma = 1$. Графики слева соответствуют расчетным значениям σ, а справа – их среднеквадратичным отклонениям.

В диссертации представлены также зависимости точности расчета и разброса данных для параметров ν и σ от величины отношения сигнала к шуму в логарифмическом масштабе, что дает возможность обзора широкого диапазона значений SNR.

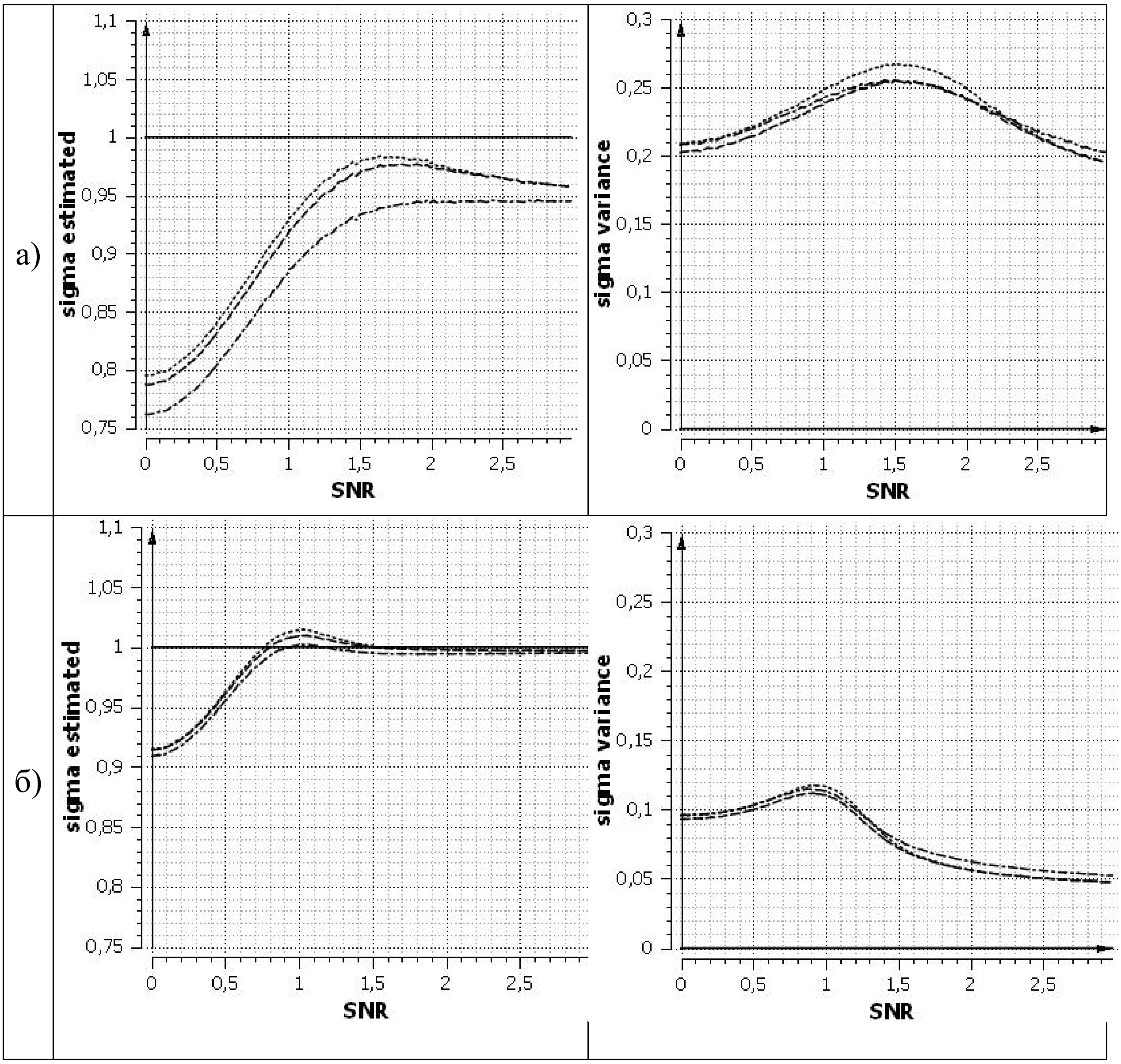


Рис. 7. Графики рассчитанных значений σ (слева) и их среднеквадратичных отклонений (справа) в зависимости от SNR при двухпараметрическом анализе методами ММ12 (точечная линия), методом ММ24 (штрихпунктирная линия) и МП (пунктирная линия) при $n = 16(а), 256(б)$

