

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Кокоткина Андрея Александровича на тему «Вероятностный подход к задачам о графах расстояний и графах диаметров» по специальности 01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Данная диссертация по тематике относится к комбинаторной геометрии. Эта тематика особенно бурно развивается в последнюю пару десятилетий вплоть до сегодняшнего дня (последнее обстоятельство просматривается в ссылках в этом отзыве). В диссертации хорошо изложена история тематики и дан обзор (хотя и неполный) полученных по ней результатов.

Как охарактеризовать в комбинаторных терминах такой первородный геометрический инвариант нашего пространства как его размерность? Ответ на этот вопрос проистекает из классической головоломки, к которой требуется сложить из шести одинаковых спичек четыре равносторонних треугольника, и дается в следующем утверждении: размерность евклидова пространства равна уменьшенному на единицу максимальному хроматическому числу  $\chi$  у полного графа, вложенного в это пространство так, чтобы все ребра реализовывались прямолинейными отрезками единичной длины. *Хроматическое число  $\chi(G)$  графа  $G$*  определяется как минимальное число цветов, достаточное для раскраски вершин  $u$   $G$  так, чтобы смежные вершины были бы раскрашены в разные цвета.

Здесь сразу встает другой вопрос: останется ли верным утверждение из предыдущего абзаца, если из него удалить слово «полного»? Этот естественный вопрос приводит к другому важному геометрическому инварианту пространства. *Хроматическое число пространства  $\chi(R^d)$*  определяется как минимальное число цветов, достаточное для раскраски точек этого пространства так, чтобы были раскрашены в разные цвета любые две точки, отстоящие на единичном расстоянии друг от друга. Из сказанного выше вытекает, что

$$\dim R^d \leq \chi(R^d) - 1,$$

откуда  $d+1 \leq \chi(R^d)$  (тривиальная нижняя оценка). В частности,  $\chi(R^1) \geq 2$ ; в действительности  $\chi(R^1) = 2$ , как нетрудно доказать.

*Граф единичных расстояний* в  $R^d$  определяется как граф, множество вершин которого соответствует данному точечному множеству в  $R^d$ , причем две вершины соединяются ребром при условии, что соответствующие им точки отстоят на расстоянии 1 друг от друга. Граф единичных расстояний в  $R^2$  может оказаться непланарным — таков, например, граф Петерсена, который можно реализовать графом единичных расстояний некоторого множества 10 точек на плоскости. Более того, граф единичных расстояний в  $R^d$  при любом фиксированном  $d \geq 2$  может содержать подграф, гомеоморфный полному графу со сколь угодно большим числом вершин, и поэтому род графа единичных расстояний может оказаться сколь угодно большим.

Важность изучения комбинаторных свойств графов единичных расстояний в евклидовых пространствах  $R^d$  обусловлена тем, что эти свойства определяют геометрические свойства самих евклидовых пространств благодаря теореме Эрдеша–де Брёйна (1951), утверждающей, что  $\chi(R^d) = \max \chi(G)$ , где максимум берется по всем конечным графам  $G$  единичных расстояний в  $R^d$ .

Проблема Хадвигера–Нелсона состоит в отыскании точного значения хроматического числа плоскости  $\chi(R^2)$ . Эта проблема была впервые сформулирована Эдвардом Нелсоном

в 1950 году и появилась в печати в 1960 году в весьма примечательной статье Мартина Гарднера «Mathematical Games» [Scientific Amer., 203, No. 4, October (1960), 180]. Лучшие известные на сегодняшний день оценки следующие:

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7,$$

где обе оценки нетрудные и стали фольклорными, однако приоритет в их установлении признан за Джоном Исбеллом (Isbell) — см. обзор Александра Сойфера «Chromatic Number of the Plane & Its Relatives, History, Problems and Results: An Essay in 11 Parts» в книге «Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow», Springer, New York, 2011.

