ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

На правах рукописи

УДК 519.86+330.46

ТОПИНСКИЙ ВАЛЕРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

РЕЗЕРВНЫЕ ЦЕНЫ В АСИММЕТРИЧНЫХ АУКЦИОНАХ

Специальность 05.13.18 —
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н.,
Воронцов К.В.

Москва – 2014

Содержание

Введение

Аукцион как инструмент продажи был известен еще в античности, но в те далекие времена он имел классический вид или формат, который привычно представляется обывателю при слове «аукцион». При этом в наши дни аукционы используются повсеместно в самых разнообразных формах. Среди торгуемых в наши дни с аукциона объектов присутствуют как классические: предметы роскоши и произведения искусства, дорогие редкие вина и автомобили — так и новые: государственные казначейские бумаги, права на приватизацию, квоты на разработку природных ресурсов или диапазоны частот радио- и телевещания.

Конечно же полный список торгуемых на аукционах объектов сильно шире, а с развитием интернета и так называемой электронной коммерции можно утверждать, что аукционы проникли даже в повседневную жизнь обычного человека. В 1995 году была основана компания «eBay», которая на данный момент является самым крупным интернет-аукционом в мире, где каждый день совершается несколько миллионов сделок. Крупнейшим российским интернет-аукционом для частных лиц является «Молоток.ру».

Но на покупках частными лицами различных предметов применение аукционов в интернете далеко не ограничивается. Так, на основу *электронных торговых площадок* переведены значительные части всех закупок крупнейших как коммерческих компаний, так и государственных корпораций. Важным для данной работы примером являются электронные торговые площадки для рекламы: современная медийная или текстовая реклама размещается через такие площадки путем автоматизированных покупок различных рекламных мест на интернет-сайтах.

Частным случаем таких торговых площадок для рекламных объявлений являются интернет-компании, предоставляющие поисковый сервис: «Яндекс», «Google», «Bing», «Baidu», «Yahoo!», «Mail.ru». Можно сказать, что основным видом рекламы для этих компаний является *контекстная реклама*, которая составляет для них основной источник доходов. Несмотря на то, что российский рынок контекстной рекламы является еще достаточно молодым, по данным Ассоциации Коммуникационных Агентств России (АКАР) рынок контекстной рекламы в России в 2013 г. вырос на 34% по сравнению с предыдущим годом и составил 51.6 млрд руб.[1] При этом по официальной отчетности доход компании «Яндекс» составил 35.5 млрд руб. или 68.8% всего российского рынка контекстной рекламы.[2]

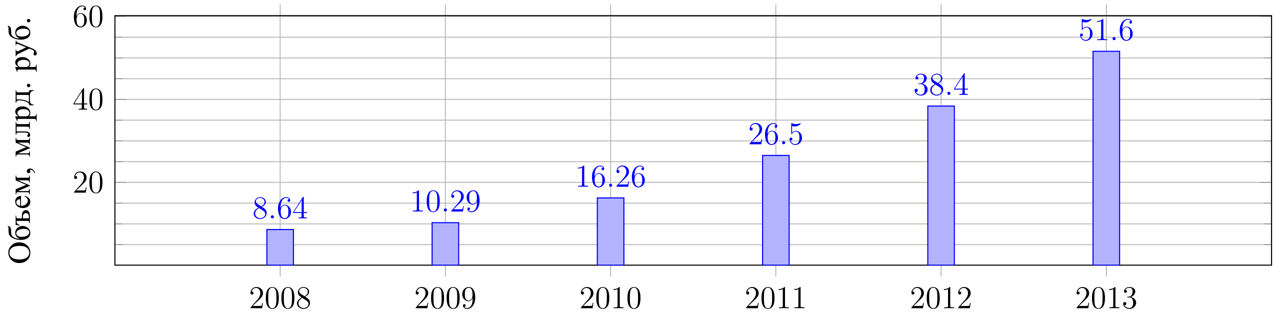


Рисунок 1: Объем рынка контекстной рекламы в России за 2008-2013 года.

Масштабное проникновение аукционов в различные сферы жизни стало возможно благодаря появлению и дальнейшему бурному развитию такого направления в науке как *теория аукционов*. Развитие данной теории оказалось достаточно плодотворным как в теоретическом аспекте, так и на практике.

Наиболее значимым теоретическим достижением здесь является так называемая *теорема эквивалентности доходов*, которая при некоторых достаточно разумных условиях утверждает, что аукционист может ожидать в среднем один и тот же размер дохода от всех стандартных (и от многих нестандартных) форматов аукциона, к которым участники оказываются также безразличны. В большей степени за разработку частного случая данной теоремы в своих работах [77, 78] Вильям Викри был удостоен Нобелевской премии. В более общих условиях данная теорема была доказана независимо в работах [66] и [60].

Большинство дальнейших результатов в теории аукционов можно рассматривать с точки зрения данной теоремы и того, каким образом ее результат изменяется в зависимости от дальнейшего ослабления или замены сделанных предположений. Наиболее близкими к теме данной диссертации являются работа Майерсона [60], где автор показал вид оптимального[3] аукциона при ослаблении предположения о «симметричности» участников, и более поздняя работа Маскина и Райли [57], где авторы более детально изучают влияние различных видов асимметрии участников на прибыли аукциониста в классических форматах аукционов.

Важно отметить, что теория аукционов нашла также применение и в других областях экономики, которые с первого взгляда вообще никак не связаны с аукционами. Используя разработанные для аукционов техники анализа, было развито более глубокое понимание дру-

[1] `http://www.akarussia.ru/knowledge/industrial_standarts`
[2] `http://ir.yandex.com/releasedetail.cfm?ReleaseID=826948`
[3] т.е. такого формата, который максимизирует ожидаемую прибыль аукциониста.

гих методов ценообразования, отличных от формата аукционов. Были показаны тесные связи теории аукционов с теорией совершенной конкуренции [79] и теорией ценовой дифференциации [14].

С практической точки зрения теория аукционов отразилась в множестве успешно созданных аукционных рынков. Но кроме успешных примеров практической применимости аукционов существуют примеры, где дизайн формата аукционов был выполнен неудачно, что привело к плачевным результатам. Существование таких неудачных попыток применения аукционов говорит нам о том, что нельзя воспринимать некоторый формат аукциона как универсальный инструмент. Напротив, правильный формат аукциона должен быть тесно связан со спецификой каждого конкретного примера или ситуации.

Кроме того, на практике приходится задаваться совершенно другого рода вопросами в отличии от большинства теоретических исследований. Каким образом можно имплементировать выбранный формат аукциона? Насколько свойства данного формата робастны по отношению к сделанным предположениям?

Здесь я хочу перечислить основные вопросы и аспекты, которыми я руководствовался при написании данной диссертации и выборе решаемых задач. Свою работу я начал с достаточно практического вопроса — реализация комплекса программ[4] (i) по обработке данных, (ii) по численному решению эконометрической задачи восстановления необходимых свойств модели аукционов по накопленным данным и (iii) по симуляционной части для вычисление оптимального формата аукциона с последующим применением на практике к части рекламных аукционов компании «Яндекс».

После оптимизации реальных аукционов на практике сформировался следующий список основных соображений.

- Каким образом выглядит оптимальный аукцион для одного товара, нам показал Майерсон. Но на практике его оптимальный механизм крайне сложно реализовать, а зачастую даже невозможно. Поэтому хочется по прежнему оптимизировать доходность аукциона, но с учетом практических ограничений: (i) правила аукциона должны быть универсальными для различных объектов продажи (в случае интернет аукционов рекламные места для разных поисковых запросов должны торговаться единообразно); (ii) схема платежей

[4]Данный комплекс был разработан автором в рамках исследовательского проекта в компании «Яндекс». Основная часть программного кода была реализована на языке `python` с использованием научного пакета расширений `numpy, scipy, cvxopt, ...`; часть по работе с большими массивами данных была реализована в рамках внутренней реализации распределенной среды разработки с технологией `MapReduce`.

также должна быть единообразной без какой-либо персонализированной дискриминации (в некоторых ситуациях необходимо сохранение свойства *анонимности* участия).

- Я верю в то, что инструмент стартовых цен, которые принято называть как *резервные цены*, является достаточно эффективным для возможной оптимизации аукционов.
- На практике достаточно часто наблюдается асимметрия участников, которая возникает по множеству различных причин. Это особенно ярко проявляется для интернет-аукционов, где четкие границы между аукционами часто невозможно определить.
- Для практических целей важно минимизировать количество необходимых теоретических предположений, предъявляемых для достижения необходимых свойств аукциона. Эту идею часто называют «доктриной Уилсона».
  - Часто мы не можем рассчитывать на возможность персональной дискриминации по идентификаторам участников. Подобного рода персонализированные правила требуют резкого увеличения необходимого объема знаний про разные типы участников аукциона, что на практике труднореализуемо.
  - Кроме того, важно достичь некоторой робастности свойств аукциона, относительно априорных предположений об участниках.

Исходя из этих соображений, я решил сосредоточиться на «простых» форматах аукционов, которые наиболее часто применяются на практике. На практике аукционисты в основном пытаются провести оптимизацию ожидаемого прибыли за счет правильно подобранной резервной цены. Поэтому крайне важно, даже для простых форматов аукционов изучить вопрос о том, каким образом можно найти оптимальное значение такой резервной цены в ситуациях, учитывающих выше упомянутые практические аспекты. Что при этом аукционист знает про своих участников? Какого рода информацию ему действительно следует знать, а что является необязательным? В каких случаях резервные цены практически оправданы, то есть потенциальный прирост доходов значимо больше возможных рисков и издержек?

В работе [85] приведены авторские результаты относительно эффективности резервных цен в различных аукционах с выделением факторов, напрямую влияющих на возможную величину прироста дохода. В первой главе данной работы после определения всех необходимых понятий и концепций теории аукционов я приведу основные результаты относительно свойств аукционов, определяющих эффективность резервных цен как инструмента оптимизации доходов. Здесь же будут затронуты вопросы возможного обобщения на иррегулярные аукционы важные для понимания деталей дальнейшего анализа асимметричных аукционов.

Краткий обзор основных идей, связанных с влиянием различной степени информированности аукциониста на возможность оптимизации прибыли, я описал в работе [40]. В данной работе представлено дальнейшее развитие этих результатов и их обобщений для важных случаев многотоварных аукционов, таких как рекламный аукцион в компании «Яндекс».

Практическая значимость такого исследования довольно очевидна. Тем не менее хочу привести конкретный пример из практики выше упомянутого проекта в компании «Яндекс». В ходе реализации этого проекта мне и моим коллегам удалось увеличить доходность рекламных аукционов на 12.3%. Другим примером успешного внедрения резервных цен в подобных интернет-аукционах служит более ранний эксперимент в компании «Yahoo!», [63], где Островскому и Шварцу достигли прироста прибыльности на 10% в случае рекламных рынков с небольшим числом конкурентов.

Такой значительный прирост был получен нами в ходе осторожного, консервативного метода по изменению резервных цен, что было весьма важным моментом, так как точность определения оптимальных резервных цен была далека от идеальной. Детально о существующих методах решения подобных задач и о конкретном алгоритме, реализованном в ходе оптимизации реальных аукционов в компании «Яндекс», я расскажу в последней главе данной работы. Большая погрешность требует в свою очередь усовершенствования методологии по восстановлению основных компонент модели аукциона по данным, что может послужить темой дальнейшим исследованиям.

Диссертационная работа организована следующим образом.

Первая половина главы 1 посвящена необходимым понятиям и известным теоретическим результатам. Часть сведений из классической теории аукционов представлена в параграфе 1.1. Далее в параграфе 1.2 описаны техника и основные результаты из теории оптимальных аукционов. Данная техника будет постоянно использоваться в дальнейшем анализе для получения основных результатов данной работы. Параграф 1.3 детально посвящен центральному понятию, резервным ценам, и первой части теоретических результатов данной работы о практической полезности резервных цен в зависимости от уровня конкуренции в аукционе (точнее в симметричных аукционах). На примере симметричных аукционов я определяю понятие эффективности резервных цен, с помощью которого можно измерять полезность данного инструмента. Здесь же приведены формальные определения понятию конкуренции в аукционе и показана обратная связь между уровнем конкуренции и эффективностью резервной цены. В заключении данного параграфа описаны проблемы определения оптимальных резервных цен в случае иррегулярных задач. Последний параграф данной главы посвящен детальному обзору имеющихся работ по релевантным вопросам к данной работе: (i) влияние асимметричности участников на прибыльность аукционов, (ii) проблема анонимности и связанных с этим ограничений для аукционов, (iii) многотоварные аукционы с единичным спросом.

Глава 2 целиком и полностью посвящена второй части теоретических результатов данной диссертации в области резервных цен для асимметричных аукционов в различных условиях информированности аукциониста (большая часть данной главы составляет содержание авторской работы [41]). Подробная постановка задачи и рассматриваемые различные информационные условия описаны в параграфе 2.1. Параграф 2.2 посвящен основным результатам касательно однотоварного аукциона. Здесь я показываю, что ключевым знанием для улучшения доходности за счет резервной цены является точное знание числа сильных участников, а любая иная информация оказывается по существу бесполезной в условиях анонимности участия. Обобщение данного результаты на многотоварные аукционы приведены в параграфе 2.3. Все доказательства основных теорем и лемм представлены в разделе Приложение.

Более практической является глава 3, где я описываю проблемы применения теоретических результатов к рекламным аукционам на практике. Сначала дается детальное описание специфики рекламных или позиционных аукционов. Далее в параграфе 3.2 я привожу основные на данный момент варианты подходов к структурному оцениванию рекламных аукционов и некоторые результаты по сравнительному анализу этих методов на основе реальных данных рекламных аукционов компании «Яндекс». Кроме этого, здесь же описанный параметрический подход к решению задачи является по сути описанием реализованного автором комплекса программ в рамках исследовательского проекта в компании «Яндекс», который и по сей день используется на практике для дальнейших исследований и оптимизации рекламных аукционов. В конце главы представлены существующие результаты по вопросу идентификации асимметричных участников для однотоварного аукциона, а точнее функций распределений их ценностей. Здесь же приводится авторский вариант возможного обобщения теста на асимметричность участников для позиционного аукциона.

Благодарности

Автор признателен профессору Измалкову Сергею Борисовичу за неоценимую помощь в работе. Автор также благодарен своим научным коллегам: Хакимовой Д.А., Сорокиной А.Н. и Аникушину Д.А. — за интересные дискуссии и плодотворную работу.

Глава 1

Резервные цены в симметричных аукционах

1.1 Классические аукционы

В данном параграфе речь пойдет об основных составляющих таких экономических механизмов, как аукционы. Будут приведены наиболее известные примеры аукционов. Подробно описаны вопрос моделирования аукционов и связанных с этим понятий.

1.1.1 Виды аукционов

Я начну описание теории аукционов с рассмотрения простых, ставших классическими, видов аукционов. Наиболее старым и общеизвестным примером является *английский* аукцион или открытый восходящий аукцион. Открытым данный вид аукционов называют потому, что все участники могут наблюдать возможные действия своих конкурентов; восходящим – в силу того, что на торгах цена за товар может лишь увеличиваться. Вариантов проведения или *имплементации* такого вида аукциона существует огромное множество. В одном из вариантов английского аукциона участники подают сигнал аукционисту, подтверждая тем самым желание увеличить текущую стоимость, как правило, на некоторую небольшую сумму (инкремент). Торги прекращаются в тот момент, когда никто из участников более не изъявляет желания увеличить стоимость товара, и товар «уходит с молотка» по последней озвученной стоимости.

В противоположность английскому аукциону существует более редкая форма аукционов, *голландский* аукцион. Более информативное название звучит как открытый нисходящий аукцион. Из названия становится понятным, что единственным отличием от английского аукциона является тот факт, что цена на товар может только уменьшаться. Как правило, уменьшение цены на некоторый малый инкремент предлагается самим аукционистом, и происходит до тех пор, пока среди желающих купить не появится хотя бы один участник.

Другой общеизвестной формой аукционов является закрытый тип торгов, когда участники делают свои ставки единожды и сообщают их только аукционисту. Таким образом, никто из участников не получает никакой дополнительной информации о своих соперниках в ходе торгов. Здесь различают аукционы первой цены и аукцион второй цены. Как очевидно из названия, отличие заключается лишь в определении окончательной стоимости товара: в аукционе первой цены человек, сделавший наибольшую ставку, получает товар по цене равной его ставке; в аукционе второй цены этот же человек заплатил бы цену в размере второй по величине ставке.

Из приведенных примеров становится ясно, что формат аукциона – это лишь конкретная спецификация двух составляющих: правило размещения товара (или товаров) среди участников и правило определения итоговых платежей.

Кроме того, важно отметить хорошо известный факт об «эквивалентности» некоторых форм друг другу. Эквивалентность понимается в том смысле, что, если для каждой стратегии в одной игре существует такая стратегия в другой, что результаты (выплаты в случае аукционов) идентичны, то говорят, что эти две игры *стратегически эквивалентны*. Таким образом, можно утверждать, что закрытый аукцион первой цены эквивалентен голландскому аукциону. И почти аналогично можно утверждать про эквивалентность английского и аукциона второй цены. Строго говоря, последняя эквивалентность более слабая, так как если не предполагать определенные ограничения на структуру частной информации участников, то потенциально у участников в ходе английского аукциона есть возможность уточнять свои веры или оценки о стратегиях своих соперников, что в свою очередь влияет на их множества возможных стратегий.

1.1.2 Модель участника

Для возможного изучения и анализа свойств конкретных аукционов недостаточно лишь описать правила проведения торгов. Необходимо построить модель участников торгов. Поэтому для описания поведения участников используют теоретико-игровые модели.

Ключевой концепцией в игровой модели аукционов является предположение о существовании *ценностей*[1]. Иными словами, предполагается, что каждый участник торгов, включая

[1]Ниже по тексту в качестве синонима термину ценность иногда будет употребляться «тип» участника. Такая необходимость возникает для многотоварных аукционов, где участники могут иметь разные ценности для

самого *аукциониста*[2], может оценить выставленный на продажу товар и выразить данную оценку в виде некоторой числовой характеристики, ценности. Обычно ценности измеряются в денежном эквиваленте.

Наиболее простой и классической является модель *(независимых) частных ценностей*, IPV модель[3]. В данной модели предполагается, что каждый участник достоверно знает лишь свою собственную ценность и ничего про ценности своих соперников. Ясно, что область применимости данной модели ограничена: выгода от обладания объектом продажи должна достигаться покупателем самостоятельно. Если же потенциальная выгода зависит от того, как данный объект оценивается целым сообществом или отдельными его представителями, то очевидно данная модель будет неадекватной.

В данной работе я провожу анализ в рамках модели *независимых* частных ценностей. Иными словами, я предполагаю, что в торгах участвует N покупателей; пусть $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ есть множество покупателей, а индекс 0 зарезервирован за аукционистом. Каждый покупатель $i \in \mathcal{N}$ определяет ценность V_i для выставленного на продажу объекта. Здесь я предполагаю лишь наличие пока только одного товара, случай многотоварного аукциона будет описан далее. Ценность i-го покупателя V_i с точки зрения аукциониста и его конкурентов есть случайная величина с функцией распределения $F_i : [0, \omega] \to [0, 1]$. Тогда предположение о независимых частных ценностях есть ни что иное, как предположения о (i) совокупной независимости случайных величин $V_i \ \forall i \in \mathcal{N}$, (ii) каждый участник торгов точно знает значение реализации своей ценности $V_i = v_i$ и функции распределения своей ценности и ценностей своих конкурентов $F_j \ \forall j \in \mathcal{N}$, и (iii) значение ценности аукциониста v_0 от обладания объектом в случае несостоявшейся продажи общеизвестно.

Для простоты изложения я везде буду предполагать (если не оговорено обратное), что ценность аукциониста равна нулю[4], $v_0 = 0$. Кроме того, я неявно предположил, что ценности всех участников распределены над одним интервалом $[0, \omega]$. Вопросы о возможных обобщениях, в частности касательно отказа от предположения общего для всех интервала $[0, \omega]$, будут освещены в пункте 2.2.3. А сейчас будет определено понятие «вектора качества товаров», которое позволяет определить ценности покупателей для различных товаров в случае многотоварных аукционов, где множество товаров будем обозначать через $\mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$.

отдельно взятых объектов продажи, но при этом сами участники характеризуются одной «универсальной» ценностью, или типом.

[2]Аукционист или принципал – синонимы для обозначения одного специального участника в аукционе, продавца, который и определяет правила проведения аукциона.

[3]Independent Private Value model.

[4]Подобное упрощение не лишает общности полученных здесь результатов, но позволяет упростить вид некоторых формул и использовать термины «прибыль» и «доход» для аукциониста как синонимы.

Определение (вектор качества товаров)**.** *Для аукциона с K товарами и N покупателями определим вектор качества товаров $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ следующим образом.*

1. $\alpha_1 = 1$*;*

   нормирование относительно наиболее качественного.

2. $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$*;*

   товары упорядочены по убыванию качества.

3. $\alpha_{K+1} = \cdots = \alpha_N = 0$*;*

   отсутствие товара эквивалентно товару с нулевым качеством.

Таким образом, вектор качества $\boldsymbol{\alpha}$ порождает естественный порядок на множестве товаров $\mathcal{K}$. При этом ценность покупателя $i \in \mathcal{N}$ для товара с номером k определяется как произведение:

$$V_{i,k} = \alpha_k \cdot V_i,$$

где конкретное значение $V_i = v_i$, ценности за единицу товара, определяет тип покупателя.

Таким образом, с помощью вектора качества товаров покрываются случаи:

– $K = 1$, однотоварного аукциона;

– $\alpha_1 = \cdots = \alpha_K$, аукциона с единичным спросом и одинаковыми товарами;

– $\exists i < K : \alpha_i > \alpha_{i+1} > 0$, аукциона с единичным спросом и неоднородными товарами или позиционный аукцион.

Кроме определения понятия ценности важно зафиксировать цели участников; также важно сделать предположения про отношение участников к возможному риску, обусловленного неопределенностью исхода процесса торгов в аукционах. С целями покупателей дела обстоят довольно просто: естественно положить, что они хотят максимизировать свою прибыль. Что касается возникающих случайностей и рисков, то наиболее простым предположением является *риск-нейтральность* покупателей, то есть их окончательная цель – это максимизация *ожидаемой* прибыли.

С целями аукциониста вопрос не столь очевидный. Наиболее распространенными целями являются (i) создание *оптимального* аукциона или (ii) *эффективного*. Оптимальность аукциона есть наиболее естественное свойство, заключающееся в том, что аукционист заинтересован в создании аукциона с наибольшей ожидаемой прибылью. Аукцион по продаже антиквариата или произведений искусства, электронный аукцион eBay — являются простыми примерами такой ситуации. Эффективность аукциона понимается в смысле эффективного размещения товаров среди покупателей, то есть товар в идеальном случае должен всегда доставаться покупателю, который ценит его более всех. Таким образом, если ввести понятие общественного благосостояния как сумму ценностей покупателей, которые получили товар или товары в ходе аукциона, то эффективным называется аукцион, который всегда доставляет максимум общественного благосостояния. Наиболее естественными местом возникновения таких примеров является социально-политическая область применения теории аукционов или тендеров.

В случае повторяющихся аукционов, таких как on-line рекламные аукционы (например, реклама на поисковых сайтах Яндекс, Google, Bing или Baidu), свойства оптимальности и эффективности проводимых аукционов могут быть интерпретированы как краткосрочная или долгосрочная оптимизация соответственно. Оптимальность соответствует краткосрочной оптимизации, так как стремится генерировать для продавца максимальную прибыль «здесь и сейчас». В случае же эффективности цели продавца больше соответствуют долгосрочной оптимизации – пытаясь доставить максимум общественному благосостоянию, продавец способствует максимизации функций полезности для своих клиентов, и, как следствие, со временем клиенты могут увеличить свою долю участия в этих аукционах или множество клиентов может увеличиться в ходе роста этого рынка.

Цели аукциониста могут быть и более экзотическими на первый взгляд. Например, аукционист может быть заинтересован в создании наиболее простых и «прозрачных» правил аукциона.

В данной работе меня будет интересовать вопрос оптимизации ожидаемой прибыли аукциониста.

Отдельно стоит сказать, что существуют такие важные вопросы в теории аукционов, как наличие ограничений на бюджет у покупателей, возможность перепродать купленный на аукционе товар, возможность вступать в сговор с другими участниками. Касательно всех этих вопросов я буду предполагать, что (i) ограничений на бюджет (о которых не известно аукционисту или конкурентам) не существует, что (ii) участники не могут вступать в сговор и образовывать коалиции и что (iii) вторичного рынка не существует.

1.1.3 Стратегии в аукционах

Из всего выше упомянутого становится ясно, что модель аукциона – это модель определенного типа игры с некоторыми структурными предположениями про ее участников. И как известно, чтобы решить игру, надо построить *стратегию* для ее участников. Под стратегией в случае аукционов понимается отображение, которое определяет ставку игрока в зависимости от его ценности и его знания о других участниках.

С точки зрения описания или построения возможной стратегии наиболее простым случаем являются закрытые формы аукционов, так как все знания о конкурентах в случае независимых частных ценностей сводятся к начальному знанию о соответствующих распределениях $F_i \ \forall i \in \mathcal{N}$ и никак не меняются в ходе торгов до момента оглашения результатов. С другой стороны, в силу упомянутой эквивалентности соответствующих закрытых и открытых форм аукционов можно утверждать, что если мы знаем стратегию в закрытой форме, то существует ее эквивалент для открытой формы, который в общем случае формально определяется более громоздко. Поэтому я в данной работе сосредоточусь на закрытых форматах аукциона.

Как было отмечено выше, стратегия участника есть отображение, переводящее ценность игрока и его информацию о соперниках в его ставку. Когда информация об игроках выражается через функции распределения, стратегия является функционалом. Но так как в закрытой форме данная информация никак не меняется в ходе торгов, то зависимость от этих распределений можно подразумевать неявно, и определять стратегию как функцию от значения ценности в величину ставки, $\beta_i : [0, \omega] \to \mathbb{R}_+$.

Какими свойствами должна обладать стратегия? Очевидно, что для участников аукциона первичным является желание максимизировать свой выигрыш. Но как хорошо известно, наибольший интерес представляют из себя *равновесные* стратегии, то есть стратегии, обладающие некоторым свойством устойчивости.

Наиболее устойчивым является *равновесие в доминирующих стратегиях*, когда существует такая стратегия, при которой любой исход не хуже соответствующего исхода при любой другой стратегии. Различают *строгое* и *слабое* доминирование: если в доминирующей стратегии при любом исходе игрок получает результат строго лучший, нежели при любых других альтернативах, то доминирование называют строгим.

Довольно легко показать, что в случае аукциона второй цены существует равновесие в слабо доминирующих стратегиях. Более того, оно является *симметричным*, то есть $\beta_i^\star(v_i) \equiv \beta_{II}^\star(v) \ \forall i \in \mathcal{N}$. А именно, $\boxed{\beta_{II}^\star(v) = v}$ и есть слабо доминирующая стратегия для любого участника.

В случае же аукциона первой цены равновесие в доминирующих стратегиях найти не удается. Но зато есть возможность найти более слабое в смысле устойчивости *равновесие по Нэшу*. Напомним, что, согласно определению, равновесие называется равновесием по Нэшу, если в предположении, что все оппоненты следуют данному равновесию, отклонение в пользу любой альтернативы для любого игрока будет заведомо не лучше (или строго хуже в случае строго равновесия).

Для того, чтобы привести пример подобного равновесия в аукционе первой цены, мы предположим, что все игроки симметричны, то есть $F_i \equiv F \ \forall i \in \mathcal{N}$ (в противном случае мы бы получили довольно сложную задачу, о которой будет упомянуто в пункте 1.4). Кроме того, если заранее ограничить поиск до симметричных равновесий, то можно составить простое дифференциальное уравнение, решением которого и будет искомое симметричное равновесие. А именно, если определить $V_{(1:N)}$ как первую по величине порядковую статистику (то есть $V_{(1)} \geq V_{(2)} \geq \cdots \geq V_{(N)}$) из набора ценностей $V_1, \ldots, V_N$, то симметричным равновесием по Нэшу в симметричном аукционе первой цены является функция $\boxed{\beta_I^\star(v) = \mathbb{E}[V_{(1:N-1)} \mid V_{(1:N-1)} < v]}$.

Отмечу важное свойство равновесия в аукционе второй цены $\beta_{II}^\star$ по сравнению с равновесием аукциона первой цены $\beta_I^\star$. Равновесие $\beta_{II}^\star$, вообще говоря, не зависит от распределений $\{F_i\}_{i\in\mathcal{N}}$. Более того, даже если не предполагать, что участники знают распределения своих конкурентов или общее число конкурентов, то стратегия $\beta_{II}^\star$ все равно остается равновесной в слабо доминирующих стратегиях.

1.2 Дизайн экономических механизмов

Здесь речь пойдет об известном в теории аукционов результате Майерсона по вопросу оптимальных аукционов. Описанный здесь математический аппарат будет постоянно использоваться в дальнейшей части данной диссертационной работы. В конце параграфа я перечислю концептуальные отличия между теоретическим инструментом, механизм, и более практическим инструментом, аукцион. Подробнее о видах аукционов/механизмов и их свойствах можно найти в [48].

1.2.1 Механизмы. Прямой механизм

Каким образом можно продать товар покупателю? Один из обсуждаемых здесь вариантов — это аукцион, когда цена определяется за счет конкуренции среди участников, согласно установленным правилам аукциона. Но кроме аукционов продавец может выбрать множество иных способов для продажи товара. Наиболее простой пример: продавец может объявить фиксированную стоимость товара и продать его первому желающему. Другим примером может служить лотерея, когда товар разыгрывается через лотерею. Продавец может организовать и более сложные схемы: например, провести в первом раунде аукцион, а во втором озвучить свою фиксированную стоимость для победителя первого раунда. Таким образом, способов для продажи товара существует неограниченное множество. И про все эти способы продажи можно мыслить как про некоторые *экономические механизмы*.

Вообще говоря, ниже приведенное определение применимо к более широкому классу процедур, чем просто продажа товара. Например, тендер – это экономический механизм. Более экзотическим примером механизма может служить суд царя Соломона. Таким образом, термин продавец или аукционист в данном контексте лучше обобщить до *принципал* – субъект, который разрабатывает конкретный вид механизма.

Определение (Механизм)**.** *Экономический механизм есть тройка* $(\mathcal{B}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu})$*, где*

- $\mathcal{B}$ *есть пространство возможных сообщений (в случае аукционов, ставка играет роль сообщения), причем* $\mathcal{B} = \times_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{B}_i$ *– прямое произведение пространств возможных сообщений каждого участника;*

- $\boldsymbol{\pi}$ *– правило размещения,* $\boldsymbol{\pi} : \mathcal{B} \to \Delta$*, где* Δ *есть пространство вероятностных распределений над* $\mathcal{N}$*;*

- $\boldsymbol{\mu}$ *– правило платежей,* $\boldsymbol{\mu} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^N$*; вообще говоря, платежи могут быть отрицательными, то есть возможны ситуации, когда участник получает деньги от продавца.*

Таким образом, аукционы первой и второй цены есть примеры механизмов. Действительно, пространство возможных ставок (сообщений) совпадает с пространством возможный ценностей. Правило размещения определяется в обоих случаях одинакова: $\pi_i(\boldsymbol{b}) = 1 \Leftrightarrow b_i > \max_{j \neq i} b_j$, иначе $\pi_i(\boldsymbol{b}) = 0$. Случай, когда в аукционе появилось несколько максимальных ставок, разрешается равновероятно среди данных конкурентов (что естественно формально должно быть отражено в строгом определении $\boldsymbol{\pi}$). Данные аукционы с точки зрения механизмов будут отличаться лишь правилом платежей: если $i \in \mathcal{N}$ выиграл аукцион, то для аукциона первой цены $\mu_i(\boldsymbol{b}) = b_i$ и $\mu_j(\boldsymbol{b}) = 0 \; \forall j \neq i$, а для аукциона второй цены — $\mu_i(\boldsymbol{b}) = \max_{j \neq i} b_j$ и $\mu_j(\boldsymbol{b}) = 0 \; \forall j \neq i$.

Из определения видно, что механизм определяет игру с неполной информацией среди участников $\mathcal{N}$. В рамках данной игры можно определить набор стратегий $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i : [0, \omega] \to \mathcal{B}_i, \; \forall i \in \mathcal{N}\}$ как равновесие в механизме, если для любого участника i и для любой его ценности v_i стратегия $\beta_i(v_i)$ максимизирует его ожидаемую прибыль при условии, что остальные игроки следуют стратегии $\boldsymbol{\beta}_{-i}$. Данное определение равновесия формализует идеи высказанные в пункте 1.1.3 о равновесии по Нэшу и риск-нейтральности игроков.

Природа множеств возможных сообщений игроков $\mathcal{B}$ в определении механизма не уточняется, поэтому сам механизм может быть довольно сложным для анализа. Но существует технический прием, который приводит нас к понятию *прямого механизма*. Прием состоит лишь в добавлении предположения, что пространство возможных сообщений совпадает с пространством возможных ценностей, то есть в нашем случае $\mathcal{B} = \mathcal{X} \equiv \times_{i \in \mathcal{N}}[0, \omega]$.

Определение (Прямой механизм)**.** *Прямой механизм есть пара* $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$*, где*

- $\boldsymbol{Q} : \mathcal{X} \to \Delta$*, где* $Q_i(\vec{v})$ *– вероятность участнику* i *получить объект при векторе ценностей* $\vec{v}$*;*
- $\boldsymbol{M} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$*, где* $M_i(\vec{v})$ *– платеж участника* i *при ценностях* $\vec{v}$*.*

Важно отметить, что существует известный результат, *принцип выявления* – любой механизм с заданным равновесием в нем (если оно существует) может быть реализован с помощью прямого механизма. Более формально, для любого механизма $(\mathcal{B}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu})$ и любого равновесия $\boldsymbol{\beta}$ в нем существует такой прямой механизм $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$, что $\forall \vec{v} \in \mathcal{X}$ $(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}(\vec{v})), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\beta}(\vec{v}))) = (\boldsymbol{Q}(\vec{v}), \boldsymbol{M}(\vec{v}))$. То есть прямой механизм $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$ с симметричным равновесием «правдиво сообщать свои ценности» эквивалентен механизму $(\mathcal{B}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\mu})$ с равновесием $\boldsymbol{\beta}$. Таким образом, можно без потери общности рассматривать лишь прямые механизмы в предположении, что участники будут правдиво сообщать свои ценности. Поэтому мне кажется, что название *принцип откровенности* лучше раскрывает суть происходящего, чем принятый в русской литературе перевод *принцип выявления* оригинального «Revelation Principle».

1.2.2 Оптимальный механизм

Здесь коротко изложен известный результат из теории дизайна механизмов [60], термины и технические приемы из которого будут постоянно использоваться в дальнейшем. Данный результат относится к задаче дизайна механизма, максимизирующего ожидаемую прибыль принципала. Таким образом, предполагается, что сам принципал определяет правила механизма, а значит задает пару $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$. В силу принципа откровенности множество возможных механизмов здесь ограничено лишь прямыми механизмами.

Как уже отмечалось, рассмотрение лишь прямых механизмов не теряет общности. Но важно уточнить, что для принципа откровенности принципиально существование равновесия $\boldsymbol{\beta}$ в исходном механизме, которое гарантирует, что в соответствующем прямом механизме правдиво сообщать принципалу свою ценность есть тоже равновесие. Поэтому область поиска следует ограничить до прямых механизмов, в которых сообщать свою ценность правдиво есть равновесная стратегия.

Для формального определения таких ограничений требуется пара вспомогательных понятий. Пусть

$$q_i(v_i) = \mathbb{E}Q_i(v_i, \vec{V}_{-i}) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(v_i, \vec{x}_{-i}) f_{-i}(\vec{x}_{-i})\, d\vec{x}_{-i},$$

$$m_i(v_i) = \mathbb{E}M_i(v_i, \vec{V}_{-i}) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(v_i, \vec{x}_{-i}) f_{-i}(\vec{x}_{-i})\, d\vec{x}_{-i}.$$

Здесь $\mathcal{X}_{-i} = \times_{j \in \{\mathcal{N} \setminus i\}} [0, \omega]$, $f_{-i} = \prod_{j \in \{\mathcal{N} \setminus i\}} f_j(x)$ (нотация $(\cdot)_{-i}$ является стандартной в теории игр и обозначает лишь тот факт, что в данный момент из рассмотрения исключен только участник i). Ясно, что $q_i(v_i)$ и $m_i(v_i)$ есть условные математические ожидания для участника i вероятности получить объект и возможного платежа соответственно, если его ценность равна v_i. Для риск-нейтральных участников в качестве функции полезности рассмотрим их ожидаемую прибыль $U_i(z_i, v_i)$ – функцию от сообщаемой ценности z_i и истинной ценности v_i. Тогда функция полезности правдивого участника i с ценностью v_i будет

$$U_i(v_i, v_i) = q_i(v_i)v_i - m_i(v_i),$$

и, если участник i с истинной ценностью v_i решит сообщить иное значение ценности $z_i \neq v_i$, то в ожидании он получит

$$U_i(z_i, v_i) = q_i(z_i)v_i - m_i(z_i).$$

Определение (Совместимость по стимулам)**.**
Прямой механизм $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$ *удовлетворяет ограничению совместимости по стимулам или кратко (СС), если*

$$\forall i \in \mathcal{N}\ \forall v_i, z_i \in [0, \omega] \quad U_i(v_i, v_i) \geq U_i(z_i, v_i).$$

Таким образом, в любом прямом механизме, удовлетворяющем ограничению (СС), участники не могут улучшить свои ожидаемые прибыли путем отклонения от стратегии правдиво сообщаться свои ценности.

Коль скоро мы ограничили механизмы условием, что участники будут сообщать правдиво свои ценности, то необходимо позаботиться о том, чтобы участникам подобные механизмы были интересны. То есть нельзя допустить, что при каких-то ценностях участник в среднем будет всегда в убытке.

Определение (Индивидуальная рациональность)**.**
Прямой механизм $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$ *удовлетворяет ограничению индивидуальной рациональности или*

кратко (ИР), если

$$\forall i \in \mathcal{N}\ \forall v_i \in [0,\omega] \quad U_i(v_i, v_i) \geq 0.$$

Теперь, если механизм удовлетворяет ограничению (ИР), то с точки зрения функции полезности участников механизм является прибыльным.