Из численных экспериментов получены следующие основные выводы:

- Как смещение, так и разброс данных при расчете искомых параметров ν и σ^2 всеми тремя методами заметно уменьшается с ростом отношения сигнала к шуму SNR, а также с увеличением длины выборки n. Смещения данных при расчете параметров ν и σ сопоставляемыми методами незначительно отличаются друг от друга при малых значениях SNR и небольшой длине выборки, а с увеличением длины выборки и ростом SNR

как смещение, так и разброс данных, рассчитанных всеми тремя методами, выравниваются;

- Все три рассматриваемых метода характеризуются существенным повышением точности расчетов искомых параметров и обеспечением поддержания ее на высоком уровне при достижении величиной ν/σ некоторого граничного значения, причем граница этого диапазона $\frac{\nu}{\sigma} \sim 1.5 \div 2$ (при небольшой длине выборки $n \sim 10$) примерно одинакова для всех трех методов и сдвигается влево с увеличением длины выборки. Вне этого диапазона (при $\frac{\nu}{\sigma} < 1,5$) наибольшая точность расчета искомых параметров обеспечивается вариантом метода моментом ММ12, а минимальный разброс данных обеспечивается методом МП, в то время как метод ММ12 характеризуется наибольшим среднеквадратичным отклонением расчетных данных для искомых параметров.

Представленные результаты демонстрируют возможность эффективного двухпараметрического анализа райсовских данных посредством разработанных в диссертации методов, причем каждый из этих методов обладает определенными преимуществами в том или ином аспекте решения задачи, а именно:

-двухпараметрический метод МП обеспечивает более высокую точность при оценке дисперсии гауссовского шума σ^2, чем при оценке величины полезного сигнала ν;

- метод моментов ММ12 является более точным, чем методы МП и ММ24;

- метод моментов ММ24 позволяет рассчитать искомые параметры ν и σ^2 непосредственно по формулам, и, в отличие от метода МП и метода моментов ММ12, не требует численного решения уравнений, тем самым существенно сокращая объем вычислительных ресурсов, необходимых для решения задачи. Существенное достоинство метода ММ24 несомненно состоит в его простоте, при обеспечении точности лишь незначительно более низкой по сравнению с двумя другими методами.

Таким образом, каждый из трех развитых методов представляет собой эффективный инструмент двухпараметрического анализа райсовских данных, и в зависимости от конкретной задачи тот или иной метод можно рассматривать как предпочтительный.

В шестой главе диссертации приводится пример практического приложения развитой методологии: представлены результаты физического эксперимента по исследованию электрооптических (ЭО) свойств среды и расчету величины спекл-шума посредством двухпараметрического метода моментов при обработке данных электрооптической модуляции отраженного света. Эксперимент проводился на кафедре Физической электроники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Актуальность задачи измерения спекл-шума в оптических исследованиях очевидна и обусловлена неизбежным появлением спекл-шумовой составляющей в световой волне при ее взаимодействии со средой. В частности, оценивание величины спекл-шума позволяет повысить точность определения ЭО коэффициентов среды, что важно в связи с созданием новых оптических сред и их широким использованием во многих инновационных технологиях. Применимость развитого в диссертации метода к решению рассматриваемой задачи обусловлена райсовским характером анализируемых данных.