В общей формулировке проблема состоит в отыскании точного значения хроматического числа  $\chi(\mathbb{R}^d)$  пространства  $\mathbb{R}^d$  данной размерности  $d \geq 2$ . Эта проблема является одной из фундаментальных нерешенных задач современной комбинаторной геометрии и известна как проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера. Лучшие известные на сегодняшний день оценки в случае  $d = 3$  следующие:

$$6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15,$$

где нижняя оценка получена Ореном Нехуштаном (Nechushtan, бывший ученик Ноги Алона, 2002), а верхняя — Д. Кулсоном (Coulson, 2002).

Таким образом, глубокая проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера еще далека от окончательного решения, однако дальнейшее продвижение в ее решении представляется чрезвычайно трудным. Сам Эдвард Нелсон в 1950 году называл свою задачу о нахождении хроматического числа плоскости «второй проблемой *четырёх* красок» («a second *four-color* problem», см. вышеупомянутый обзор Александра Сойфера, 2011). Таким образом, на равенство  $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$  следует ссылаться как на гипотезу Нелсона.

Перехожу к оценке результатов диссертации, которые можно разбить на три группы: первая группа — комбинаторно-геометрическая, а вторая и третья — вероятностно-геометрические.

Теоремы 1–4 (глава 1) первой группы результатов гарантируют, что в любом графе единичных расстояний на плоскости найдется индуцированный подграф, большой по числу вершин, но небольшой по хроматическому числу. Так, теорема 4 утверждает, что в любом графе  $G$  единичных расстояний на плоскости найдется индуцированный подграф с хроматическим числом, не большим 4, но почти что совпадающий с объемлющим графом. Более точно, этот подграф содержит не менее 91,7% вершин объемлющего графа. Этот интересный и важный результат представляет собой существенный аргумент в пользу классической гипотезы Нелсона. Ведь если бы планку «91,7» удалось бы немного поднять (до 100), это означало бы, что  $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$  по вышеупомянутой теореме Эрдёша–де Брёйна.

Представляется чрезвычайно трудным продвинуться в решении проблемы Нелсона–Эрдёша–Хадвигера путем улучшения известных оценок традиционными комбинаторно-геометрическими методами. Видимо поэтому диссертант предпринял вероятностный подход, и, надо сказать, это предприятие оказалось весьма плодотворным, судя по второй и третьей группам результатов диссертации, к обсуждению которых я перехожу.

Существуют разные способы превращения данного множества графов с фиксированным числом вершин  $n$  в вероятностное пространство. Диссертант следует стандартной модели случайного графа, в которой данное множество графов — это множество всех простых помеченных графов с  $n$  вершинами, а ребра появляются независимо друг от друга с заданной вероятностью  $p$ , причем параметр  $p$  зависит от  $n$  в общем случае. Это веро-

ятностное пространство, часто именуемое моделью  $G(n, p)$ , является вариацией модели Эрдёша–Реньи.

В оставшейся части глава 1 посвящена изучению одного *монотонного* свойства (т.е. свойства, сохраняющегося при удалении ребер) у графов  $G(n, p)$ , а именно свойства быть изоморфным некоторому графу единичных расстояний в  $\mathbb{R}^d$ . Чем больше  $p$ , тем больше ребер (в вероятностном смысле), и тем менее вероятна реализация такого случайного графа графом единичных расстояний.

Из результатов Пала Эрдёша и Альфреда Реньи, опубликованных в статье «On the Evolution of Random Graphs» [Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 5, 17-61, 1960], следует существование так называемой пороговой функции для монотонных свойств графов. Как следствие, получается существование критического порогового значения  $p_d^*(n)$  у параметра  $p$ , ниже которого вероятность того, что случайный граф с  $n$  вершинами обладает заданным монотонным свойством, стремится к 1 (при  $n \rightarrow \infty$ ), но стремится к 0 при  $p > p_d^*(n)$ . Этот феномен известен как *фазовый переход*, причем само значение  $p_d^*(n)$  соответствует точке перехода через положение неустойчивого равновесия, если продолжить термодинамическую метафору. Теоремы 5 и 6 второй группы результатов диссертации я переформулирую в (более компактном) виде одного равенства:

$$p_2^*(n) = \Theta(n^{-1}),$$

то есть *асимптотически пороговая вероятность убывает обратно пропорционально числу вершин*. Считаю, что это принципиальный вывод из второй группы результатов диссертации. Более того, из теоремы 11 получается такой же порядок убывания для порогового значения  $p_d^*(n)$  в более высоких размерностях  $d \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ :

$$p_d^*(n) = \Theta(n^{-1}),$$

Удивительно, что случай  $d = 1$  получился стоящим особняком — в теореме 12 получен следующий порядок убывания:

$$p_1^*(n) = \Theta(n^{-4/3}).$$

На этом диссертант не остановился и дал завершённый ответ в одномерном случае в виде *точного* асимптотического значения пороговой вероятности — это значение равно  $\sqrt[3]{6 \ln 2} n^{-4/3}$ .

В главах 2 и 3 получены результаты третьей группы. Эти результаты относятся к изучению другого свойства (уже немонотонного) у графов  $G(n, p)$ , а именно свойства быть изоморфным графу диаметров некоторого множества в  $\mathbb{R}^d$ , причем при условии, чтобы этот граф диаметров имел бы максимально возможное хроматическое число. *Граф диаметров* определяется как граф, множество вершин которого соответствует данному множеству  $S \subset \mathbb{R}^d$ , причем две вершины соединяются ребром тогда и только тогда, когда соответствующие точки в  $S$  отстоят друг от друга на расстояние, равное диаметру множества  $S$ . Согласно гипотезе Борсука, адресуемой в следующем абзаце, максимально возможное хроматическое число у графа диаметров в  $\mathbb{R}^d$  равно  $d+1$ . В случае, когда этот мак-

симум достигается, я предложил бы говорить, в порядке развития терминологического аппарата, что такой граф диаметров *хроматически невырожден*.

Граф диаметров тесно связан с классической гипотезой Кароля Борсука (1933) о том, что минимальное число частей меньшего диаметра, на которые можно разбить *любое* множество единичного диаметра в  $\mathbb{R}^d$ , равно  $d + 1$ . Такое минимальное число для фиксированного множества называется числом Борсука этого множества. Заметим, что число Борсука конечного множества  $S \subset \mathbb{R}^d$  равно хроматическому числу его графа диаметров. Все, что на сегодняшний день известно о гипотезе Борсука, сводится к следующему: она верна при  $d = 1$  (очевидно), верна при  $d = 2$  (Кароль Борсук, 1933), верна при  $d = 3$  (Х. Эгглстон, 1955), ложна при всех  $d \geq 65$  (Андрій Бондаренко, 2013) и ложна при  $d = 64$  (Т. Дженрич, 2013–2014).

Заметив, что в  $\mathbb{R}^2$  и в  $\mathbb{R}^3$  существует достаточно много примеров хроматически невырожденных графов диаметров (т.е. с хроматическими числами равными 3 и 4, соответственно), диссертант исследовал с вероятностных позиций, насколько такие примеры часты (или редки). Более конкретно, в теоремах 13–23 получен целый ряд оценок различного вида на максимальное число вершин  $u_d(n, p)$ , могущее быть с вероятностью, большей  $1/2$ , в индуцированном подграфе (случайного графа), который реализуется хроматически невырожденным графом диаметров в  $\mathbb{R}^d$  при  $d \in \{2, 3\}$ . Величина  $u'_d(n, p)$  определяется так же, как и  $u_d(n, p)$ , но с дополнительным требованием, чтобы индуцированный подграф был связным.

Для примера, вот две из полученных в диссертации оценок (в виде равенств) в плоском случае:  $u_2(n, p) = u'_2(n, p) = 0$  при всех достаточно больших  $n$  при условии, что  $p = o(1/n)$  (теорема 13). Таким образом, можно сделать важный вывод о том, что при указанном условии *почти все графы диаметров на плоскости будут иметь хроматическое число, меньшее трех*, несмотря на то, что гипотеза Борсука верна при  $d = 2$ . Далее, при естественных ограничениях на асимптотику у  $p = p(n)$ , из теорем 16 и 17 получена асимптотика (при  $n \rightarrow \infty$ ) величин  $u_2(n, p)$  и  $u'_2(n, p)$ ; эта асимптотика имеет вид  $2 \log_{\frac{1}{1-p}}(np)$ .