В итоге мы будем рассматривать задачу, где принципал ищет прямой механизм, удовлетворяющий ограничениям (СС) и (ИР), с целью максимизации ожидаемой прибыли, в качестве задачи поиска оптимального механизма.

В рамках данной задачи Майерсон доказал следующий важный результат об эквивалентности механизмов.

Утверждение (Эквивалентность по доходу)**.** *Если прямой механизм* $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$ *удовлетворяет ограничению (СС), тогда* $\forall i \in \mathcal{N}\ \forall v_i \in [0,\omega]$ *ожидаемый платеж участника составляет*

$$m_i(v_i) = m_i(0) + q_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} q_i(t)\, dt.$$

Таким образом, любые два прямых механизма с (СС) ограничением в ожидании дают одинаковые платежи с точностью до константы. Разница на константу может возникнуть из-за разницы начальных платежей, когда участники имеют нулевые ценности, $m_i(0)\,|_{(\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{M}_1)} - m_i(0)\,|_{(\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{M}_2)}$.

Важно отметить, что в модели независимых частных ценностей задача поиска оптимального механизма для принципала сводиться к задаче максимизации суммы ожидаемых платежей по всем участникам, то есть

$$(\boldsymbol{Q}_\star, \boldsymbol{M}_\star) = \underset{(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{M})}{\operatorname{argmax}} \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{E}\, m_i(V_i)\,|_{(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{M})}\ .$$

Но так как прямой механизм должен быть не только с (СС), но и с (ИР) ограничением, то ожидаемая прибыль для любой ценности игрока должна быть неотрицательная, в том числе и для нулевой ценности, $U_i(0) \geq 0$. Поэтому получаем ограничение вида: $U_i(0) = -m_i(0) \geq 0$. То есть в случае нулевой ценности участника его платеж в среднем является отрицательным (то есть участник получает деньги) или вовсе отсутствует (участник никому ничего не платит).

Так как здесь мы рассматриваем задачу оптимизации ожидаемой прибыли принципала, то можно без потери общности рассматривать такие механизмы, при которых $\forall i \in \mathcal{N}\ m_i(0) = 0$. Таким образом, выполнение ограничений (СС) и (ИР) для прямых механизмов в задаче поиска оптимального механизма влечет следующее выражение для ожидаемого платежа участника:

$$m_i(v_i) = q_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} q_i(t)\,dt. \tag{1.1}$$

После чего простым техническим приемом, перестановкой порядка интегрирования, Майерсон свел задачу максимизации прибыли $\mathcal{R}$ к следующему виду.

$$\mathbb{E}\mathcal{R} = \sum_{i\in\mathcal{N}} \mathbb{E}\, m_i(V_i) \to \max,$$
$$\mathbb{E}\, m_i(V_i) = \int_0^{\omega} m_i(v_i) f_i(v_i)\,dv_i = \int_{\mathcal{X}} \left(v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}\right) Q_i(\vec{v}) f(\vec{v})\,d\vec{v}.$$

Выражение в круглых скобках в последнем интеграле имеет специальное определение, данное Майерсоном.

Определение (Виртуальная ценность)**.**

Функция

$$\psi_i(v_i) = v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)} \tag{1.2}$$

называется функцией виртуальной ценности для участника с функцией распределения его ценности F_i*.*

Значение $\psi_i(v_i)f_i(v_i)$ *будем называть взвешенной виртуальной ценностью.*

Одной из возможных интерпретаций виртуальной ценности участника является *предельный доход* от приобретения объекта этим участником. Билоу и Робертс в [14] показывают, что $\psi_i(v_i)$ может быть определено в точности как предельный доход от покупателя с истинной ценностью v_i. Для этого вероятность q возможности у этого покупателя приобрести товар по цене p, $q = 1 - F_i(p)$, они интерпретируют как количество (или долю) товара, на которое у него есть еще спрос.

Другой интерпретацией функции виртуальной ценности может служить следующее рассуждение. Так как принципал связан ограничением (CC) в выборе прямых механизмов, то он не может рассчитывать в ожидании получить от участника максимально возможный платеж, который составлял бы $\bar{m}_i(v_i) = q_i(v_i)v_i$. Для того, чтобы прямой механизм проводился в правдивых стратегиях, принципал обязан был обеспечить участников стимулами для раскрытия их истинных ценностей. Поэтому правила платежей $\boldsymbol{M}$ устроены согласно условию (1.1). Выражение $\int_0^{\omega} q_i(t)\,dt$ есть величина ожидаемой прибыли участника от данного механизма. В экономике эту величину часто называют *информационной рентой*, которую участник извлекает из механизма за счет частной информации (знание его истинной ценности v_i), недоступной для принципала. Тогда можно интерпретировать виртуальную ценность как ценность игрока поправленную с учетом его информационной ренты, то есть ту часть ценности, которую принципал может рассчитывать извлечь из сделки с данным участником.

Теперь задачу оптимизации принципала можно записать следующим образом:

$$\mathbb{E}\mathcal{R} = \int_{\mathcal{X}} \sum_{i \in \mathcal{N}} [\psi_i(v_i) Q_i(\vec{v})] \, f(\vec{v}) \, d\vec{v} \;\to\; \max_{\boldsymbol{Q}}. \tag{1.3}$$

Задача максимизации решается только по правилу размещения $\boldsymbol{Q}$. Это происходит в силу (1.1), где ожидаемые платежи полностью определяются с помощью правила размещения $\boldsymbol{Q}$. Таким образом, так как все правила платежей $\boldsymbol{M}$, которые порождают одни и те же ожидаемые платежи участников $\{m_i\}_{i \in \mathcal{N}}$, эквивалентны с точки зрения задачи максимизации ожидаемой прибыли принципала, то $\mathbb{E}\mathcal{R}$ не зависит от конкретного вида $\boldsymbol{M}$, коль скоро мы зафиксировали вид $\{m_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ в (1.1).

Если детально изучить вид подынтегрального выражения в (1.3), то оптимальное правило размещения не трудно сформулировать через функции виртуальных ценностей участников при естественном ограничении на возможные правила размещения,

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{X} \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} Q_i(\vec{v}) \leq 1$$

(так как здесь рассматривается случай одного неделимого объекта продажи).

Утверждение (Оптимальный механизм)**.** *Задача максимизации* (1.3) *разрешается при следующем оптимальном правиле размещения:*

$$\forall i \in \mathcal{N} \;\; Q_i(\vec{v}) = \begin{cases} 1, & \textit{если } \psi_i(v_i) > \max\{0, \max_{j \neq i} \psi_j(v_j)\}; \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Случай, когда есть коллизии (то есть несколько участников имеют одинаково большие виртуальные ценности), должен быть разрешен случайно или любым иным эквивалентным образом независимо от сообщенных ценностей.

Важно отметить, что для получение этого результата Майерсону необходимо было еще одно дополнительное техническое ограничение на функции виртуальных ценностей. Это ограничение связано с тем, что полученное правило размещения должно быть не убывающим для каждого участника, то есть $\forall i \in \mathcal{N} \; \forall v_i' \leq v_i'' \;\; Q_i(v_i', \vec{v}_{-i}) \leq Q_i(v_i'', \vec{v}_{-i})$. Необходимость получения именно неубывающих Q_i тесно связана с требованиями ограничения (CC), см. Лемма 2 в [60]. Это техническое ограничение на функции виртуальных ценностей звучит следующим образом.

Определение (Регулярность)**.** *Задача поиска оптимального механизма называется регулярной, если* $\forall i \in \mathcal{N}$ *функция виртуальной ценности* ψ_i *есть неубывающая функция своего аргумента (а соответствующую функцию распределения* F_i *называют регулярным распределением).*

Требование регулярности для задачи поиска оптимального механизма, вообще говоря, не обязательно. Оно необходимо лишь для того, чтобы решение имело простой вид, описанный выше. Случай нерегулярных распределений разрешается с помощью *сглаживания* (см. [60]).

Технически сглаживание заключается в том, что интеграл от взвешенной виртуальной ценности $\mathcal{I}_i(x) = \int_0^x \psi_i(v_i) f_i(v_i)\, dv_i$ заменяется его выпуклой оболочкой, которая будет отлична от исходной функции $\mathcal{I}_i$ лишь на некотором проблемном интервале (a, b) (один интервал не является общим случаем, но это предположение упрощает объяснение, а случай совокупности интервалов разрешается аналогично). Физический же смысл этого действия заключается в том, что в силу ограничения (CC) итоговое правило размещения должно покоординатно не убывать, поэтому исходная функция виртуальной ценности заменяется на ее эквивалент. Этот эквивалент $\bar{\psi}_i$ обеспечивает следующие два свойства:

- на проблемном интервале исходная виртуальная ценность и ее эквивалент вносят одинаковый вклад в ожидаемую прибыль, то есть

$$\int_a^b \psi_i(v_i) f_i(v_i)\, dv_i = \int_a^b \bar{\psi}_i(v_i) f_i(v_i)\, dv_i;$$

- принципал не делает никаких различий между ценностями из одного проблемного интервала, то есть

$$\forall v_i', v_i'' \in (a, b) \quad \bar{Q}_i(v_i', \vec{v}_{-i}) = \bar{Q}_i(v_i'', \vec{v}_{-i}).$$

  Это достигается за счет того, что на этом интервале (a, b) полученный эквивалент $\bar{\psi}_i = const$, а итоговое правило размещения определяется как и прежде для случая регулярной задачи (1.4), но с заменой ψ_i на $\bar{\psi}_i$.

Основные свойства оптимального механизма (1.4) состоят из:

(i) победитель определяется по наибольшей виртуальной ценности, а не заявленной ценности;

(ii) платеж победителя составляет величину, равную минимально возможной ценности, при которой он бы все еще оставался победителем;

(iii) существуют случаи, когда участник имеет ненулевую ценность, но ни при каких условиях не может выиграть объект.

Свойство (i) говорит о том, что оптимальный механизм, вообще говоря, не является эффективным – победитель может быть участник не с наибольшей ценностью.

Свойство (ii) верно, если положить в качестве определения правила платежей $\boldsymbol{M}$ следующее правило: $\forall i \in \mathcal{N} \;\; M_i(\vec{v}) = Q_i(\vec{v})v_i - \int_0^{v_i} Q_i(t, \vec{v}_{-i})\,dt$. В общем случае, выбор $\boldsymbol{M}$ ограничен лишь условием (1.1), и предложенное правило является лишь одним из возможных.

Случаи, описанные в пункте (iii), соответствуют значениям ценностей, при которых соответствующая функция виртуальной ценности отрицательна. Формально,

$$\forall i \in \mathcal{N} \;\; \forall \vec{v}_{-i} \in \mathcal{X}_{-i} \; \forall v_i : \;\; \psi_i(v_i) \leq 0, \;\; Q_i(v_i, \vec{v}_{-i}) = 0.$$

Таким образом, для любого участника существует некоторое критическое значение ценности $R_i \geq 0 : \forall \vec{v}_{-i} \in \mathcal{X}_{-i} \;\; v_i \leq R_i \;\; \Rightarrow \;\; Q_i(v_i, \vec{v}_{-i}) = 0$. Существование таких критических значений показывается тривиально: в случае регулярного распределения (неубывающей виртуальной ценности) r_i есть корень уравнения $\boxed{\psi_i(R_i) = 0}$, а в случае нерегулярности — $\bar{\psi}_i(R_i) = 0$.

В итоге выражение для ожидаемой прибыли в оптимальном механизме можно записать следующим образом:

$$\mathbb{E}\mathcal{R} = \max\{\psi_1(V_1), \cdots, \psi_N(V_N), 0\}. \tag{1.5}$$

Основным объектом изучения в данной работе являются выше определенные критические значения R_i. В силу того, что в прямых механизмах с ограничениями (СС) и (ИР) необходимо правило размещения обладает свойством покоординатного неубывания, то эти критические значения можно рассматривать как персональные *стартовые цены*. Стартовые, потому что ниже данной цены товар не будет продан. Персональные, потому что в общем случае они зависят от персональных функций распределений, $\boxed{R_i = \psi_i^{-1}(0)}$. Термин *резервная цена* является калькой с английского *reserve price*, а по сути это синоним стартовых цен. Ниже я везде буду использовать вариант «резервная цена», так как именно такой вариант устоялся на практике.

1.2.3 Аукцион или механизм

Выше я сформулировал определение механизма как тройки: пространство возможных сообщений или ставок, правило размещения объекта и правило платежей. А что является определением аукциона? Выше были представлены лишь несколько примеров разных форматов аукциона, и ясно, что понятие механизма настолько богатое, что аукцион является частным случаем механизмов.

Принято считать, что аукцион – это специальный вид экономических механизмов, отвечающий следующим двум принципам.

(i) *универсальность*: аукцион должен быть таким механизмом, который может быть использован для продажи любого объекта. Другими словами, форма (правила) аукциона не должна зависеть от природы или свойств объекта продажи;

(ii) *анонимность*: знание имен или иных персональных идентификаторов не должно влиять на правила аукциона. Таким образом, например, если вы родной брат губернатора, то это никак не должно влиять на принятие решения об определении победителя тендера в данной губернии и итоговых цен.

В противоположность данным двум принципам в общем случае механизм может существенно зависеть как и от природы объекта, так и от идентификаторов участников. Ярким примером здесь может служить ранее описанный оптимальный механизм Майерсона, который явно определяется с использованием знаний функций распределений ценностей каждого участника. Такая зависимость сразу нарушает оба принципа: универсальность и анонимность. Анонимность нарушена очевидным образом: необходимо знать функции виртуальных ценностей каждого участника в отдельности, чтобы определить победителя в торгах. Универсальность нарушается в силу того факта, что функция распределения ценностей, вообще говоря, зависит от природы объекта. А значит, с изменением функций распределений $\{F_i\}_{i\in\mathcal{N}}$ от объекта к объекту будут меняться и правила механизма $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$.

Такая зависимость механизма от всех деталей модели может быть нежелательной. Например, точно реализовать такого рода механизм на практике будет весьма сложной, а порой и невозможной, задачей. Есть и другой аспект, которому вредят подобного рода сильные зависимости от модели, – *робастность* механизма [10]. Идея, что желательно создавать механизмы в некотором смысле устойчивые, независимые от мелких деталей, высказывается экономистами давно, и концепцию соблюдения этой идеи принято называть как «доктрина Уилсона», [80]. Это доктрина сформировалась после высказанного Уилсоном в его работе предложения о том, что правила торгов должны быть независимыми от вер, иными словами, они не должны основываться на информации участников, которая постулируется как общее знание среди всех. Уилсон считал, что «лишь последовательное уменьшение предположений об общих знаниях участников позволит теории стать аппроксимацией реальности».

Таким образом, все выше изложенное говорит о некоторых преимуществах использования аукционов с практической точки зрения.

1.3 Резервные цены

Данный параграф посвящен центральному для данной диссертационной работы понятию «резервная цена». Каким образом резервные цены помогают увеличить ожидаемый доход в аукционах, а в каких ситуациях они мало эффективны? Ответ на данный вопрос я изложил в работе [85], содержание которой составляет основу данного параграфа. Здесь вводится понятие давления конкуренции в аукционах и показано, что увеличение давления конкуренции уменьшает эффективность резервных цен. Отдельно затронута проблема резервных цен в аукционах с иррегулярностью. Далее, приводится формальное определение бинарному отношению над участниками аукциона «быть сильнее», которое будет активно использоваться на протяжении всей следующей главы.

1.3.1 Эффективность резервных цен

В данном параграфе речь пойдет о симметричных *стандартных*[5] аукционах, в которых существует симметричное и возрастающее равновесие: то есть для всех участников существует возрастающая стратегия (отображение из ценности в ставку), отклоняться от которой для любого участника не выгодно при условии, что все остальные придерживаются данной стратегии. В данном параграфе под словом аукцион будет всегда пониматься именно симметричный стандартный аукцион с симметричным и возрастающим равновесием и единичным спросом среди покупателей. Кроме того, из дальнейшего анализа неявно будут исключены ставки покупателей, и все вычисления будут проводиться в терминах их типов. Такой прием возможен благодаря выше упомянутому *принципу откровенности*, согласно которому для любого аукциона с указанным равновесием в нем можно построить эквивалентный ему аукцион, где равновесной стратегией является правдивое раскрытие своего типа.

[5] Стандартным принято называть аукцион, в котором, согласно его правилам, участник с наибольшей ставкой получает самый ценный товар, участник со второй по величине ставкой — следующий по качеству товар, и т.д.

Определение (функция количества товара)**.** *Для стандартного аукциона по продаже K товаров с вектором качества $\boldsymbol{\alpha}$ среди N покупателей с единичным спросом функцией ожидаемого количества товара $q(v)$ для покупателя с типом v будем называть математическое ожидание качества товара, которое он может выиграть в ходе данного аукциона:*

$$q(v) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \cdot \pi_i(v),$$

где $\pi_i(v)$ — вероятность события, заключающегося в том, что тип v оказался i-ым по величине типом среди всех N типов участников, то есть

$$\pi_i(v) = C_{N-1}^{i-1}(1 - F(v))^{i-1} F(v)^{N-i}.$$

Название «количество товара» в определении оправдано тем фактом, что товар №i с качеством α_i можно воспринимать как часть или долю α_i товара №1 с наилучшим качеством $\alpha_1 = 1$. То есть для каждого покупателя с типом v значение $q(v)$ есть его ожидание количества товара (наилучшего качества), которое он может получить в ходе аукциона. Согласно теореме об эквивалентности по доходу, функция ожидаемого платежа $m(v)$ участника с типом v полностью определена через функцию ожидаемого количества товара следующим образом.

$$m(v) = v \cdot q(v) - \int_0^v q(s)\, ds = \int_0^v s\, dq(s). \tag{1.6}$$

Пара этих функций, $q(v)$ и $m(v)$, описывают ожидания каждого покупателя от участия в аукционе. Именно такое, сжатое по сути до одной функции $q(v)$, описание аукциона называют *приведенной формой* аукциона. Более развернутое описание всех правил аукциона здесь скрыто, и, вообще говоря, существуют различные форматы (или правила) аукционов, которые в своей приведенной форме эквивалентны друг другу. Индекс у функции $q(v)$ здесь опущен, так как рассматриваются симметричные аукционы, где все распределения ценностей или типов участников одинаковы.

Ожидаемый доход аукциониста также выражается через приведенную форму аукциона. Действительно, ожидаемый доход есть ожидание суммы платежей всех участников аукциона:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathcal{R} =& \mathbb{E} \sum_{i \in \mathcal{N}} m(V_i) = N \int_0^{\omega} \int_0^v s\, dq(s)\, dF(v) \\ =& N \int_0^{\omega} \int_v^{\omega} dF(s)\, v\, dq(v) = N \int_0^{\omega} v(1 - F(v))\, dq(v). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Полученные выражения становятся интуитивно понятными и естественными, если воспользоваться интерпретацией из [14]. А именно, можно мыслить про значение типа v как про цену на товар, а про вероятность того, что покупатель будет согласен на такую стоимость, $1 - F(v)$, как про количество или объем товара, на который покупатель согласен при данной стоимости (т.е. $\text{price} = v, \ \text{volume} = 1 - F(v)$). Тогда в (1.7) подынтегральное выражение $v(1 - F(v)) = \text{price} \cdot \text{volume}(\text{price})$ есть аналог функции общего дохода из курса микроэкономики. А в аукционах значение ожидаемого дохода есть усредненное значение этой функции общего дохода, где усреднение проходит с весами пропорциональными вкладу текущей цены v в увеличение ожидаемого количества товара $q(v)$, которое доступно по данной цене.

Резервной ценой R называется цена, ниже которой продажа товара невозможна. Иными словами, если некоторый покупатель i имеет тип $v_i < R$, то, согласно правилам аукциона и играемому равновесию, он достоверно не может выиграть товар. Следовательно, в терминах приведенной формы для любого покупателя, чей тип меньше установленной резервной цены, ожидаемое количество товара равно нулю:

$$\forall v < R, \quad q(v; R) = 0.$$

Причем,

$$\forall v \geq R, \quad q(v; R) = q(v; 0) \equiv q(v).$$

Таким образом, согласно (1.7), величина ожидаемой прибыли аукциониста также явно зависит от величины резервной цены посредством функции ожидаемого количества товара:

$$\mathbb{E}\mathcal{R}(R) = N \int_0^\omega v \cdot (1 - F(v))\, dq(v; R). \tag{1.7$'$}$$

Поэтому естественно положить за определение *оптимальной* резервной цены значение $R^\star$, доставляющее наибольшее значение ожидаемой прибыли:

$$R^\star = \arg\max_R \mathbb{E}\mathcal{R}(R). \tag{1.8}$$

Задачу оптимизации дохода будем называть *регулярной*, если функция ожидаемого дохода $\mathbb{E}\mathcal{R}(R)$ имеет только одну точку максимума, и, соответственно, $\frac{d}{dR}\mathbb{E}\mathcal{R}(R)\big|_{R=R^\star} = 0$ есть необходимое и достаточное условие для оптимальности резервной цены. Далее, будем везде предполагать, что рассматриваемая функция распределения $F(v)$ порождает регулярную задачу.

Определение (Эффективность резервной цены)**.** *Эффективностью резервной цены в аукционе будем называть величину относительного прироста ожидаемой прибыли аукциониста с установленной оптимальной резервной ценой от ожидаемой прибыли аукциониста без резервной цены,*

$$\rho = \frac{\mathbb{E}\mathcal{R}(R^\star)}{\mathbb{E}\mathcal{R}(0)} - 1. \tag{1.9}$$

Данное определение вводит меру эффективности резервной цены для некоторого аукциона. Поэтому важно определить формально, что подразумевается под аукционом здесь.

Очевидно, что резервная цена — это часть правил или формата аукциона $\mathcal{A}$, согласно которым проводятся торги, определяются победители и размеры необходимых платежей. При этом детальных правил $\mathcal{A}$ не достаточно при вычислении значения ожидаемого дохода аукциониста (1.7′): необходимо учесть свойства всех участников аукциона и предлагаемых товаров. Совокупность этих свойств будем называть *контекстом* аукциона $\mathcal{C}$. В случае симметричного аукциона контекстом будет следующая тройка: вектор качества товаров $\boldsymbol{\alpha}$, множество покупателей $\mathcal{N}$ и функция распределения их типов $F(v)$, $\mathcal{C} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{N}, F(v) \rangle$. В итоге полное описание конкретного аукциона представляет из себя пару $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$.

Из определения (1.9) ясно, что при вычислении эффективности ρ, строго говоря, используются описания сразу двух аукционов $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ и $\langle \mathcal{A}', \mathcal{C} \rangle$, где отличие заключается в правилах аукционов, в наличии или отсутствии резервной цены. В определении используется оптимальное значение резервной цены (1.8), которое может быть вычислено из свойств базового аукциона $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$. Поэтому величину эффективности резервной цены можно определить на основе свойств только базового аукциона, без резервной цены: $\rho = \rho[\mathcal{A}, \mathcal{C}]$.

В данной работе при анализе различных симметричных аукционов функцию распределения типов покупателей $F(v)$ будем считать фиксированной и одинаковой для всех аукционов. Поэтому зависимость основных характеристик (например, ожидаемый платеж покупателя, значение оптимальной резервной цены или эффективность резервной цены в аукционе) от свойств модели аукционов $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ вырождается в зависимость только от приведенной формы $q(v) \equiv q(v; 0)$ этого аукциона (см. (1.7′)).

Утверждение 1. *Для симметричных аукционов с заданным распределением типов покупателей $F(v)$ эффективность резервной цены в этих аукционах есть функционал от их приведенной формы,* $\rho[\mathcal{A}, \mathcal{C}] \equiv \rho[q(v; 0)]$.

1.3.2 Конкуренция в аукционах

Оптимальный аукцион приносит доход принципалу за счет двух компонент: оптимально установленной резервной цены и уровня конкуренции. МакАфи и МакМиллан в [58] объясняют прибыль от ненулевой резервной цены как реализацию *переговорной силы* (bargaining power) через право отказать в продаже объекта, которая интерпретируется как аналог искусственного участника с соответствующей ставкой среди естественной конкуренции[6]. Обе компоненты направлены на увеличение дохода, но известным фактом считается правило: *чем выше уровень конкуренции, тем меньше эффект от резервной цены*. Но что такое *естественная конкуренция* или *уровень конкуренции*?

Понятие конкуренции в литературе по теории аукционов часто используется неформально. При этом под увеличением конкуренции на интуитивном уровне понимается правило: *чем выше конкуренция, тем больше цены*. Поэтому данное правило будет положено в основу формального определения конкуренции.

В работе [15] приводится сравнительный анализ генерируемой прибыли для аукционов первой цены в случаях симметричных и асимметричных покупателей. Автор анализирует, каким образом асимметрия влияет на свойства аукциона и приходит к выводу, что асимметрия сокращает так называемое давление конкуренции: более сильные участники все еще более вероятно выигрывают аукцион, но ставят ставки более сдержанно (в аукционе первой цены ставка равна платежу в случае выигрыша). Но формального определения давлению конкуренции автор не приводит.

В работах по теории отраслевых рынков существуют примеры определения давления конкуренции через ожидаемую полезность фирм. Например, в [37], [56] и [36] моделируется эффект увеличения конкуренции через сокращение ожидаемой полезности. В работе [12] дается более общее определение давления конкуренции как некоторого абстрактного параметра, который влияет как на уровень ожидаемой полезности, так и на величину ее наклона в точке (производной).

Перейдем к определению конкуренции в случае аукционов. Каждый покупатель обладает некоторым типом v $(V = v)$ — его ценность от обладания единицей товара. Назовем *средней стоимостью единицы товара* для покупателя с типом v отношение ожидаемого платежа к

[6] В [13, 44] детально представлено сравнение эффективности такого искусственного участника с детерминированной ценностью (резервная цена) и настоящим участником со случайной ценностью и показано, что один дополнительный настоящий участник генерирует больше прибыли, чем искусственный. Поэтому вопрос привлечения всех потенциальных участников аукциона достаточно критичен для дальнейшей оптимизации.

ожидаемому количеству товара:

$$pp(v) = \frac{m(v)}{q(v)}. \tag{1.10}$$

Тогда за полезность покупателя с типом v от обладания единицей товара можно положить разницу его ценности этой единицы товара и среднюю стоимость за единицу товара:

$$u(v) = v - pp(v). \tag{1.11}$$

Таким образом, факт увеличения конкуренции можно связать с уменьшением полезности покупателя или с увеличением средней стоимости единицы товара.

Определение (давление конкуренции)**.** *Давлением конкуренции $cp(v)$ назовем производную функции среднего платежа за единицу товара, то есть*

$$cp(v) = \frac{d}{dv}pp(v) \ \text{ или } \ pp(v) = \int_0^v cp(t)\,dt.$$

В качестве мотивации именно такого определения давления конкуренции рассмотрим следующий пример.

Пример 1. *Рассмотрим случай аукциона первой цены с N покупателями, чьи ценности распределены равномерно на $[0, 1]$. Тогда равновесной стратегией для покупателя с типом v будет делать ставку равную $\frac{N-1}{N}v$, см. [48]. В силу того что это аукцион первой цены, величина равновесной ставки является и средней стоимостью за единицу товара.*

Одним из известных примеров того, как увеличивается конкуренция, является рост числа покупателей N. Легко заметить, что не только величина средний стоимости $\frac{N-1}{N}v$ увеличивается с ростом N, но увеличивается и ее угол наклона (в общем случае — производная).

Теперь дадим определение факту «увеличения конкуренции». Наиболее интуитивно понятным и естественным способом является определение через функцию давления конкуренции, которое очевидным образом согласовывалось бы с простыми примерами аналогичными выше описанному. Но как будет показано далее, это определение можно ослабить так, что основной результат касательно эффективности резервной цены будет сохранен. Несмотря на то, что второе определение менее интуитивно понятно, оно будет использоваться в дальнейшем как основной способ описания факта «увеличения конкуренции» в аукционе.

Определение. *Будем говорить, что аукцион* $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle$ *доминирует аукцион* $\langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ *в смысле давления конкуренции и обозначать* $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cp}} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$, *если*

$$\forall v, \quad cp_1(v) \geq cp_2(v).$$

Определение. *Будем говорить, что аукцион* $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle$ *доминирует аукцион* $\langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ *в смысле уровня конкуренции и обозначать* $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cl}} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$, *если отношение их функций ожидаемого количества товара не убывает*[7], *то есть*

$$\frac{d}{dv} \frac{q_1(v)}{q_2(v)} \geq 0.$$

В дальнейшем под выражением «увеличение уровня конкуренции» будет пониматься некоторое изменение в свойствах конкретного аукциона, приведшее к тому, что новый аукцион стал доминировать исходный аукцион в смысле уровня конкуренции. Примеры того, какие изменения в свойствах аукциона может приводить к «увеличению уровня конкуренции» , будут показаны ниже.

Следующий результат показывает, что оба определения доминирования приводят к тому, что средняя стоимость в первом аукционе больше, чем в аукционе с «меньшей конкуренцией».

Лемма 1.

1. $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cp}} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cl}} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle.$

2. $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cl}} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \forall v,\ pp_1(v) \geq pp_2(v).$

Данные определения доминирования порождают только частичный порядок над множеством аукционов. При этом более слабым доминированием является доминирование в смысле уровня конкуренции. Причем только что показано, что в случае такого доминирования верно, что $q_2(v) > q_1(v)$, $pp_1(v) > pp_2(v)$ и что $q_2(v) - q_1(v)$ монотонно убывает по v. Иными словами, там где уровень конкуренции больше, цены больше, вероятность получить единицу товара меньше, а с увеличением типа v покупателя разница в вероятностях получить товар в таких аукционах для него монотонно убывает и стремится к нулю.

[7] Или иными словами распределение $q_1(v)$ стохастически доминирует распределение $q_2(v)$ в смысле обратной функции отказов, см. [48].

Определив отношение частичного порядка для аукционов в смысле уровня конкуренции, можно показать следующий результат об эффективности резервных цен в различных аукционах.[8]

Теорема 1.

$$\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cl}} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \rho[\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1] < \rho[\mathcal{A}_2, , \mathcal{C}_2].$$

Итак, с ростом уровня конкуренции эффективность резервной цены как инструмента в увеличении ожидаемой прибыли падает. Таким образом, если знать, от чего уровень конкуренции может увеличиться в том или ином аукционе, то становится ясно, в каких ситуациях резервная цена может быть практически полезна, а в каких нет.

Утверждение 2.
В аукционах с меньшим уровнем конкуренции резервная цена более эффективна, чем в аукционах с большим уровнем конкуренции.

Важной характеристикой контекста аукциона является вектор качества товаров $\boldsymbol{\alpha}$. Для того, чтобы продемонстрировать пример, какие свойства в аукционе влияют на уровень конкуренции, рассмотрим случай, когда вектор качества товаров можно описать тройкой параметров, $\langle N, K, g \rangle$, следующим образом.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \\
&\forall i > K, \quad \alpha_i = 0, \\
&\forall i \leq K, \quad \alpha_{i+1} = g\alpha_i \;\; (0 < q \leq 1).
\end{aligned}$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{\alpha}$, определенный через тройку $\langle N, K, g \rangle$, описывает случай аукциона по продаже K товаров с N покупателями, где качество товаров дисконтируется на постоянный знаменатель g.

Для таких векторов качества товаров рассмотрим два контекста аукциона $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, отличающихся лишь своими векторами качества товаров $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$ соответственно (на самом деле в общем случае будут отличаться и множества покупателей $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, но для симметричных аукционов значима лишь разница в числе покупателей, что входит в описание свойств $\boldsymbol{\alpha}$). Определим следующим образом частичный порядок над такими контекстами с помощью их векторов качества товаров.

[8] Здесь важно заметить, что в рассматриваемых аукционах функция распределения типов участников зафиксировано, то есть $F_1 = F_2$. Поэтому в силу определения (1.8) оптимальные значения резервных цен в обоих аукционах будут одинаковыми, $R_1^\star = R_2^\star$.

Определение.

Пусть даны два контекста аукциона, $\mathcal{C}_1 = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \mathcal{N}_1, F(v) \rangle$ *и* $\mathcal{C}_2 = \langle \boldsymbol{\alpha}_2, \mathcal{N}_2, F(v) \rangle$, *где* $\boldsymbol{\alpha}_1 = \langle N_1, K_1, g_1 \rangle$ *и* $\boldsymbol{\alpha}_2 = \langle N_2, K_2, g_2 \rangle$.

Тогда будем говорить, что $\mathcal{C}_1$ *доминирует* $\mathcal{C}_2$ *по вектору качества товаров (*$\mathcal{C}_1 \succ_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{C}_2$*), если выполнено одно из следующих условий:*

(i) $N_1 > N_2,\ K_1 = K_2,\ g_1 = g_2;$

(ii) $N_1 = N_2,\ K_1 < K_2,\ g_1 = g_2;$

(iii) $N_1 = N_2,\ K_1 = K_2,\ g_1 < g_2;$

Тогда для двух аукционов $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_1 \rangle$ и $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_2 \rangle$ можно показать, что порядок по уровню конкуренции согласуется с порядком над их контекстами.

Лемма 2.

$$\mathcal{C}_1 \succ_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{C}_2 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cl}} \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_2 \rangle.$$

Для наглядности рассмотрим численные эксперименты с последовательностью различных аукционов, в которых уровень конкуренции монотонно рос, затем уменьшался и вновь увеличивался за счет поочередного изменения разных свойств аукциона: числа конкурентов N, числа объектов продажи K и величины знаменателя дисконтирования этих объектов g . Как мы уже знаем, эффективность резервной цены в такой последовательности должна поочередно меняться в противоположных направлениях.

Пример 2. *Зафиксируем вид функции распределения типов возможных покупателей как равномерное распределение на отрезке* $[0, 1]$. *Для каждого значения вектора* $\boldsymbol{\alpha}_i$ *из* $\mathcal{C}_i$ *будем устраивать VCG-аукцион (то есть правила* $\mathcal{A}$ *фиксированы) и следить за значением эффективности резервной цены* $\rho_i = \rho[\mathcal{A}, \mathcal{C}_i]$ *в зависимости от меняющегося контекста.*

Последовательность значений векторов $\boldsymbol{\alpha}_i$ *организуем следующим образом:*

(i) Начиная с 1 товара и 2 покупателей будем увеличивать число покупателей до 10, то есть

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0),\\
&\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 0, 0),\\
&\dots\\
&\boldsymbol{\alpha}_9 = (1, 0, 0, \dots, 0);
\end{aligned}$$

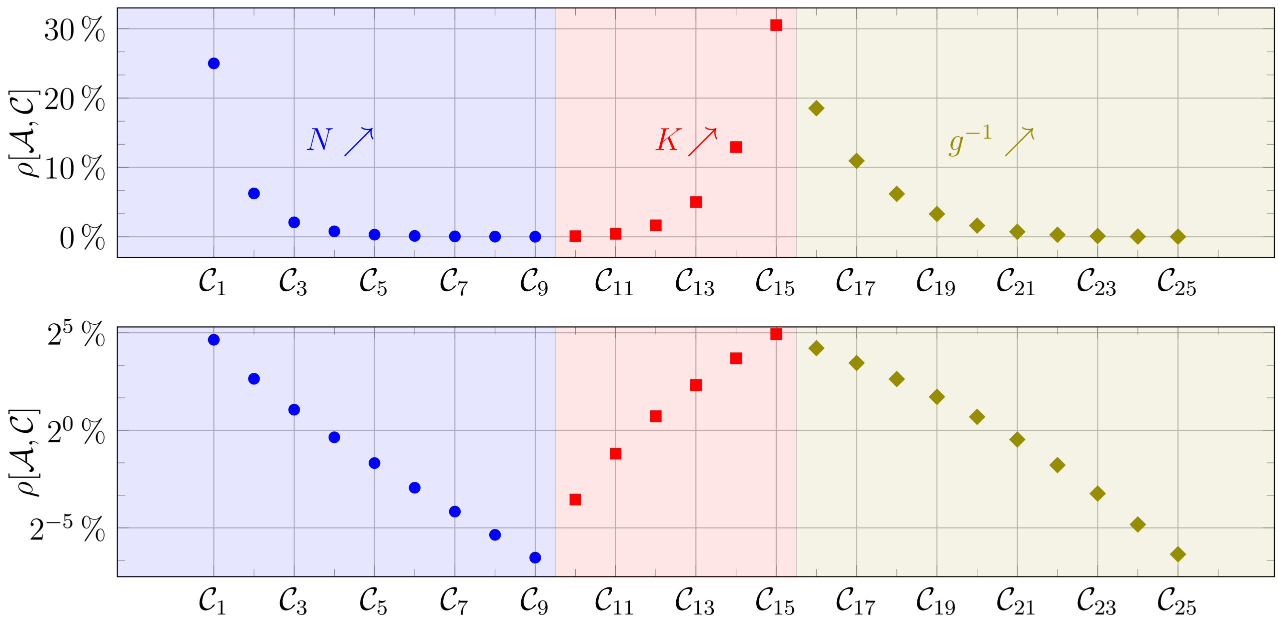


Рисунок 1.1: Численные результаты расчетов эффективности резервных цен в последовательности аукционов.

(ii) Зафиксировав число покупателей, будем увеличивать по одному число торгуемых товаров, то есть

$$\boldsymbol{\alpha}_{10} = (1, 1, 0, \dots, 0, 0, 0),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{11} = (1, 1, 1, \dots, 0, 0, 0),$$
$$\dots$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{15} = (1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0);$$

(iii) Введем дискриминирующий фактор качества $g \in (0, 1)$, и будем последовательно ужесточать этот фактор (устремлять к нулю), то есть

$$\boldsymbol{\alpha}_{16} = (1, g_1, \dots, g_1^7, 0, 0),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{17} = (1, g_2, \dots, g_2^7, 0, 0),$$
$$\dots$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{25} = (1, g_{10}, \dots, g_{10}^7, 0, 0),$$

где $g_1 = 0.9, g_2 = 0.8, \dots, g_9 = 0.1, g_{10} = 0.01.$

Таким образом определенная последовательность будет обладать следующим свойством:

$$
\begin{aligned}
&\forall i : 1 \le i < 10, \quad \mathcal{C}_{i+1} \succ_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{C}_i,\\
&\forall i : 10 \le i < 16, \quad \mathcal{C}_i \succ_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{C}_{i+1},\\
&\forall i : 16 \le i < 25, \quad \mathcal{C}_{i+1} \succ_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{C}_i.
\end{aligned}
$$

На рис. 1.1 в десятичной и логарифмической шкалах показаны результаты численных расчетов для эффективности резервных цен в аукционах $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}_i \rangle$, где на оси абсцисс отмечены соответствующие контексты. Полученные результаты согласуются с теоретическими результатами. Кроме того, на графиках явно заметна разница в скорости изменения эффективности резервной цены при различных способах варьирования контекста.