Как известно, ЭО эффект, изменяя показатель преломления n, вызывает изменение коэффициента отражения $\rho = (n-1)^2/(n+1)^2$ ЭО материала. Изменение коэффициента отражения, вызванное ЭО эффектом, выражается формулой:

$$\delta\rho = \frac{\delta I}{I_{inc}} = \frac{\partial\rho}{\partial n}\delta n = \frac{4(n-1)}{(n+1)^3}\delta n, \qquad (18)$$

где I_{inc} – интенсивность падающего света, δI – изменение отраженной интенсивности света, $\delta n = \frac{1}{2}n_0^3 k_{eff} E$ – изменение показателя преломления из-за ЭО эффекта, k_{eff} – эффективный ЭО коэффициент, n_0 - показатель преломления среды в отсутствии поля.

Неизбежное присутствие спекл-шума обусловливает стохастичность процесса, причем, как показано в параграфе 6.1, эффективный ЭО коэффициент представляет собой случайную величину с райсовским распределением. На Рис. 8 представлена типичная гистограмма эффективного ЭО коэффициента, полученная на основе измеренных данных. На Рис. 8 а) приведены рассчитанные методом ММ24з начения эффективного ЭО коэффициента и стандартного отклонения σ, характеризующего гауссовский спекл-шум,. Для сравнения на Рис. 8 б) приведены результаты расчета эффективного ЭО коэффициента традиционно используемым способом линейной регрессии по наклону усредненной прямой, отображающей зависимость изменения показателя преломления от величины поля, а также значения стандартного отклонения σ_S измеренного сигнала. Важно отметить, что рассчитанная традиционным способом, посредством вычисления второго центрального момента, дисперсия $\sigma_S{}^2$ представляет собой шумовую характеристику результирующего райсовского сигнала R, которая, вообще говоря, отличается от дисперсии искажающего исходный сигнал гауссовского спекл-шума σ^2, что подтверждается полученными экспериментальными данными.

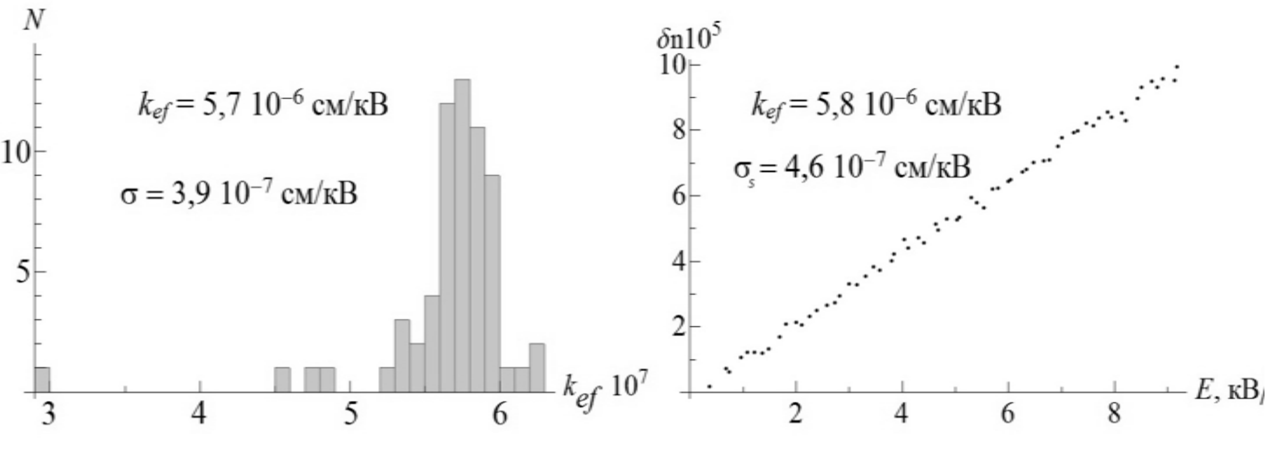


Рис. 8. Результаты вычисления величины эффективного ЭО коэффициента и дисперсии шума методом ММ24 (слева) и традиционным методом (справа)

Так как ЭО коэффициент среды определяется именно исходной, не искаженной спекл-шумам, величиной отраженной световой волны, то двухпараметрический анализ данных методом ММ24, позволяя «очистить» анализируемые данные от привнесенного гауссовского спекл-шума, обеспечивает более корректное оценивание ЭО коэффициентов, по сравнению с традиционным методом, а также обладает другими преимуществами, состоящими, в частности, в возможности существенного упрощения схемы эксперимента и в сокращении числа проводимых измерений.

