Отзыв научного руководителя на диссертацию А.А. Кокоткина «Вероятностный подход к задачам о графах расстояний и графах диаметров», представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация А.А. Кокоткина мотивирована двумя классическими и тесно связанными между собой проблемами комбинаторной геометрии. Первая проблема была поставлена Борсуком в 1933 году, и сводится она к отысканию минимального числа частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное множество диаметра 1 в евклидовом пространстве размерности d. Вторая проблема восходит к Нелсону и Хадвигеру. Она состоит в нахождении наименьшего количества цветов, в которые можно так покрасить все точки пространства, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1.

С проблемой Борсука естественно связано понятие графа диаметров. Речь идет о графе, у которого множество вершин — это конечное множество точек в пространстве, а ребрами соединены те и только те вершины, расстояние между которыми равно диаметру множества вершин. Аналогично с проблемой Нелсона–Хадвигера связано понятие графа расстояний, вершины которого — это снова точки пространства, а ребра — пары точек на расстоянии 1. И хроматические числа таких графов в точности соответствуют тем характеристикам, которые изучаются в задачах Борсука и Нелсона–Хадвигера. При этом одна из наиболее трудных проблем здесь — найти "хорошие" нижние оценки для таких хроматических чисел.

Гипотеза Борсука состояла в том, что наибольшее хроматическое число графа диаметров в $\mathbb{R}^d$ равно $d+1$, и эта гипотеза верна при $d \leq 3$. При $d \geq 64$ найдены контрпримеры. Наконец, при $d \in \{4, \ldots, 63\}$ ничего не известно. Таким образом, возникает важный вопрос: *насколько часто появляются графы диаметров в пространстве $\mathbb{R}^d$ с хроматическим числом $d+1$?* Для формализации этого вопроса около 10 лет назад была введена величина $u_d(n,p)$, равная максимальному натуральному k, при котором с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, в случайном графе $G(n,p)$ Эрдеша–Реньи найдется индуцированный k-вершинный подграф, имеющий хроматическое число $d+1$ и изоморфный некоторому графу диаметров с вершинами в $\mathbb{R}^d$. Тогда же были получены некоторые оценки этой величины. Однако оценки были весьма слабыми.

В то же время проблема Нелсона–Хадвигера крайне далека от своего решения даже в случае плоскости. Известно лишь, что максимальное хроматическое графа расстояний в $\mathbb{R}^2$ лежит где-то между 4 и 7. Разумеется, при бóльших d зазор между верхними и нижними оценками еще больше (отношение растет экспоненциально). Таким образом, важный вопрос тут таков: *насколько часто случайный граф $G(n,p)$ Эрдеша–Реньи изоморфен некоторому графу расстояний в $\mathbb{R}^d$?* И здесь также около 10 лет назад была предложена величина $p_d^*(n)$ — пороговая вероятность события, состоящего в том, что случайный граф реализуется в $\mathbb{R}^d$ как граф расстояний. Опять же, первоначальные оценки этой величины были довольно слабыми.

В диссертации Кокоткина даны практически исчерпывающие ответы на вопросы о поведении величин $u_d(n,p)$ и $p_d^*(n)$, а также некоторых других подобных характеристик.

Так, в **первой главе** диссертации получен результат, который представляет значительный самостоятельный интерес, а именно, доказано, что в любом графе расстояний на плоскости есть "большой" индуцированный подграф с "маленьким" хроматическим числом. Например, если в графе расстояний n вершин, то есть индуцированный подграф с не менее $0.91n$ вершинами, вершины которого красятся правильным образом в 4 цвета. Иными словами, "почти весь" граф имеет хроматическое число, равное нижней оценке максимального хроматического числа графа расстояний на плоскости.

С помощью указанного результата и его аналогов в бóльших размерностях, также полученных в первой главе, найдены точные по порядку оценки величины $p_d^*(n)$, причем константы в верхних и нижних оценках явно вычислены и весьма близки друг к другу.

Во **второй главе** диссертации найдены весьма точные оценки величин $u_2(n, p)$ и $u_3(n, p)$. А именно, если p — не слишком быстро стремится к нулю и не слишком быстро стремится к единице при $n \to \infty$, то получены *асимптотики* данных величин, т.е. проблема, по сути, закрыта. В остальных случаях также найдены оценки, отличающиеся друг от друга лишь в константы раз. Применена нетривиальная комбинаторная и вероятностная техника.

В **третьей главе** техника, наработанная в главе 2, развивается дальше (добавляются многочисленные инструменты, среди которых и теорема Редля в теории кодирования, и теоремы о вероятности того, что в случайном графе нет клик данного размера, и мощная теорема Ахлиоптаса–Наора о хроматическом числе случайного графа, и т.д.), и в результате получается практически исчерпывающий ответ на вопрос о поведении величины $u_d(n, p)$ и ее аналогов при фиксированном d и многих различных функциях $p = p(n)$.

В целом диссертация — законченное исследование в области вероятностной комбинаторики и теории графов. Ее результаты опубликованы в высокорейтинговых журналах, среди которых Доклады РАН и Математические заметки. Было сделано несколько докладов на крупных международных конференциях в России и за рубежом. Диссертация может быть полезна специалистам МГУ им. М.В. Ломоносова, МФТИ, ИППИ РАН, МИРАН им. В.А. Стеклова, ВЦ РАН, ИПМ ДВО РАН, Mathematical Rényi Insitute Budapest, и т.д.

Таким образом, диссертационная работа А.А. Кокоткина полностью соответствует требованиям п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" Минобрнауки РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а Андрей Александрович Кокоткин заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

11.06.2014

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор — А.М. Райгородский

«Подпись А.М. Райгородского заверяю»

Ученый секретарь МФТИ,
доцент — Ю.И. Скалько