1.3.3 Иррегулярность и «сила» участников

Для вопроса нахождения оптимальной резервной цены в случае фиксированного формата аукциона (в нашем случае это стандартные аукционы) регулярность распределения ценностей порождает универсальное правило вычисления, $\boxed{\psi(R) = 0}$.

В случае оптимального механизма Майерсона возможная иррегулярность разрешалась с помощью сглаживания и итоговое правило вычисления оптимальной резервной цены выражалось аналогичным образом, но через сглаженную виртуальную ценность, $\boxed{\bar{\psi}(R) = 0}$. Но эффект от сглаживания в оптимальном механизме распространялся и на правило размещения (как следствие, и на правило платежей). При этом, как следует из определения оптимального правила размещения, принципал должен быть безразличен к участникам с потенциально различными ценностями, но одинаковым значением $\bar{\psi}$, то есть данная ситуация эквивалентна равномерной рандомизации в правиле выбора победителя среди подобных участников.

Поэтому для ситуации с простым форматом аукциона техника сглаживания не подходит сразу по нескольким причинам: (i) итоговое правило размещения товара явно зависит от знания вида функции распределения и (ii) для сохранения свойства (СС) необходимо принципал должен частично рандомизировать правило размещения.

Таким образом, для простых аукционов иррегулярность означает возможное существование нескольких экстремумов для функции ожидаемой прибыли $\mathbb{E}\mathcal{R}(R)$, где:

$$
\mathbb{E}\mathcal{R}(R) = N \int_0^{\omega} \psi(v) f(v) q(v; R)\, dv = N \int_R^{\omega} v(1 - F(v))\, dq(v). \tag{1.12}
$$

Уравнение $\psi(R) = 0$ теперь является лишь необходимым условием максимума. Для определения глобального максимума необходимо проверять или условие второго порядка, или сравнить значения самой функции $\mathbb{E}\mathcal{R}(R)$ в найденных стационарных точках. При этом можно показать, что с ростом числа конкурентов N значение оптимальной резервной цены может изменяться, причем только в большую сторону (см. Приложение, Лемма 3). То есть, если уравнение $\psi(R) = 0$ имело несколько корней $R_1 < R_2 < R_3$ и для $N = 1$ корень R_1 был оптимальным (можно показать, что в этом случае $\bar{\psi}(R_1) > 0$), то с увеличением числа конкурентов оптимальное значение может «перепрыгнуть» в новое значение R_3[9]. Так как в оптимальном механизме функция $\bar{\psi}$ не зависит от числа конкурентов, то подобных эффектов с увеличением числа участников N там не возникает.

Число участников аукциона, число объектов продажи и их свойства – не единственные факторы, которые влияют на уровень конкуренции в аукционе, изменения которого может вызвать «прыжок» оптимальной резервной цены в иррегулярной задаче. Из определенного ранее контекста аукциона $\mathcal{C} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{N}, F(v) \rangle$ ясно, что на свойства контекста напрямую влияет и вид распределения типов участников F. Поэтому, даже если зафиксировать прочие свойства контекста, но увеличивать *силу участников*[10], то снова может возникнуть прыжок.

Что такое *сила участника*? Основной характеристикой участника здесь является функция распределения его ценности, поэтому естественно определять сильный или слабый участник через свойства функции $F(v)$.

Определение (Стохастическое доминирование)**.** *Существует много определений стохастического доминирования* **(с.д.)** *для произвольных случайных величин $\xi \sim F_\xi(x)$ и $\eta \sim F_\eta(x)$.*

(с.д.) *Будем говорить, что с.в. ξ стохастически доминирует с.в. $\eta, (\xi \succcurlyeq \eta)$, если $\forall x$ верно* $\boxed{F_\xi(x) \leq F_\eta(x);}$

(hr-с.д.) *Если определить* функцию отказов (hazard rate function) *для с.в. $\zeta \sim F_\zeta(x)$ с функцией плотности распределения $f_\zeta(x)$ следующим образом,*

$$\lambda_\zeta(x) = \frac{f_\zeta(x)}{1 - F_\zeta(x)},$$

[9]Промежуточное значение R_2 не является претендентом на глобальный максимум, так как можно показать, что оно соответствует локальному минимуму.

[10]Менять свойства распределений можно не у всех, а лишь у части покупателей, отказавшись от симметричности аукциона. Для этого естественным образом необходимо обобщить определение контекста для асимметричных аукционов, где вместо одной функции распределения F должно указываться отображение $\{i \in \mathcal{N} \mapsto F_i(v)\}$.

то будем говорить, что с.в. ξ стохастически доминирует с.в. η согласно функции отказов,($\xi \succcurlyeq_{\mathbf{hr}} \eta$)*, если* $\forall x$ *верно* $\boxed{\lambda_\xi(x) \le \lambda_\eta(x);}$

(rh-с.д.) *Пусть* обратная функция отказов (reverse hazard rate function) *для с.в.* ζ *есть*

$$\sigma_\zeta(x) = \frac{f_\zeta(x)}{F_\zeta(x)}.$$

Тогда будем говорить, что с.в. ξ стохастически доминирует с.в. η согласно обратной функции отказов,($\xi \succcurlyeq_{\mathbf{rh}} \eta$)*, если* $\forall x$ $\boxed{\sigma_\xi(x) \ge \sigma_\eta(x);}$

(lr-с.д.) *Если с.в. ξ и с.в. η такие, что их функции плотности распределений есть $f_\xi(x)$ и $f_\eta(x)$ соответственно, причем $f_\xi(x)/f_\eta(x)$ не убывает по x, то есть $\forall x < y$* $\boxed{f_\xi(x)/f_\eta(x) \ge f_\xi(y)/f_\eta(y);}$ *тогда будем говорить, что с.в. ξ стохастически доминирует с.в. η согласно отношению правдоподобия,*($\xi \succcurlyeq_{\mathbf{lr}} \eta$).

Можно показать (см. [48]), что верны следующие импликации:

(i) **(lr-с.д.)** $\Rightarrow$ **(hr-с.д.) , (rh-с.д.)**;

(ii) **(hr-с.д.)** $\Rightarrow$ **(с.д.)**;

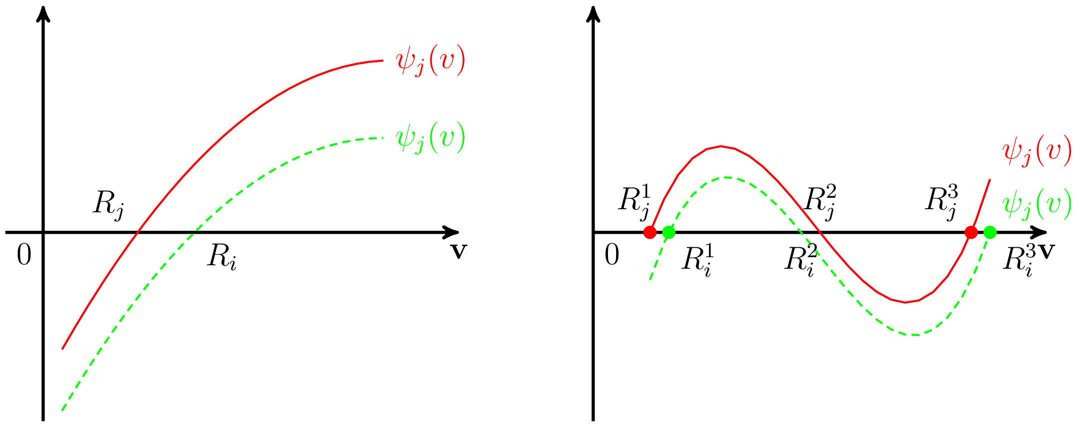
(iii) **(rh-с.д.)** $\Rightarrow$ **(с.д.)**.

Подробнее о свойствах и взаимосвязях между этими видами доминирования можно посмотреть в [69].

Определение (Сила участника)**.**
Будем говорить, что участника i hr-сильнее (rh- или lr-сильнее) участника j, если ценность V_i hr-стохастически (rh- или lr-стохастически) доминирует V_j, то есть

$$\boxed{i \succcurlyeq_\tau j \;\Leftrightarrow\; V_i \succcurlyeq_\tau V_j, \quad \tau \in \{\mathbf{hr}, \mathbf{rh}, \mathbf{lr}\}.}$$

Далее по тексту, если не будет указано явно, то под просто записью $i \succcurlyeq j$ или «i сильнее j» буду по умолчанию подразумевать порядок согласно **hr-с.д.** Таким образом, бинарное отношение «быть сильнее» определяет частичный порядок на множестве участников. При этом, если рассмотреть корни уравнений $\psi_\cdot(v) = 0$ для упорядоченных в выше описанном смысле участников ($i \succcurlyeq j$), то окажется, что соответствующие максимумы (кандидаты в резервные цены) будут также упорядочены.



(a) Регулярный случай. (b) Иррегулярный случай.

Рисунок 1.2: Виртуальные ценности для упорядоченных участников

Действительно, $\psi_j(v) = v - \lambda_j^{-1}(v) \geq v - \lambda_i^{-1}(v) = \psi_i(v)$ (см. Рис. 1.2). Поэтому в случае регулярных распределений мы имеем упорядоченность оптимальных резервных цен, а в случае иррегулярных — соответствующих максимумов: $R_j^1 \leq R_i^1$ и $R_j^3 \leq R_i^3$.

Возвращаясь к феномену возможных прыжков в значении оптимальной резервной цены, можно показать, что, если $i \succcurlyeq j$, то $R_i^\star \geq R_j^\star$ ($R_i^\star, R_j^\star$ – оптимальные резервные цены для участников i и j соответственно). Данное утверждение верно для регулярных и иррегулярных распределений (см. Приложение, Лемма 5). То есть для более сильных игроков оптимально выставлять бóльшую резервную цену.

1.4 Обзор литературы

В данном параграфе я рассмотрю существующие современные результаты по теории аукционов и дизайну механизмов. Так как направлений и решаемых вопросов в этом разделе науки огромное количество, я сосредоточусь лишь на вопросах напрямую или косвенно связанных с основными вопросами данной диссертационной работы: прежде всего это асимметрия среди участников, это факт анонимности участия и это возможное обобщение правил аукциона на специальный многотоварный случай.

1.4.1 Асимметричность

Исследования асимметричных аукционов или механизмов — актуальное и популярное направление в науке. Поэтому число работ, посвященных проблеме асимметрии, постоянно увеличивается.

В данной работе под асимметрией между участниками я понимаю различие в функциях распределения их ценностей. Существуют и другие возможные источники асимметрии в аукционе, но здесь я их не рассматриваю.

В качестве стартовой точки для меня послужили две работы [57] и [39].

[57] В первой авторы попытались ответить на вопрос, какой эффект оказывают различные виды асимметрии участников на известный результат об эквивалентности по доходу в симметричном случае. Маскин и Райли сосредоточились здесь на сравнении аукциона первой и второй цены с точки зрения генерируемой прибыли. Рассмотрев три примера различной асимметрии, они попытались описать свойства возможной асимметрии между участниками при которых можно было бы упорядочить с точки зрения ожидаемой прибыли данные два формата аукционов.

[39] Во второй работе представлен результат относительно задачи оптимизации дохода в английском асимметричном аукционе, где аукционист может активно участвовать в ходе торгов. Показано, что в таком аукционе существует равновесие эквивалентное оптимальному механизму Майерсона. Здесь же поднимается вопрос относительно «доктрины Уилсона», в рамках которого автор показал, что априорные предположения относительно общего знания участников аукциона может быть существенно сокращены с сохранением основного результата, существования равновесия с оптимальным ожидаемым доходом.

Сравнение аукционов первой цены и второй цены по их прибыльности в общем случае вопрос открытый и не простой, [48]. Тем не менее, в след за [57] появились и другие работы, в которых авторы пытаются сравнить эти два простых аукциона. Важно отметить, что существует асимптотический результат [9] об эквивалентности по прибыли аукционов в асимметричной модели. Асимптотика здесь анализируется относительно роста числа участников N и показывается, что разница между данными форматами аукционов в прибыльности нивелируется. Численно в [28] было установлено, что скорость этого асимптотического убывания разницы не меньше, чем $\mathcal{O}(N^{-3})$.

Но для того, чтобы сравнивать ожидаемые прибыли, необходимо задаться равновесиями для этих форм аукционов. И как было отмечено ранее, для аукциона второй цены проблем с нахождением равновесия нет, так как в нем всегда существует равновесие в слабо доминирующих стратегиях.

Проблемным здесь является аукцион первой цены. Поэтому исследование свойств равновесия и вообще их существования в случае асимметрии у аукциона первой цены является одной из весьма популярных тем. Лебрун в [51–53] дает ответы на такие вопросы, как существование равновесия, его единственности, существования при ненулевой резервной цене. Дополнительные свойства равновесий в асимметричном аукционе первой цены изучаются и в [45].

Одной из ранних работ, посвященных данной проблеме, является статья [61], где авторы предлагают численный метод разрешения проблемы нахождения равновесия. Авторы рассматривают изначально гомогенных участников с равномерными распределениями, но разрешают образовывать коалиции, что порождает дальнейшую асимметрию. Эмпирически авторы демонстрируют доминирование аукциона первой цены над аукционом второй цены с точки зрения генерируемой прибыли.

Другим примером изучения специфически генерируемой асимметрии являются работы [24, 29]. Здесь авторы предполагают, что участники изначально все симметричны и что порядок ценностей общеизвестен. Так как известно, кто из участников является более сильным, а кто более слабым, то в итоговых верах о распределения появляется асимметрия. В работе [24] авторы вводят в рассмотрение ненулевые резервные цены, и обобщают результат [29] о доминировании по прибыльности аукциона первой цены над аукционом второй цены на случай с одинаковыми небольшими значениями резервных цен.

Вопросу о том, каким образом возможная асимметрия влияет на прибыль в сравнении с симметричным случаем, посвящены работы [15, 43]. Здесь авторы предлагают разные точки зрения о том, что должно быть выбрано в качестве эталонного симметричного случая. Кантильон в [15] высказывает идею того, что для возможного и честного сравнения разных моделей необходимо сохранить одинаковое распределение генерируемого общественного благосостояния аукционом (что в однотоварном случае эквивалентно фиксированию распределения первой порядковой статистики). Поэтому в качестве симметричного эталона была выбрана симметризация с помощью геометрического усреднения. И как результат, было показано, что потенциальная асимметрия уменьшает уровень конкуренции в аукционе и, как следствие, уменьшает прибыльность. Данный сравнительный анализ находит косвенное подтверждение в численных результатах про игры с коалициями в [61].

С другой стороны, Каплан и Замир высказываются против данной идеи, аргументируя, что для честного сравнения необходимо сохранить неизменным совместное распределение ценностей всех участников. Поэтому в [43] они рассматривают двухступенчатую модель генерации ценностей, с помощью которой они нужным образом порождают асимметрию в итоговых верах участников. Априорно симметризация здесь эквивалентна арифметическому усреднению (вообще говоря, с произвольным весом). В итоге авторы показывают, что существуют ситуации, при которых асимметрия может увеличить доходность в сравнении с симметризованным эталоном, правда, лишь в случае аукциона первой цены. То есть как следствие, здесь вновь утверждается, что в асимметричной модели аукцион первой цены более прибыльный для принципала, чем аукцион второй цены.

Сравнение возможной разницы между асимметричными аукционами первой и второй цены с помощью метода малых возмущений представлено в [26, 27]. Здесь, рассматриваются небольшие отклонения от эталонного распределения не некоторую малую величину ϵ. Таким образом, данная величина служит мерой асимметрии. Авторы доказывают, что при малых величинах асимметрии разницы между генерируемой прибыльностью между этим форматами аукционов составляет величину второго порядка малости, то есть $\sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Аналитические результаты подкреплены численными расчетами в стиле [61]. Таким образом, в случае малых асимметрий вопрос о разнице между прибыльностью аукционов первой и второй цены не имеет большого практического значения в силу указанной малости. Ряд дополнительных результатов метода малых возмущений применительно к эффектам асимметрии получены в [54].

В [32] и [68] числено сравнивают эти два формата в купе с резервными ценами и показывают, что при наличии оптимальной резервной цены аукцион второй цены может доминировать аукцион первой цены по прибыльности вопреки более частому результату о доминировании аукциона первой цены. Для дискретных моделей в [19] также показано доминирование аукциона второй цены над аукционом первой цены. Для непрерывных распределений близких к равномерным с одинаковым носителем аналогичный результат получен в [31], причем аукцион первой цены с точки зрения прибыльности наиболее страдает от асимметрии в области малых значений ценности и работает более эффективно для асимметрий в областях больших значений ценности.

Анализ эффектов от асимметрии для аукциона второй цены приведен в [30]. Здесь негативный эффект очевиден лишь для случая двух покупателей. При этом утверждается, что для небольшого уровня асимметрии хорошей аппроксимацией может служить симметризация с помощью арифметического или геометрического усреднения. Для модели с двумя покупателями сравнительный анализ аукциона первой и второй цены с помощью подхода дизайна механизмов описаны в [46].

Таким образом, очевидно, что возможные эффекты от асимметрии на аукцион первой и второй цены в частных случаях могут быть противоположными, но в случае малого уровня асимметрии аппроксимация симметричным случаем удовлетворительна и дает погрешности лишь второго порядка малости.

1.4.2 Анонимность

Вопросу анонимности в аукционах посвящено сильно меньшее количество работ. Здесь под анонимностью я понимаю тот факт, что принципал не может рассчитывать на знание персональных деталей про каждого участника в момент принятия решения о победителе и платежах. Единственно доступная информация для него является вектор ставок.

Так в [18] изучается вопрос о том, насколько строгим является ограничение об анонимности, то есть правила аукциона будут симметричными для всех участников. Как известно из [60] оптимальным механизмом является аукцион, правила которого основаны на персональных данных, и который является, таким образом, дискриминирующем. Но так как Майерсон использовал принцип выявления и провел весь анализ в прямых механизмах, то возможно существуют такие имплементации в непрямых механизмах данного оптимального прямого механизма, которые будут обладать свойством симметричности по отношению к участникам. Именно этот вопрос и изучается в [18] и показывается, что для любого прямого механизма, удовлетворяющего свойствам (СС) и (ИР), существует эквивалентный (то есть с одинаковыми результирующими платежами) аукцион с симметричными правилами. Таким образом, оптимальному механизму Майерсона может быть поставлен в соответствие некоторый анонимный аукцион, который будет генерировать такую же прибыль[11].

Таким образом, требование анонимности аукциона, которое может возникать из-за природы прикладной области (например, в интернет индустрии при он-лайн транзакциях) или по законодательным причинам, не является сильно ограничивающим.

Другим примером работ про анонимные аукционы может служить эконометрическая статья [50]. Здесь автор рассматривает вопрос восстановления из данных персональных распределений ставок в случае, когда все ставки в ходе аукциона сделаны анонимно. Возможные техники по структурной эконометрике аукционов приведены в [64], но большинство методов работают лишь в предположении, что данные персонализированы. Лорент в [50] дает обобщение технике для персонализированных данных и строит оценки, основанные на непараметрических методах с использованием ядер, которые обладают удовлетворительными свойствами даже на данных небольших объемов.

Важно отметить, что данное требование анонимности сильно коррелирует с «доктриной Уилсона» и свойством робастности, то есть свойства независимости от деталей предполагаемых свойств участников. Таким образом, вопрос существовании равновесия в доминирую-

[11] Авторы отмечают, что в случае с оптимальным механизмом в эквивалентном анонимном аукционе приходиться пожертвовать свойством «ex-post» (ИР), которым обладает механизм Майерсона. Термин «ex-post» означает, что указанное свойство должно быть выполнено для любой реализации вектора ценностей, в то время как обычное свойство (ИР) имеет формулировку «в среднем».

щих стратегиях является непосредственно связанным со свойством робастности. А результат из [18] оказывается тесно связан с результатом об эквивалентности имплементаций в доминантных стратегиях и имплементаций в равновесиях по Байесу-Нешу[12] из [62]. Вопросам робастности и существования имплементаций в доминантных стратегиях посвящен сборник статей [11], в котором можно найти ряд результатов об аукционах второй цены и его возможных обобщениях.

1.4.3 Многотоварность

Многотоварность – есть свойство аукциона, указывающее на то, что количество объектов на продажу больше одного. Но в контексте данной работы, говоря про многотоварные аукционы, я буду предполагать еще одно свойство: *единичный спрос*, то есть каждый участник заинтересован или ограничен в приобретении не более чем, одной единицы товара. Многотоварные аукционы без этого свойства обычно называют комбинаторными, [17]. Таким образом, речь пойдет лишь про многотоварные аукционы с единичным спросом.

Кроме того, центральным интересом в моем исследовании являются аукционы второй цены и его частное обобщение для on-line рекламы, поэтому здесь я сосредоточусь в основном лишь на работах касательно этого обобщенного аукциона второй цены.

Прежде, чем перейти к обзору работ про, так называемый, *позиционный аукцион*, следует упомянуть два вида многотоварного аукциона с единичным спросом, которые также можно рассматривать как естественные обобщения аукциона второй цены. Здесь речь идет об аукционе с равномерной ценой и аукционе Викри, [48].

Аукцион равномерной цены является по всей видимости наиболее простым и естественным многотоварным вариантом аукциона второй цены, которое было отмечено еще в работе [14] 89-го года. Обобщения основных результатов данной диссертационной работы для данного вида аукциона будут приведены в параграфе 2.3.2.

Аукцион Викри известен еще дольше, [77], но представляет из себя часто лишь теоретический интерес. Так, например, согласно [67], непопулярность данного вида аукциона вызвана двумя причинами: (i) отсутствие устойчивости равновесия в правдивых стратегиях по отношению к возможному обману и (ii) возможные потери в дальнейшем от раскрытия общественности своих истинных ценностей.

[12]Вообще говоря, так как аукцион есть игра с неполной информацией, то равновесия в них определяются в смысле Байеса-Неша. Но для краткости в данной работе я буду писать равновесие по Нешу, подразумевая естественно Байесовскую модель игры.

На практике широкую популярность приобрел позиционный аукцион, который часто именуют как обобщенный аукцион второй цены [21, 76]. Традиционно, считается, что первыми этот вид аукциона теоретически изучили Эдельман, Островский и Шварц в своей работе [21], где применили теорию статических аукционов с полной информацией. Исходя из введенного ими свойства *локального отсутствия зависти*, они описали равновесие с этим свойством, которое по порождаемым платежам эквивалентно правдивому равновесию в аукционе Викри и является при этом оценкой снизу для принципала по возможной прибыльности. Независимо от них Вариан в [76] описал условия на возможные равновесия по Нэшу и определил симметричное равновесие по Нешу, которое совпало с описанным равновесием у Эдельмана и др.

В работе [20] приводится эмпирический анализ стратегий рекламодателей в реальных позиционных аукционах. При этом здесь сравнивается обобщенный аукцион первой цены, изначально используемый для продажи рекламы в интернете, с обобщенным аукционом второй цены, и демонстрируется экономическая выгода последнего за счет уменьшения степени стратегического поведения участников. Другими словами, участники в меньшей степени начинают экспериментировать со своими ставками, пытаясь найти оптимальную стратегию.

Вопрос эффективности резервных цен для позиционного эффекта широко освещается в [22]. Здесь авторы эмпирически изучают возможные эффекты (прямые и косвенные) от резервных цен в зависимости от разных состояний исходного аукциона (например, количества участников в нем). Как и раньше, эффект сильно убывает с ростом числа участников. При этом авторы показывают возможные эффекты от добавления нового участника к позиционному аукциону (рассматривались два типа экстра-участников: типичный представитель данного аукциона и участник-маргинал, который лишь слабо отличается от заведомо самого слабого из имеющихся). Как результат было получено наблюдение, что типичный представитель оказывает более значительный эффект на прибыль, но при этом общий эффект с ростом числа участников вновь резко убывает. Более того, показан пример, когда эффект от введения резервной цены доминирует эффект от добавления такого типичного экстра-участника. Это противоречие результату из [13] авторы объясняют тем, что наличие множества позиций сильно сокращает эффективный уровень конкуренции и добавление нового участника не приводит к достаточному приросту в уровне конкуренции, в то время как введение резервной цены влияет на платежи со всех позиций.

Эдельман и др. описали позиционный аукцион в предположении, что ранжирование участников происходит по ставке, при этом было указано естественное обобщение равновесия на случай, когда ранжирование происходит согласно взвешенным ставкам[13]. Возможная разница в правилах ранжирования может приводить к различным свойствам платежей и прибыли аукциона. Так в работе [81] описан класс функций платежей, где платеж за текущую позицию может зависеть лишь от ставок за более низкие проигравшие позиции, и доказано, что эти виды платежей приводят к эквивалентным в равновесиях ожидаемым прибылям.

С другой стороны, в [25, 49] исследуется вопрос об оптимальном выборе веса для ранжирования согласно взвешенным ставкам (как частный случай, рассмотрено и ранжирование по ставкам). Здесь авторы отмечают в качестве ключевого фактора корреляцию между релевантностью объявлений и ценностями рекламодателей. Важно заметить, что проблема оптимизации здесь сформулирована как оптимизационная задача с ограничениями. Источником ограничений здесь естественным образом являются благосостояние самих рекламодателей и удовлетворенность пользователей интернет поисковиками.

Во всех выше перечисленных работах использовался подход в исследованиях позиционных аукционов с помощью статических игр с полной информацией. Работа [33] изучает свойства возможных стратегий в динамичной модели позиционного аукциона. Важным результатом данной работы является установленный факт сходимости одной из наиболее естественных динамичных стратегий (жадной стратегии, когда участники оптимизируют свои ставки исходя из ставок конкурентов текущего раунда) к стратегии описанной в [21].

Другой пример разумности статической аппроксимации для динамичных позиционных аукционов дает работа [23]. Здесь авторы сформулировали критерий, которому должно удовлетворять равновесие в статической игре, чтобы быть разумной аппроксимацией для динамичной игры. И доказано, что из всех равновесий с локальным отсутствием зависти, только равновесие эквивалентное по платежам доминантной стратегии из аукциона Викри удовлетворяет данному критерию. Кроме того, здесь авторы доказывают результат про оптимальность обобщенного аукциона второй цены с правильно подобранной резервной ценой в симметричном случае. Для этого же случая они устанавливают, что значение оптимальной резервной цены не зависит ни от числа участников, ни от числа позиций, ни от значений позиционных эффектов.

В [63] показан пример прикладной задачи с использованием указанных теоретических фактов. На практике оптимальные резервные цены продемонстрировали существенную эффективность в увеличении прибыльности позиционных аукционов для интернет рекламы.

[13] Подробнее о деталях реализации позиционных аукционов будет описано в Главе 3.

В следующей главе я покажу, что в случае асимметричной модели свойства оптимальной резервной цены для позиционного эффекта больше не сохраняются. И возможные эффекты от асимметрии могут достигать значительного уровня.

Глава 2

Резервные цены в асимметричных аукционах

2.1 Описание проблемы

Этот параграф я выделил для перечисления всех необходимых предположений и для формального описания решаемой задачи. Здесь я опишу свойство асимметрии участников, причину выбора в пользу аукциона второй цены, возможные информационные пространства в рассматриваемых аукционах. В завершении я более конкретно опишу решаемую задачу принципала.

2.1.1 Основные предположения

Основные предположения для модели аукциона были описаны еще в параграфе 1.1. Здесь речь в основном пойдет про дополнительное предположение - асимметрия.

На протяжении всей дальнейшей работы я буду предполагать, что множество участников $\mathcal{N}$ может быть представлено в виде объединения непересекающихся и непустых подмножеств: $\mathcal{N} = \mathcal{N}_w \sqcup \mathcal{N}_s$ ($|\mathcal{N}| = N = N_w + N_s$ соответственно). Таким образом, множество участников разбивается на 2 класса: «w» и «s». Индексы указывают, соответственно, на свойство участников данного класса — слабый (**w**eak) или сильный (**s**trong). Внутри одного класса мы будем считать, что участники симметричны. Таким образом, структура асимметрии выражается лишь через принадлежность определенному классу.

Ранее в 1.3.3 я описал возможное понятие силы участника. Здесь всюду я буду использовать одно из выше упомянутых определений. Конкретно в случае, когда я говорю про сильный и слабый класс участников, я предполагаю, что их соответствующие ценности доминируют друг друга согласно функции отказов.

$$\forall i \in \mathcal{N}_w \ \forall j \in \mathcal{N}_s \ \Rightarrow V_j \succcurlyeq_{\mathbf{hr}} V_i.$$

Для основных результатов данного вида доминирования достаточно. Однако, иногда проблема возможных иррегулярных распределений сильно затрудняет картину и приходиться предполагать более сильное утверждение о доминировании, доминирование согласно отношению правдоподобия. Оказывается, что, если предположить доминирование согласно отношению правдоподобия, то легко получается обобщение результатов на случай иррегулярных распределений. Поэтому для регулярных задач я буду везде предполагать доминирование согласно функции отказов, а для иррегулярных - доминирование согласно отношению правдоподобия.

Кроме предположения о структуре асимметрии среди участников я предполагаю, что принципал ограничен в выборе возможного вида механизма следующим образом. Я рассматриваю лишь случай, когда принципал заинтересован в организации аукциона в классическом понимании: универсальные правила для всех участников (анонимность) и для любого вида продаваемого товара (никакой специфики относительно объекта на продажу). Как было отмечено ранее, наиболее распространенными форматами таких простых механизмов являются аукцион первой цены (и эквивалентный ему голландский аукцион) и аукцион второй цены (в открытой форме — это английский аукцион[1]).

Более того, здесь я буду рассматривать лишь аукцион второй цены в силу его удобства для аналитического анализа. Напомню, что кроме простого вида равновесия, $\beta^{\star}_{II}(v) = v$, которое распространяется и на случай асимметричных участников (и вообще не зависит ни от вида функций распределений, ни от количества участников), аукцион второй цены продолжает оставаться эффективным и для асимметричного случая. Важным свойством является наличие равновесия в доминирующих стратегиях, в то время как аукцион первой цены обладает лишь равновесием по Нэшу. Это значит, что любая асимметрия в известной участником информации о правилах и деталях игры будет влиять на вид этого равновесия в случае аукциона первой цены и никак не отразится на доминантной стратегии в случае аукциона второй цены.

Помимо различий в теоретических свойствах, для меня представляет определенную важность позиционный аукцион интернет-рекламы, который является специальным обобщением аукциона второй цены.

[1] Вообще говоря, сюда же можно отнести и японский аукцион — его небольшую модификацию, отличающуюся в процедуре изменения ставок и виде сообщений от участников (см. `http://en.wikipedia.org/wiki/Japanese_auction`).

Таким образом, если я зафиксировал достаточно сильно возможный вид механизма, то каким образом принципал может оптимизировать свою прибыль? Я считаю, что наиболее эффективным и практически реализуемым инструментом для этого может служить резервная цена. Поэтому в дальнейшем речь будет идти об определении оптимального значения резервной цены для заданного формата аукциона.

Таким образом, я буду рассматривать только аукцион второй цены (и некоторые его обобщения)[2]. Основными вопросами данного исследования являются асимметрия и анонимность. Поэтому важно сделать предположения касательно общеизвестной информации среди участников аукциона или возможных отличий в их информированности. Важным упрощением в случае аукциона второй цены, является независимость равновесия $\beta^{\star}_{II}(v) = v$ от возможной асимметрии в знаниях участников друг о друге. Поэтому можно исключить из рассмотрения возможную разницу в степени информированности участников и сосредоточиться на возможных случаях информированности принципала.

2.1.2 Информационные предположения

Как я отметил выше, для выбранных форматов аукциона в предположении, что участники следуют равновесию в доминантных стратегиях, можно ограничить рассмотрение о возможной структуре информации лишь описанием доступных принципалу знаний о покупателях.

Здесь я рассмотрю четыре различных вида информации принципала, каждый из которых отражает различную степень информированности. В качестве эталонного случая я буду рассматривать наибольшую степень информированности аукциониста – то есть ситуацию, соответствующую предположениям Майерсона в оптимальном механизме.

Напомню, что множество участников разбивается на два подмножества: слабых и сильных покупателей. Таким образом, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_w \sqcup \mathcal{N}_s$, следовательно $\forall i \in \mathcal{N},\ V_i \sim F_i(v) \in \{F_w, F_s\}, F_s \succcurlyeq_{\mathbf{hr}} F_w$. Тогда возможные случаи с различной степенью информированности принципала можно описать следующим образом.

(D) *Детальная* информация (эталон).

Продавец обладает информацией про все детали: знает точные распределения ценностей каждого участника, то есть для любого i аукционист достоверно знает вид функции F_i.

[2] Аукцион второй цены и аукцион равномерной цены обладают равновесием в доминирующих стратегиях, $\beta^{\star}_{II}(v) = v$, которое я буду рассматривать в ходе дальнейшей работы. Следует отметить, что результаты, полученные здесь для этих аукционов, можно обобщить на эквивалентные открытые восходящие форматы аукционов. Я выбрал закрытые форматы вместо открытых аналогов: английский/японский и аукцион Аузубеля, [8]. Основной причиной такого выбора является простота в формализации и обозначениях для статических игр по сравнению с динамическим форматом.

(An) *Анонимизированная* информация.

Аукционист лишь знает вид распределений сильного и слабого участника, то есть вид функций F_w и F_s. Кроме того, я предполагаю, что аукционист знает общее число слабых участников N_w и сильных N_s, $N = N_w + N_s$. При этом информация про персональные распределения конкретных участников не доступна, то есть $\forall i \in \mathcal{N}$ аукционист не знает достоверно, из какого класса данный участник, из $\mathcal{N}_w$ или $\mathcal{N}_s$.

(Pr) *Вероятностная* информация.

Аукционист вновь знает, что ценности участников могут быть распределены согласно двум функциям распределения, F_w и F_s. При этом он снова не знает персональных распределений и лишь знает, что с заданной вероятностью p конкретный участник может быть из сильного класса, то есть $\forall i \in \mathcal{N} \;\; p = \mathbb{P}\{i \in \mathcal{N}_s\}$.

(Av) *Усредненная* информация (симметризованная).

Данный случай соответствует модели, где продавец считает, что все участники симметричны. Таким образом, я предполагаю, что аукционист будет оценивать лишь одну общую функцию распределения для всех участников и получит некоторое усредненное распределение, игнорируя возможную информацию про наличие нескольких классов. Таким образом, информация аукциониста состоит в том, что для любого участника i его ценность распределена независимо от других из общего распределения $F_{Av}(v)$.

Из выше определенных видов различной информированности принципала видно, что все четыре случая можно упорядочить по степени информированности. То есть можно сказать, что $(D) \succcurlyeq (An) \succcurlyeq (Pr) \succcurlyeq (An)$, где $\succcurlyeq$ есть отношение быть «более информированным». Здесь надо отметить, что последние два случая, (Pr) и (An), являются недоопределенными, согласно имеющемуся описанию. Действительно, в каждом из этих случаев есть некоторая степень свободы: в (Pr) это значение вероятности p быть сильным, а в (An) это вид усреднения или просто вид функции $F_{Av}(v)$.

Поэтому для возможного дальнейшего анализа и сравнения этих случаев необходимо зафиксировать конкретные значения этих свободных параметров для (Pr) и (An). Я буду предполагать в некотором смысле наиболее идеальный случай, то есть, если N_s и N_w истинные значения числа сильных и слабых участников, то значением вероятности быть сильным и усредненное распределение можно определить следующим образом.

$$p = \frac{N_s}{N_s + N_w};$$
$$F_{Av}(z) = (1-p)\, F_w(z) + pF_s(z).$$

Идеализированность подобного определения состоит в том, что подобного рода оценки будут несмещенными, то есть математическое ожидание числа сильных участников $\mathcal{N}_s^\sharp$ будет совпадать с истинным значением N_s. Действительно, $\mathbb{E}|\mathcal{N}_s^\sharp| = Np = N_s$. А усредненное распределение F_{Av} соответствует случаю, когда принципал ровно N_s раз учел истинное значение F_s и $N - N_s = N_w$ раз — значение F_w, и, как следствие, среднее значение ценности снова несмещенное, то есть $\mathbb{E}V_{Av} = p\mathbb{E}_s V_s + (1-p)\mathbb{E}_w V_w = (N_s \mathbb{E}_s V_s + N_w \mathbb{E}_w V_w)/N$.

2.1.3 Задача оптимизации принципала

Теперь, зафиксировав формат аукционов и возможные степени информированности аукциониста, можно формально определить задачу оптимизации.

Далее, я буду следовать подходу Майерсону из [60], при котором весь анализ будет проводиться в терминах прямых механизмов, то есть функций размещения и функций платежей $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{M})$. На самом деле для анализа будет использоваться соответствующая приведенная форма, то есть набор функций ожидаемых вероятностей получить товар $\boldsymbol{q} = \{q_i\}_{i \in \mathcal{N}}$, (см. параграф 1.2.2 или [48, p.67])[3].

Таким образом, истинное значение ожидаемого дохода в ситуации с двумя классами участников при выставленной ненулевой резервной цене R составит:

$$\mathbb{E}[\mathcal{R}] = \sum_{i \in N} \int_R^\omega \psi_i(v_i) f_i(v_i) q_i(v_i)\, dv_i. \tag{2.1}$$

Здесь важно отметить, что данную величину принципал может оценить, например, в случае (D) (то есть $\mathbb{E}[\mathcal{R}] = \mathbb{E}[\mathcal{R}^D]$), когда он обладает полной детальной информацией о множестве участников. Кроме того, в случае анонимного формата (An) данная оценка тоже доступна для аукциониста, для этого лишь надо воспользоваться независимостью ценностей участни-

[3] Напомню, что в силу ограничений (CC) и (ИР) функции ожидаемых платежей, $\boldsymbol{m}$, определены согласно (1.1) через $\boldsymbol{q}$.