В теоремах 24–27 получены верхние и нижние оценки для  $u_d(n, p)$  и верхние оценки для  $u'_d(n, p)$  в случае произвольной (фиксированной) размерности  $d$ . Наконец, теорема 28 является обобщением двух из предыдущих теорем (13 и 19) в случае  $d \geq 3$ . Из нее можно сделать важный вывод о том, что при  $d \geq 3$  *почти все подграфы диаметров с большим числом вершин будут хроматически вырожденными при малых  $p$* .

Итак, результаты третьей группы (главы 2 и 3) можно резюмировать в виде важного и принципиального тезиса: *при значениях параметра  $p$ , близких к 0, граф диаметров имеет тенденцию к хроматическому вырождению, и получается, что  $u_d(n, p) = 0$  (при больших значениях  $n$ ), а при значениях  $p$ , близких к 1, граф диаметров имеет тенденцию к полноте, и получается, что  $u_d(n, p) = d + 1$* .

Результаты диссертации верны и снабжены строгими математическими доказательствами с довольно развитой математической техникой и утонченной математической аргументацией. Что касается методов, в диссертации используется развитая комбинаторная, вероятностная и комбинаторно-вероятностная методики из теорий случайных графов и плотнейших упаковок, а также теорема Рёдля о взаимном расположении подмножеств конечного множества. Я бы еще отметил теорему 8 диссертации, которая по существу является усилением классической теоремы Лармана-Роджерса и очень эффектно используется в доказательстве теоремы 4.

Как постоянный референт журнала Zentralblatt MATH (2011 г. – н.в.), отмечу, что научные результаты диссертации являются новыми за исключением теоремы 1, которая играет в диссертации техническую роль и существенно обобщена до теоремы 4 (прокомментированной выше). Результаты опубликованы диссертантом в пяти статьях в престижных математических журналах, три из которых входят в список ВАК: «Доклады РАН», «Математические заметки» и «Труды МФТИ». Результаты также докладывались диссертантом на четырех научных семинарах и конференциях, в том числе двух международных.

Чтобы продемонстрировать, что рамки применимости тематики диссертации значительно шире чисто теоретического интереса, приведу один пример. Профессор проводит письменный экзамен по комбинаторной геометрии. С одной стороны ему не хочется, чтобы студенты списывали друг у друга, а с другой стороны, ему не хочется проделывать лишнюю работу по подготовке экзаменационных заданий, разных для всех студентов. Вопрос: каково минимальное число разных заданий, обеспечивающее самостоятельность работы студентов? Ответ: искомое число равно хроматическому числу графа «единичных» (здесь опасно близких) расстояний в экзаменационной аудитории, в котором соединяются ребрами вершины, представляющие студентов, сидящих в опасной близости друг от друга.

Однако я бы подчеркнул, что, поскольку диссертация выполнена в области фундаментальной науки, ее практическую значимость следует оценивать с позиций первого ключевого принципа управления Эдвардса Деминга (Edwards Deming) — *надо ставить долгосрочные цели, а не сосредотачиваться лишь на сиюминутных потребностях*. Инвестиции в фундаментальную науку и в связанные с нею прикладные разработки окупятся в долгосрочной перспективе. Укажу на одну такую возможность прикладных разработок: если два графа единичных расстояний изоморфны, то имеет место или изометричность, или изгибание соответствующих стержневых конструкций. В России теорией изгибаний занимаются многие геометры, например, Идждад Хакович Сабитов, доказавший гипотезу «кузнечных мехов» (1996).

Выше я уже достаточно сказал о достоинствах диссертации. Сейчас остановлюсь на ее недостатках. Мои критические замечания делятся на две категории: терминологические и по списку литературы.

Из терминологических недостатков я вижу один: диссертант использует, видимо для краткости, термин «граф расстояний» (или «дистанционный граф»). Это может вызвать недоумение у читателя: как граф расстояний на плоскости может быть непланарным? В литературе принят более точный и понятный термин «граф единичных расстояний» (или «unit-distance graph»).