Приведенные результаты физического эксперимента демонстрируют практическую значимость и эффективность развитого в диссертации двухпараметрического подхода к решению задач анализа и обработки райсовских данных различной природы.

В Заключении обобщены итоги диссертационного исследования, изложены основные полученные результаты и научные выводы, а также сформулированы практические рекомендации относительно перспективных направлений дальнейших исследований по теме диссертации.

Основные результаты и выводы:

1. Разработаны теоретические методы совместного расчета полезного сигнала и шума в условиях распределения Райса, объединенные развитой концепцией двухпараметрического подхода к решению задачи анализа и обработки стохастических данных. Суть данной концепции заключается в обоснованной возможности строгого расчета обоих априорно неизвестных статистических параметров райсовского сигнала, знание которых позволяет обеспечить эффективное разделение информативных и шумовых составляющих анализируемых данных, причем развитая методология применима для широкого класса нелинейных задач. На основе развитой концепции двухпараметрического анализа данных разработаны различные алгоритмы математического расчета искомых величин сигнала и шума, в зависимости от используемого статистического подхода к решению задачи: метод максимума правдоподобия и варианты метода моментов.

2. Проведено теоретическое исследование и дано строгое математическое обоснование возможности решения двухпараметрической задачи на основе статистического принципа максимума правдоподобия:

- получена система уравнений для совместного расчета параметров исходного сигнала и шума в условиях распределения Райса на основе данных выборок измерений;

- доказано существование и единственность решения системы уравнений максимума правдоподобия для искомых параметров сигнала и шума.

3. Показано, что при решении двухпараметрической задачи определения искомых параметров исходного сигнала ν и шума σ на основе принципа максимума правдоподобия решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными ν и σ может быть сведено к решению одного уравнения для параметра ν и последующего расчета параметра σ по формуле на основе решения для ν, что позволяет существенно сократить объем вычислительных ресурсов для решения двухпараметрической задачи, снизив его до уровня, требуемого для решения задачи в однопараметрическом приближении, что имеет большое значение для практической реализации метода.

4. Получено аналитическое решение двухпараметрической задачи расчета искомых параметров сигнала и шума методом максимума правдоподобия в предельных случаях малого и большого значений отношения сигнала к шуму, позволяющее в этих предельных случаях рассчитывать искомые параметры непосредственно по формулам, без необходимости численного решения соответствующих уравнений.

5. В результате анализа и обобщения результатов проведенного компьютерного моделирования решения двухпараметрической задачи методом максимума правдоподобия получен вывод о существенной зависимости точности расчета параметров ν и σ от величины отношения сигнала к шуму, а именно: развитый метод максимума правдоподобия для совместного расчета статистических параметров анализируемого райсовского сигнала обеспечивает высокую точность в диапазоне значений, удовлетворяющих условию $\nu > 2\sigma$ - для расчета параметра сигнала ν, и в диапазоне $\nu > 1.5\sigma$ - для расчета параметра шума σ при небольшой длине

выборки ($n \sim 10$), и этот диапазон расширяется с увеличением длины выборки.

6. Разработан способ решения двухпараметрической задачи определения параметров райсовских данных посредством метода моментов, основанного на обработке выборочных измерений 2-го и 4-го моментов анализируемой величины. Показано, что решение двухпараметрической задачи указанным способом при достаточно большой длине выборки измерений всегда существует и является единственным, причем это решение вычисляется по простым алгебраическим формулам.