ков и сгруппировать очевидным образом интегралы:

$$\mathbb{E}[\mathcal{R}] = \sum_{i \in N} \int_R^\omega \psi_i(v_i) f_i(v_i) q_i(v_i)\, dv_i =$$
$$N_s \int_R^\omega \psi_s(v_s) f_s(v_s) q_s(v_s)\, dv_s + N_w \int_R^\omega \psi_w(v_w) f_w(v_w) q_w(v_w)\, dv_w = \mathbb{E}[\mathcal{R}^{An}].$$

При этом можно показать, что в случае (Pr) и (An) для подсчета истинной оценки $\mathbb{E}[\mathcal{R}]$ у принципала недостаточно информации. Поэтому принципал будет оперировать с другой оценкой и получит другое значение для оптимальной резервной цены. Касательно данного феномена я могу утверждать следующий результат.

Теорема 2. *Оптимальные значения резервных цен и значения ожидаемой прибыли при них совпадают в случаях (D) и (An):*

$$R^D = R^{An}, \qquad \mathbb{E}[\mathcal{R}^D] = \mathbb{E}[\mathcal{R}^{An}],$$

и также совпадают для пары случаев (Pr) и (Av):

$$R^{Pr} = R^{Av}, \qquad \mathbb{E}[\mathcal{R}^{Pr}] = \mathbb{E}[\mathcal{R}^{Av}].$$

Формальное доказательство данной теоремы можно найти в разделе Приложение. Сам результат является лишь следствием того, что математические формулировки оптимизационных задач в соответствующих парах случаев оказываются идентичными. Для пары (D) и (An) это наиболее очевидно и уже было показано выше. Суть данного факта состоит в том, что раз мы ограничили принципала возможностью использовать только простой формат аукциона (то есть определенным образом зафиксировали вид функций q_i) и правом устанавливать только одну единую резервную цену R на всех, то для точной оценки истинного значения ожидаемой прибыли достаточно информации об истинных распределениях F_s и F_w и об агрегированных числах участников того или иного класса (N_s и N_w). Персонализированная информация в данной ситуации оказывается бесполезной для аукциониста.

Технически само утверждение теоремы может показаться простым и ясным, но практическое следствие здесь более весомо. Теорема утверждает на самом деле, что в описанной ситуации с простыми форматами аукционов знание истинных распределений разных классов участников никак не увеличивает возможную прибыль аукциониста до тех пор, пока не станет известна некоторая дополнительная информация про участников, пришедших на аукцион. Аукционист может извлечь максимальную прибыль только в случае, когда ему доступна информация о точном числе участников конкретных классов. При этом любую более детальную информацию (например, информацию о персональной принадлежности к одному из классов) аукционист не может использовать для дальнейшего увеличения прибыльности его аукциона.

Таким образом, в дальнейшем я буду сравнивать лишь случаи (An) и (Av), так как в терминах оптимальных резервных цен и соответствующих истинных ожидаемых прибылей оставшиеся случаи эквивалентны этим двум.

2.2 Асимметричный аукцион второй цены

2.2.1 Теоретический результат

Здесь я покажу результат, который сравнивает оптимальные значения резервных цен при соответствующих степенях информированности аукциониста и устанавливает их упорядоченность.

Для простоты изложения я буду предполагать здесь, что определенное выше усредненное распределение F_{Av} является регулярным. На деле, достаточно требовать лишь регулярности в смысле существования лишь одного корня внутри интервала (R_w, R_s), где R_w и R_s есть корни функций виртуальной ценности для слабого и сильного классов покупателей соответственно. Формальное описание свойств функций распределения ценности покупателей, при которых такая регулярность для усредненного распределения имеет место, составляет отдельную задачу. На практике же подобное свойство реализуется часто.

Тогда при всех выше описанных предположениях я могу сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть R^{An} и R^{Av} есть оптимальные значения резервных цен для анонимного и усредненного случаев соответственно. Кроме того, пусть R_w и R_s есть оптимальные резервные цены (то есть нули соответствующих функций виртуальных ценностей) для моделей, в которых все участники слабые или сильные соответственно.*

Если предположить, что $F_s \succcurlyeq_{hr} F_w$ и что F_{Av} регулярна, то можно показать, что

$$R_w \leq R^{Av} \leq R^{An} \leq R_s.$$

Здесь я покажу основные моменты доказательства этой теоремы. Полное доказательство можно найти в разделе Приложение, Леммы 6,7,8, при этом данный результат является частным случаем Леммы 8.

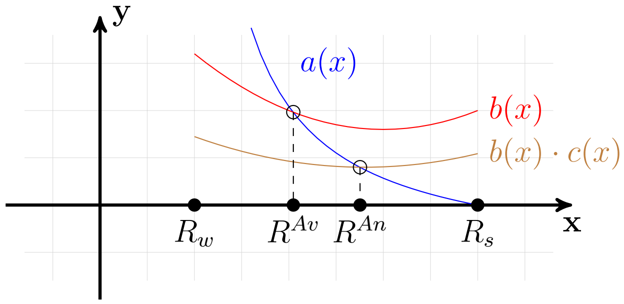


Рисунок 2.1: $a(x) = -\left(\frac{N_s}{N_w}\right)\frac{\psi_s(x)}{\psi_w(x)}$, $b(x) = \frac{f_w(x)}{f_s(x)}$, $c(x) = \frac{q_w(x)}{q_s(x)}$.

Оптимальное значение резервной цены должно максимизировать ожидаемую прибыль аукциониста при условии фиксированного случая информированности. Для истинного ожидания прибыли (2.1) условие первого порядка для экстремумов записывается следующим образом.

$$\frac{\partial}{\partial R}\mathbb{E}[\mathcal{R}] = -\sum_{i\in N}\psi_i(R)f_i(R)q_i(R) = 0. \tag{2.2}$$

В случае усредненного распределения соответствующее условие первого порядка может быть записано как

$$\frac{\partial}{\partial R}\mathbb{E}[\mathcal{R}^{Av}] = -N_s\psi_s(R)f_s(R)q_s^{Av}(R) - N_w\psi_w(R)f_w(R)q_w^{Av}(R) = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $q_\cdot^{Av}$ есть соответствующие оценки аукциониста для функций ожидаемой вероятности выиграть товар участником некоторого класса в ситуации, когда аукционист обладает лишь усредненной информацией. Легко понять, что $q_s^{Av}(R) \equiv q_w^{Av}(R)$, и мы можем опустить верхние и нижние индексы для простоты, обозначив эту функцию как $q(R)$.

Очевидно, что $\forall R \in [0,\omega)$ и $\forall v \in (R,\omega)$ $q(v) > 0$; и благодаря предполагаемой регулярности исходных распределений ясно, что функция $\delta\psi_s(v)f_s(v) + (1-\delta)\psi_w(v)f_w(v)$ для произвольного $\delta \in (0,1)$ может принимать нулевое значение только внутри интервала (R_w, R_s).

Для сравнения с анонимным случаем перепишем уравнение (2.3) в следующую эквивалентную форму[4].

$$-\left(\frac{N_s}{N_w}\right)\frac{\psi_s(R)}{\psi_w(R)} = \frac{f_w(R)}{f_s(R)}. \tag{2.4}$$

Теперь перейдем к рассмотрению анонимного случая (An). Здесь аукционист знает точное количество сильных и слабых участников и вид функций распределения F_w и F_s. По-

[4] Эквивалентность данных уравнений верно лишь внутри интервала (R_w, R_s), где соответствующие функции виртуальных ценностей не обращаются в ноль, и в предположении, что рассматриваемые распределения имеют строго положительные плотности на интервале $(0,\omega)$.

этому функции ожидаемых вероятностей выиграть аукцион для участников разных классов $q_s(v)$ и $q_w(v)$ теперь будут отличаться друг от друга, что является существенным отличием от усредненного случая. Кроме зависимости от истинных F_w и F_s данные функции ожидаемых вероятностей обладают зависимостью от значений количества участников соответствующих классов N_s и N_w.

Соответствующее выражение для ожидаемой прибыли и условия первого порядка будут выглядеть здесь следующим образом.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{R}^{An}] &= \int_R^{\omega} N_s\psi_s(v)f_s(v)q_s(v) + N_w\psi_w(v)f_w(v)q_w(v)\,dv,\\ \frac{\partial}{\partial R}\mathbb{E}[\mathcal{R}^{An}] &= -N_s\psi_s(R)f_s(R)q_s(R) - N_w\psi_w(R)f_w(R)q_w(R) = 0.\end{aligned}$$

Тут как и ранее, $\forall R \in [0,\omega)$ и $\forall v \in (R,\omega)$ $q_s(v) > 0$ и $q_w(v) > 0$. Поэтому в силу аналогичных утверждений можно выписать условие первого порядка в эквивалентной форме:

$$-\left(\frac{N_s}{N_w}\right)\frac{\psi_s(R)}{\psi_w(R)} = \frac{f_w(R)}{f_s(R)}\frac{q_w(R)}{q_s(R)}. \tag{2.5}$$

Наиболее простым сравнением оптимальных значений R^{Av} и R^{An} является случай, когда эти значения резервных цен являются единственными корнями уравнений (2.4) и (2.5) соответственно. Тогда легко увидеть (см. Рис.2.1), что $R^{Av} \leq R^{An}$ в случае, когда отношение функций ожидаемых вероятностей выиграть аукцион сильным и слабым участниками из правой части уравнения (2.5) всегда меньше единицы. Другими словами, необходимо лишь установить довольно естественный результат, что условное ожидание вероятности выиграть аукцион слабым участником меньше, чем условное ожидание вероятности выиграть аукцион сильным игроком, если оба игрока имеют одинаковые значения ценностей. Доказательство данного факта в частности и устанавливается в разделе Приложение Леммой 8.

Вообще говоря, требование единственности решения уравнения (2.5) внутри (R_w, R_s) при известной регулярности усредненного распределения F_{Av} необязательно. Действительно, в силу регулярности исходных распределений, а значит и функций ψ_s и ψ_w, отношение $-\psi_s(R)/\psi_w(R)$ есть функция убывающая по R внутри интервала (R_w, R_s); следовательно, все возможные корни уравнения (2.5) будут всегда не меньше, чем единственный корень R^{Av} уравнения (2.4). Поэтому среди множества возможных корней, выбрав значение R^{An} с помощью условия второго порядка или простым сравнением значений функции $\mathbb{E}[\mathcal{R}^{An}](R)$, снова получим тот же результат.

Теорема по сути утверждает, что знание структуры (N_s, N_w) множества участников позволяет аукционисту увеличить ожидаемую прибыльность за счет уточнения (в большую сторону) оптимального значения резервной цены. Для интерпретации полученного результата я воспользуюсь результатами параграфа 1.3. А именно, напомню, что ожидаемая прибыль с участника есть взвешенная согласно (1.7) функция общей прибыли. Кроме того, в случае регулярных задач оптимальное значение резервных цен определялось как максимум соответствующей функции общей прибыли $\mathrm{rv}(v) = v(1 - F(v))$. Поэтому я приведу аналогичные рассуждения применительно к нашим асимметричным случаям.

Начну с усредненного случая, так как он является аналогом симметричной модели, поэтому проще всего допускает преобразование к соответствующему виду. Преобразую следующим образом выражения для ожидаемой прибыли $\mathbb{E}[\mathcal{R}^{Av}]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{R}^{Av}] =& N_s \int_R^\omega \psi_s(v) f_s(v) q(v)\, dv + N_w \int_R^\omega \psi_w(v) f_w(v) q(v)\, dv = \\ N_s \int_0^\omega \mathrm{rv}_s(v)\, dq(v; R) + N_w \int_0^\omega &\mathrm{rv}_w(v)\, dq(v; R) = N \int_0^\omega \mathrm{rv}_{Av}(v)\, dq(v; R).\end{aligned}$$

Здесь $\mathrm{rv}_{Av}(v) = p\mathrm{rv}_s(v) + (1 - p)\mathrm{rv}_w(v)$. Таким образом, конкретный вид структуры (N_s, N_w) влияет на значение rv_{Av} таким же образом, как и на значение функции F_{Av} (через обычное арифметическое усреднение). При этом надо понимать, что максимум функции rv_{Av} зависит от (N_s, N_w), а значит и от числа участников N. То есть можно подумать, что значение оптимальной резервной цены R^{Av} зависит от числа участников, что идет в разрез с известным результатом из симметричных аукционов о независимости оптимальной резервной цены от числа участников. С другой стороны, присутствует зависимость значения R^{Av} от доли p сильных участников среди всего множества. Поэтому в некотором смысле здесь также имеет место независимость от числа участников аукциона, но при фиксированной доле p.

Так как мы рассматриваем простой вид механизма, аукцион, то $q(v)$ есть эффект от присутствующего уровня конкуренции[5]. И как мы видели в 1.3 единственно возможным способом повлиять на вид $q(v)$ в аукционе второй цены у принципала является ненулевая резервная цена R, которая по сути порождает модифицированную функцию $q(v; R)$, гарантируя

[5] В условиях нулевой конкуренции и нулевой резервной цены, $q(v) \equiv 1$. Сам эффект в присутствии конкуренции заключается в уменьшении значения условной вероятности $0 < q(v) < 1$, и чем больше уровень конкуренции, тем меньше значение $q(v)$. С другой стороны, взвешивание функции общего дохода в (1.7) происходит $\propto dq(v)$, то есть пропорционально изменению (увеличению) в вероятности победить при увеличении своей ценности на dv при заданном уровне конкуренции. Таким образом, взвешивание зависит от уровня конкуренции. При нулевых конкуренции и резервной цене, взвешивание происходит с нулем.

$\mathbb{E}[\mathcal{R}^{Av}] \geq \mathrm{rv}_{Av}(R)q(R)$. И как мы уже знаем, оптимальным значением в регулярной задаче является корень $[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\mathrm{rv}_{Av}]^{-1}(0)$.

С другой стороны, если попытаться аналогично преобразовать выражение ожидаемой прибыли для анонимного случая, то получим следующее.

$$\mathbb{E}[\mathcal{R}^{An}] = N_s \int_R^\omega \psi_s(v) f_s(v) q_s(v)\, dv + N_w \int_R^\omega \psi_w(v) f_w(v) q_w(v)\, dv =$$
$$N_s \int_0^\omega \mathrm{rv}_s(v)\, dq_s(v;R) + N_w \int_0^\omega \mathrm{rv}_w(v)\, dq_w(v;R).$$

В связи с различными функциями ожидаемой вероятности q_s и q_w свести выражение к виду $N \int_0^\omega \mathrm{rv}_{An}(v)\, dq(v;R)$ без дополнительных определений не удается[6].

В усредненном случае оптимальная резервная цена есть максимум усредненной функции общего дохода rv_{Av}. При этом в определении оптимального значения резервной цены в анонимизированном случае существенным фактором является различие в функциях q_s и q_w, а значит, различие в уровнях конкуренции для сильного или слабого участников.

Как было доказано выше, оптимальная резервная цена R^{An} больше своего симметризованного аналога R^{Av}. То есть эффект от разницы в уровнях конкуренции для слабого и сильного участников должен играть в пользу смещения оптимума от R^{Av} в большую сторону, ближе к R_s. Такое может возникнуть, если эффект резервной цены от сильного участника, то есть эффект на слагаемое $N_s \int_0^\omega \mathrm{rv}_s(v)\, dq_s(v)$, будет перевешивать эффект от слабого (так как известно, что оптимум $\mathrm{rv}_s(v)$ лежит правее, чем оптимум $\mathrm{rv}_w(v)$). Ровно это и происходит в силу доказанного утверждения, что $q_s(v) \succ q_w(v)$, то есть уровень конкуренции для сильного меньше, а значит эффект от резервной цены больше.

В итоге можно утверждать, что точное знание структуры покупателей (N_s, N_w) является существенным фактом, позволяющим принципалу оценить разницу в уровне конкуренций для участников из разных классов. И так как слабые участники в меньшей степени составляют собою конкуренцию для сильных, то и итоговое значение оптимальной резервной цены оказывается в большей степени смещено в сторону оптимальной резервной цены для сильного класса R_s, чем в случае обычного усреднения распределений.

[6] Вообще говоря, можно определить некоторую единую функцию q(v), относительно которой и сделать преобразование к $N \int_0^\omega \mathrm{rv}_{An}(v)\, dq(v;R)$. При этом возникли бы поправки в виде dq_s/dq и dq_w/dq внутри определения rv_{An}. В качестве такой единой функции $q(v)$ можно положить одну из имеющихся, например, $q_w(v)$. Тогда $\mathrm{rv}_{An}(v) = p\mathrm{rv}_s(v)dq_s(v)/dq_w(v) + (1-p)\mathrm{rv}_w(v)$, то есть все поправки в этом случае — это корректировка общего дохода от сильных участников с учетом разницы в их уровне конкуренции по отношению к конкуренции других, слабых участников. Сравнительный анализ оптимальных резервных цен в этом случае сводиться к анализу различий между q_s и q_w в зависимости от свойств доминирования между классами.

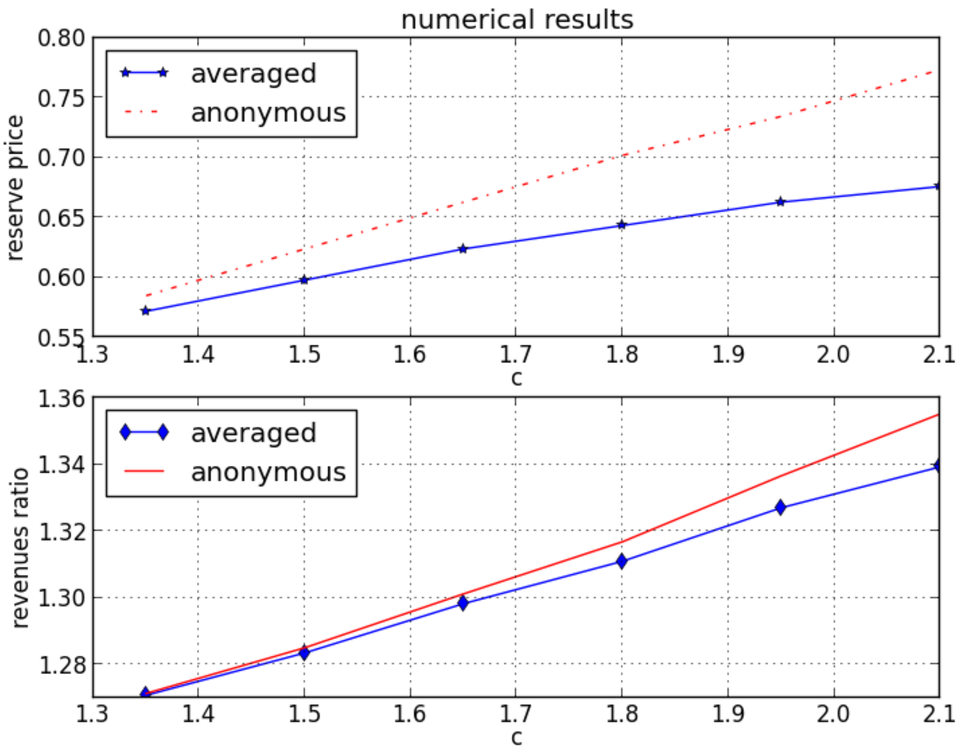
2.2.2 Численные результаты

Выше я показал качественный результат про сравнение оптимальных резервных цен при различных степенях информированности аукциониста. Здесь я покажу численные результаты сравнения эффектов от возможной асимметрии участников на величины самих резервных цен и на соответствующие приросты в ожидаемых прибылях. Все расчеты были произведены численно для различных параметрических семейств распределений ценностей: равномерных распределений с различными носителями и степенных распределений с разными показателями степени. Кроме того, варьировались возможные структуры множества участников (N_s, N_w).

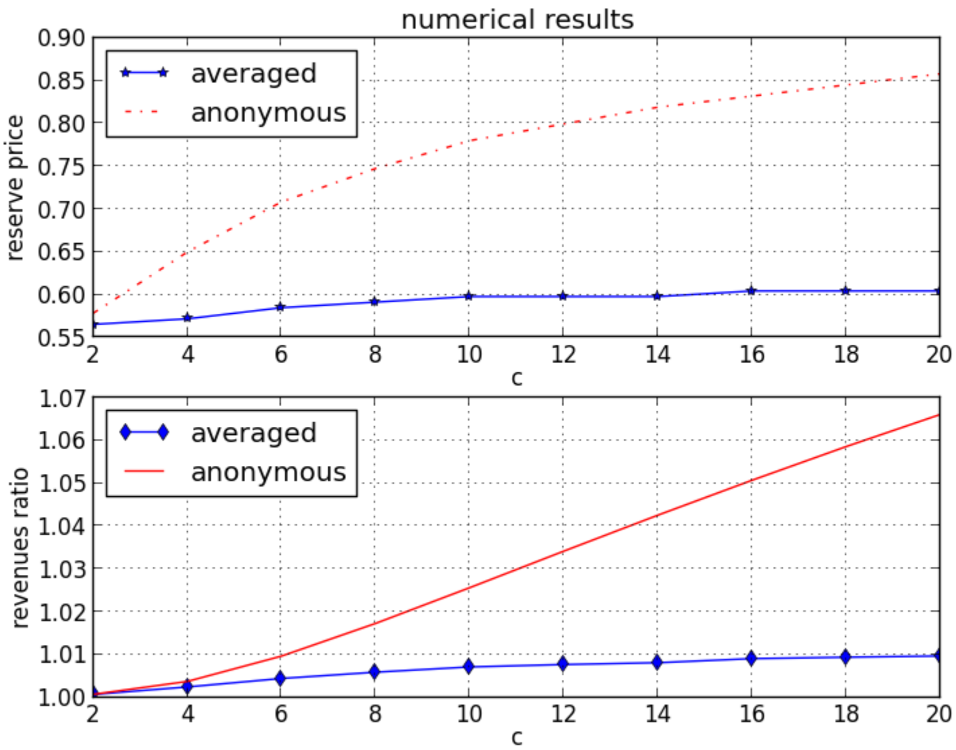
Примеры типичных результатов численных экспериментов представлены на Рис. 2.2a и Рис. 2.2b. Как было отмечено выше, для сравнения достаточно рассмотреть два различных информационных случая: (Av) и (An). На всех представленных графиках на оси абсцисс отложено значение параметра c, который играет роль параметра асимметрии (чем больше его значение, тем больше разница в распределениях различных классов участников). На оси ординат представлены значения оптимальных резервных цен (reserve price) и значения прироста в ожидаемой прибыли от введения соответствующей оптимальной резервной цены относительно ожидаемой прибыли аукциониста при нулевой резервной цене (revenue ratio).

При дизайне численного эксперимента учитывались две основные идеи. Первая и наиболее естественная, это получить количественные оценки эффекта от возможной асимметрии и от дополнительной информации в виде точного знания (N_s, N_w). Другая идея заключалась в том, чтобы попутно оценить зависимость между величиной асимметрии и эффектом как на разницу в оптимальных резервных ценах, так и на разницу в приростах прибыльности. Поэтому семейства распределений выбирались из одного параметрического класса и параметризовывались одним параметром c.

Как видно из представленных здесь графиков, значения оптимальных резервных цен растут с увеличением параметра асимметрии, что является довольно естественным результатом. Кроме этого, разница в значениях резервных цен для различных информационных случаев также увеличивается с ростом асимметрии. Результаты согласуются с теоретическими утверждениями, что значения резервной цены и соответствующей прибыли больше в случае большей степени информированности аукциониста. При этом в случае степенных распределений, где разница между классами может достигать существенно больших значений, эффект от знания (N_s, N_w) оказывается весомым. Как итог множества численных экспериментов можно утверждать, что эффект от дополнительной информации часто является существенным, а порой критичным.



(a) Пример равномерных распределений: $F_w = U[0,1]$, $F_s = U[0,c]$, для $c > 1$. Здесь $N_s = N_w = 1$ — то есть рассматривается аукцион с 2 асимметричными участниками.



(b) Пример степенных распределений: $F_w(x) = x^{1/c}$, $F_s(x) = x^c$, $x \in (0,1)$. Здесь $N_s = 1$, $N_w = 5$ — то есть рассматривается аукцион с 6 участниками: 1 сильным и 5 слабых.

Рисунок 2.2: Пример результатов численных экспериментов.

2.2.3 Вспомогательные вопросы

Здесь я бы хотел обсудить возможные вопросы касательно некоторых сделанных мною в начале главы предположений.

Начну с технических предположений касательно функций распределения. На первый взгляд, сильно ограничивающими кажутся предположения про абсолютную непрерывность, про связность носителей рассматриваемых распределений и про общий носитель для потенциально разных классов участников. Напомню, что предположение про непрерывность и положительность распределений было использовано и в фундаментальной работе Майерсона [60]. При этом, на мой взгляд, данное предположение играет в первую очередь упрощающую роль в строгом формальном описании результатов. Возможные обобщения на эту тему можно найти в работах [70, 71], где все основные результаты про оптимальный механизм сохраняются, невзирая на возможную дискретную природу распределений ценностей.

Предположение про одинаковый носитель распределений ценностей участников из разных классов тоже является скорее упрощающим описание результатов и их доказательств и не является сильно критичным. Действительно, можно рассмотреть два непрерывных распределения с отличающимися носителями, но со свойством упорядоченности согласно стохастическому доминированию относительно функции отказов, $F_1 \succcurlyeq_{\mathbf{hr}} F_2$. Тогда, можно построить сколь угодно близкую к одному из распределений непрерывную аппроксимацию с сохранением свойства доминирования, к которой все выше описанные результаты будут применимы, Рис. 2.3 (Утверждение 3 в разделе Приложение, серая область на увеличенном фрагменте рисунка может быть сделана сколь угодно малой). На практике этого факта, как правило, достаточно, а формальное доказательство с помощью предельного перехода от аппроксимации к оригинальному распределению кажется техническим упражнением.

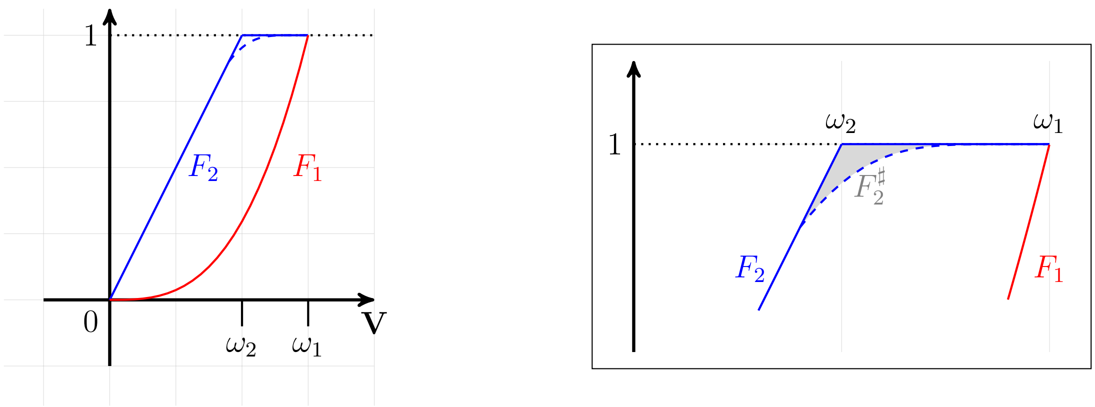


Рисунок 2.3: Пример распределений с разными носителями и возможной аппроксимации, сохраняющей свойство доминирования.

Последнее предположение, которое я собираюсь здесь обсудить, есть ограничение количества различных классов участников парой классов: сильный и слабый. Технически не возникает сложности обобщить полученные результаты и на многоклассовую модель с $M > 2$ классами. Для этого лишь надо определить соответствующие экстремальные значение резервных цен $\{R_i\}_{i=1}^M$ вместо пары $\{R_w, R_s\}$. Затем определить минимальную $\inf\{R_i\}_{i=1}^M$ и максимальную $\sup\{R_i\}_{i=1}^M$, которые будут выступать в роли прежних $\{R_w, R_s\}$ как края интервала, содержащего оптимальные значения $R_{\boldsymbol{a},N}^{Av} \leq R_{\boldsymbol{a},N}^{An}$. При этом следует отметить, что здесь немного усложняется картина относительно того, в какую сторону будут смещаться значения $R_{\boldsymbol{a},N}^{Av} \leq R_{\boldsymbol{a},N}^{An}$ при изменениях в исходных распределениях ценностей участников из разных классов.

Таким образом, большинство предположений про функции распределения ценностей участников аукциона не являются критичными. Эти предположения могут быть ослаблены с сохранением полученных выше результатов.

2.3 Обобщения на многотоварный случай

2.3.1 Многотоварный случай и единичный спрос

Полученный в предыдущем параграфе результат оказывается можно распространить и на случай многотоварных аукционов, но с единичным спросом. Многотоварные аукционы в своем общем виде принято называть *комбинаторными*. Хорошим и коротким введением в результаты общей теории комбинаторных аукционов может служить обзор [17]. Здесь хочется отметить работу [75], которая при определенных предположениях о структуре спроса дает ответ на вопрос об оптимальном многотоварном механизме. Частным случаем, отвечающем упомянутым предположениям о структуре спроса, является единичный спрос, что позволяет говорить об оптимальности обобщенного аукциона второй цены или позиционного аукциона с правильно определенной резервной ценой, [23].

Но прежде, чем переходить к обобщению результатов, я напомню, что такое многотоварный аукцион с единичным спросом.

Как следует из названия, многотоварный аукцион - есть аукцион, где принципал желает выставить на продажу несколько единиц товара. При этом покупатели могут хотеть купить только один товар или определенный набор товаров. В случае, когда мы говорим о единичном спросе, мы подразумеваем, что любой покупатель заинтересован лишь в одном товаре или по неким внешним причинам может претендовать на покупку только одного товара. Именно такая ситуация подразумевается под свойством многотоварность и условием единичного спроса.

Ниже я рассмотрю два обобщения аукциона второй цены: аукцион с равномерной ценой и позиционный аукцион. Оба примера являются многотоварными аукционами с единичным спросом, но отличаются по одному принципу: свойству продаваемых объектов.

В аукционе с равномерной ценой предполагается, что все товары идентичны. Таким образом, участники не делают никаких различий между возможными товарами. В позиционном аукционе все объекты могут отличаться друг от друга, то есть участники будут предпочитать один объект другим. Для того, чтобы формально описать свойства предпочтений участников будем использовать определенный ранее вектор качества $\boldsymbol{\alpha}$ из Параграфа 1.1.2.

Напомню, что объект с качеством $\alpha_1 = 1$ считается наиболее качественным. При этом случай идентичных объектов можно описать тривиальным вектором качества $\boldsymbol{\alpha} = 1..10..0$. Ясно, что коэффициент качества α_i является лишь коэффициентом, упорядочивающим предпочтения участников, поэтому их определение эквивалентно с точностью до нормировки, которуая в данной работе определяется условием $\alpha_1 = 1$.

2.3.2 Аукцион равномерной цены

Здесь речь пойдет о многотоварном аукционе с единичным спросом и с K гомогенными объектами на продажу, то есть $\boldsymbol{\alpha} = \underbrace{111..1}_{K}00..0$.

Опишу формат данного аукциона. Аукцион проводиться в закрытой форме. Каждый участник делает ставку b_i и приватно сообщает ее аукционисту. Аукционист размещает K товаров среди участников, сделавших наибольшие K ставок. При этом каждый из победивших участников платит одинаковую стоимость, равную $(K+1)$-ой по величине ставке $b_{(K+1)}$[7]. Случай, когда количество участников меньше или равно количеству объектов эквивалентно случаю аукциона второй цены с одним участником. И здесь вновь роль резервной цены является критичной (ясно, что в случае ненулевой резервной цены R ставки меньшие R не влияют на функцию размещения, то есть не рассматриваются принципалом; а платеж определяется как и ранее, но с поправкой на величину резервной цены, то есть равен $\max\{R, b_{(K+1)}\}$).

Важным свойством данного вида обобщения является тот факт, что здесь вновь существует равновесие для асимметричных участников (более того, оно является симметричным «правдивым» равновесием в слабо доминирующих стратегиях, то есть $\beta^{\star}_{II}(v) = v$). Поэтому

[7]Вообще говоря, здесь формат может быть определен и иначе. Общим требованием к данному формату является следующее ограничение на величину платежа: платеж не должен превосходить (K)-ую по величине ставку и не быть меньше, чем $(K+1)$-ой по величине ставка.

возможен аналогичный анализ через прямые механизмы с одним лишь обобщением, касающегося ограничения на объем имеющихся ресурсов. Здесь принципал обладает K объектами на продажу вместо одного, поэтому соответствующее ограничение на функцию размещения будет выглядеть следующим образом.

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} Q_i(\vec{v}) \leq K.$$

Следующая теорема сравнивает значения оптимальных резервных цен для случаев (Av) и (An) в зависимости от общего числа товаров K.

Теорема 4. *Пусть R_K^{An} иR_K^{Av} есть оптимальные значения резервных цен для анонимизированного и симметризованного случаев соответственно в аукционе равномерной цены с K идентичными объектами на продажу.*

Тогда, для любого $1 \leq K \leq N$ имеем,

$$R_K^{Av} = R^{Av},$$

и, более того, для любого $1 \leq K \leq N - 1$,

$$R_K^{An} \geq R_{K+1}^{An} \geq R_N^{An} = R^{Av}.$$

Формальное доказательство можно найти в разделе Приложение, см. Лемма 8.

По сути данный результат есть прямое обобщение результата для однотоварного аукциона второй цены (Теорема 3) в смысле утверждения $R_K^{An} \geq R_K^{Av}$. Поэтому интуиция данного результата повторяется интуицией для аукциона второй цены (см. предыдущий параграф).

При этом теорема утверждает дополнительный результат касательно сравнения резервных цен в аукционах с разным количеством объектов, но одинаковым набором участников, $R_K^{An} \geq R_{K+1}^{An}$. Данный феномен требует дополнительного осмысления.

Напомню, что причиной увеличенного значения оптимальной резервной цены в (An) случае служила известная аукционисту разница в разных уровнях конкуренций для слабого и сильного участников. Здесь данная разница также присутствует и объясняет первый результат. Кроме этого, мы видим, что эффект от этой разницы в конкуренции уменьшается с ростом числа объектов на продажу и нивелируется в случае $K = N$. Действительно, с увеличением числа объектов на продажу каждому участнику становится все проще получить товар, то есть уровень конкуренции уменьшается. При этом относительная разница в уровнях конкуренции для участников разных классов будет тоже уменьшаться и совсем исчезает, когда исчезает конкуренция (см. Лемма 2, параграф 1.3.2).

Этот результат согласуется с естественной интуицией в следующем примере. Когда имеется асимметрия в силе участников некоторого соревнования, то свойство «быть сильным» дает больший выигрыш в вероятности события «быть первым», чем в случае события «быть среди лучших M участников» (это особенно очевидно, если сильных участников мало).

Этот же феномен можно трактовать через свойства объектов. Можно попытаться дать определение *эксклюзивности* объекта на продажу. Ясно, что эксклюзивность объекта должна быть пропорциональна, например, разности $N - K$ или отношению N/K, отображая при этом меру неудовлетворенности спроса. Тогда, можно говорить, что с падением эксклюзивности объекта продажи разница в конкурентной способности слабого и сильного участников также падает, что и объясняет уменьшение разницы в резервных ценах для анонимизированного и симметризованного случаев.

2.3.3 Позиционный аукцион

Здесь речь пойдет о результатах для позиционного аукциона. Но сначала, я опишу область применения данного формата и сам формат.

За последнюю декаду лет рынок интернет-рекламы, как и рынок электронной коммерции в целом, вырос до огромных размеров. При этом структура рынка изменялась значительно и

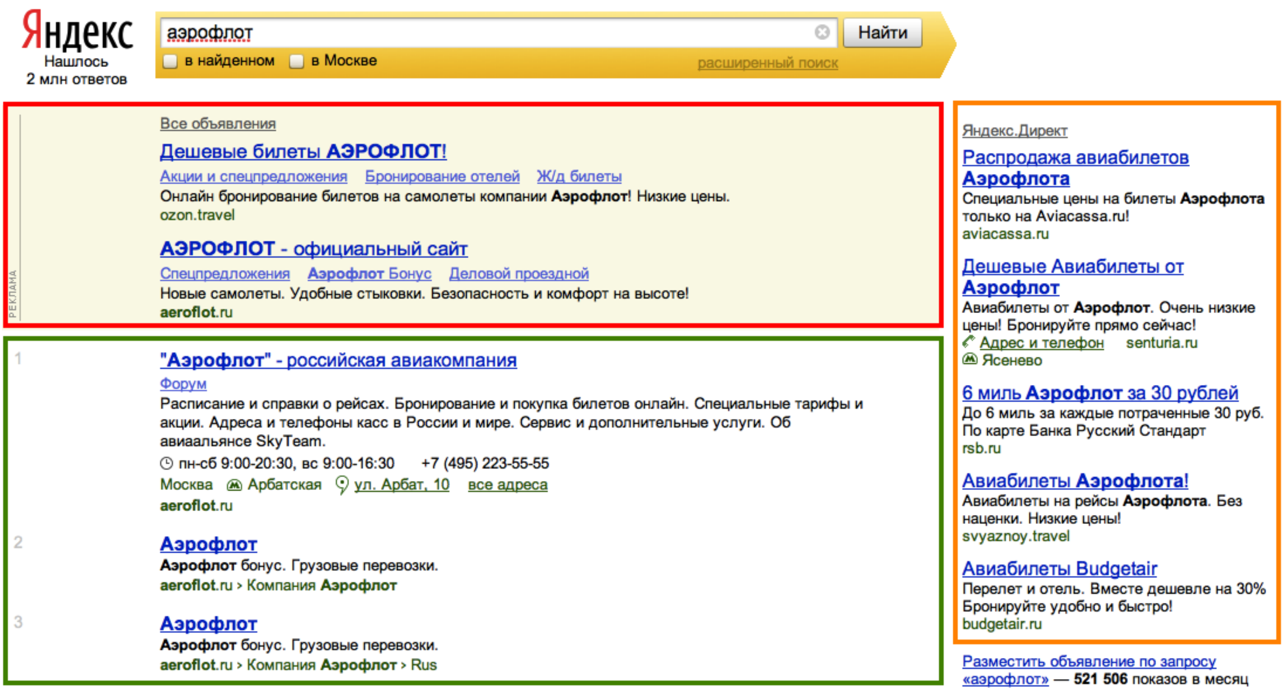


Рисунок 2.4: Структура страницы результатов поиска.