По ссылкам на литературу у меня целый ряд критических замечаний. Начну с ссылки [54], в которой имеется неточность в названии статьи (в оригинале нет слова «note»).

Далее, нет ссылок на авторство оценок хроматического числа плоскости. Хотя эти оценки фольклорные, приоритет в их установлении признан за Джоном Исбеллом (см. выше). Я бы еще добавил в список литературы ссылку на статью Мартина Гарднера (процитированную выше), а также следующий хороший обзор К.Б. Чилакамарри «The unit-distance graph problem: a brief survey and some new results» [Bull Inst. Combin. Appl. 8 (1993), 39-60]. Однако диссертант реабилитировался в отношении последнего упомянутого обзора, включив в список литературы книгу Александра Сойфера «The Mathematical Coloring Book», Springer, New York, 2009.

Далее, диссертант не включил в список литературы статью П. Эрдёша и А. Реньи «On the Evolution of Random Graphs» 1960 года, уже процитированную выше в этом отзыве, и на которую я (несколько условно) буду ссылаться далее как на главную. Диссертант спра-

ведливо отмечает на стр. 5 во введении, что «основной метод, используемый здесь [в диссертации — прим. оппонента], это вероятностный метод. Его основоположником считается Эрдёш (см. [39])». Имея число Эрдёша, равное 2, я с большим почтением отношусь к огромному научному наследию, которое нам оставил математический гений Пала Эрдёша. Однако замечу, что в трехстраничной заметке [39] нет ничего о случайных графах, а диссертанту здесь следовало бы дать ссылку на главную статью. Историческое значение другой цитируемой в диссертации статьи Эрдёша и Реньи («On random graphs I», 1959) состоит в том, что в ней *впервые* была введена в рассмотрение модель, известная сегодня как модель Эрдёша-Реньи. Однако пороговый эффект изучается именно в их главной статье, именно в ней доказано существование пороговой функции, и, между прочим, полученный результат характеризуется самими авторами как довольно удивительный («rather surprising result»).

Наконец, у меня имеются критические замечания по ссылкам в автореферате. На стр. 10 автореферата говорится: «Сейчас известно, что гипотеза Борсука верна при  $d \leq 3$  и ложна при  $d \geq 64$ ». При этом в части « $d \leq 3$ » вообще не дается никаких ссылок, а в части « $d \geq 64$ » дается лишь ссылка на недавний результат Т. Дженрича (2013–2014), в котором адресуется только случай  $d = 64$ , а между тем, Андрей Бондаренко (2013) показал ложность гипотезы Борсука при *всех*  $d \geq 65$ .

Однако высказанные выше критические замечания относятся к оформлению и списку литературы, не неся принципиального характера и не снижая ценность работы. Говоря же о диссертации в целом, эта работа произвела на меня благоприятное впечатление, в ней получены новые значимые научные результаты и развиты потенциально полезные методы. Диссертация является завершенным научным исследованием и хорошим вкладом в развитие комбинаторной геометрии на современном этапе, а автореферат объективно и в полной мере отражает содержание диссертации.

Учитывая все сказанное выше в этом отзыве, считаю, что диссертация представляет собой законченное научное исследование на актуальную тему. Результаты диссертации имеют теоретическое и практическое значение. Диссертация соответствует высоким стандартам, установленным Положением о присуждении ученых степеней, а ее автор Кокоткин Андрей Александрович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика.



Официальный оппонент,  
доцент, к.ф.-м.н.

Лавренченко Сергей Александрович  
(Lawrencenko Serge)  
14 ноября 2014 г.



Проректор Гаврилов А.Ю.

Почтовый адрес: 125363, Москва, ул. Штурвальная, дом 7, корп. 1, кв. 45.

Телефон: 8-910-4588882 (моб.), 8-499-7407707 (дом.)

Адрес электронной почты: [lawrencenko@hotmail.com](mailto:lawrencenko@hotmail.com)

Наименование организации: Российский государственный университет туризма и сервиса.

Должность: доцент.