7. Разработан способ решения двухпараметрической задачи определения параметров райсовских данных посредством метода моментов, основанного на обработке выборочных измерений 1-го и 2-го моментов анализируемой величины:

- получена система уравнений для искомых параметров сигнала ν и шума σ;

- показано, что решение данной системы двух уравнений с двумя неизвестными: ν и σ может быть сведено к решению одного уравнения для параметра $r = \frac{\nu^2}{2\sigma^2}$ и последующего расчета искомых параметров ν и σ по формулам на основе полученного решения для r;

- доказано существование решения уравнения для параметра r и, следовательно, для искомых параметров ν и σ. Возможность сведения задачи решения системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными ν и σ к решению одного уравнения с одной неизвестной $r = \frac{\nu^2}{2\sigma^2}$ имеет существенное значение для практической реализации данного метода, позволяя значительно сократить объем необходимых вычислительных ресурсов.

8. В результате анализа результатов компьютерного моделирования процедуры решения двухпараметрической задачи вариантами метода моментов получен вывод о том, что точность расчета параметров ν и σ

существенно повышается с ростом отношения сигнала к шуму, причем диапазон относительно высокой точности определения искомых параметров обоими вариантами метода моментов определяется условием $\frac{\nu}{\sigma} > 1.5$ при длине выборки $n \sim 10$, и этот диапазон расширяется с увеличением длины выборки.

9. В результате сопоставительного анализа трех развитых в диссертации методов решения двухпараметрической задачи совместного определения обоих статистических параметров ν и σ райсовской величины на основе их компьютерного моделирования получен следующий вывод: как смещение, так и разброс данных при расчете искомых параметров заметно уменьшается с ростом отношения сигнала к шуму, а также с увеличением длины выборки n; точность расчета параметров ν и σ вариантами метода моментов и методом максимума правдоподобия незначительно отличаются друг от друга при малых значениях отношения сигнала к шуму и небольшой длине выборки, при этом наименьший разброс расчетных данных обеспечивается методом максимума правдоподобия, а наименьшее смещение – методом, основанном на измерениях 1-го и 2-го моментов анализируемой величины, в то время как с увеличением длины выборки и ростом отношения сигнала к шуму как смещение, так и разброс данных при расчете искомых параметров всеми рассматриваемыми методами выравниваются.

10. Каждый из трех разработанных методов представляет собой эффективный инструмент двухпараметрического анализа райсовских данных, и в зависимости от конкретной задачи тот или иной метод можно рассматривать как предпочтительный.

-двухпараметрический метод максимума правдоподобия в силу особенностей функции правдоподобия райсовской величины обеспечивает более высокую точность при оценке дисперсии шума σ^2, чем при оценке величины полезного сигнала ν;

- метод, основанный на измерении 1-го и 2-го моментов, обеспечивает наименьшее смещение расчетных данных при оценке параметров сигнала ν

и шума σ^2, однако характеризуется большей величиной разброса данных по сравнению с другими методами;

- метод, основанный на измерении 2-го и 4-го моментов, отличается простотой реализации, обеспечивая возможность расчета искомых параметров ν и σ^2 непосредственно по формулам, без необходимости численного решения уравнений, тем самым существенно сокращая объем вычислительных ресурсов, требуемых для решения задачи, при достижении точности оценки искомых параметров лишь незначительно более низкой по сравнению с двумя другими методами.

11. Практическая значимость и эффективность развитых методов двухпараметрического анализа райсовских данных подтверждена результатами физического эксперимента по определению электрооптического коэффициента среды и величины спекл-шума.

В разделе **Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы** сформулированы направления, для которых последующее развитие разработанной в диссертации концепции и методологии двухпараметрического анализа данных представляет большой потенциал, формируя теоретических основы новых информационных технологий. Обоснованы выводы о том, что продолжение работ по теме диссертации является перспективным и целесообразным как с точки зрения развития науки, так и для практических приложений.