продолжает меняться. В данной работе важным примером является рынок контекстной рекламы, то есть рекламы, привязанной к основному содержанию интернет-страницы (в последнее время, «привязка» может происходить и к интересам интернет-пользователей, если это заранее предусматривает модель продаж).

Большинство интернет поисковиков (Google, Yahoo, Bing, Yandex, Baidu) используют позиционный аукцион (или обобщенный аукцион второй цены, generalized second-price auction, [21, 76]) для размещения рекламы на страницах результатов поиска на пользовательский запрос. Типичный пример возможной структуры страницы с результатами поиска показан на Рис. 2.4, где выделены рамками три различные зоны: сверху (красная) и справа (оранжевая) зоны с рекламными объявлениями и в центре (зеленая) часть области с органическими результатами поисковой системы.

Сложность анализа подобного аукциона в первую очередь вызвана различиями в пользовательском[8] восприятии рекламных и поисковых результатов на странице. Более того, различие в восприятии присутствует и внутри рекламных результатов в связи с разными позициями на странице, где размещается сама реклама[9]. Действительно, вероятнее, что реклама расположенная на более высокой позиции будет замечена пользователем в большем числе случаев, чем реклама на более низкой позиции; аналогичный порядок эффектов возникает между блоками рекламы, расположенных над и справа от органической, поисковой выдачей. На Рис. 2.5 показан типичный пример распределения точек внимания пользователя на странице поисковой выдачи, который согласуется с приведенным рассуждением.

Сам аукцион устроен следующим образом. Рекламодатель в своей рекламной кампании для каждого рекламного объявления (их количество в общем случае не ограничено) указывает список покупаемых им ключевых фраз (например, «доставка пиццы Москва», «авиабилеты в Италию», «салон красоты в Нижнем Новгороде» и т.д..) и список ставок за каждую такую ключевую фразу. Тогда на каждый запрос пользователя в случае наличия соответствующих рекламных ключевых фраз система помимо органической (некоммерческой) выдачи отобразит в блоке над или справа некоторые рекламные объявления. Алгоритмы поиска возможных соответствий могут сильно различаться, процесс отбора рекламных объявлений также скрывает за собой огромное количество дополнительных правил. Технические детали особенностей в реализации алгоритма отбора рекламных объявлений в компании «Яндекс» можно найти в работах [16, 47, 74].

[8] Именно интернет-пользователь является в данном случае потенциальным покупателем для рекламодателей.

[9] В работе [38] подробно описаны результаты экспериментов с использованием технологии отслеживания движения глаз пользователей.

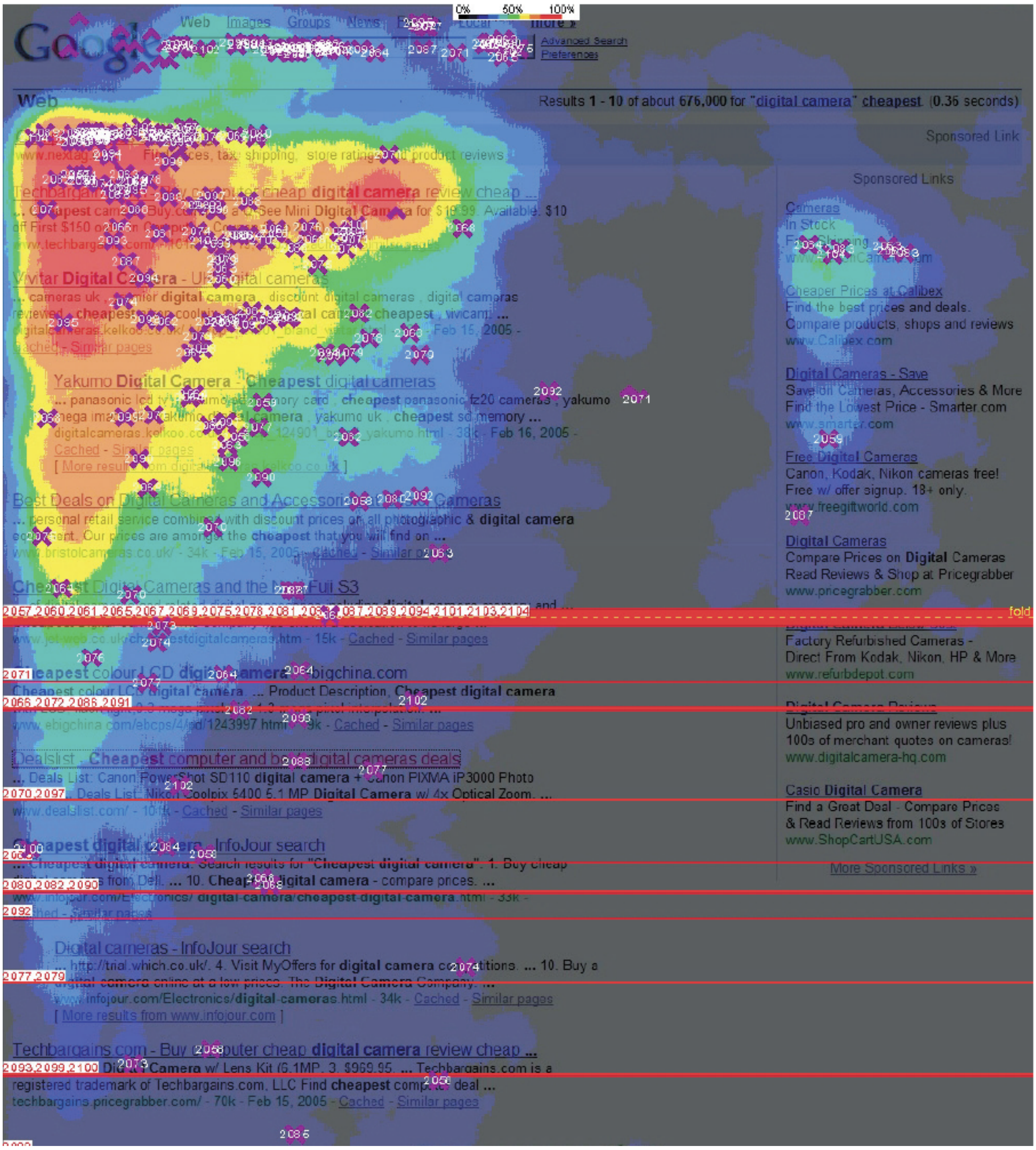


Рисунок 2.5: Типичное распределение точек внимания пользователей, изучающих результаты поиска. Пример взят из работы [38].

Несмотря на то, что большинство компаний на данный момент явно не используют ставку рекламодателя как фактор ранжирования, тем не менее модель позиционного аукциона допускает естественное обобщение на случай ранжирования согласно произведению ставки и некоторой «меры качества», [21]. Поэтому ниже я буду предполагать, что именно величина ставки определяет порядок объявления рекламодателя среди всех конкурентов. Таким образом, наиболее высокая позиция с номером 1 достанется рекламодателю, сделавшему наибольшую ставку; позиция с номером 2 — рекламодателю со следующей по величине ставкой, и т.д.. При этом поисковая система имеет ограничение, что один и тот же рекламодатель может быть показан на странице лишь один раз, то есть здесь возникает непосредственно модель с единичным спросом по причине имеющихся внешних ограничений.

На данный момент практически везде применяется модель продаж «кликов по рекламе», а не показов. То есть рекламодатель платит только в случае клика (или перехода) пользователя по соответствующему рекламному объявлению. При этом, как уже отмечалось выше, реклама на разных позициях обладает разной степенью эффективности с точки зрения рекламодателя и разной степенью «привлекательности» с точки зрения покупателя[10]. Традиционно это различие принято формально определять через позиционные эффекты α_i, которые количественно измеряют относительный выигрыш в итоговой вероятности клика от занимаемой позиции i.

Каким же образом определяются данные позиционные эффекты? Одним из возможных вариантов может быть величина средней частоты кликов ζ_i, приходящихся на позицию i при условии, что объявления выбирались на позицию равномерно случайно. В нашем случае удобнее воспользоваться немного другим вариантом вычисления позиционных коэффициентов. Традиционно принято вводить нормировку так, чтобы позиционный эффект позиции мерился относительно позиционного эффекта первой позиции. В этом случае $\alpha_1 = 1$, а для $i > 1$ получаем, что $\alpha_i = \zeta_i / \zeta_1$.

Как видно из выбранного варианта определения позиционных эффектов α_i, здесь можно применить ранее введенный термин вектора качества и говорить, что вектор качества $\boldsymbol{\alpha}$ позиций на странице поисковой выдачи формируется из значений соответствующих позиционных эффектов. При этом удобно полагать, что количество координат у вектора $\boldsymbol{\alpha}$ совпадает с количеством конкурентов N, но при этом $\forall i > K \quad \alpha_i = 0$, где K количество рекламных мест на странице.

Важным свойство вектора качества $\boldsymbol{\alpha}$ является возможность определить ценности различных объектов, через ценность наилучшего объекта с мерой качества $\alpha_1 = 1$. Случай рекламного аукциона удовлетворяет этому предположению следующим образом. Так как рекламодатели платят только за клики, то естественно предположить, что их ценность определяется в терминах этих кликов[11]. В силу того, что интернет-аукцион — это динамичный аукцион, который повторяется много раз, рекламодатель заинтересован в получении максимально воз-

[10]Привлекательность здесь стоит понимать в следующем смысле: покупатель может и не захотеть кликать по рекламе (сделать переход по соответствующей ссылке), которая расположена выше, но наиболее вероятно, что он изучит данное объявление раньше, чем ниже расположенные объявления. Так как поисковая система обычно ранжирует рекламные объявления в соответствии с вычисленными оценками их релевантности для пользователя, то как следствие этих двух фактов ожидаемое количество кликов с объявления, расположенного выше, будет превышать ожидаемое количество кликов с расположенного под ним объявления.

[11]Надо понимать, что каждый клик по рекламному объявлению есть потенциальный потребитель для рекламодателя. Поэтому естественно предположить, что рекламодатели в состоянии оценить эффективность интернет рекламы и определить ценность возможных потребителей.

можного числа кликов по выгодной для него цене в соответствии с его ценностью. Поэтому ценность позиции i для рекламодателя, есть величина пропорциональная $\alpha_i v_i$, так как на этой позиции он в среднем может получить лишь α_i долю кликов по отношению к первой позиции.

Теперь можно закончить описание позиционного аукциона, перечислив правила размещения и платежей и рассматриваемое равновесие участников. Выше я предположил, что интернет-компании будут определять размещение на основе ставок рекламодателей, поэтому правило размещения можно описать следующим образом. Все рекламные объявления упорядочиваются по убыванию согласно сделанным ставкам $\{b_i\}_{i \in \mathcal{N}}$. Затем позиция с номером j достается объявлению с j-ой по величине ставкой. Чтобы этот аукцион являлся обобщением аукциона второй цены, функция платежей определяется так: цена за клик на позиции j равна ставке объявления на следующей, $(j+1)$-ой позиции (в случае последней позиции с номером K платеж равен $(K+1)$-ой по величине ставке).

Здесь я буду рассматривать равновесие со свойством локального отсутствия зависти такое, что все платежи эквивалентны соответствующему аукциону Викри. Вывод и свойства данного равновесия можно найти в [21]. В работе [76] это же равновесие называется как симметричное равновесие по Нэшу. Я лишь опишу итоговые результат. Пусть $\{v_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ есть множество ценностей участников аукциона, а $\{v_{(i)}\}_{i=1}^N$ – его упорядоченный по убыванию вариант[12]. Одним из известных свойств рассматриваемого равновесия является факт, что величины ставок рекламодателей $\{b_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ будут упорядочены согласно отображению $(i) = j$, определяющего порядок ценностей. Другими словами, участник с наибольшей по величине ценностью сделает наибольшую ставку, участник со второй по величине ценностью — вторую по величине ставку, и т.д.. Пусть $\{p_{(i)}\}_{i=1}^N$ есть множество платежей за клики на соответствующих позициях. Тогда равновесие можно записать следующим образом.

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \quad p_i = \begin{cases} b_{(i+1)}, & i \leq K; \\ 0, & i > K. \end{cases} \quad \gamma_i = \begin{cases} \alpha_i / \alpha_{i-1}, & \alpha_i > 0; \\ 0, & \alpha_i = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{b_{(i)} = v_{(i)} - \gamma_i (v_{(i)} - p_i).} \tag{2.6}$$

Таким образом, модель позиционного аукциона для интернет-рекламы полностью описана. Теперь можно перейти к сравнительному анализу оптимальных резервных цен в разных

[12] Из определения очевидно, что имеет место следующий порядок: $v_{(1)} \geq v_{(2)} \geq \cdots \geq v_{(N)}$. При этом я неявно определяю отображение $(i) = j$, которое указывает на то, какой по величине является ставка j-го участника.

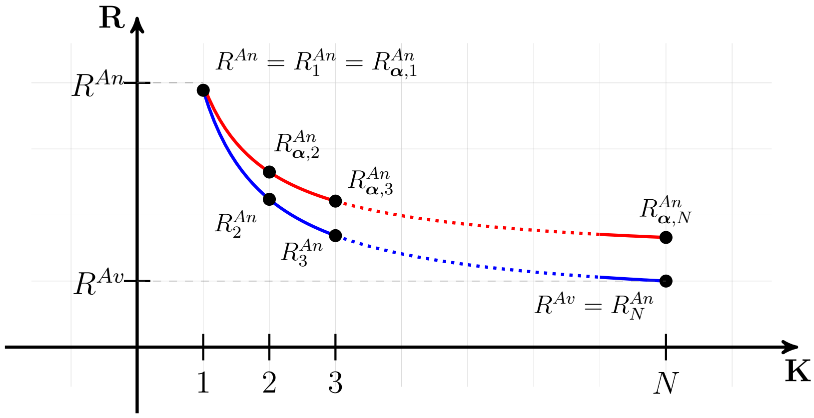


Рисунок 2.6: Оптимальные резервные цены для аукциона равномерной цены и позиционного аукциона в зависимости от числа объектов на продажу.

информационных случаях, которые здесь я буду обозначать как $R_{\boldsymbol{\alpha},K}^{Av}$ и $R_{\boldsymbol{\alpha},K}^{An}$ (дабы подчеркнуть неодинаковость объектов на продажу).

Прежде всего хочу отметить, что в случае (Av), то есть в симметризованной модели, оптимальное значение резервной цены $R_{\boldsymbol{\alpha},K}^{Av}$ естественно будет совпадать с оптимальной резервной ценой из работы [63], где авторы анализировали симметричную модель позиционного аукциона. Более того, в силу доказанных в [23] свойств независимости значения оптимальной резервной цены от количества участников, от количества позиций и от позиционных эффектов, следует, что значения оптимальных резервных цен $R_{\boldsymbol{\alpha},K}^{Av}$, R_K^{Av} и R^{Av} будут совпадать для любого положительного K и любого вектора качества $\boldsymbol{\alpha}$. Всё это объясняется тем, что во всех соответствующих аукционах для симметризованной модели (Av) можно определить одну и ту же усредненную или симметризованную функцию общего дохода rv_{Av}, с помощью которой удается свести задачу поиска оптимальной резервной цены к задаче нахождения максимума функции rv_{Av}.

Теорема 5. *Пусть $R_{\boldsymbol{\alpha},K}^{Av}$ и $R_{\boldsymbol{\alpha},K}^{An}$ есть оптимальные значения резервных цен в обобщенном аукционе второй цены с K объектами на продажу и вектором качества $\boldsymbol{\alpha}$ в случаях (Av) и (An) соответственно.*

Тогда для любого числа объектов $1 \leq K \leq N$ имеем

$$R_{\boldsymbol{\alpha},K}^{Av} = R^{Av},$$

более того, для любого $1 \leq K \leq N-1$,

$$R_{\boldsymbol{\alpha},K}^{An} \geq R_{\boldsymbol{\alpha},K+1}^{An} \geq R_{\boldsymbol{\alpha},N}^{An} \geq R^{Av}.$$

При этом, если сравнить с оптимальной резервной ценой R_K^{An} аукциона равномерной цены, который соответствует вектору $\boldsymbol{\alpha} = \underbrace{111..1}_{K}00..0$, *то имеем*

$$R_{\boldsymbol{\alpha},K}^{An} > R_K^{An}.$$

Доказательство аналогично предыдущему результату, подробности можно найти в разделе Приложение, Следствие к Лемме 8.

Чтобы описать интуицию данному результату по аналогии с аукционом равномерной цены, достаточно воспользоваться небольшой модификацией ранее упомянутого термина *эксклюзивности* объектов на продажу. Идея данного термина остается прежней с одной лишь заменой: данная мера должна учитывать факт неодинаковости объектов, например, через вектор качества[13]. Вообще говоря, здесь можно было бы как и в предыдущем параграфе использовать анализ на языке уровня конкуренции и соответствующей разницы в функциях q_w и q_s, воспользовавшись вновь соответствующим доказанным фактом их параграфа 1.3.2.

[13] Естественным способом обобщения может служить замена числа K на сумму $\sum_i \alpha_i$, тогда эксклюзивность, пропорциональная отношению $N/\sum_i \alpha_i$ или разности $N - \sum_i \alpha_i$, будет учитывать разницу в качестве объектов.

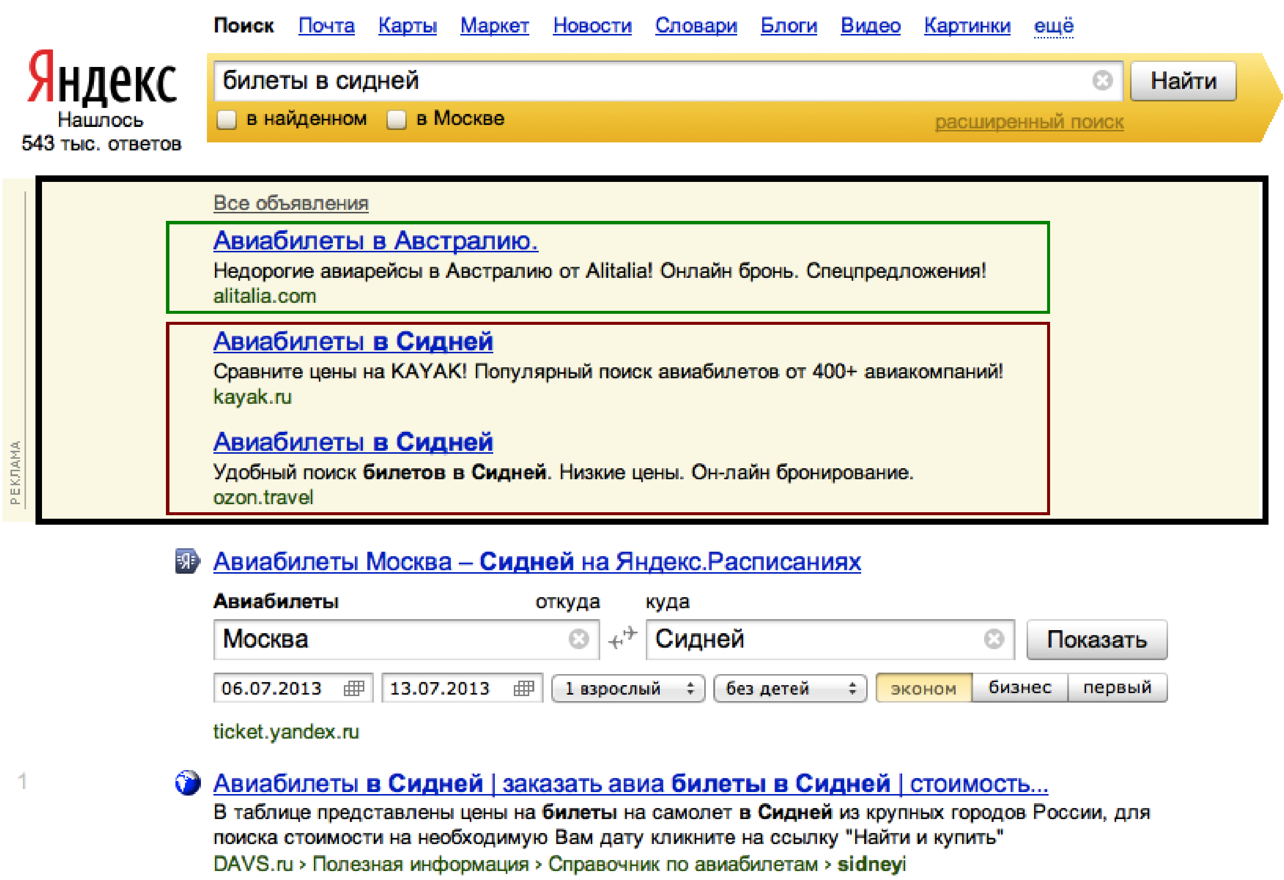


Рисунок 2.7: Пример асимметричных рекламодателей в позиционном аукционе.

Рис. 2.6 показывает результаты всех описанных теорем и сравнивает резервные цены для разных форматов аукционов в зависимости от числа объектов на продажу.

Одним из важных применением Теоремы 5 на практике рекламных аукционов, где часто и довольно естественно возникает асимметрия между участниками, является тот факт, что резервные цены, полученные согласно [63], во многих ситуациях будут оказываться недооцененными в силу сделанного предположения об единой функции распределения ценностей (что является непосредственным аналогом случая (Av)). Природа естественной асимметрии в позиционных аукционах объясняется в первую очередь алгоритмами поиска соответствия пользовательскому запросу ключевых фраз рекламодателя и тем фактом, что часто разные классы рекламодателей покупают одинаковые ключевые фразы. Один из возможных примеров показан на Рис. 2.7, где сначала показано объявление от прямых авиалиний (в зеленой рамке), а затем два объявления от посредников, сайтов агрегаторов (в красной рамке).

Глава 3

Оптимизация рекламных аукционов компании Яндекс

3.1 Реклама на «Яндекс.Поиск»

Прежде, чем говорить про результаты эмпирического анализа, необходимо описать детально прикладную область и свойства данных. Здесь я подробно опишу особенности рекламных аукционов, проводимых в ООО «Яндекс».

3.1.1 Правила аукциона и особенности реализации

В качестве прикладной области результатов данной работы выступает поисковый интернет-сайт Яндекс[1]. Компания имеет несколько видов рекламных сервисов: «Яндекс.Директ», «Яндекс.Маркет», «Яндекс.Справочник» и «Медийная реклама на Яндексе»[2]. При этом основную часть дохода приносит именно Яндекс.Директ: система размещения текстовой контекстной рекламы на поисковых сервисах (далее «на Поиске») и на партнерских сайтах (рекламная сеть Яндекса, далее «РСЯ»). Данный раздел работы посвящен контекстной рекламе на Поиске в силу того, что доход этой части сервиса является наиболее значимым: общий доход компании за 2012 год составил 28,767 млрд. руб из них 71,6% приходится на контекстную рекламу на Поиске[3].

---

[1] `http://yandex.ru`

[2] Подробнее с различными правилами и особенностями всех сервисов можно ознакомиться на сайте компании, `http://advertising.yandex.ru`.

[3] На самом деле, под «Поиском» я понимаю различные сайты портала Яндекс. Но монетизация со страниц результатов поиска составляет более 80% от всей монетизации на Поиске. Финансовые отчеты компании доступны на официальной странице `http://company.yandex.com` в разделе *Financial Releases*.

Структура страницы с результатами поиска была показана выше на Рис. 2.4. Таким образом, на поиске Яндекса различают два рекламных блока: «Специальное размещение», которое отображается над поисковыми результатами (для краткости, я буду обозначать этот блок как СР), и блок «Справа» (краткое обозначение — ЮБ[4]).

Правила рекламного аукциона на Поиске формально можно описать кратко. Рекламодатели для каждого рекламного объявления указывают список купленных фраз, для каждой из которых они делают ставку. В момент, когда пользователь задал запроса системе, формируется множество кандидатов на показ алгоритмами поиска соответствия, затем алгоритмом ранжирования отбираются объявления на показ сначала в СР, а после из оставшихся в ЮБ. Ранжирование происходит согласно произведению сделанных ставок на некоторую меру качества, которая отвечает за оценку вероятности клика пользователя по данному объявлению и за оценку релевантности текстового объявления заданному запросу. Одной из особенностей реализации аукциона в Яндексе является тот факт, что отбор объявлений на показ в блок и определение позиций внутри блока происходят согласно разным характеристикам. На данный момент финальный порядок отобранных объявлений определяется сортировкой по величине ставок (от большего к меньшему, самое дорогое объявление попадает на самую верхнюю позицию).

При этом платеж за клик осуществляется по правилу в духе обобщенного аукциона второй цены. Правило можно сформулировать так: платеж равен минимальной ставке, при которой на данный момент занимаемая позиция была бы сохранена при всех прочих фиксированных значениях. Если бы отбор кандидатов для показа в блок и окончательная их сортировка проводились согласно ставкам или взвешенным на меру качества ρ ставкам, то платеж на позиции k составлял бы, соответственно, $b_{(k+1)}$ или $b_{(k+1)}\rho_{(k+1)}/\rho_{(k)}$[5]. В случае Яндекса формальная запись возможного платежа усложняется в связи с неоднородностью правила отбора: если блок состоит из s позиций, то величина платежа за клик на позиции k равна $\max\{b_{(k+1)}, b_{(s+1)}\rho_{(s+1)}/\rho_{(k)}\}$.

Отдельно стоит сказать, что наиболее прибыльный блок СР обладает дополнительной особенностью в алгоритме формирования. Существует некоторое дополнительное условие для каждого кандидата: его взвешенная ставка должна быть не меньше установленного порога, который, вообще говоря, зависит от величины качества, то есть $b_i\rho_i \geq \mathrm{thr}(\rho_i)$. Подробно о

[4]На момент завершения диссертационной работы в компании Яндекс прошли некоторые визуальные изменения на странице поиска, одним из которых было перемещения блока Справа в нижнюю часть страницы, под поисковые результаты. Поэтому краткое обозначение, принятое внутри компании, отображает смысл «Южный Блок».

[5]Здесь как и ранее b обозначает величину ставки, а отображение $(k) = i$ определяется сортировкой, согласующейся с правилами формирования окончательного списка объявлений.

свойствах данного порога, причинах его присутствия и о возможных его настройках можно прочитать в работах [82, 84], краткое изложение доступно в [16]. Итоговое правило платежа выглядит довольно громоздко в своей формальной записи:

$$p_k = \max\{b_{(k+1)}, \max\{b_{(s+1)}\rho_{(s+1)}, \mathrm{thr}(\rho_{(k)})\}/\rho_{(k)}\}. \tag{3.1}$$

Упомянутый порог можно себе представлять как аналог резервной цены, выраженный в терминах взвешенных ставок ($\rho_i b_i \geq \mathrm{thr}(\rho_i)$). Единственным отличием от классического понятия резервной цены здесь является наличие зависимости от величины качества объявления ρ_i (о методах построения оценок для персональных качеств объявлений ρ_i или `ctr` в Яндексе можно найти в [47, 74, 83]). Известно (см. [82]), что порог обладает свойством монотонного убывания по величине качества ρ_i, иными словами, рекламодателям предоставляется своего рода скидка или льгота на величину заявленной «резервной цены».

Таким образом, ясно, что модель аукциона в «Яндекс.Директ» отличается в реализации от известных классических моделей обобщенных аукционов второй цены. Подробнее о причинах такой реализации и о рекламной политике будет рассказано ниже в параграфе 3.1.3.

3.1.2 Трехстороннее взаимодействие интересов

В случае рекламы на Поиске среди заинтересованных сторон можно выделить три сущности:

(i) поисковая интернет-система[6];

(ii) рекламодатели, которые заинтересованы в размещении контекстной рекламы на Поиске по определенным ключевым фразам;

(iii) пользователи поисковых интернет-систем.

Очевидно, что рекламодатели здесь выступают в роли покупателей. Поисковая компания — в данной ситуации принципал, продающий возможные рекламные места для показа своим пользователям. А сами пользователи — это возможные потребители для рекламодателей, а иными словами, это и есть предмет торгов между принципалом и покупателями.

При этом естественно возникает конфликт интересов всех трех сторон. Рекламодатели в основе своей заинтересованы в эффективном получении максимального количества переходов на их сайты. Под эффективным получением здесь стоит понимать эффективную трату

[6] Естественно, ссылаясь на сервис поиска, я здесь имею в виду компанию, этот сервис разрабатывающую и поддерживающую. В случае данной работы, это компания Яндекс.

имеющегося бюджета рекламодателей на максимально возможное количество кликов, то есть рекламодатели заинтересованы в минимизации средней цены за клик при фиксированном объеме кликов.

С другой стороны, поисковая компания взаимодействует со своими интернет-пользователями, которые приходят за ответами на их запросы. Пользовательские запросы принято классифицировать по главной их цели на три возможных типа [55]: информационные (когда пользователь ищет лишь описательную информацию про некоторый интересующий его объект/место), навигационные (когда цель пользователя найти определенный адрес или ссылку в интернете) и транзакционные (когда пользователь намерен в итоге совершить некоторые транзакции: покупку, бронирование и пр.). Все три типа не являются взаимоисключающими.

Для достижения широкой популярности в интернете поисковая компания должна уметь максимально удовлетворять пользователя с его возможным запросом. В связи с этим принято соблюдать два принципа: (i) ответы должны быть максимально точными и релевантными, и (ii) страница с ответами не должна быть перегружена ненужной информацией. От соблюдения этих двух принципов и зависит то, насколько пользователям легко и приятно использовать поисковую интернет-систему.

Поэтому для возможного размещения рекламных объявлений система должна понимать, насколько в запросе пользователя выражен коммерческий интерес. Ясно, что транзакционные запросы являются, как правило, коммерческими запросами. Про информационные и навигационные однозначно сказать трудно. При этом, если система будет показывать рекламные объявления по всем запросам, то будет нарушаться второй принцип о простоте восприятия страницы результатов поиска (ведь будут часто возникать ситуации, когда пользователь вообще не интересуется никакими покупками или услугами, и реклама будет всегда лишней и бесполезной для него информацией).

Таким образом, поисковая компания должна соблюдать некоторый баланс между двумя своими целями: максимизацией дохода и максимизацией постоянной аудитории среди интернет-пользователей. С последней целью все довольно просто: чем больше аудитория, тем больше возможного трафика для монетизации (объем пользовательских транзакций), тем привлекательнее для рекламодателей является данный поисковый сервис. Про максимизацию дохода важно понимать, что путей увеличить доход существует несколько, и все они сопряжены с определенными трудностями. Простое увеличение цены за клик по рекламному объявлению конфликтует с интересами рекламодателей. Прямое увеличение доли запросов, на которых размещаются рекламные объявления, повлечет недовольство пользователей и сокращение их числа (всегда есть альтернативный интернет-поисковик). Увеличение числа кликов по рекламе при фиксированной цене и доле запросов есть суть известной задачи прогнозирования вероятности клика, чье решение научное сообщество и индустрия до сих пор продолжает совершенствовать.

В данном разделе я изучаю вопрос применимости резервных цен к существующей системе рекламных аукционов. Этот вопрос относится напрямую к увеличению средней цены за клик для рекламодателей. Но резервная цена – это тонкий инструмент, позволяющий оптимизировать прибыль принципала при условии, что большинству рекламодателей будет все еще выгодно участвовать в рекламных аукционах.

3.1.3 «Рекламная политика»

Каким образом организовывать отбор и ранжирование объявлений на показ, как использовать инструмент резервных цен — всё это в первую очередь зависит от политики поисковой компании в отношении всех участвующих, заинтересованных сторон.

На данный момент однозначного ответа относительно данного вопроса не существует, даже если поисковая компания хочет оптимизировать только свою прибыль. Вариантов для главной целевой функции компании существует несколько, и, очевидно, все они могут представлять из себя комбинации из возможных целей трех вышеупомянутых сторон.

Исторически сложилось, что первичной заботой поисковых систем было максимальное удовлетворение пользователей, поэтому улучшение удобства поиска интересующих результатов и восприятия отображаемых страниц является первостепенной задачей. Впоследствии, когда поисковая компания начинает монетизацию своих сервисов, появляется вторая цель — оптимизация прибыли. Поэтому можно предположить, что для поисковых систем итоговой целевой функцией является одновременная оптимизация качества поиска для пользователей и своей прибыли.

Другим примером может служить компания Facebook, которая использует аукцион Викри для своей контекстной рекламы и оптимизирует, соответственно, общественное благосостояние, то есть акцент смещен в сторону рекламодателей.

Возвращаясь к виду платежей в компании Яндекс (3.1) и свойству монотонного убывания пороговой функции $\mathrm{thr}(\rho)$, таким правилам можно дать интерпретацию в терминах проводимой политики. Всё правило платежа можно разбить на три составляющих: (i) блок формируется из объявлений с наибольшими по величине взвешенными ставками $b\rho$, (ii) итоговое распределение позиций происходит согласно величине ставки b, и (iii) существует персональный порог на величину взвешенной ставки. Поэтому текущую политику компании Яндекс можно также сформулировать из соответствующих составляющих:

(i) оптимизация качества рекламного блока с точки зрения релевантности интересам пользователя (учет меры качества ρ);

(ii) внутри блока распределять позиции эффективно, то есть забота о рекламодателях (рекламодателю с большей ценностью v давать позицию с лучшим позиционным эффектом α);

(iii) оптимизация собственного дохода с «оглядкой» на пользователей (порог действует с одной стороны как резервная цена в терминах взвешенных ставок, но при этом обладает свойством убывания по величине качества ρ, то есть в случае объявления, как качественного ответа, компания готова его отобразить, забыв об оптимизации только прибыли).

Процесс глобальной оптимизации в рамках описанной политики или любой другой возможной политики, поиск оптимальной политики — открытые задачи. На данный момент есть ряд исследований на тему такой многокритериальной оптимизации.

Методика оптимизации с помощью пороговой функции и ранжирующего правила в компании Яндекс описана в работах [82, 84]. Оптимизация ранжирующего правила для рекламы на Yahoo! описана в работе [49], где авторы оптимизировали прибыль компании при ограничениях на качество выдачи для пользователей и эффективности рекламы для рекламодателей. При этом авторы критикуют использование резервных цен. Возможность такой критики обусловлена сделанными авторами предположениями о целевых метриках. Так, например, метрика относительно качества блока для пользователей аддитивна по количеству показанных объявлений и, как следствие, всегда растёт с увеличением заполняемости блока. Это предположение конфликтует с известным фактом [42] о том, что существуют ситуации, где большое число объявлений понижает качество выдачи для потребителей. Другой нетривиальный феномен с позиционными эффектами описан в докладе [1], где авторы обнаружили зависимость качества позиции от количества объявлений в блоке.

Альтернативную модель взаимодействия была предложена в работе [3], где удалось показать, что жадная стратегия оптимизации только прибыли поисковой компании приводит к одновременному негативному эффекту на интересы и пользователей, и рекламодателей.

Таким образом, существующие модели описывают лишь частично возможные подходы к решению данной задачи и сильно зависят от делаемых предположений, которые зачастую не согласуются с результатами эмпирического анализа.

3.2 Методы структурного оценивания модели аукциона

В данном параграфе я описываю существующие методики восстановления распределений ценностей участников по данным о проведенных позиционных аукционов в предположении симметричной модели. После описания приводятся результаты проделанного автором работы эмпирического сравнительного анализа методов на примере данных о рекламных аукционах на сервисе Яндекс.Поиск. По описанному здесь алгоритму параметрического восстановления ценностей автором работы был реализован комплекс программ, применяемый на практике в ООО «Яндекс».

3.2.1 Параметрический метод

Из названия ясно, что речь пойдет про параметрический метод структурного оценивания модели аукциона. При этом сначала необходимо пояснить термин «структурное оценивание», в то время как термин «параметрический метод» всегда указывает только на то, что область поиска параметризована, и поиск будет осуществляться в терминах некоторого вектора параметров $\vec{\theta}$.

Под структурным оцениванием надо понимать статистическое оценивание в предположении истинности некоторой модели, описывающей внутреннюю структуру данных. В случае данного исследования предполагаемой моделью является модель динамики торгов и участников аукциона с фиксированным форматом и фиксированным равновесием. Поэтому возникает задача оценивания по имеющимся данным неизвестных параметров модели: функции распределения ценностей. Методы структурного оценивания для однотоварных аукционов и для некоторых многотоварных аукционов описаны в [64].

Здесь я вкратце опишу параметрический подход Островского и Шварца, который они использовали для решения задачи определения оптимальной резервной цены для рекламных позиционных аукционов компании Yahoo! в работе [63]. Модификация этого подхода была проделана автором диссертации в совместной работе с С.Б. Измалковым, М.В. Левиным и Д.А. Хакимовой, [86], на тему определения оптимальных резервных цен в рекламных аукционах компании Яндекс. Основные идеи этой работы будут описаны ниже в данном разделе. В рамках этого совместного исследования в компании Яндекс автором данной работы были реализованы программные комплексы распределенных вычислений для обработки больших объемов данных на языке `python` в связке с технологией `MapReduce`, программный комплекс (`python`) для симуляционных вычислений и статистический комплекс (`python`, `R`) по оценке результатов.

В качестве центрального предположения рассматривалась симметричная модель позиционного аукциона, таким образом, ценности всех рекламодателей распределены согласно одной функции распределения $F_{\vec{\theta}}(v)$ из заданного параметрического семейства $\{F_{\vec{\theta}}(v)\}_{\vec{\theta}\in\Theta}$. В обоих исследования в качестве семейства распределений использовалось семейство лог-нормальных распределений с параметрами (μ, σ^2). Кроме этих двух неизвестных в нашем исследовании был дополнительный неизвестный параметр N – количество конкурентов в аукционе.

Таким образом, вектор параметров, подлежащий оценке, состоял из трех компонент, причем каждая тройка (μ_a, σ_a^2, N_a) была уникальной для каждого рассматриваемого аукциона $a \in \mathcal{A}$. В связи с чем возникает вопрос о правиле идентификации отдельного аукциона a и формировании рассматриваемого множества $\mathcal{A}$. В нашем исследовании мы, следуя подходу Островского и Шварца, отождествляли отдельный аукцион a с некоторым кластером phr купленных фраз[7]. При этом данные об аукционах собирались со следующим правилом: из рассмотрения исключались запросы, на которых были показы объявлений с разными купленными фразами из фиксированного множества тысячи наиболее прибыльных фраз, $\{phr_i\}_{i=1}^{1000} \equiv \mathcal{A}$.

Данные были устроены следующим образом. Для каждого аукциона $a \in \mathcal{A}$ собирался вектор статистик $\vec{x}$, состоящий из средних величин ставок на каждой позиции кроме первой и соответствующих величин стандартных отклонений, и из среднего числа позиций K в блоке СР[8].

Сам метод оценки параметров (μ, σ^2, N), который лежит в основе реализованного комплекса программ, схематично представлен на Рис. 3.1. В качестве метода восстановления здесь использовался обобщенный метод моментов (кратко, ОММ). Применительно к данной задаче ОММ заключается в следующем: (i) посчитать вектор обобщенных моментов по данным (в нашем случае, это вектор выше описанных статистик $stats^\star$), (ii) для каждого значения параметров (μ, σ^2, N) из области поиска $\Theta^\sharp$ с помощью симуляций посчитать аналогичный вектор статистик $stats^\sharp(\mu, \sigma^2, N)$, и (iii) найти наиболее близкий вектор статистик к посчитанному по реальным данным согласно некоторой метрике расстояния $\mathbf{d}(\cdot, \cdot)$:

$$(\mu, \sigma^2, N)^\sharp = \underset{(\mu,\sigma^2,N)\in\Theta^\sharp}{\operatorname{argmin}} \mathbf{d}(stats^\star, stats^\sharp(\mu, \sigma^2, N)).$$

По итогам совместной работы в компании Яндекс был проведен полугодовой эксперимент с контрольной и экспериментальной группами аукционов. Обе группы формировались

[7]Кластер фраз образуется за счет приведения различных словоформ исходных фраз к нормализованному виду.

[8]В нашем исследовании целью было определение резервной цены для рекламодателей, целью которых был блок СР. Из-за наличия пороговой функции $\mathrm{thr}(\rho)$ размер блока K варьируется от запроса к запросу, даже если количество участников N превышало значение максимально размера блока СР, $K_{\max} = 3$.

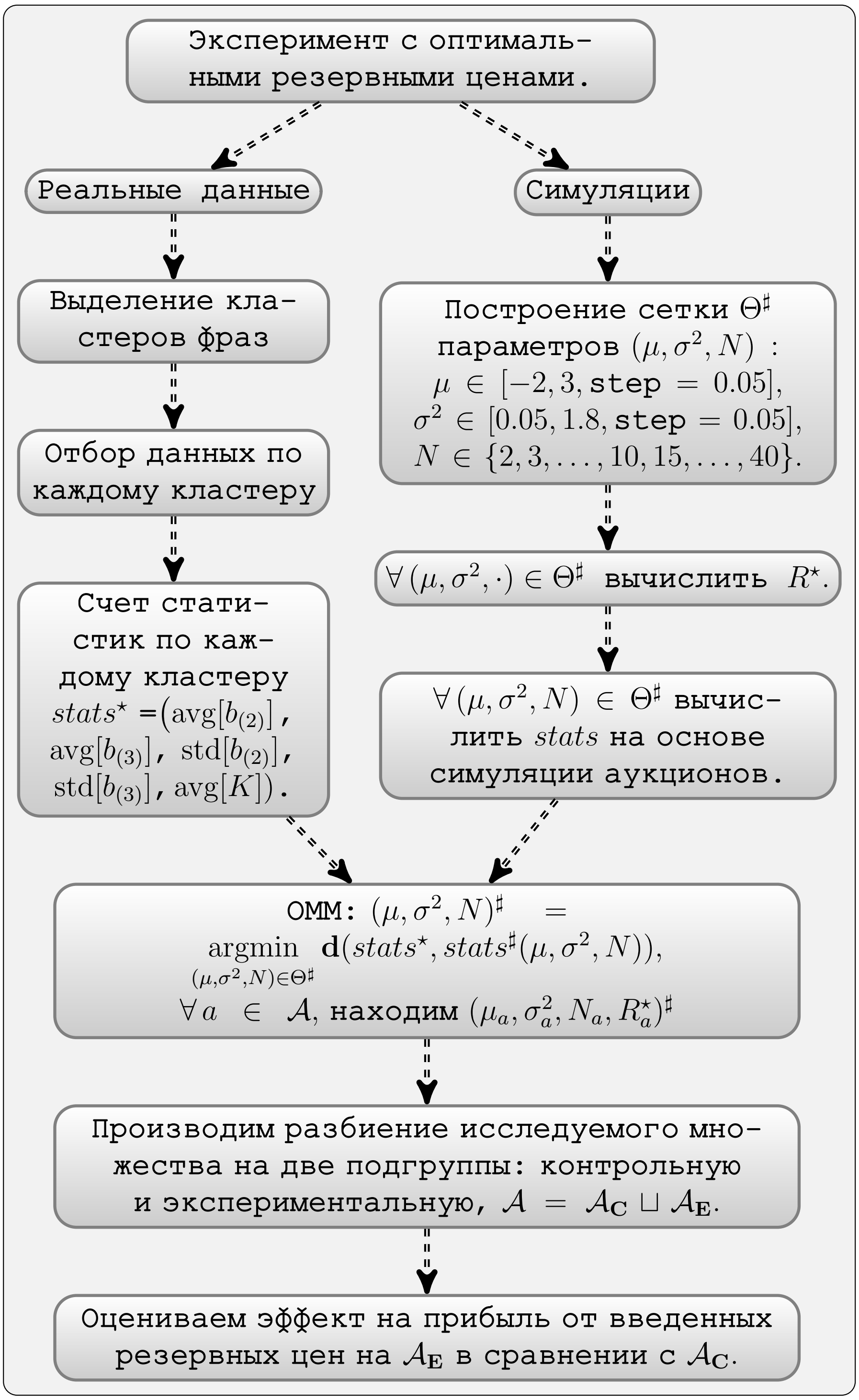


Рисунок 3.1: Схема применения параметрического метода восстановления неизвестных параметров распределений для вычисления оптимальных резервных цен.

из соображения максимальной схожести по набору описательных статистик. При этом на экспериментальной группе устанавливалась резервная цена, равная оптимальному значению или некоторой его квантили, так, чтобы ex post[9] удорожание в среднем не превышало заданного уровня.

Ниже в таблице. 3.1 представлены результаты проведенного эксперимента. Основные результаты расположены в строке `trg_after_exp_small`, соответствующей замерам относительно упомянутой выше контрольной группы $\mathcal{A}_{\mathrm{C}}$, и строке `trg_after_exp_all` с вычислениями относительно расширенного контрольного множества аукционов. Столбцы с приставкой `log_`: `Revenue`, `cpc`, `clicks` и `ctr` — показывают эффекты на прибыль компании, среднюю цену за клик, количество кликов и среднюю частоту кликов соответственно.

Таким образом, видно, что прирост прибыли (второй столбец желтый и синий маркеры) составил $\approx 12.3\%$. При этом рост в средней цене за клик (третий столбец) полностью повторяет тенденцию роста прибыли, что естественно, так как мы использовали инструмент резервных цен, повлияв первично на среднюю цену и, следовательно, на прибыль. Послед-

[9] Напомню, что термин «ex post» указывает лишь на тот факт, что вычисления проводились при фиксированных реализовавшихся случайных величинах, то есть здесь это ненаблюдаемые ценности участников и наблюдаемые ставки. Так как ставки фиксировались, то очевидно, что подобного рода вариант расчетов является пессимистичным сценарием. Кроме того, ровно таким же методом эмпирически было установлено, что наличие порога в блок CP можно заменить в среднем некоторой начальной резервной ценой в размере 50 центов.

Данные с 1 февраля по 11 августа 2011

VARIABLES	log_Revenue	log_Revenue	log_cpc	log_cpc	log_clicks	log_clicks	log_ctr	log_ctr
trg_after_exp_small	0.131***		0.131***		-0.0138		-0.00290	
	(0.0343)		(0.0343)		(0.0274)		(0.0170)	
log_shows	0.129***	0.166***	0.121***	0.135***	0.824***	0.847***		
	(0.0129)	(0.00774)	(0.0106)	(0.00662)	(0.0141)	(0.00683)		
log_clicks	0.990***	0.963***						
	(0.00982)	(0.00602)						
trg_after_exp_all		0.115***		0.115***		0.00397		0.0156
		(0.0239)		(0.0241)		(0.0199)		(0.0133)
log_cph							0.912***	0.895***
							(0.00817)	(0.00515)
Constant	-0.00335	-0.239***	0.0129	-0.179***	-1.650***	-1.638***	-1.148***	-1.148***
	(0.0588)	(0.0349)	(0.0578)	(0.0349)	(0.0799)	(0.0374)	(0.0155)	(0.00931)
Observations	20,544	79,859	20,544	79,859	20,544	79,859	20,544	79,859
R-squared	0.878	0.847	0.212	0.209	0.642	0.658	0.900	0.877
Number of id	238	969	238	969	238	969	238	969

Robust standard errors in parentheses
*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Таблица 3.1: Результаты анализа полугодовых данных эксперимента по внедрению резервных цен в рекламные аукционы Яндекс.

ние два столбца (числа с зеленым маркером) говорят нам о том, что статистически значимых изменений на объем трафика (количество кликов) и на частоту кликов[10] не наблюдается.

Важно отметить, что в результате проведенного исследования было подмечено, что идентификация аукционов через кластер купленных фраз (множество фраз эквивалентных друг другу по модулю морфологии) не является удовлетворительным подходом. Автор и его коллеги наблюдали множество артефактов данного подхода, например , когда объявления из разных аукционов показывались на одном и том же пользовательском запросе. Всё это несомненно снижает эффективность резервных цен, как инструмента оптимизации прибыли. Поэтому наша рабочая группа пришла к заключению о необходимости разработки нового правила определения границ аукциона. На данный момент рекламный аукцион на Поиске идентифицируется с кластером запросов. Данные кластеры были построены таким образом, чтобы минимизировать возможные пересечения друг с другом по рекламодателям и их объявлениям, тем самым выделяя изолированные подрынки в рекламе на Поиске. В настоящий момент методики выделения подрынков для рекламных интернет-аукционов продолжают улучшаться и являются предметом исследований в компании.

3.2.2 Непараметрический метод

В последние годы популярность набирает непараметрический метод восстановления ценностей участников аукциона. Пионерской работой в этом направлении можно считать исследование [7], где авторы предлагают новый подход относительно выбора равновесия и связанного с этим алгоритма восстановления ценностей по ставкам рекламодателей. Дальнейшее развитие данного метода можно увидеть в работах [65, 72], где авторы усовершенствовали исходную модель и упростили некоторые вычисления. Я буду следовать работе [65], где допускается анонимность конкурентов относительно друг друга. В рамках выбранной модели вся информация об имеющейся конкуренции инкапсулируется в распределение конкурирующих ставок, при этом предполагается независимость и одинаково распределенность этих ставок.

В данном подходе авторы указывают на наличие значительного уровня случайности основных показателей модели позиционного аукциона: ставки рекламодателей, меры качества объявлений, число конкурентов — все эти величины сильно варьируются от аукциона к аукциону. Поэтому здесь делается предположение, что участники делают ставки *оптимально в*

[10] При увеличении резервной цены, а значит и средней цены за клик, из блока СР могли быть «вытеснены» объявления с высокой частотой кликов (`ctr`, click-through-rate). Подобный эффект рассматривался бы как негативный, так как качество блока в среднем уменьшилось бы.

среднем. Чтобы формально дать определение сделанному предположению, я определю ряд дополнительных понятий основной модели из [65], предполагая, что правило распределения аукциона основывается на значении ставок (такая мера качества объявлений, как веса, не используются).

Зафиксируем конкретного участника аукциона j° и будем описывать дальнейшие вычисления относительно него. Таким образом, распределение $\Phi(b)$ есть распределение ставок конкурентов выбранного участника ($N-1$ конкурентов, K позиций в блоке). Тогда можно оценить вероятность получить i-ую позицию, как функцию от величины ставки выбранного участника:

$$\mathbb{P}[(i) = j^\circ \mid b_{j^\circ} = b] = C_N^i \Phi(b)^{N-i}(1-\Phi(b))^{i-1}. \tag{3.2}$$

Если участник j° находится на i-ой позиции, то совместную функцию распределения ставок, проигравших ему конкурентов, можно записать как $\Phi(b)^{N-i}$. Тогда, если принципал установил некоторую резервную цену R, то ожидаемый платеж участника j° со ставкой b на i-ой позиции составит:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[p_{j^\circ} \mid b_{j^\circ} = b, (i) = j^\circ] =& \frac{1}{\Phi(b)^{N-i}}\left(R\Phi(R)^{N-i} + \int_R^b t\, d[\Phi(t)^{N-i}]\right) \\ =& b - \int_R^b \left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(b)}\right)^{N-i} dt.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Теперь можно выписать ожидаемый платеж $\mathbb{E}[p_{j^\circ} \mid b_{j^\circ} = b]$ участника j° со ставкой b и ожидаемую функцию полезности $\mathbb{E}[U_{j^\circ}(v,b)]$ при условии, что истинная ценность равна v.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[p_{j^\circ} \mid b_{j^\circ} = b] &= \sum_{i=1}^K \mathbb{E}[p_{j^\circ} \mid b_{j^\circ} = b, (i) = j^\circ] \cdot \mathbb{P}[(i) = j^\circ \mid b_{j^\circ} = b] \\ &= \sum_{i=1}^K C_N^i \Phi(b)^{N-i}(1-\Phi(b))^{i-1}\left(b - \int_R^b \left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(b)}\right)^{N-i} dt\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U_{j^\circ}(v,b)] &= \sum_{i=1}^K \alpha_i \cdot \mathbb{P}[(i) = j^\circ \mid b_{j^\circ} = b]\,(v - \mathbb{E}[p_{j^\circ} \mid b_{j^\circ} = b, (i) = j^\circ]) \\ &= \sum_{i=1}^K \alpha_i C_N^i \Phi(b)^{N-i}(1-\Phi(b))^{i-1}\left(v - b + \int_R^b \left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(b)}\right)^{N-i} dt\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Таким образом, предположение о том, что участники ставят свои ставки оптимально в среднем, можно определить как

$$\boxed{\forall j^\circ \in \mathcal{N} \;\; b^\star_{j^\circ} = \operatorname{argmax}_b \mathbb{E}[U_{j^\circ}(v,b)].}$$

Как указывают авторы данного подхода, ожидаемая функция полезности участника иногда имеет несколько экстремумов. Поэтому одним лишь необходимым условием экстремума, которое они в явном виде приводят в своей работе, не обойтись. При этом, если решать задачу восстановления ценности в предположении, что участник делает всегда оптимальную ставку $b^\star$, то оказывается, что соответствующее значение ценности $v^\star$ определяется всегда однозначно.

Таким образом, по выше описанному алгоритму восстановления ценностей по значениям ставок можно произвести отображение ставок из корпуса данных в соответствующие ценности, а затем применить непараметрическое восстановление функции распределения.

3.2.3 Сравнительный эмпирический анализ

В предыдущих разделах описаны два различных подхода к восстановлению ценностей рекламодателей. Обе модели принципиально разные и отличаются методами оценки и, что более существенно, предположениями о структуре: отличие в рассматриваемых равновесиях и разная интерпретация взаимосвязи между разными реализациями одного аукциона.

В работе [7] авторы провели один из вариантов сравнительного анализа касательно выбора равновесия. Авторы статьи сравнивали свой выбор равновесия «оптимальность в среднем» с «ex post» равновесием Эдельмана, Островского и Шварца из [21]. При этом, на мой взгляд, сравнение проводилось весьма своеобразно с точки зрения метода вычисления показателей модели, чьи значения можно верифицировать по данным.

Здесь я приведу собственные результаты сравнительного анализа этих двух методов, выполненные на реальных данных рекламных аукционов компании Яндекс[11]. В качестве варианта подхода с равновесием «оптимальность в среднем» я выбрал метод, описанный в [65] с переменным числом конкурентов и известным значением резервной цены (см. параграф 3.2.2). Подход восстановления ценностей с «ex post» равновесием с эквивалентными аукциону Викри платежами был описан в параграфе 3.2.1.

Сравнивать можно по восстанавливаемым ценностям (или их распределениям) или по статистикам данных, посчитанных с помощью моделей. Первый способ — это сравнение по ненаблюдаемым величинам, поэтому такое сравнение может лишь показать, насколько похоже работают описанные два подхода. Второй способ — это сравнивать по статистикам, которые могут быть посчитаны по реальным данным. Таким образом, появляется возможность сравнить, насколько метод хорошо восстанавливает реальные данные.

[11] Данное исследование было проведено в рамках моей работы в компании Яндекс совместно с Д.С. Аникушиным.

В качестве вычислимых по данным статистик я выбрал среднюю позицию при фиксированной ставке участника b и набор вероятностей, с которыми участник с данной ставкой b займет позицию i. В рамках подхода «оптимальность в среднем» данные статистики легко получаются согласно модели с помощью (3.2). Прежде чем описать детально, как эти же статистики вычислялись в модели из Раздела 3.2.1, я поясню свой выбор таких статистик.

Если посмотреть работы [7, 65, 72], то можно увидеть, что обычным выбором таких вычислимых по данным статистик являлись показатели ожидаемой прибыли и кликов. При этом надо отметить, что для вычисления таких статистик необходимо опираться на знания персональных прогнозов вероятности клика по объявлению, которые часто используются как мера качества объявления ρ_i. Так как задача вычисления таких оценок ρ_i является сама по себе сложной, то я предпочел избежать увеличения уровня ошибок в оценках, добавляя некоторые оценки ρ_i с возможными ошибками. Поэтому единственным показателем, не завязанным на возможные клики пользователей, является факт присутствия на некоторой позиции, что и было решено использовать как статистику для проверки адекватности моделей.

Одной важной особенностью данных является тот факт, что реализации одного и того же аукциона $a \in \mathcal{A}$ могут показывать разный уровень конкуренции. В случае подхода Островского это учитывается за счет внесения наблюдаемой средней заполняемости блока, как дополнительного обобщенного момента, и в дальнейшем процессе восстановления подбирается такой уровень конкуренции N, который бы лучшим образом описывал данные. В случае работы [65] существует прямое обобщение уравнений (3.2), (3.4) и (3.5) на ситуацию со случайным числом конкурентов. Здесь лишь надо в качестве вероятностей распределения числа конкурентов использовать эмпирическую частоту того или иного уровня наблюдаемой конкуренции[12].

Таким образом, необходимо ответить на вопрос: как по фиксированной ставке b оценить вероятности оказаться на конкретной позиции в блоке в модели Островского? Напомню, что в работе [21] авторы прибегли к эквивалентному английскому аукциону для построения равновесия. Здесь удобно использовать этот же прием. В данном приеме предполагается, что позиции разыгрываются среди участников, начиная с конца, то есть с K-ой по 1-ую. При этом,

[12]Важной особенностью в различии этих двух подходов является определение числа N — уровня конкуренции. Для модели Островского важно получить хорошее приближение на распределение вошедших в блок ценностей, которое сильно зависит от числа конкурентов как зависит распределение порядковой статистики от размера выборки. В случае модели «оптимальность в среднем» в качестве параметра N можно брать лишь число конкурентов, которые наблюдаются (то есть вошли в блок или $(K+1)$-ый участник, чья ставка определяет платеж для последнего в блоке). Все это объясняется тем, что модель основывается на распределении ставок конкурентов. Ставки мы наблюдаем только частично, то есть только тех участников, которые попали в показ блока и который определяет платеж последнего. Поэтому модель можно использовать в предположении, что все величины посчитаны по наблюдаемым величинам.

когда участники играют за K-ую позицию, то слабо доминирующей стратегией является «играть до своей ценности». Поэтому лишь сильнейшие $(K+1)$ участников будут определять итоговое равновесие для игроков, получивших показ в блоке. Все прочие будут делать ставки равные своим ценностям.

Сильнейшие $(K+1)$ участников будут играть за K-ую позицию, готовые ставить некоторые ставки $b_{(i)}^{K}$ за эту позицию. Значение этих ставок определяется по следующему правилу: *ставка равна возможному платежу за данную позицию, при котором участнику все равно, получит он или нет данную позицию*. Так как в начале игры, участники ничего не имеют, то функция полезности от опции «не получить K-ую позицию» равна нулю. Следовательно, значения $b_{(i)}^{K} = v_{(i)}$ для всех сильнейших $(K+1)$ участников. Таким образом, последний, $(K+1)$-ый, проиграет эту позицию и останется со ставкой $b_{(K+1)}^{K} = v_{(K+1)}$. В это же время все оставшиеся участники понимают, что уже выиграли K-ую позицию, и продолжат играть за следующую позицию. Следовательно, для каждого из них можно определить набор дальнейших значений ставок $\{b_{(j)}^{i}\}_{j=1}^{i+1}$, которые оставшиеся игроки готовы будут заплатить в игре за i-ую позицию. Правило определения здесь такое:

$$\alpha_i(v_{(j)} - b_{(j)}^{i}) = \alpha_{i+1}(v_{(j)} - p_{i+1}).$$

Здесь в силу правил обобщенного аукциона второй цены, платеж за позицию — это ставка следующего участника, то есть $p_{i+1} = b_{(i+2)}^{i+1}$. Следуя этой логике, можно выписать итоговые значения для равновесных ставок (2.6).

Теперь мы можем вычислить на какой позиции будет находиться участник с фиксированной ставкой b среди своих конкурентов с известными ценностями $(v_1, \ldots, v_N)$. Для этого итеративно будем вычислять равновесные ставки для данного набора конкурентов с помощью выписанного выше правила, но при этом на каждом этапе будем к набору возможных ставок $\{b_{(j)}^{i}\}_{j=1}^{i+1}$ добавлять ставку b выделенного участника (ставка $(K+1)$-го больше не нужна, так как если текущая ставка $b < v_{(K)}$, то данный участник не будет показан ни на какой позиции блока). Таким образом, мы учитываем влияние данного участника на равновесные ставки до тех пор, пока он не окажется проигравшим на некотором этапе и получит свою позицию $I(b)$. Вычисление ставок за более высокие позиции можно не производить. Ниже показан пример возможных вычислений, при которых данный участник получил бы $(i+1)$-ую позицию:

$$\begin{array}{lllllllll}
\dots & & & & & & & & \\
b^i_{(1)} \geq & b^i_{(2)} \geq & \dots & b^i_{(i-1)} \geq & \boxed{b} & & & & \Rightarrow I(b) = i+1 \\
b^{i+1}_{(1)} \geq & b^{i+1}_{(2)} \geq & \dots & b \geq & b^{i+1}_{(i-1)} \geq & \boxed{b^{i+1}_{(i+1)}} & & & \Rightarrow I(b^{i+1}_{(i+1)}) = i+2 \\
\dots & & & & & & & & \\
b^K_{(1)} \geq & b^K_{(2)} \geq & \dots & b \geq & \dots & b^K_{(K-1)} \geq & \boxed{b^K_{(K)}} & & \Rightarrow I(b^{i+1}_{(i+1)}) = \emptyset
\end{array}$$

Вычисление вероятностей, с которыми участник со ставкой b получит позицию i (то есть распределение случайной величины $I(b)$), производиться методом Монте-Карло. Действительно, распределение ценностей для данного аукциона мы считаем известным (см. Раздел 3.2.1). Остается лишь сгенерировать векторы $(v_1, \dots, v_N)$ некоторое M число раз и вычислить частоты полученных позиций.

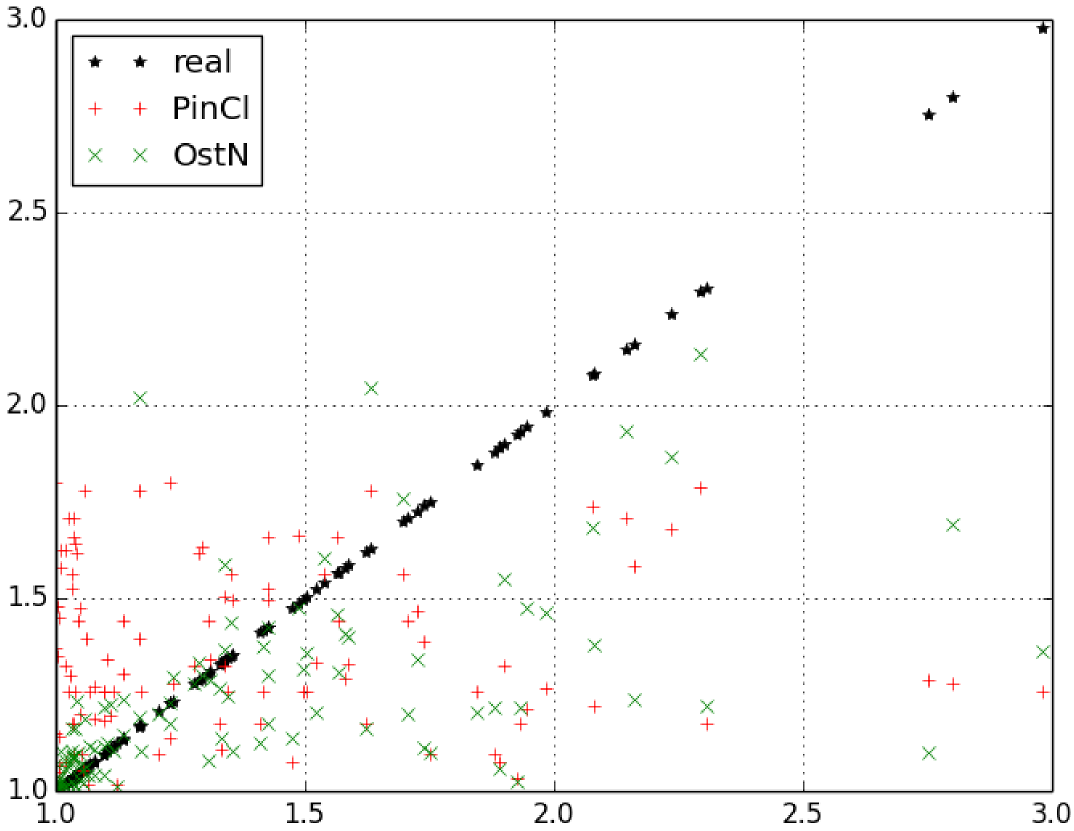


Рисунок 3.2: Восстановленные по ставкам позиции в среднем согласно двум моделям: `OstN` — модель [63], а `PinCl` – модель [65]. `real` — значения, соответствующие реальным средним позициям посчитанным по данным. Ось ординат показывает предсказанную согласно модели позицию в среднем, а ось абсцисс отображает реальную среднюю позицию.

На Рисунке 3.2 представлены результаты вычисления средней позиции по данным согласно двум описанным моделям: `OstN` — модель Островского и Шварца, а `PinCl` — немного модифицированная для корректного сравнения модель из [65]. Небольшая модификация последней модели касалась тех данных, на которых она настраивалась. В оригинальной работе предполагалось, что модель будет использовать персональные данные каждого рекламодателя, что могло привести естественным образом к персональным распределениям ценностей в рамках одного аукциона, что затрудняло дальнейшее применение модели для новых участников данного аукциона. Поэтому этот метод был симметризован таким образом, что все участники в рамках одного аукциона теперь были бы неразличимы. По сути, ровно такой же подход используется и у Островского. Из результатов видно, что качество моделей далеко от идеального и здесь есть обширное поле для дальнейшего улучшения методов. Нельзя выделить лучший из этих двух, они оба отклоняются от реальных значений, причем в разные стороны: согласно методу Островского восстановленные позиции тяготели к более низким местам, чем в реальных данных, а в методе Пина — наоборот, к завышению позиций.

3.3 Асимметрия в рекламных аукционах

Данный параграф посвящен вопросу асимметрии в он-лайн аукционах контекстной рекламы. Я расскажу об имеющихся способах восстановления асимметричных распределений и необходимых для этого предположений. Затем приведу описание возможного теста для проверки гипотезы о симметричности модели.

3.3.1 Методы идентификации

Проблема идентификации однотоварного аукциона на данный момент изучена достаточно хорошо. В качестве обзоров по текущим результатам в этой области можно назвать работы [6, 64].

Помимо основного вопроса по методике восстановления существует сопряженный вопрос о минимально необходимых данных для точного восстановления. Так, например, практически все методы восстановления требуют знания ставки и идентификатора победителя [4, 5]. Напомню, что проблеме восстановления ценностей в асимметричном аукционе в условиях отсутствия наблюдений про идентификаторы участников посвящена работа [50], где требовалось знание всех ставок участников в каждом аукционе.

Главным принципом восстановления в случае симметричной модели, является тот факт, что с помощью предполагаемого равновесия можно победившую ставку перевести в соответствующую ценность, которая будет являться порядковой статистикой для некоторой «родительской» функции распределения $F_V(v)$. Какой именно порядковой статистикой по счету будет являться полученная ценность зависит от рассматриваемого формата аукциона. Например, для аукционов эквивалентных аукциону второй цены можно получить вторую порядковую статистику $v_{(2:N)}$[13].

Дальше большинство работ основываются на свойствах распределений $F_V^{(i:N)}$ порядковых статистик $V_{(i:N)}$, наиболее часто используемой из которых следующее (см. [2]).

$$\forall v \in (0,\omega) \;\; F_V^{(i:N)}(v) = \frac{N!}{(N-i)!(i-1)!}\int_0^{F_V(v)} t^{N-i}(1-t)^{i-1}\,dt. \tag{3.6}$$

Таким образом, зная распределение $F_V^{(i:N)}$ некоторой порядковой статистики и число участников N, можно восстановить родительское распределение $F_V(v)$, обратив уравнение (3.6). Более формально, $\forall H \in (0,1)$ неявно определим значение ζ как решение следующего уравнения[14]:

$$H = \frac{N!}{(N-i)!(i-1)!}\int_0^{\zeta} t^{N-i}(1-t)^{i-1}\,dt.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$F_V(v) = \zeta(F_V^{(i:N)}(v); i, N). \tag{3.7}$$

В выше указанных работах также показан результат об идентификации асимметричных распределений, при этом необходимым условием является знание идентификаторов победителей. Тогда для родительских распределений различных классов удается составить систему так называемых интегральных уравнений Пфаффа, которая обладает единственным решением [59].

Таким образом, для асимметричных аукционов с одним товаром можно восстановить родительские распределения, зная победившую ставку и соответствующий идентификатор (см. [6, 64]), а в случае анонимного формата, где данные об идентификаторах не доступны, восстановление возможно, но требует знания ставок всех участников (см. [50]).

[13]Обозначение $(i:N)$ соответствует обозначению (i)-ой порядковой по величине статистике с явным указанием на исходный размер выборки N.

[14]Существование такого решения устанавливается легко в силу простых свойств преобразования из уравнения (3.6), см. [2].

3.3.2 Тест на асимметрию

Здесь я опишу тест, который можно использовать для проверки гипотезы о симметричности модели позиционного аукциона. Эдельман, Островский и Шварц описали в [21] эквивалентный открытый аукцион, который частично уже описан в параграфе 3.2.3. Поэтому наиболее близкой по смыслу к этой задаче можно рассматривать работу [35], где авторы подробно изучают вопрос идентификации в английском аукционе. Во многом я буду следовать их рассуждениям, обобщая на случай позиционного аукциона.

Главными предположениями здесь будут следующие два утверждения:

(a1) Участники не делают ставок, которые были бы больше их ценностей.

(a2) Участники не позволят конкуренту получить желаемый товар по цене, которую они сами могли бы заплатить.

Исходя их этих двух предположений, Хайли и Тамер ([35]) построили нижнюю F_L и верхнюю F_U границы для родительского распределения F_V. Авторы работы сделали также заключение, что нарушение свойства упорядоченности, $\forall v \quad F_L(v) \leq F_U(v)$, может служить критерием невыполнения предположений симметричной модели аукциона с частными ценностями. Таким образом, если принять за истину модель частных ценностей, то данный критерий может служить тестом на нарушение предположения симметричности участников.

При этом определение верхней границы F_U можно напрямую применять и к позиционному аукциону, так как предположение $(a1)$ в этом случае будет использоваться в точности как и в случае однотоварного английского аукциона. Более конкретно, согласно предположению $\forall i \in \mathcal{N} \quad v_i \geq b_i$, а в силу свойства равновесных ставок (2.6) монотонного увеличения с ростом ценности имеем $\forall i \quad v_{(i)} \geq b_{(i)}$. Таким образом, можно показать, что имеет место стохастическое доминирование первого порядка, то есть $F_V^{(i:N)} \leq F_B^{(i:N)}$, где F_B есть распределение ставок, а $F_B^{(i:N)}$ соответствующий вариант функции распределения порядковой статистики среди выборки ставок размера N. Так как преобразование $\zeta(\cdot; i, N)$[15] из (3.7) монотонно возрастающее, то имеем

$$\begin{aligned} \forall i,\ \forall v \in (0,\omega),\ F_V(v) = \zeta(F_V^{(i:N)}(v); i, N) \leq \zeta(F_B^{(i:N)}(v)), \\ \Rightarrow F_V(v) \leq F_U(v) \equiv \min_i \zeta(F_B^{(i:N)}(v)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для определения нижней границы F_L необходимо сделать небольшое обобщение, которое учитывает тот факт, что некоторые участники в отличии от однотоварного аукциона выбирают

[15] Далее я часто для краткости буду опускать явное указание зависимости от i и N и буду писать $\zeta(\cdot)$.

между «увеличить ли ставку в борьбе за следующий по качеству объект» или «остановится и удовлетвориться имеющимся». При этом важную роль в использовании предположения $(a2)$ играет значение минимально допустимого шага изменения ставки Δ, который в случае компании Яндекс равен 10 копейкам. Таким образом, если в случае однотоварного аукциона предположение $(a2)$ можно было формально свести к условию $v_{(i)} \leq b_{(1)} + \Delta, \ \forall i \geq 2$; то в случае позиционного аукциона можно аналогично получить следующее условие (для краткости, $b^{\Delta} = b + \Delta$):

$$\begin{aligned}
&\forall i \geq 2, \\
&\alpha_{i-1}(v_{(i)} - b_{(i-1)} - \Delta) \leq \alpha_i(v_{(i)} - p_i) \ \Leftrightarrow \ v_{(i)} \leq \frac{\alpha_{i-1} b^{\Delta}_{(i-1)} - \alpha_i p_i}{\alpha_{i-1} - \alpha_i}, \\
\Rightarrow\ &F_V(v) = \zeta(F_V^{(i:N)}(v); i, N) \geq \zeta(F_{B^{\Delta}}^{(i-1:N)}(v)), \text{ где } \frac{\alpha_{i-1} b^{\Delta}_{(i-1)} - \alpha_i p_i}{\alpha_{i-1} - \alpha_i} \sim F_{B^{\Delta}}^{(i-1:N)}(v); \\
\Rightarrow\ &F_V(v) \geq F_L(v) \equiv \max_{i \geq 2} \zeta(F_{B^{\Delta}}^{(i:N)}(v)).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

При этом, очевидно, что ограничения, порождаемые порядковыми статистиками порядка $j > K + 1$, никакого эффекта не будут оказывать аналогично случаю $j > 2$ в однотоварном аукционе из [35].

Таким образом, явно выписано определения нижней и верхней границ на родительское распределение — (3.8),(3.9). В [34] авторы доказали асимптотическую нормальность оценок для распределений F_L и F_U. Если внимательно изучить ход доказательства и обратить внимание на изменения в описанной выше оценки для F_L, то можно легко заключить, что обобщенные оценки для позиционного аукциона вновь обладают свойством асимптотической нормальности. Следовательно, значимость теста $F_L < F_U$ можно оценить, вычислив оценки необходимых параметров с помощью метода бутстрапа (bootstrap).

Важно отметить, что необходимым условием для возможности явно построить эти границы, является знание общего числа активных участников N. Кроме того, часто исследуемые аукционы уже обладают некоторой резервной ценой R отличной от нуля. Поэтому в таких случаях восстановлению подлежит лишь «урезанное» распределение $[F_V(\cdot) - F_V(R)]/[1 - F_V(R)]$, которое отождествляют с родительским распределением. Для многих практических задач знание «урезанного» распределения оказывается достаточным.

Теперь перейдем к позиционным аукционам Яндекса. Как и прежде будем полагать, что имеются N участников аукциона, K позиций в блоке с вектором качества $\boldsymbol{\alpha}$.

Какие величины можно предположить наблюдаемыми? Наиболее естественные кандидаты — это величины связанные с показавшимися K участниками. Действительно, положительные координаты вектора качества можно оценить по данным, выигравшие ставки, как правило, присутствуют в данных, возможные величины платежей, как неотъемлемая часть правил аукциона, также содержаться в данных. На этом минимальный список естественно наблюдаемых величин исчерпывается[16].

Таким образом, здесь нужен тест, который можно сконструировать на основе вектора качества $\boldsymbol{\alpha}$, вектора ставок $(b_{(1)}, \ldots, b_{(K)})$ и вектора платежей $(p_1, \ldots, p_K)$ (вообще говоря, для обобщенного аукциона второй цены информативным в таких условиях является лишь платеж на последней позиции, $p_K \equiv b_{(K+1)} \equiv v_{(K+1)}$).

Чтобы использовать тест на условие $\forall v \quad F_L(v) \leq F_U(v)$, необходимо получить оценку числа участников N. Для этого, можно огрубить описанный ранее тест и последовать приему, описанному в работе [73], где автор также столкнулся с проблемой неизвестного числа участников в анализе аукционов eBay. Если предположить, что $K \geq 2$ (в рассматриваемом случае блока СР на Поиске компании Яндекс $K = 3$), то из имеющихся наблюдений можно согласно равновесию (2.6) восстановить из ставок и платежей значения порядковых статистик $v_{(2:N)}, v_{(3:N)}, \ldots, v_{(K+1:N)}$. В условиях, когда значение N не известно, восстановить родительское распределение можно, исходя из распределений двух различных порядковых статистик [73].

Весь прием суть построение на основе наблюдаемых данных оценки условной плотности распределения $f_V^{(i,j)}(v_{(i)} \mid v_{(j)})$ для порядковой статистики $V_{(i:N)}$ при условии фиксированного значения $V_{(j:N)}$, где $i < j$. Тогда, если учесть, что $\lim\limits_{v_{(j)} \to R} f_V^{(i,j)}(v_{(i)} \mid v_{(j)}) = f_V^{(i:j-1)}(v_{(i)})$ (см. [73]), то итоговое правило восстановления родительского распределения будет выглядеть следующим образом.

$$F_V(v) = \zeta\left(\left[\int_R^v \lim_{y \to R} f_V^{(i,j)}(x \mid y)\, dx\right]; i, j-1\right). \tag{3.10}$$

Аналогично тому, как было определено отображение ζ, $\forall H, F \in (0,1)$ через неявное решение следующего уравнения можно определить отображение $\eta(H, F; i)$:

$$H = \frac{\eta!}{(\eta - i)!(i-1)!} \int_R^F t^{N-i}(1-t)^{i-1}\, dt.$$

[16]На практике определение числа N часто затруднено техническими особенностями рекламных аукционов: на каждого рекламодателя может приходиться множество рекламных кампаний с разными объявлениями и разными списками купленных фраз, которые конкурируют друг с другом. Запись и хранение ставок всех отобранных объявлений часто оказывается дорогостоящей процедурой в силу огромного числа таких объявлений.