Список публикаций по теме диссертации

(Периодические издания из списка ВАК выделены жирным шрифтом)

1. Яковлева Т.В., Кульберг Н.С. Особенности функции правдоподобия для статистического распределения Райса // **Доклады Академии наук**, серия Математика. 2014. Т. 457, №4. С. 394-397.
   Yakovleva T.V., Kulberg N.S Special Features of the Likelihood Function of the Rice Statistical Distribution // Doklady Mathematics. 2014. Vol. 90, No. 1. P. 472–475.
2. Яковлева Т. В. Условия применимости статистической модели Райса и расчет параметров райсовского сигнала методом максимума правдоподобия **// Компьютерные исследования и моделирование.** 2014. Т.6. №1. С. 13-25.
3. Яковлева Т.В., Кульберг Н.С. Методы математической статистики в решении задачи двухпараметрического анализа райсовского сигнала // **Доклады Академии наук**, серия Математика. 2014. Т. 459. №1. С. 27-31.
   Yakovleva T.V., Kulberg N.S. Methods of Mathematical Statistics in Two-Parameter Analysis of Rician Signals // Doklady Mathematics. 2014. Vol. 90, No. 3. P.1–5.
4. Яковлева Т.В. Обзор методов обработки магнитно-резонансных изображений и развитие нового двухпараметрического метода моментов // **Компьютерные исследования и моделирование.** 2014. Т.6. №2. С. 231-244.
5. Yakovleva T.V., Kniazkov A.V. Speckle-noise computing by two-parameter analysis of the reflected light’s periodic variation // **Optical Memory** & **Neural Networks** (**Information Optics**). 2014. T. 23, №4. P.233-241.
6. Яковлева Т.В., Кульберг Н.С. Двухпараметрической анализ магнитно-резонансного изображения методом максимума правдоподобия в сравнении с однопараметрическим приближением // **Системы и средства информатики**. 2014. Т.24, №3, С. 92-109.
7. Яковлева Т.В., Кульберг Н.С. Методы математической статистики как инструмент двухпараметрического анализа магнитно-резонансного изображения // **Информатика и ее применения**. 2014. Т. 8, Вып. 3. С. 79-89.
8. Яковлева Т.В., Князьков А.В. Двухпараметрический метод моментов как инструмент оценки электрооптических коэффициентов при периодической модуляции отраженного света // **Оптический журнал**. 2015. Т.82. №1. С.47-53.
9. Кульберг Н.С., Яковлева Т.В. Расчет параметров райсовского сигнала методами математической статистики. **Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ** № 2014616282 от 19.06.2014г. Правообладатель: ВЦ РАН.

10. Кульберг Н.С., Яковлева Т. В., Камалов Ю. Р., Сандриков В. А., Осипов Л. В., Белов П. А. Разработка и испытание нового метода улучшения качества изображений в ультразвуковой медицинской диагностике // **Акустический журнал**. 2009. Т.55, № 4-5. С.526-535.
11. Kulberg N.S., Yakovleva T. V.,Kamalov Yu. R., Sandrikov V. A., Osipov L. V., Belov P. A. A New Method for Improvement of Image Quality in Medical Ultrasonic Diagnostics // **Pattern Recognition and Image Analysis**, 2010, Vol. 20, No. 4, P. 557–563.
12. Зельдович Б.Я., Шкунов В.В., Яковлева Т.В. Голограммы спекл-полей // **Успехи физических наук**. 1986. Т. 149, вып. 3. С. 511-549.
13. Зельдович Б.Я., Яковлева Т.В. Теория двухслойной голограммы // **Квантовая электроника**. 1984. Т.11, №3, С.471-480.
14. Зельдович Б.Я., Шкунов В.В., Яковлева Т.В. Теория восстановления толстослойных голограмм спекл-полей // **Квантовая электроника**. 1983. Т. 10, №8. С.1581-1586.
15. Шкунов В.В., Яковлева Т.В. Расчет шумов объемных голограмм спекл-полей при насыщающемся фотоотклике // **Квантовая электроника**. 1987.Т. 14. №3 С. 460-465.
16. Зельдович Б.Я, Яковлева Т.В. Модовая теория объемных голограмм с учетом нелинейности фотопроцесса // **Квантовая электроника**. 1980. Т. 7, №3. С. 519-531.
17. Яковлева Т.В. Двухпараметрический метод моментов для расчета сигнала и шума в условиях райсовского распределения: теория // Труды 21-ой Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование».- Дубна, 2014. С. 85.
18. Yakovleva T. V., Kulberg N. S. Noise and Signal Estimation in MRI: Two-Parametric Analysis of Rice-Distributed Data by Means of the Maximum Likelihood Approach // American Journal of Theoretical and Applied Statistics. 2013. Vol. 2, No. 3. P. 67-79.
19. Яковлева Т.В. Расчет параметров случайного райсовского сигнала методом максимума правдоподобия // Труды 21-ой Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование».- Дубна, 2014. С. 86.
20. Яковлева Т.В. Аналитический расчет параметров случайного райсовского сигнала в предельных случаях больших и малых значений отношения сигнала к шуму // Труды 21-ой Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование».- Дубна, 2014. С. 84.
21. Яковлева Т.В. Теоретический расчет сигнала и шума при анализе огибающей в условиях распределения Райса / Сборник научных трудов III Всероссийской конференции по фотонике и информационной оптике. - Москва, НИЯУ МИФИ, 2014. -304С., С. 147-148.
22. Дмитриева О.Ю., Кульберг Н.С, Яковлева Т.В. Двухпараметрический метод максимума правдоподобия для расчета сигнала и шума в условиях райсовского распределения: компьютерное моделирование // Труды 21-ой Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование».- Дубна, 2014. С. 132.