Тогда, зная родительское распределение и распределение некоторой порядковой статистики, можно восстановить число участников $N = \eta(F_V^{(i:N)}, F_V; i)$.

Из выше описанных приемов ясно, что часто существующие методы применимы лишь частично, и что на практике часто приходится создавать некоторые гибридные методы, которые лишь аппроксимируют теоретические подходы. Точных теоретических решений при всех ограничениях, которые возникают в реальности, пока не разработано.

Важно еще раз подчеркнуть, что, даже если число конкурентов известно (или из некоторых иных предположений выбрано и рассчитано), то описанный выше статистический тест проверки $\forall x, F_L(x) \leq F_U(x)$ является лишь тестом на согласованность данных с симметричной моделью аукциона в рамках IPV модели участников. Вообще говоря, непрохождение теста не будет означать асимметрию игроков, так как причиной непрохождения могло послужить, например, нарушение независимости ценностей.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. В параграфе 1.3 был проведен анализ практической применимости инструмента резервных цен в аукционах в зависимости от различных свойств контекста аукционов. С этой целью были даны формальные определения эффективности резервной цены и давления конкуренции в аукционе. Далее был доказан результат об обратной зависимости между конкуренцией в аукционе и эффективностью резервной цены. Здесь же продемонстрированы конкретные способы влияния на уровень конкуренции в аукционе через свойства контекста и приведен наглядный результат численного эксперимента, согласующийся с теоретическим результатом. В завершении исследования вопроса об эффективности резервных цен и факторов, влияющих на нее, приведены результаты относительно возникающих сложностей в нерегулярных задачах. Исследован феномен «прыжков» в значении оптимальных резервных цен.

2. В параграфе 2.1 приводится постановка основной задачи данной работы, которая возникла из эмпирических исследований возможности оптимизации аукционов. Для формального и полного описания данной задачи здесь определяются возможные представления аукциониста о участниках аукциона, которые представляют из себя четыре модели аукциониста, упорядоченных по степени детализации доступной информации. Приведенные четыре модели оказываются исчерпывающими в рамках сделанных предположений и рассмотрении аукционов с (слабо) доминантными равновесиями. Здесь же доказан практически значимый результат, говорящий, что лишь знание точного числа представителей сильного класса участников может помочь увеличить возможный ожидаемый доход, а любая иная информация оказывается бесполезной для аукциониста.

3. Анализ асимметричных аукционов с двумя классами участников, представленный в параграфах 2.2 и 2.3, показывает, каким образом знание точного числа сильных участников в аукционе дает возможность аукционисту увеличить ожидаемый доход от аукциона

через корректный пересчет оптимального значения резервных цен. Полученный здесь результат обладает нетипичным для классических задач теории аукциона свойством, что оптимальное значение резервной цены зависит от числа участников аукциона. Более того, здесь показано, что оптимальное значение резервной цены может зависеть от всех компонент контекста аукциона. Динамика изменений в оптимальном значении резервных цен в зависимости от параметров контекста, являющаяся частью полученных результатов, находиться в тесной связи с определенным в первой главе понятием уровня конкуренции в аукционе. Например, более значимое возможное увеличение ожидаемой прибыли аукционист может извлечь из знания числа сильных участников в ситуации, когда выполнены два условия: (i) разница в силе разных классов участников существенна и (ii) уровень эффективности резервных цен в контексте данного аукциона должен быть далек от своего максимального значения. Последнее свойство не обладает очевидностью, но из анализа, приведенного здесь, становится ясно, что в случае контекста, обеспечивающего максимальную эффективность резервной цены (ситуация в условиях отсутствия какой-либо конкуренции), оптимальность резервных цен в среднем для всех участников доминирует возможные эффекты от разницы в оптимальных значениях отдельных классов участников. Вновь результаты численного эксперимента согласуются с полученными теоретическими результатами, кроме того, из полученных количественных оценок увеличения прибыльности аукционов видно, что знание числа сильных участников может существенно увеличить прибыль.

4. В завершающей главе данной работы освещены прикладные вопросы теории оптимизации аукционов на примере аукционов интернет-рекламы. Здесь в параграфе 3.2 описаны существующие алгоритмы построения оценок неизвестных параметров модели по данным повторяющихся аукционов. Для проведения эмпирического анализа существующих алгоритмов автором был реализован комплекс программ на языке программирования `python`, реализующий описанные здесь два подхода. Для возможности обработки больших массивов данных о работе реальной системы показов интернет-рекламы часть программных модулей была реализована в рамках распределенной технологии `MapReduce`. Численный эксперимент по данным реальных аукционов показал, что существующие алгоритмы обладают в среднем удовлетворительной точностью, пригодной для практического использования. Но все же следует отметить, что текущее качество алгоритмов скорее свидетельствует о существовании проблем, требующих дальнейше-

го изучения и исправления. Проведенный сравнительный анализ не дает возможности выделить алгоритм-победитель. Обе методики требуют существенной доработки.

5. Алгоритм описанный в параграфе 3.2.1, содержащий в себе весь цикл необходимых процедур для вычисления оптимальных значений резервных цен и решения вспомогательных прикладных вопросов, лег в основу разработанного комплекса программ, применяемого на практике для дальнейших исследований и оптимизации рекламных аукционов в компании «Яндекс».

6. В заключительном параграфе 3.3 поднимается наиболее сложная прикладная проблема, связанная с полученными в данной работе теоретическими результатами. Возможность идентифицировать по данным асимметрию среди участников аукционов и метод восстановления соответствующих распределений ценностей участников из разных классов являются двумя наиболее сложными проблемами. На данный момент хорошо разработаны методы структурной эконометрики аукционов для случая одного товара. Случай позиционных аукционов в предположении симметричности обсуждался ранее в параграфе 3.2. Здесь автору удалось только построить обобщение статистического теста на проверку совместной гипотезы о модели независимых индивидуальных ценностей участников и о симметричности распределений этих ценностей. Дальнейшее развитие методов структурной эконометрики многотоварных и асимметричных аукционов является большой, важной и открытой темой для дальнейших исследований.

Несмотря на представленные в данной работе комментарии и дополнения к полученным основным результатам относительно возможных обобщений и ослаблений, сделанных предположений, я считаю, необходимо продолжить дальнейший анализ поведения оптимальных значений резервных цен в условиях иррегулярности асимметричных распределений при различных предположениях о виде стохастического доминирования среди классов игроков. Тем не менее на практике полученные результаты показали высокую эффективность и актуальность, позволив существенно улучшить прибыльность рекламных аукционов.

Список рисунков

Список таблиц

Литература

1. Arkhangelsky Dmitry, Izmalkov Sergei, Khakimova Dilyara. On evaluation of CTRs of different positions in sponsored search auctions. — 2013. — Poster Paper on The Fourteenth ACM Conference on Electronic Commerce.

2. Arnold Barry C, Balakrishnan Narayanaswamy, Nagaraja H Haikady Navada. A first course in order statistics (Classics in Applied Mathematics). — Siam, 2008. — P. 305.

3. Athey Susan, Ellison Glenn. Position auctions with consumer search // The Quarterly Journal of Economics. — 2011. — Vol. 126, no. 3. — P. 1213–1270.

4. Athey Susan, Haile Philip A. Identification of standard auction models // Econometrica. — 2002. — Vol. 70, no. 6. — P. 2107–2140.

5. Empirical models of auctions : Rep. / National Bureau of Economic Research ; Executor: Susan Athey, Philip A Haile : 2006. — P. 48.

6. Athey Susan, Haile Philip A. Nonparametric approaches to auctions // Handbook of Econometrics. — 2007. — Vol. 6. — P. 3847–3965.

7. Athey Susan, Nekipelov Denis. A structural model of sponsored search advertising auctions // Sixth Ad Auctions Workshop. — 2010. — P. 30.

8. Ausubel Lawrence M. An Efficient Ascending-Bid Auction for Multiple Objects // American Economic Review. — 2004. — Vol. 94, no. 5. — P. 1452–1475.

9. Bali Valentina, Jackson Matthew. Asymptotic revenue equivalence in auctions // Journal of Economic Theory. — 2002. — Vol. 106, no. 1. — P. 161–176.

10. Bergemann Dirk, Morris Stephen. Robust mechanism design // Econometrica. — 2005. — Vol. 73, no. 6. — P. 1771–1813.

11. Bergemann Dirk, Morris Stephen. Robust Mechnism Design: The Role of Private Information and Higher Order Beliefs. — World Scientific Publishing Company, 2012. — Vol. 2. — P. 472.

12. Boone Jan. Competitive pressure: the effects on investments in product and process innovation // The RAND Journal of Economics. — 2000. — Vol. 31, no. 3. — P. 549–569.

13. Bulow Jeremy, Klemperer Paul. Auctions versus negotiations // The American Economic Review. — 1996. — Vol. 86, no. 1. — P. 180–194.

14. Bulow J., Roberts J. The Simple Economics of Optimal Auctions // Journal of Political Economy. — 1989. — Vol. 97, no. 5. — P. 1060–1090.

15. Cantillon E. The effect of bidders' asymmetries on expected revenue in auctions // Games and Economic Behavior. — 2008. — Vol. 62, no. 1. — P. 1–25.

16. Chervonenkis Alexey, Sorokina Anna, Topinsky Valery. Optimization of ads allocation in sponsored search // Proceedings of the 22nd international conference on World Wide Web companion. — WWW '13 Companion. — International World Wide Web Conferences Steering Committee, 2013. — P. 121–122.

17. Cramton Peter, Shoham Yoav, Steinberg Richard. An overview of combinatorial auctions // ACM SIGecom Exchanges. — 2007. — Vol. 7, no. 1. — P. 3–14.

18. Deb Rahul, Pai Mallesh. Symmetric Auctions. — University of Toronto, working paper no.486. — 2013.

19. Doni N., Menicucci D. Revenue comparison in asymmetric auctions with discrete valuations // The B.E. Journal of Theoretical Economics. — 2013. — Vol. 13, no. 1. — P. 429–461.

20. Edelman B., Ostrovsky M. Strategic bidder behavior in sponsored search auctions // Decision support systems. — 2007. — Vol. 43, no. 1. — P. 192–198.

21. Edelman B., Ostrovsky M., Schwarz M. Internet advertising and the generalized second price auction: Selling billions of dollars worth of keywords // The American Economic Review. — 2007. — Vol. 97, no. 1. — P. 242–259.

22. Edelman B., Schwarz M. Optimal auction design in a multi-unit environment: The case of sponsored search auctions. — Harvard Business School, unpublished manuscript. — 2006.

23. Edelman B., Schwarz M. Optimal auction design and equilibrium selection in sponsored search auctions // The American Economic Review. — 2010. — Vol. 100, no. 2. — P. 597–602.

24. Elbittar A.A., Ünver M.U. On Determination of Optimal Reserve Price in Auctions with Common Knowledge about Ranking of Valuations // Advances in Economic Design. — Springer, 2003. — P. 79–94.

25. Feng Juan, Bhargava Hemant K, Pennock David M. Implementing sponsored search in web search engines: Computational evaluation of alternative mechanisms // INFORMS Journal on Computing. — 2007. — Vol. 19, no. 1. — P. 137–148.

26. Fibich G., Gavious A. Asymmetric first-price auctions – a perturbation approach // Mathematics of Operations Research. — 2003. — Vol. 28, no. 4. — P. 836–852.

27. Fibich G., Gavious A., Sela A. Revenue equivalence in asymmetric auctions // Journal of Economic Theory. — 2004. — Vol. 115, no. 2. — P. 309–321.

28. Fibich G., Gavish N. Numerical simulations of asymmetric first-price auctions // Games and Economic Behavior. — 2011. — Vol. 73, no. 2. — P. 479 – 495.

29. First–price auctions when the ranking of valuations is common knowledge / Michael Landsberger, Jacob Rubinstein, Elmar Wolfstetter, Shmuel Zamir // Review of Economic Design. — 2001. — Vol. 6, no. 3-4. — P. 461–480.

30. Gavious A., Minchuk Y. A note on the effect of asymmetry on revenue in second-price auctions // International Game Theory Review. — 2012. — Vol. 14, no. 3. — P. 1–8.

31. Gavious A., Minchuk Y. Ranking asymmetric auctions // International Journal of Game Theory. — 2014. — Vol. 43, no. 2. — P. 369–393.

32. Gayle W.R. Numerical Analysis of Asymmetric First Price Auctions with Reserve Prices. — 2004.

33. Greedy bidding strategies for keyword auctions / Matthew Cary, Aparna Das, Ben Edelman et al. // Proceedings of the 8th ACM conference on Electronic commerce / ACM. — 2007. — P. 262–271.

34. Haile Philip A, Tamer Elie. Inference with an incomplete model of English auctions. — Madison: Univ. Wisconsin, working paper no. 2018R. — 2002.

35. Haile Philip A, Tamer Elie. Inference with an incomplete model of English auctions // Journal of Political Economy. — 2003. — Vol. 111, no. 1. — P. 1–51.

36. Hart Oliver D. The market mechanism as an incentive scheme // The Bell Journal of Economics. — 1983. — Vol. 14, no. 2. — P. 366–382.

37. Hermalin Benjamin E. Heterogeneity in organizational form: Why otherwise identical firms choose different incentives for their managers // The RAND Journal of Economics. — 1994. — Vol. 25, no. 4. — P. 518–537.

38. Hotchkiss Gord, Alston Steve, Edwards Greg. Eye tracking study. — Enquiro Search Solutions Inc., research white paper. — 2005.

39. Izmalkov Sergei. Shill bidding and optimal auctions. — MIT, mimeo. — 2007.

40. Izmalkov Sergei, Topinsky Valery A. Reserve prices in second-price auctions with asymmetric and anonymous bidders. — 2013. — Short paper on The Fourteenth ACM Conference on Electronic Commerce.

41. Izmalkov Sergei, Topinsky Valery A. Optimal Reserve Prices in Anonymous Asymmetric Auctions. — New Economic School, working paper. — 2014.

42. Kamenica Emir. Contextual inference in markets: On the informational content of product lines // The American Economic Review. — 2008. — Vol. 98, no. 5. — P. 2127–2149.

43. Kaplan T., Zamir S. A note on revenue effects of asymmetry in private-value auctions. — 2002.

44. Kirkegaard René. A short proof of the Bulow-Klemperer auctions vs. negotiations result // Economic Theory. — 2006. — Vol. 28, no. 2. — P. 449–452.

45. Kirkegaard René. Asymmetric first price auctions // Journal of Economic Theory. — 2009. — Vol. 144, no. 4. — P. 1617 – 1635.

46. Kirkegaard René. A Mechanism Design Approach to Ranking Asymmetric Auctions // Econometrica. — 2012. — Vol. 80, no. 5. — P. 2349–2364.

47. Kolesnikov Alexander, Logachev Yury, Topinskiy Valeriy. Predicting CTR of new ads via click prediction // Proceedings of the 21st ACM international conference on Information and knowledge management. — CIKM ’12. — ACM, 2012. — P. 2547–2550.

48. Krishna V. Auction Theory. — Academic press, 2009. — P. 336.

49. Lahaie S., Pennock D.M. Revenue analysis of a family of ranking rules for keyword auctions // Proceedings of the 8th ACM conference on Electronic commerce. — EC ’07. — ACM, 2007. — P. 50–56.

50. Laurent L. The econometrics of auctions with asymmetric anonymous bidders // Journal of Econometrics. — 2012. — Vol. 167, no. 1. — P. 113–132.

51. Lebrun B. Existence of an Equilibrium in First Price Auctions // Economic Theory. — 1996. — Vol. 7, no. 3. — P. 421–43.

52. Lebrun B. First Price Auctions in the Asymmetric N Bidder Case // International Economic Review. — 1999. — Vol. 40, no. 1. — P. 125–142.

53. Lebrun B. Uniqueness of the Equilibrium in First-Price Auctions // Games and Economic Behavior. — 2006. — Vol. 55, no. 1. — P. 131–151.

54. Lebrun B. Auctions with almost homogeneous bidders // Journal of Economic Theory. — 2009. — Vol. 144, no. 3. — P. 1341–1351.

55. Manning Christopher D, Raghavan Prabhakar, Schütze Hinrich. Introduction to information retrieval. — Cambridge University Press, 2008. — Vol. 1. — P. 496.

56. Martin Stephen. Endogenous firm efficiency in a Cournot principal-agent model // Journal of Economic Theory. — 1993. — Vol. 59, no. 2. — P. 445–450.

57. Maskin E., Riley J. Asymmetric Auctions // Review of Economic Studies. — 2000. — Vol. 67, no. 3. — P. 413–438.

58. McAfee R Preston, McMillan John. Competition and game theory // Journal of Marketing Research. — 1996. — Vol. 33, no. 3. — P. 263–267.

59. Meilijson Isaac. Estimation of the lifetime distribution of the parts from the autopsy statistics of the machine // Journal of Applied Probability. — 1981. — Vol. 18, no. 4. — P. 829–838.

60. Myerson R. Optimal auction design // Mathematics of Operations Research. — 1981. — Vol. 6, no. 1. — P. 58–73.

61. Numerical Analysis of Asymmetric First Price Auctions // Games and Economic Behavior. — 1994. — Vol. 7, no. 2. — P. 193 – 220.

62. On the equivalence of Bayesian and dominant strategy implementation / Alex Gershkov, Jacob K Goeree, Alexey Kushnir et al. // Econometrica. — 2013. — Vol. 81, no. 1. — P. 197–220.

63. Ostrovsky M., Schwarz M. Reserve prices in internet advertising auctions: A field experiment. — Stanford GSB, working paper. — 2009.

64. Paarsch Harry J, Hong Han. An introduction to the structural econometrics of auction data. — The MIT Press, 2006. — Vol. 1. — P. 509.

65. Pin Furcy, Key Peter. Stochastic variability in sponsored search auctions: observations and models // Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce / ACM. — 2011. — P. 61–70.

66. Riley J.G., Samuelson W.F. Optimal auctions // The American Economic Review. — 1981. — Vol. 71, no. 3. — P. 381–392.

67. Rothkopf Michael H, Teisberg Thomas J, Kahn Edward P. Why are Vickrey auctions rare? // Journal of Political Economy. — 1990. — Vol. 98, no. 1. — P. 94–109.

68. Schulenberg S.P. Essays in Auctions and Collusion : Ph. D. thesis / S.P. Schulenberg ; The Pennsylvania State University. — 2003. — P. 179.

69. Shaked Moshe, Shanthikumar J George. Stochastic Orders. — Springer, 2007. — P. 473.

70. Skreta Vasiliki. Revenue Equivalence for Arbitrary Type Spaces. — UCLA Department of Economics, working paper. — 2005.

71. Skreta Vasiliki. Optimal Auctions with General Distribution. — NYU, working paper No. EC-08-15. — 2007.

72. Sodomka Eric, Lahaie Sébastien, Hillard Dustin. A predictive model for advertiser value-per-click in sponsored search // Proceedings of the 22nd international conference on World Wide Web / International World Wide Web Conferences Steering Committee. — 2013. — P. 1179–1190.

73. Song Unjy. Nonparametric estimation of an eBay auction model with an unknown number of bidders. — 2004.

74. Trofimov Ilya, Kornetova Anna, Topinskiy Valery. Using boosted trees for click-through rate prediction for sponsored search // Proceedings of the Sixth International Workshop on Data Mining for Online Advertising and Internet Economy. — ADKDD ’12. — ACM, 2012. — P. 1–6.

75. Ülkü Levent. Optimal combinatorial mechanism design // Economic Theory. — 2009. — Vol. 53, no. 2. — P. 1–26.

76. Varian H.R. Position auctions // International Journal of Industrial Organization. — 2007. — Vol. 25, no. 6. — P. 1163–1178.

77. Vickrey William. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders // The Journal of finance. — 1961. — Vol. 16, no. 1. — P. 8–37.

78. Vickrey William. Auctions and bidding games // Recent advances in game theory. — 1962. — P. 15–27.

79. Wilson Robert. A bidding model of perfect competition // The Review of Economic Studies. — 1977. — Vol. 44, no. 3. — P. 511–518.

80. Wilson Robert. Game-Theoretic Analysis of Trading Processes. // Advances in Economic Theory Fifth World Congress. — 1987. — P. 33–70.

81. Yenmez M.B. Pricing in position auctions and online advertising // Economic Theory. — 2014. — Vol. 15, no. 1. — P. 243–256.

82. Корнетова А.Н., Червоненкис А.Я. Оптимизация показов рекламы в поисковых системах // Проблемы управления. — 2013. — № 1. — С. 40–49.

83. Оптимизация прогноза вероятности посещения контекстной рекламы в поисковой системе «Яндекс» / К.Е. Бауман, А.Н. Корнетова, В.А. Топинский, Д.А. Хакимова // Научно-техническая информация. Сер.2, Информационные процессы и системы. — 2013. — № 4. — С. 1–8.

84. Сорокина А.Н., Червоненкис А.Я. Усовершенствованный алгоритм и результаты экспериментов оптимизации показов рекламы в спец-размещении // Проблемы управления. — 2014. — № 3. — С. 57–63.

85. Топинский В.А. Эффективность резервной цены и давление конкуренции в аукционах // Управление большими системами. — 2014. — № 50. — С. 110–142.

86. Измалков С.Б., Левин М.В., Топинский В.А., Хакимова Д.А. Эксперимент по внедрению резервной цены в аукционах контекстной рекламы. — ООО «Яндекс», тех. отчет. — 2014.

Приложение A

Доказательства лемм и теорем

Доказательство Леммы 1. Докажем сначала второе утверждение. Для этого распишем среднюю стоимость $pp_1(v)$ следующим образом.

$$pp_1(v) = \frac{m_1(v)}{q_1(v)} = v - \frac{\int_0^v q_1(t)\,dt}{q_1(v)}.$$

Условие доминирования в смысле уровня конкуренции означает, что отношение $q_1(v)/q_2(v)$ не убывает по v. Это значит, что $\forall t < v$ верно неравенство: $q_1(t)/q_1(v) \leq q_2(t)/q_2(v)$. А значит такое же неравенство верно и для их интегралов по $t < v$, то есть $\int_0^v q_1(t)/q_1(v)\,dt \leq \int_0^v q_2(t)/q_2(v)\,dt$. Следовательно

$$pp_1(v) \geq pp_2(v).$$

Теперь докажем первую часть леммы. Согласно определению условие $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cp}} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$ можно переписать следующим образом.

$$\forall v, \qquad \frac{d}{dv}\frac{m_1(v)}{q_1(v)} \geq \frac{d}{dv}\frac{m_2(v)}{q_2(v)}.$$

Распишем производную средней стоимости с учетом (1.6).

$$\frac{d}{dv}\frac{m_1(v)}{q_1(v)} = \frac{d}{dv}\frac{\int_0^v t\,dq_1(t)}{q_1(v)} = \frac{q_1'(v)}{q_1(v)}v - \frac{q_1'(v)}{q_1(v)}\frac{m_1(v)}{q_1(v)}.$$

То есть мы получили, что

$$cp_1(v) = \frac{q_1'(v)}{q_1(v)}(v - pp_1(v)) = \frac{q_1'(v)}{q_1(v)}u_1(v).$$

Но, если $cp_1(v) \geq cp_2(v)$, то их интегралы будут также упорядочены, то есть $pp_1(v) \geq pp_2(v)$ или $u_2(v)/u_1(v) \geq 1$. А значит верно следующее.

$$cp_1(v) \geq cp_2(v) \;\Rightarrow\; \frac{q_1'(v)}{q_1(v)} \geq \frac{q_2'(v)}{q_2(v)}\frac{u_2(v)}{u_1(v)} \geq \frac{q_2'(v)}{q_2(v)}.$$

Что и требовалось доказать. □

Доказательство Теоремы 1.

Напомним, что $\mathbb{E}\mathcal{R}(R) = N\int_V \mathrm{rv}(v)\,dq(v;R)$, где $\mathrm{rv}(v) = v\cdot(1-F(v))$. А оптимальная резервная цена есть оптимум ожидаемого дохода аукциониста, $R^\star = \arg\max\mathbb{E}\mathcal{R}(R)$. В силу предполагаемой регулярности задачи имеем, что $\mathbb{E}\mathcal{R}(R)$ имеет лишь один оптимум, который является решением уравнения $\frac{d}{dR}\mathrm{rv}(R^\star) = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dR}\mathbb{E}\mathcal{R}(R) = N\left(\frac{d}{dR}\left(\mathrm{rv}(R)\cdot q(R;0)\right) + \frac{d}{dR}\int_R^\omega \mathrm{rv}(v)\,dq(v;0)\right)&\\ = N\left(\mathrm{rv}'(R)q(R;0) + \mathrm{rv}(R)q'(R;0) - \mathrm{rv}(R)q'(R;0)\right)&\\ = N\cdot\mathrm{rv}'(R)\cdot q(R;0) = 0.&\end{aligned}$$

Таким образом, регулярность задачи – это выпуклость вверх функции общего дохода $\mathrm{rv}(v)$. То есть на интервале $(0,R^\star)$ функция $\mathrm{rv}(v)$ растет, а на оставшейся части $(R^\star,\omega)$ – убывает.

Теперь рассмотрим эффективность резервной цены в аукционе $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}\rangle$ согласно определению:

$$\begin{aligned}\rho[\mathcal{A},\mathcal{C}] = \frac{N\int_V \mathrm{rv}(v)\,dq(v;R^\star) - N\int_V \mathrm{rv}(v)\,dq(v;0)}{N\int_V \mathrm{rv}(v)\,dq(v;0)}&\\ = \frac{\mathrm{rv}(R^\star)q(R^\star;0) + \int_{R^\star}^\omega \mathrm{rv}(v)\,dq(v;0) - \int_0^\omega \mathrm{rv}(v)\,dq(v;0)}{\int_V \mathrm{rv}(v)\,dq(v;0)}&\\ = \frac{\mathrm{rv}(R^\star)q(R^\star;0) - \int_0^{R^\star} \mathrm{rv}(v)\,dq(v;0)}{\int_V \mathrm{rv}(v)\,dq(v;0)} = \frac{\int_0^{R^\star} q(v;0)\,d\mathrm{rv}(v)}{-\int_0^\omega q(v;0)\,d\mathrm{rv}(v)}&\\ = \frac{\int_0^{R^\star} q(v;0)\,d\mathrm{rv}(v)}{\int_{R^\star}^\omega q(v;0)\,d(-\mathrm{rv}(v)) - \int_0^{R^\star} q(v;0)\,d\mathrm{rv}(v)}.&\end{aligned}$$

Далее будем везде использовать обозначения: $q(v) = q(v;0)$, $\rho_1 = \rho[\mathcal{A}_1,\mathcal{C}_1]$ и $\rho_2 = \rho[\mathcal{A}_2,\mathcal{C}_2]$, $q_1 = q[\mathcal{A}_1,\mathcal{C}_1]$ и $q_2 = q[\mathcal{A}_2,\mathcal{C}_2]$. Причем в силу того, что для обоих случаев распределение $F(v)$ фиксировано и регулярно, то соответствующая функция общего дохода также фиксирована и регулярна. А значит значения оптимальных резервных цен совпадают, то есть $R_1^\star = R_2^\star = R^\star$, что в нерегулярном случае невсегда истинно.

Для краткости введем следующие обозначения для соответствующих интегралов: $\forall i \in \{1,2\}$, $\boldsymbol{l}_i = \int_0^{R^\star} q_i(v)\, d\mathrm{rv}(v)$ и $\boldsymbol{r}_i = \int_{R^\star}^{\omega} q_i(v)\, d(-\mathrm{rv}(v))$. Причем легко увидеть, что $\forall i \in \{1,2\}$, $\boldsymbol{l}_i \geq 0$, $\boldsymbol{r}_i \geq 0$ и $\boldsymbol{r}_i \geq \boldsymbol{l}_i$. Тогда,

$$\rho_1 = \frac{\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{l}_1} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{\boldsymbol{l}_2}{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{l}_2}.$$

В этом случае задачу сравнения значений ρ_1 и ρ_2 можно свести к задаче сравнения $\boldsymbol{l}_1/\boldsymbol{l}_2$ и $\boldsymbol{r}_1/\boldsymbol{r}_2$ следующим образом.

$$\rho_1 < \rho_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{l}_1} < \frac{\boldsymbol{l}_2}{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{l}_2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{l}_2} < \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{l}_2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{l}_2} < \frac{\boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_2}.$$

По предположению теоремы $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cl}} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle$, то есть внутри интервала $\mathcal{V} = [0, \omega]$ выполнено $q_1(v) < q_2(v)$ и $q_1(v) = \gamma(v) \cdot q_2(v)$, где функция $\gamma(v)$ монотонно возрастает (как и каждая из $q_1(v)$ и $q_2(v)$). Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{l}_2} &= \frac{\int_0^{R^\star} q_1(v)\, d\mathrm{rv}(v)}{\int_0^{R^\star} q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)} = \frac{\int_0^{R^\star} \gamma(v) q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)}{\int_0^{R^\star} q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)} < \\
&\qquad\qquad \frac{\int_0^{R^\star} \gamma(R^\star) q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)}{\int_0^{R^\star} q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)} = \gamma(R^\star); \\
\frac{\boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_2} &= \frac{\int_{R^\star}^{\omega} q_1(v)\, d\mathrm{rv}(v)}{\int_{R^\star}^{\omega} q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)} = \frac{\int_{R^\star}^{\omega} \gamma(v) q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)}{\int_{R^\star}^{\omega} q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)} > \\
&\qquad\qquad \frac{\int_{R^\star}^{\omega} \gamma(R^\star) q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)}{\int_{R^\star}^{\omega} q_2(v)\, d\mathrm{rv}(v)} = \gamma(R^\star).
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем, что

$$\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1 \rangle \succ_{\boldsymbol{cl}} \langle \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2 \rangle \;\Rightarrow\; \frac{\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{l}_2} < \gamma(R^\star) < \frac{\boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{r}_2} \;\Leftrightarrow\; \rho_1 < \rho_2,$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство Леммы 2. Доказательство будет происходит в три этапа, соответствующих трем различным случаям из определения доминирования по вектору качества товаров. Начнем со второго пункта — увеличение числа объектов продажи.

Введем явное обозначение зависимости от числа объектов K для функции ожидаемого количества товаров через $q^K(v)$ (ниже, такое явное обозначение зависимости от изменяемого параметра будет использоваться повсеместно). Тогда необходимо показать, что отношение

$q^{K-1}(v)/q^K(v)$ не убывает по v. Распишем детально это отношение.

$$\frac{q^{K-1}(v)}{q^K(v)} = \frac{\sum_{i=1}^{K-1}\alpha_i C_{N-1}^{i-1}(1-F(v))^{i-1}F(v)^{N-i}}{\sum_{i=1}^{K}\alpha_i C_{N-1}^{i-1}(1-F(v))^{i-1}F(v)^{N-i}}$$
$$= \left(1 + \frac{\alpha_K C_{N-1}^{K-1}(1-F(v))^{K-1}F(v)^{N-K}}{\sum_{i=1}^{K-1}\alpha_i C_{N-1}^{i-1}(1-F(v))^{i-1}F(v)^{N-i}}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + \alpha_K C_{N-1}^{K-1}\left(\sum_{i=1}^{K-1}\alpha_i C_{N-1}^{i-1}\left[\frac{F(v)}{1-F(v)}\right]^{K-i}\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

Заметим, что отношение $F(v)/(1-F(v))$ есть функция неубывающая, поэтому в силу только что полученного представления отношение $q^{K-1}(v)/q^K(v)$ — не убывающее по v функция.

Теперь рассмотрим случай двух разных векторов качества товаров: $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Напомним следующее правило, которое будет активно использоваться.

$$\forall b > 0,\ \forall d > 0, \quad \frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}.$$

Доказательство неубывания отношения $q^{\boldsymbol{\beta}}(v)/q^{\boldsymbol{\alpha}}(v)$ будем показывать методом индукции по числу объектов. Для удобства слагаемые вида $C_{N-1}^{i-1}(1-F(v))^{i-1}F(v)^{N-i}$ будем обозначать как π_i.

Напомним, что для обоих векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ верно, что $\alpha_1 = \beta_1 = 1$. В качестве базы индукции рассмотрим случай с двумя товарами. Покажем, что

$$\frac{(\pi_1(v) + \beta_2\pi_2(v))'}{\pi_1(v) + \beta_2\pi_2(v)} \geq \frac{(\pi_1(v) + \alpha_2\pi_2(v))'}{\pi_1(v) + \alpha_2\pi_2(v)}. \tag{A.1}$$

Для этого заметим, что в силу доказанного свойства относительно изменения числа объектов продажи мы знаем, что $\forall\boldsymbol{\alpha}$ справедливо следующее утверждение.

$$\frac{\pi_1'(v)}{\pi_1(v)} \geq \frac{(\pi_1(v) + \alpha_2\pi_2(v))'}{\pi_1(v) + \alpha_2\pi_2(v)}.$$

Следовательно, верно, что $\pi_1'(v)/\pi_1(v) \geq \pi_2'(v)/\pi_2(v)$ или эквивалентно $\pi_1'(v)\pi_2(v) \geq \pi_2'(v)\pi_1(v)$.

Тогда, преобразовав следующим образом выражение в (A.1),

$$(\alpha_2 - \beta_2)\pi_1'(v)\pi_2(v) \geq (\alpha_2 - \beta_2)\pi_2'(v)\pi_1(v)$$

получаем, что достаточным условием на коэффициенты будет: $\beta_2 < \alpha_2$.

Теперь предположим, что для некоторого числа $K-1$ объектов выполнено предположение индукции:

$$\frac{(\sum_{i=1}^{K-1}\beta_i\pi_i(v))'}{\sum_{i=1}^{K-1}\beta_i\pi_i(v)} \geq \frac{(\sum_{i=1}^{K-1}\alpha_i\pi_i(v))'}{\sum_{i=1}^{K-1}\alpha_i\pi_i(v)}.$$

Если для краткости использовать вместо $\sum_{i=1}^{K-1}\beta_i\pi_i(v)$ и $\sum_{i=1}^{K-1}\alpha_i\pi_i(v)$ обозначения A и B соответственно, то для завершения доказательства достаточно показать, что верно следующее утверждение:

$$\frac{B' + \beta_K\pi'_K}{B + \beta_K\pi_K} \geq \frac{A' + \alpha_K\pi'_K}{A + \alpha_K\pi_K}. \tag{A.2}$$

Для этого предположим, что оно верно и найдем достаточное условие на коэффициенты, из следующих эквивалентных преобразований.

$$B'A + \beta_K\pi'_K A + \alpha_K B'\pi_K \geq A'B + \alpha_K\pi'_K B + \beta_K A'\pi_K$$

$$\frac{B'}{B} + \frac{\alpha_K\beta_K}{AB}\pi_K\left[\frac{B'}{\beta_K} - \frac{A'}{\alpha_K}\right] \geq \frac{A'}{A} + \frac{\alpha_K\beta_K}{AB}\pi'_K\left[\frac{B}{\beta_K} - \frac{A}{\alpha_K}\right]$$

По предположению индукции первые слагаемые из последнего неравенства упорядочены нужным образом. Осталось показать, что выполнено следующее неравенство.

$$\pi_K\left[\frac{B'}{\beta_K} - \frac{A'}{\alpha_K}\right] \geq \pi'_K\left[\frac{B}{\beta_K} - \frac{A}{\alpha_K}\right]$$

или, что тоже самое,

$$\frac{\left[\frac{B'}{\beta_K} - \frac{A'}{\alpha_K}\right]}{\left[\frac{B}{\beta_K} - \frac{A}{\alpha_K}\right]} \geq \frac{\pi'_K}{\pi_K}.$$

Заметим, что выражение слева представляет из себя выражение типа C'/C для $K-1$ объектов, где $C = \sum_i c_i\pi_i$, но с другими коэффициентами: $c_i = \beta_i/\beta_K - \alpha_i/\alpha_K$. Это неравенство будет истинным в силу доказанного свойства об изменении числа объектов продажи, если коэффициенты c_i будут упорядочены по убыванию и неотрицательны по значению. Достаточным условием для этого является следующая система неравенств:

$$\forall i \ : \ 1 \leq i \leq K-1, \qquad \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \leq \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}. \tag{A.3}$$

Данное свойство заведомо выполнено, если знаменатель последовательности $\boldsymbol{\beta}$ меньше знаменателя у $\boldsymbol{\alpha}$.

Последним пунктом докажем требуемое свойство неубывания отношения функций ожидаемого количества товара при увеличении числа покупателей. Для этого удобно ввести обозначение $q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}}(v)$ для функции ожидаемого количества товара в аукционе с N покупателями, где на продажу выставлено некоторое фиксированное число товаров с соответствующим вектором качества $\boldsymbol{\alpha}$ (обозначение $\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}$ используется для удобства, чтобы в дальнейшем через обозначение $\boldsymbol{\alpha}_{\{i+1\}}$ ссылаться на вектор качества товаров $\mathcal{K}_{-1}$ без первого, наиболее качественного товара (α_1): то есть новый вектор образован из оригинального $\boldsymbol{\alpha}$ соответствующим сдвигом в начало последовательности элементов, начиная со второго).