23. Яковлева Т.В., Кульберг Т.В. Определение параметров распределения Райса методом максимума правдоподобия / Сборник трудов 2-го научного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения проф. д.т.н. З.М. Бененсона, М., ВЦ РАН, 2012. -64С., С. 40—53.
24. Яковлева Т.В., Князьков А.В. Двухпараметрический метод моментов обработки результатов периодической модуляции отраженного света для оценки ЭО коэффициентов // Тезисы международной конференции «ЛАЗЕРЫ, ИЗМЕРЕНИЯ, ИНФОРМЦИЯ-2014». С.-Петербург, СПб политехнический университет. 2014. С. 39.
25. Яковлева, Т.В. Теория преобразования спекл-неоднородных световых полей в объемных голограммах и нелинейных средах (специальность 01.04.05 – оптика). Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, АН СССР, Физический институт им. П.Н. Лебедева, Москва, 1982г. -20С.
26. Зельдович Б.Я., Шкунов В. В., Яковлева Т.В. Теория голограмм спекл-полей, часть IV, Шумы объемных голограмм // Труды IV Всесоюзной конференции по голографии, т.1, Ереван, 1982. С.609-613.
27. Зельдович Б.Я., Шкунов В.В., Яковлева Т.В. Расчет шумов и количественное обоснование модовой теории объемных голограмм. Препринт Физического Института Академии наук СССР. 1979. № 26. -39С.
28. Яковлева Т.В. Двухпараметрический анализ данных в условиях распределения Райса // Труды конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Л.Лившица. 2014г., С. 23-31.
29. Kulberg N.S., Yakovleva T.V., Kamalov Yu.R., Sandrikov V.A., Osipov L.V., Belov P. A. Novel Method of the Noise-Reduction in 3D X-Ray Computed Tomography // Proceedings of IMTA 2010 Third International Workshop on Image Mining Theory and Applications, Angers, France, May 2010, P.92-99.
30. Kulberg N.S., Yakovleva T.V., Kamalov Yu.R., Sandrikov V.A, Osipov L.V., Belov P.A. The Elaboration and Clinical Testing of a New Technique of Image Quality Improvement in Ultrasound Medical Diagnostics // Proceedings of the Second International Workshop on Image mining, Theory and Applications in conjunction with VISAAP. - Lisboa, Portugal. 2009. P. 63-72.
31. Яковлева Т.В., Князьков А.В. Двухпараметрический метод моментов как инструмент оценки ЭО коэффициентов посредством периодической модуляции отраженного света / Сборник статей "Лазеры. Измерения. Информация-2014". Санкт-Петербург, Издательство Политехнического института. 2014. Том 1. -327С., С. 318-326.