Тогда для того, чтобы доказать доминирование аукциона с большим числом покупателей в смысле уровня конкуренции, необходимо и достаточно показать, что выполнено следующее неравенство:

$$q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_{N+1}^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} - q_{N+1}^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} \geq 0.$$

Для доказательства этого неравенства заметим, что для функции $q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}}(v)$ справедливо следующее рекуррентное выражение.

$$q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}}(v) = q_{N-1}^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}}(v)F(v) + q_{N-1}^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i+1\}}}(v)(1 - F(v)). \tag{A.4}$$

Используя указанное рекуррентное правило для $q_{N+1}^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}}(v)$, левая часть проверяемого неравенства преобразуется следующим образом.

$$\begin{gathered}
F(v) q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} + (1 - F(v)) q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i+1\}}} \\
+ f(v) q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} \left[q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} - q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i+1\}}} \right] \\
- F(v) q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} - (1 - F(v)) q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i+1\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}}
\end{gathered}$$

Легко увидеть, что первое и четвертое слагаемые взаимно уничтожаются, что выражение в квадратных скобках неотрицательно (функция ожидаемого количества товара для случая множества товаров $\mathcal{K}$ не меньше, чем ее аналог для случая множества $\mathcal{K}_{-1}$), и что разница $q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i+1\}}} - q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i+1\}}} \cdot \frac{d}{dv} q_N^{\boldsymbol{\alpha}_{\{i\}}}$ неотрицательна в силу доказанного свойства при уменьшении числа объектов.

Таким образом, неубывание отношения функций ожидаемого количества товара в трех различных случаях условия леммы было показано. Что и требовалось доказать. □

Лемма 3.

Пусть $\mathbb{E}\mathcal{R}(R; \mathcal{C}) = \int_0^\omega \psi(v) f(v) q_{\mathcal{C}}(v; R)\, dv$, *где* $\psi(v)$ *и* $f(v)$ *есть функция виртуальной ценно-*

сти и функция плотности соответствующие функции распределения $F(v)$, а $q_{\mathcal{C}}(x)$ – функция количества товара в стандартном аукционе $\mathcal{A}$ с контекстом $\mathcal{C}$.

Тогда, существуют такие функции распределения $F(x)$ и контексты $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, что максимальные значения для $\mathbb{E}\mathcal{R}(R;\mathcal{C}_1)$ и $\mathbb{E}\mathcal{R}(R;\mathcal{C}_2)$ достигаются в различных точках.

Доказательство. Рассмотрим некоторое нерегулярное распределение $F(v)$, которое порождает три нуля её функции виртуальной ценности $0 < R_1 < R_2 < R_3 < \omega$. Кандидатами на возможное значение оптимальной резервной цены при этом являются лишь два нуля: R_1 и R_3. Можно выбрать такое распределение $F(v)$ для контекста $\mathcal{C}_1$, что $\int_{R_1}^{R_3} \psi(v)f(v)q_{\mathcal{C}_1}(v)\,dv = \epsilon$ есть малая положительная величина. То есть в контексте $\mathcal{C}_1$ оптимальным значением резервной цены является R_1.

Теперь выберем такой контекст $\mathcal{C}_2$, что $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}_2\rangle \succ_{\boldsymbol{cl}} \langle\mathcal{A},\mathcal{C}_1\rangle$, то есть отношение $q_{\mathcal{C}_2}(v)/q_{\mathcal{C}_1}(v) = \gamma(v)$ есть неотрицательная неубывающая по v функция. Тогда, если ϵ достаточно мала, то

$$\begin{aligned}
&\int_{R_1}^{R_3} \psi(v)f(v)q_{\mathcal{C}_2}(v)\,dv = \int_{R_1}^{R_3} \psi(v)f(v)q_{\mathcal{C}_1}(v)\gamma(v)\,dv = \\
&\quad\gamma(R_2)\left(\int_{R_1}^{R_2} \psi(v)f(v)q_{\mathcal{C}_1}(v)\frac{\gamma(v)}{\gamma(R_2)}\,dv + \int_{R_2}^{R_3} \psi(v)f(v)q_{\mathcal{C}_1}(v)\frac{\gamma(v)}{\gamma(R_2)}\,dv\right) = \\
&\qquad\gamma(R_2)\left(\epsilon + \int_{R_1}^{R_2} \underbrace{\psi(v)f(v)q_{\mathcal{C}_1}(v)}_{>0}\underbrace{\left[\frac{\gamma(v)}{\gamma(R_2)} - 1\right]}_{<0}dv\right. \\
&\qquad\qquad\left.+ \int_{R_2}^{R_3} \underbrace{\psi(v)f(v)q_{\mathcal{C}_1}(v)}_{<0}\underbrace{\left[\frac{\gamma(v)}{\gamma(R_2)} - 1\right]}_{>0}dv\right) < 0.
\end{aligned}$$

То есть для $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}_2\rangle$ оптимальным значением резервной цены становится R_3. □

Лемма 4. *Рассмотрим два симметричных однотоварных аукциона $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}_1\rangle$ и $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}_2\rangle$ с одинаковыми правилами, но разными функциями распределений ценностей участников $F_1(v)$ и $F_2(v)$, то есть с разными контекстами.*

Если участники первого аукциона $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}_1\rangle$ rh-сильнее участников из $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}_2\rangle$, то первый аукцион доминирует в смысле уровня конкуренции последний, то есть $\langle\mathcal{A},\mathcal{C}_1\rangle \succ_{\boldsymbol{cl}} \langle\mathcal{A},\mathcal{C}_2\rangle$.

Доказательство.

Перефразирую утверждение леммы. Пусть $V_1 \sim F_1(v)$ и $V_2 \sim F_2(v)$, а $Q(\vec{v})$ есть правило размещения согласно формату $\mathcal{A}$. То есть соответствующие функции количества товаров выражаются как $q_\cdot(v) = \int Q(v; \vec{v}_{-i})\, d\boldsymbol{F}_\cdot(\vec{v}_{-i})$. Тогда согласно утверждению леммы верна следующая импликация:

$$V_1 \succ_{\boldsymbol{rh}} V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1(v)}{q_2(v)} \nearrow \text{ по } v.$$

Если про функцию $q_\cdot(v)$ мыслить как про функцию распределения некоторой случайной величины $\Pi_\cdot$, то для доказательства утверждение леммы достаточно показать, что $V_1 \succ_{\boldsymbol{rh}} V_2 \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 \succ_{\boldsymbol{rh}} \Pi_2$.

Для этого заметим, что $Q(v; \vec{v}_{-i}) = \mathbb{1}[v > \max \vec{v}_{-i}]$. Поэтому, если обозначить через $F_\cdot^{(1:N-1)}(v)$ функцию распределения максимальной порядковой статистики из выборки размера $N-1$ с родительским распределением $F_\cdot(v)$, то $q_\cdot(v) = \int_0^\omega \mathbb{1}[v > t]\, dF_\cdot^{(1:N-1)}(t)$. Согласно [69, Theorem 1.B.60] отношение $F_1^{(1:N-1)}(t)/F_2^{(1:N-1)}(t)$ возрастает по t. Получили, что определение для функций $q_\cdot(v)$ удовлетворяет условиям[1] теоремы [69, Theorem 1.B.52], применяя которую, получаем, что $\Pi_1 \succ_{\boldsymbol{rh}} \Pi_2$. □

Лемма 5. *Пусть $i \succcurlyeq j$, тогда $R_i^\star \geq R_j^\star$, где $R_\cdot^\star = \operatorname*{argmax}_R \int_R^\omega \psi_\cdot(v) f_\cdot(v)\, dv$. Более того, если $V_i \succcurlyeq_{\mathbf{lr}} V_j$, то $R_i^\star \geq R_j^\star$, где $R_\cdot^\star = \operatorname*{argmax}_R \int_R^\omega \psi_\cdot(v) f_\cdot(v) q_\cdot(v)\, dv$.*

Доказательство. Уточню предположения леммы. $i \succ j$ подразумевает, что $V_i \succ_{hr} V_j$. Для доказательства второй части заявлено требование о стохастическом порядке в смысле отношения правдоподобия (участник i lr-сильнее участника j).

Через $R_\cdot^\star$ обозначается оптимальное значение резервной цены. Для случая регулярных распределений утверждение леммы является тривиальными. Рассмотрим случай нерегулярных распределений. Нетривиальной ситуацией является лишь случай, когда оба распределения порождают по три нуля соответствующих функций виртуальных ценностей $R_{\cdot,1} < R_{\cdot,2} < R_{\cdot,3}$, причем оптимальное значение в глобальном смысле может достигаться лишь в $R_{\cdot,1}$ и $R_{\cdot,3}$. Единственным нетривиальным случаем здесь является следующая совместная конфигурация этих нулей: $R_{j,1} < R_{i,1} < R_{i,2} < R_{j,2} < R_{j,3} < R_{i,3}$.

Таким образом, утверждение леммы будет доказано, если показать, что возможный «прыжок» в значении оптимальной резервной цены, описанный в Лемме 3, в случае более слабого распределений повлечет по необходимости «прыжок» и для более сильного распределения. То есть,

$$\int_{R_{j,1}}^{R_{j,3}} \psi_j(v) f_j(v) q_j(v)\, dv < 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{R_{i,1}}^{R_{i,3}} \psi_i(v) f_i(v) q_i(v)\, dv < 0.$$

[1]Из возрастания отношения $F_1^{(1:N-1)}(t)/F_2^{(1:N-1)}(t)$ следует, что для случайных величин $V_1^{(1:N-1)} \sim F_1^{(1:N-1)}(v)$ и $V_2^{(1:N-1)} \sim F_2^{(1:N-1)}(v)$ утверждение $V_1^{(1:N-1)} \succ_{\boldsymbol{rh}} V_2^{(1:N-1)}$ верно. Функция $\mathbb{1}[v > t]$, как функция по v с параметром t, представляет из себя ступенчатую функцию распределения вырожденной случайной величины ξ_t. А при $t' > t$ и $v' > v$ верно $\mathbb{1}[v' > t']\mathbb{1}[v > t] \geq \mathbb{1}[v' > t]\mathbb{1}[v > t']$, то есть $\xi_{t'} \succ_{\boldsymbol{rh}} \xi_t$ для $t' > t$.

Сначала докажу первое утверждение леммы, где функции $q_\cdot(v) \equiv 1$, что соответствует, например, аукционы с одним участником. Для этого воспользуемся выражением для функции распределения случайной величины F через ее функцию отказов λ:

$$F(v) = 1 - e^{-\int_0^v \lambda(x)\,dx}.$$

Перепишу выражение $\psi(v)f(v)$, подставив в него определение функции распределения через λ, после чего можно будет явно проинтегрировать это выражение на произвольном отрезке:

$$\psi(v)f(v) = (v\lambda(v) - 1)e^{-\int_0^v \lambda(x)\,dx}.$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(v)f(v)\,dv = \int_a^b (v\lambda(v) - 1)e^{-\int_0^v \lambda(x)\,dx}\,dv = \\ -\int_a^b d\left(ve^{-\int_0^v \lambda(x)\,dx}\right) = be^{-\int_0^b \lambda(x)\,dx}\left(\frac{a}{b}e^{\int_a^b \lambda(x)\,dx} - 1\right) = \\ be^{-\int_0^b \lambda(x)\,dx}\left(e^{\ln a - \ln b + \int_a^b \lambda(x)\,dx} - 1\right) = be^{-\int_0^b \lambda(x)\,dx}\left(e^{\int_a^b \lambda(x) - \frac{1}{x}\,dx} - 1\right)\end{aligned}$$

Таким образом, знак интеграла $\int_a^b \psi(v)f(v)\,dv$ определяется знаком интеграла $\int_a^b \lambda(x) - \frac{1}{x}\,dx$. Поэтому в случае, когда $\lambda_i(x) < \lambda_j(x)$, легко проверить, что следующая импликация верна:

$$\int_{R_{j,1}}^{R_{j,3}} \lambda_j(x) - \frac{1}{x}\,dx < 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{R_{i,1}}^{R_{i,3}} \lambda_i(x) - \frac{1}{x}\,dx < 0.$$

Теперь докажу вторую часть леммы. Для этого напомню, что в силу предполагаемого стохастического порядка в смысле отношения правдоподобий отношение функций $f_i(v)/f_j(v)$ является неубывающей функцией по v. Кроме того, согласно Лемме 4 отношение функций $q_i(v)/q_j(v)$ является также неубывающей функцией по v. Таким образом, $\psi_i(v) = \psi_j(v) - \phi(v)$ и $f_i(v)q_i(v) = f_j(v)q_j(v)\gamma(v)$, где $\phi(v) > 0$, а $\gamma(v)$ – положительная неубывающая функция.

Легко показать, что имеет место следующая упорядоченность интегралов:

$$\int_{R_{j,1}}^{R_{j,3}} \psi_j(v)f_j(v)q_j(v)\,dv > \int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \psi_j(v)f_j(v)q_j(v)\,dv,$$

$$\int_{R_{i,1}}^{R_{i,3}} \psi_i(v)f_i(v)q_i(v)\,dv < \int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \psi_i(v)f_i(v)q_i(v)\,dv.$$

Поэтому, если доказать, что

$$\int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \psi_j(v) f_j(v) q_j(v)\, dv < 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \psi_i(v) f_i(v) q_i(v)\, dv < 0,$$

то второе утверждение леммы будет доказано автоматически.

Для этого выразим интеграл для участника i через интеграл для более слабого игрока:

$$\int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \psi_i(v) f_i(v) q_i(v)\, dv = \int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} (\psi_j(v) - \phi(v)) f_j(v) q_j(v) \gamma(v)\, dv =$$

$$\int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \psi_j(v) f_j(v) q_j(v) \gamma(v)\, dv - \int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \underbrace{\phi(v) f_j(v) q_j(v) \gamma(v)}_{\geq 0}\, dv \leq$$

$$\int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \psi_j(v) f_j(v) q_j(v) \gamma(v)\, dv =$$

$$\underbrace{\gamma(R_{j,2})}_{>0} \left(\int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \psi_j(v) f_j(v) q_j(v) \frac{\gamma(v)}{\gamma(R_{j,2})}\, dv \right) \leq \gamma(R_{j,2}) \left(\int_{R_{i,1}}^{R_{j,3}} \psi_j(v) f_j(v) q_j(v)\, dv \right).$$

Где последнее неравенство получается тривиально, если заметить, что неубывающая положительная функция $\frac{\gamma(v)}{\gamma(R_{j,2})}$ принимает значения меньшие 1 на интервале, где подынтегральная функция $\psi_j(v) f_j(v) q_j(v) > 0$, и принимает значения большие 1, где $\psi_j(v) f_j(v) q_j(v) < 0$. А в силу положительности множителя $\gamma(R_{j,2})$ верность необходимой импликации является простым следствием. □

Доказательство Теоремы 2. Согласно работе Майерсона [60] мы знаем, что для каждого прямого механизма (Q, M) с условиями (СС) и (ИР) ожидаемая прибыль принципала $\mathbb{E}\mathcal{R}$ может быть записана следующим образом

$$\mathbb{E}[\mathcal{R}] = \sum_{i \in \mathcal{N}} \int_{\mathcal{X}_{-i}} \left(M_i(0, \boldsymbol{x}_{-i}) + \int_0^{\bar{v}} \psi_i(x_i) Q_i(\boldsymbol{x}) f_i(x_i)\, dx_i \right) f_{-i}(\boldsymbol{x}_{-i})\, \boldsymbol{dx}_{-i}.$$

В большинстве случаев величина ожидаемого платежа в случае нулевой ценности участника $M_i(0, \boldsymbol{x}_{-i})$ равна нулю[2]. Этот факт позволяет упростить выражение для ожидаемой прибыли следующим образом

$$\mathbb{E}[\mathcal{R}] = \sum_{i \in \mathcal{N}} \int_0^{\bar{v}} \psi_i(v) f_i(v) q_i(v)\, dv, \text{ где } q_i(v) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(v, \boldsymbol{x}_{-i}) f_{-i}(\boldsymbol{x}_{-i})\, \boldsymbol{dx}_{-i}.$$

[2] А для случая аукционов с простыми форматами это предположение всегда выполняется.

В общем случае принципал может установить отличные от нуля персональные резервные цены R_i для каждого участника i. Но, если мы ограничим свободу принципала возможностью установить лишь одну универсальную резервную цену R для всех участников, тогда ожидаемая прибыль для случаев (D) и (An) примут следующий вид.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{R}^D] &= \sum_{i\in\mathcal{N}}\int_{R_i}^{\bar{v}}\psi_i(v)f_i(v)q_i(v)\,dv\\ &= \int_R^{\bar{v}} N_s\psi_s(v)f_s(v)q_s(v)+N_w\psi_w(v)f_w(v)q_w(v)\,dv = \mathbb{E}[\mathcal{R}^{An}].\end{aligned}$$

Положив $p = N_s/(N_s+N_w)$, запишем аналогичные выражения для случаев (Pr) и (Av).

$$\mathbb{E}[\mathcal{R}^{Pr}] = \sum_{i\in\mathcal{N}}\int_R^{\bar{v}}\mathbb{E}[\psi_i(v)f_i(v)]q_i^{Pr}(v)\,dv =$$

$$\sum_{i\in\mathcal{N}}\int_R^{\bar{v}}[p\psi_s(v)f_s(v)+(1-p)\psi_w(v)f_w(v)]\int_{\mathcal{X}_{-i}}Q_i(v,\boldsymbol{x}_{-i})\mathbb{E}[f_{-i}(\boldsymbol{x}_{-i})]\,\boldsymbol{dx}_{-i}\,dv =$$

$$\int_R^{\bar{v}}(N_s\psi_s(v)f_s(v)+N_w\psi_w(v)f_w(v))$$

$$\times\int_{\mathcal{X}_{-i}}Q_i(v,\boldsymbol{x}_{-i})\prod_{j\neq i}[pf_s(x_j)+(1-p)f_w(x_j)]\,\boldsymbol{dx}_{-i}\,dv =$$

$$N\int_R^{\bar{v}}\psi_i^{Av}(v)f_i^{Av}(v)\int_{\mathcal{X}_{-i}}Q_i(v,\boldsymbol{x}_{-i})\prod_{j\neq i}f_j^{Av}(x_j)\,\boldsymbol{dx}_{-i}\,dv =$$

$$N\int_R^{\bar{v}}\psi_i^{Av}(v)f_i^{Av}(v)q_i^{Av}(v)\,dv = \mathbb{E}[\mathcal{R}^{Av}],$$

где $F_i^{Av}(v) = \frac{N_s}{N}F_s(v)+\frac{N_w}{N}F_w(v)$, $f_i^{Av}(v) = \frac{d}{dv}F_i^{Av}(v)$ и $\psi_i^{Av}(v) = v-\frac{1-F_i^{Av}(v)}{f_i^{Av}(v)}$. □

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{N}_F = (1,\ldots,N)$ есть множество покупателей, чьи ценности есть независимые и одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. И пусть $\pi_i^N(x;F)$ есть условная вероятность для покупателя из множества $\mathcal{N}_F$ обладать i-ой по величине ценностью среди всех участников при условии, что его собственная ценность равна x.*

Предположим, что есть два множества различных участников $\mathcal{N}_F$ и $\mathcal{N}_G$ с $\forall x \quad F(x)\le G(x)$, то есть F стохастически доминирует (в первом порядке) распределение G. Тогда будем иметь, что $\pi_i^N(x;F)$ доминирует $\pi_i^N(x;G)$ в терминах отношения правдоподобия [$\pi_i^N(x;F)$ (lr-с.д.) $\pi_i^N(x;G)$] как вероятностные распределения над $i\in(1,\ldots,N)$, то есть $\pi_i^N(x;G)/\pi_i^N(x;F)$ есть невозрастающая функция по i.

Доказательство. Легко заметить, что $\pi_i^N(x; F) = C_{N-1}^{i-1}(1 - F(x))^{i-1}F(x)^{N-i}$. Покажем, что отношение $\pi_i^N(x; G)/\pi_i^N(x; F)$ есть невозрастающая функция по i. Для этого перепишем это отношение следующим образом.

$$\frac{\pi_i^N(x; G)}{\pi_i^N(x; F)} = \frac{(1 - G(x))^{i-1}G(x)^{N-i}}{(1 - F(x))^{i-1}F(x)^{N-i}} = \underbrace{\left(\frac{G(X)}{F(x)}\right)^N \frac{1 - F(x)}{1 - G(x)}}_{\geq 1} \left(\underbrace{\frac{1 - G(x)}{G(x)} \frac{F(x)}{1 - F(x)}}_{\leq 1}\right)^i.$$

И немедленно получаем, что отношение не возрастает по i. □

Лемма 7. *Рассмотрим два множества $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ с одинаковым числом покупателей, равным $N + 1$. Пусть, кроме того, существует два класса покупателей 'F' и 'G', чьи ценности есть независимые случайные величины, распределенные согласно функциям распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. В дополнение потребуем, чтобы F стохастически доминировало распределение G (то есть $F(x) \leq G(x)$), а рассматриваемые два множества $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ состояли из следующих подмножеств: $\mathcal{N} = \mathcal{N}_F \sqcup \mathcal{N}_G \sqcup \{k\}$, $\mathcal{N}' = \mathcal{N}'_F \sqcup \mathcal{N}'_G \sqcup \{k\}$ с $N_F = |\mathcal{N}_F|$, $N_G = |\mathcal{N}_G|$, $N'_F = |\mathcal{N}'_F|$, $N'_G = |\mathcal{N}'_G|$ и $N_F < N'_F$, где множества $\mathcal{N}_F$, $\mathcal{N}_G$ и их штрихованные аналоги соответствуют определению аналогичным множествам из Леммы 6.*

Пусть $\pi_i^{N+1}(x; \mathcal{N})$ есть условная вероятность для покупателя k обладать i-ой по величине ценностью среди всех членов множества $\mathcal{N}$ при условии, что его собственная ценность равна x; тогда имеем, что $\pi_i^{N+1}(x; \mathcal{N}')$ доминирует $\pi_i^{N+1}(x; \mathcal{N})$ в смысле отношения правдоподобия как вероятностные распределения над $i \in (1, \dots, N + 1)$.

Доказательство. Так как $N = N_F + N_G = N'_F + N'_G$ и $N_F < N'_F$, получаем $N_G > N'_G$. Без потери общности перепишем представления рассматриваемых множеств следующим образом.

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_F \sqcup \mathcal{N}_G \sqcup \{k\} = \{k\} \sqcup \mathcal{N}_F \sqcup \mathcal{N}'_G \sqcup \mathcal{N}_G^{\Delta},$$
$$\mathcal{N}' = \mathcal{N}'_F \sqcup \mathcal{N}'_G \sqcup \{k\} = \{k\} \sqcup \mathcal{N}_F \sqcup \mathcal{N}'_G \sqcup \mathcal{N}_F^{\Delta},$$

где $\mathcal{N}_F^{\Delta}$ и $\mathcal{N}_G^{\Delta}$ есть два множества характерных покупателей для соответствующих исходных множеств с $|\mathcal{N}_F^{\Delta}| = |\mathcal{N}_G^{\Delta}| = \Delta$ (именно благодаря этим подмножествам исходные $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ отличаются друг от друга).

Теперь для условной вероятности $\pi_i^m(x; \mathcal{N})$ определим рекуррентное соотношение при фиксированном упорядоченном порядке покупателей из множества $\mathcal{N}$ с $k = (1)$[3] следующим

[3]То есть выделенный покупатель k будет всегда первым согласно некоторому фиксированному порядку.

образом.

$$\pi_i^m(x;\mathcal{N}) = \pi_i^{m-1}(x;\mathcal{N})F_{(m)}(x) + \pi_{i-1}^{m-1}(x;\mathcal{N})(1 - F_{(m)}(x)),$$

где $\pi_i^m(x;\mathcal{N})$ есть условная вероятность для покупателя k обладать i-ой по величине ценностью среди первых $m > 0$ покупателей из множества $\mathcal{N}$ согласно заданному порядку; $F_{(m)}(x)$ — функция распределения ценности m-го покупателя в данном порядке. Укажем очевидные граничные условия для этого рекуррентного соотношения: $\pi_1^1(x;\mathcal{N}) = 1$, $\pi_0^m(x;\mathcal{N}) = 0$ и $\forall m < i \;\; \pi_i^m(x;\mathcal{N}) = 0$.

В силу того, что вид уравнения для условной вероятности $\pi_i^{N+1}(x;\mathcal{N})$ не зависит от способа упорядочивания покупателей из множества $\mathcal{N}$, мы можем выбрать конкретный порядок, удовлетворяющий следующим условиям

$$k = (1) \text{ и } \forall b \in \mathcal{N}_G^{\Delta} \; b \in \{(2), \ldots, (\Delta + 1)\}.$$

Таким образом, зафиксируем для множеств $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ порядки с указанными свойствами и с совпадающим порядком оставшихся покупателей из $\mathcal{N}_F \sqcup \mathcal{N}_G'$. Теперь с зафиксированными порядками над покупателями из рассматриваемых множеств покажем индукцией по m, что отношение $\pi_i^m(x;\mathcal{N})/\pi_i^m(x;\mathcal{N}')$ не возрастает по i.

База индукции немедленно следует из Леммы 6 с $m = \Delta + 1$. Теперь предположим истинность утверждения индукции для некоторого m и покажем, что отношение не возрастает по i в случае $m + 1$. Для этого потребуется простое наблюдение, что

$$\forall a, b, c, d > 0 \quad \frac{a+b}{c+d} \geq \frac{a}{c} \;\Leftrightarrow\; \frac{b}{d} \geq \frac{a}{c}.$$

Теперь легко заметить, что

$$\begin{aligned}\frac{\pi_i^{m+1}(x;\mathcal{N})}{\pi_i^{m+1}(x;\mathcal{N}')} &= \frac{\pi_i^m(x;\mathcal{N})F_{(m)}(x) + \pi_{i-1}^m(x;\mathcal{N})(1 - F_{(m)}(x))}{\pi_i^m(x;\mathcal{N}')F_{(m)}(x) + \pi_{i-1}^m(x;\mathcal{N}')(1 - F_{(m)}(x))} \geq \frac{\pi_i^m(x;\mathcal{N})}{\pi_i^m(x;\mathcal{N}')} \geq \\ &\geq \frac{\pi_{i+1}^m(x;\mathcal{N})F_{(m)}(x) + \pi_i^m(x;\mathcal{N})(1 - F_{(m)}(x))}{\pi_{i+1}^m(x;\mathcal{N}')F_{(m)}(x) + \pi_i^m(x;\mathcal{N}')(1 - F_{(m)}(x))} = \frac{\pi_{i+1}^{m+1}(x;\mathcal{N})}{\pi_{i+1}^{m+1}(x;\mathcal{N}')}.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем требуемое свойство, что отношение для случая $m + 1$ не возрастает по i, и согласно методу математической индукции получаем итоговое утверждение, что $\pi_i^{N+1}(x;\mathcal{N}')$ (lr-с.д.) $\pi_i^{N+1}(x;\mathcal{N})$. $\square$

Лемма 8. *Пусть $\mathcal{N} = (1, \ldots, N)$ есть множество покупателей и более того $\mathcal{N} = \mathcal{N}_w \sqcup \mathcal{N}_s$ с $N_w = |\mathcal{N}_w|, N_s = |\mathcal{N}_s|$ $(N = N_w + N_s)$. Предположим, что распределение ценностей*

$F_s(x)$ покупателей из $\mathcal{N}_s$ стохастически доминирует распределение $F_w(x)$ для ценностей покупателей из $\mathcal{N}_w$.

Тогда условная вероятность q_s^K для сильного покупателя быть среди первых K покупателей с наибольшими значениями ценностей при условии, что его собственная ценность равна x, мажорирует аналогичную условную вероятность q_w^K для слабого покупателя как функция от x, то есть $\forall x\ q_s^K(x) \geq q_w^K(x)$; более того, отношение $q_s^K(x)/q_w^K(x)$ есть невозрастающая функция от K с $q_s^N(x)/q_w^N(x) = 1$.

Доказательство. В первую очередь покажем, что $q_s^N(x)/q_w^N(x) = 1$. Данное утверждение достаточно очевидно в силу того, что и в числителе, и в знаменателе присутствуют условные вероятности для покупателя быть среди множества всех покупателей при условии, что его собственная ценность равна x, и поэтому каждая из таких условных вероятностей равна единице.

Теперь докажем, что рассматриваемые условные вероятности упорядочены заявленным образом. Для этого обозначим выделенного покупателя с фиксированным значением ценности в x как покупатель b. Тогда для случая, когда этот покупатель является представителем сильного класса, получаем следующее разбиение исходного множества $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N} = \{b \in \mathcal{N}_s\} \sqcup \mathcal{N}_w \sqcup \mathcal{N}_s'.$$

С другой стороны, когда покупатель b принадлежит слабому классу, получим другое разбиение:

$$\mathcal{N} = \{b \in \mathcal{N}_w\} \sqcup \mathcal{N}_w' \sqcup \mathcal{N}_s.$$

Здесь $\mathcal{N}_s'$ и $\mathcal{N}_w'$ есть исходные множества $\mathcal{N}_s$ и $\mathcal{N}_w$ лишь без покупателя b соответственно.

Теперь, чтобы воспользоваться результатом Леммы 7 переименуем множество покупателей $\mathcal{N}$ в случае разбиения, соответствующего ситуации $b \in \mathcal{N}_w$, как $\mathcal{N}'$. Остается лишь заметить, что $q_s^K(x) = \sum_{i=1}^K \pi_i^N(x;\mathcal{N})$ и $q_w^K(x) = \sum_{i=1}^K \pi_i^N(x;\mathcal{N}')$. Следовательно $q_s^K(x)$ и $q_w^K(x)$ есть функции распределения вероятностей для дискретного распределения $\pi_i^N(x;\mathcal{N})$ и $\pi_i^N(x;\mathcal{N}')$ соответственно. А в силу того, что последнее дискретные распределение стохастически доминирует первое согласно отношению правдоподобия, получаем необходимое доминирование первого порядка [48, p.278], то есть $\forall K \in \{1,\dots,N\}\ \forall x\ \ q_w^K(x) \leq q_s^K(x)$.

Осталось показать, что отношение $q_s^K(x)/q_w^K(x)$ не возрастает по K. Для этого перепишем это отношение следующим образом.

$$\frac{q_s^K(x)}{q_w^K(x)} = \frac{q_s^{K-1}(x) + \pi_K^N(x;\mathcal{N})}{q_w^{K-1}(x) + \pi_K^N(x;\mathcal{N}')}.$$

Воспользуемся следующим очевидным утверждением:

$$\forall a,b,c,d > 0 \quad \frac{a+b}{c+d} \leq \frac{a}{c} \;\Leftrightarrow\; \frac{b}{d} \leq \frac{a}{c} \;\Leftrightarrow\; \frac{b}{a+b} \leq \frac{d}{c+d}.$$

Тогда достаточно показать, что $\pi_K^N(x;\mathcal{N})/q_s^K(x) \leq \pi_K^N(x;\mathcal{N}')/q_w^K(x)$.

Предположим противное, что $\pi_K^N(x;\mathcal{N})/q_s^K(x) > \pi_K^N(x;\mathcal{N}')/q_w^K(x)$. Но согласно Лемме 7 имеем, что $\pi_i^N(x;\mathcal{N}')$ (lr-с.д.) $\pi_i^N(x;\mathcal{N})$. Поэтому условная вероятность, $\pi_i^{\leq K}(x;\mathcal{N}') := \pi_i^N(x;\mathcal{N}')/q_w^K(x)$, иметь i-ую по величине ценность среди покупателей из $\mathcal{N}'$ при условии, что собственная ценность равна x, и того, что рассматриваемый покупатель уже среди покупателей с первыми K наибольшими значениями ценностей; эта условная вероятность $\pi_i^{\leq K}(x;\mathcal{N}')$ также доминирует $\pi_i^{\leq K}(x;\mathcal{N}) := \pi_i^N(x;\mathcal{N})/q_s^K(x)$ согласно отношению правдоподобия.

Тогда по необходимости имеем, что отношение $[\pi_i^N(x;\mathcal{N})/q_s^K(x)]/[\pi_i^N(x;\mathcal{N}')/q_w^K(x)]$ не возрастает по i. И если

$$\pi_K^N(x;\mathcal{N})/q_s^K(x) > \pi_K^N(x;\mathcal{N}')/q_w^K(x),$$

то тогда $\pi_i^N(x;\mathcal{N})/q_s^K(x) > \pi_i^N(x;\mathcal{N}')/q_w^K(x)$ для всех $i \in \{1,\ldots,K\}$.

Таким образом, получаем противоречие, которое завершает доказательство,

$$1 = \sum_{i=1}^{K} \pi_i^N(x;\mathcal{N})/q_s^K(x) > \sum_{i=1}^{K} \pi_i^N(x;\mathcal{N}')/q_w^K(x) = 1.$$

□

Следствие. *Теперь введем в рассмотрение вектор качества $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \ldots \alpha_N$ для различных объектов, который однозначно определяет для покупателей ценности этих объектов упорядоченным образом. Тогда определим условные математические ожидания получаемого качества объекта для покупателя из слабого и сильного классов при условии, что их ценности равны x, следующим образом*

$$q_w^{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \pi_i^N(x;\mathcal{N}') \text{ и } q_s^{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \pi_i^N(x;\mathcal{N}).$$

Если имеет место свойство $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_N$ (то есть за более высокое место в порядке получаешь объект большего качества), то тогда $q_s^{\boldsymbol{\alpha}}(x) \geq q_w^{\boldsymbol{\alpha}}(x)$.

Более того, если определить срез $\boldsymbol{\alpha}_K$ как

$$\boldsymbol{\alpha}_K \coloneqq \alpha_1 \dots \alpha_K 0 \dots 0,$$

то есть за позиции в порядке, которые хуже, чем K-ое место, покупатель не получает объекта; то тогда отношение $q_s^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)/q_w^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)$ не возрастает по K.

Доказательство. Как известно из Леммы 8 распределение $\pi_i^N(x;\mathcal{N}')$ (lr-с.д.) $\pi_i^N(x;\mathcal{N})$. Известно, [48, p.275], что для любой возрастающей последовательности γ ($\gamma_i \leq \gamma_j\ \forall i < j$) математическое ожидание $\sum_{i=1}^N \gamma_i \pi_i^N(x;\mathcal{N}')$ не меньше, чем аналогичное математическое ожидание $\sum_{i=1}^N \gamma_i \pi_i^N(x;\mathcal{N})$. Аналогичным образом получается обратное утверждение для убывающей последовательности α, что $q_s^{\boldsymbol{\alpha}}(x) \geq q_w^{\boldsymbol{\alpha}}(x)$.

Для последнего утверждения следствия достаточно показать, что

$$\frac{q_s^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)}{q_w^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)} \geq \frac{\pi_K^N(x;\mathcal{N})}{\pi_K^N(x;\mathcal{N}')}. \left[\text{Напомню: } \forall a,b,c,d > 0 \;\; \frac{a}{c} \geq \frac{a+b}{c+d} \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{c} \geq \frac{b}{d}\right]$$

Но согласно Лемме 8 известно, что отношение $q_s^K(x)/q_w^K(x)$ не возрастает по K, то есть

$$\frac{q_s^K(x)}{q_w^K(x)} \geq \frac{\pi_K^N(x;\mathcal{N})}{\pi_K^N(x;\mathcal{N}')}.$$

Поэтому, показав, что $q_s^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)/q_w^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x) \geq q_s^K(x)/q_w^K(x)$, или эквивалентно, что $q_s^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)/q_s^K(x) \geq q_w^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)/q_w^K(x)$, утверждение будет доказано.

Для этого заметим, что последние два выражения $q_s^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)/q_s^K(x)$ и $q_w^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)/q_w^K(x)$ есть условные математические ожидания для среза $\boldsymbol{\alpha}_K$ с соответствующими условными распределениями вероятностей $\pi_i^{\leq K}(x;\mathcal{N})$ и $\pi_i^{\leq K}(x;\mathcal{N}')$. И в силу того , что $\pi_i^{\leq K}(x;\mathcal{N}')$ также (lr-с.д.) $\pi_i^{\leq K}(x;\mathcal{N})$, имеем, что $q_s^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)/q_s^K(x) \geq q_w^{\boldsymbol{\alpha}_K}(x)/q_w^K(x)$. □

Утверждение 3. *Пусть даны две непрерывных функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ с носителями $(0,\omega_1)$ и $(0,\omega_2)$ соответственно. Без потери общности предположим, что $\omega_1 > \omega_2$. Пусть кроме того выполнено свойство стохастического доминирования: $F_1 \succcurlyeq_{\mathbf{hr}} F_2$.*

Тогда можно построить сколь угодно близкую к исходной функции $F_2(x)$ аппроксимацию $F_2^\sharp(x)$ такую, что

(i) ее носителем будет являться $(0,\omega_1)$,

(ii) $F_1 \succcurlyeq_{\mathbf{hr}} F_2^\sharp$.

При этом фразу «сколь угодно близкую» надо понимать в следующем смысле: $\forall\varepsilon_1 > 0,\ \forall x \in (0, \omega_2 - \varepsilon_1),\ F_2(x) \equiv F_2^\sharp(x)$ *и* $\forall\varepsilon_2 > 0,\ \ 1 - F_2^\sharp(\omega_2) < \varepsilon_2$.

Доказательство. В качестве доказательства проверим лишь утверждения для конкретного варианта такой аппроксимации:

$$F_2^\sharp(x) = \begin{cases} F_2(x), & x \le \omega_2 - \varepsilon_1; \\ 1 - (1 - F_2(\omega_2 - \varepsilon_1))(1 - F_1(x))^\delta (1 - F_1(\omega_2 - \varepsilon_1))^{-\delta}, & x > \omega_2 - \varepsilon_1. \end{cases}$$

Для удобства введем обозначение, $G_\cdot(x) = 1 - F_\cdot(x)$. Тогда на интервале $x > \omega_2 - \varepsilon_1$ имеем $G_2^\sharp(x) = G_2(\omega_2 - \varepsilon) \cdot G_1(x)^\delta / G_1(\omega_2 - \varepsilon_1)^\delta$.

Для проверки свойства $F_1 \succcurlyeq_{\mathbf{hr}} F_2^\sharp$ достаточно лишь проверить, что на интервале $x > \omega_2 - \varepsilon_1$ отношение функций $G_2^\sharp(x)/G_1(x)$ убывает как функция от x. Что очевидным образом выполняется при $\forall\delta > 1$.

Для проверки утверждения о «сколь угодной близости» достаточно проверить, что существует такая $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 1$, при которой $G_2^\sharp(\omega_2) < \varepsilon_2$. В общем случае в силу убывания функции $G_\cdot(x)$ имеем, что $G_1(\omega_2)/G_1(\omega_2 - \varepsilon_1) < 1$, поэтому $G_2^\sharp(\omega_2) < \varepsilon_2$ при $\forall\delta > \max\{1, \ln\frac{\varepsilon_2}{G_2(\omega_2 - \varepsilon_1)} / \ln\frac{G_1(\omega_2)}{G_1(\omega_2 - \varepsilon_1)}\}$. □