Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего профессионального образования
“Московский физико-технический институт
(государственный университет)”
факультет анализа данных

На правах рукописи

Кокоткин Андрей Александрович

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ О ГРАФАХ РАССТОЯНИЙ И ГРАФАХ ДИАМЕТРОВ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
д.ф.-м.н. А.М. Райгородский

Москва, 2014

Оглавление

Введение

Настоящая работа стоит на стыке двух дисциплин: вероятностной комбинаторики и дискретной геометрии. Ниже мы расскажем о ключевых задачах каждой из них.

Дискретная геометрия как наука оформилась на рубеже XIX–XXвв. Одним из ее основоположников можно считать Минковского (см. [53]), который исследовал расположение целочисленных векторов по отношению к выпуклым телам в пространстве и доказал фундаментальную теорему о выпуклом теле. Столь же значимые результаты в этой теме получили Вороной, Коркин, Золотарев (см. [2, 47]) и другие. Сейчас это отдельный раздел теории чисел и геометрии, называемый геометрией чисел (см. [3, 51]).

С геометрией чисел тесно связано еще одно направление дискретной геометрии. К этому направлению прежде всего относятся следующие три задачи. Первая — классическая задача Ньютона о плотнейшей упаковке шаров в пространстве (см. [5, 22, 24]). Вторая задача, двойственная к первой, это задача о редчайшем покрытии пространств шарами. Наконец, третья задача, о контактном числе — наибольшем количестве шаров, касающихся данного шара в пространстве (см. [8, 61]).

Еще одно направление исследований в дискретной геометрии было инициировано Клейн, Эрдешем и Секерешем в 1934 году, которые доказали существование такого числа $N(n)$, что среди любых N точек общего положения на плоскости найдется выпуклый n-угольник (см. [6, 41, 42, 44, 55]).

Следующий класс проблем дискретной геометрии также предложен Эрдешем. Первый вопрос, который был им поставлен, — о наибольшем числе единичных расстояний в множестве из n точек на плоскости и в пространстве (см. [38]). Второй, не менее важный, наоборот, о числе различных расстояний в таком n-точечном множестве (см. [34, 57]).

Все перечисленные выше задачи исключительно важны для дискретной геометрии, однако необходимо выделить еще две проблемы, которые имеют особенное значение для нашей работы и также носят фундаментальный характер. Первая из них это гипотеза Борсука о разбиении множества на части меньшего диаметра (см. [33]). Вторая — задача Нелсона–Эрдеша–Хадвигера о хроматическом числе метрических пространств, то есть о наименьшем количестве цветов, в которые так можно его покрасить, чтобы никакие две точки одного цвета не находились на расстоянии единица (см. [27, 59]).

Теперь очертим круг задач, характерных для вероятностной комбинаторики. Основной метод, используемый здесь, это вероятностный метод. Его основоположником считается Эрдеш (см. [39]). Вероятностный метод позволил доказать или опровергнуть ряд гипотез, державшихся долгое время (см. [1, 25]).

Одним из основных объектов и одновременно инструментов исследования становится случайный граф. В 1959 году Эрдеш и Реньи в работе [40] дают первую модель случайного графа. Сразу же возникает огромное количество задач об исследовании самых разных характеристик случайного графа, о критических вероятностях для всевозможных его свойств, о распределении какой-либо случайной величины на этом графе. Наша работа посвящена двум свойствам: "быть графом расстояний" и "быть графом диаметров".

В настоящее время теория графов переживает очередной расцвет в связи с применением ее к исследованиям социальных и биологических и информационных сетей. Теперь, когда стало возможным эмпирически вычислить некоторые характеристики графа, описывающего сеть Интернет, и графов других социальных сетей, выяснилось, что модель Эрдеша–Реньи ни при каких параметрах (а он в этой модели всего один — вероятность ребра) не может служить сколько-нибудь адекватной моделью для этих графов. В 1999 году Барабаши и Альберт в статье [29] предложили новую модель случайного графа, а Боллобаш и Риордан уточнили ее и доказали, что в ней выполняется по крайней мере два ключевых свойства веб-графа: степенной закон распределения вершин и малый диаметр (см. [30, 31]). С тех пора эта тема получила широкое развитие, были предприняты как попытки улучшения этой модели, так и создания кардинально новых (см. [21]).

Глава 1

Реализация случайных графов графами расстояний

1.1 Введение и формулировки геометрических результатов

Хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^d)$ пространства $\mathbb{R}^d$ — это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^d$, чтобы среди точек одного цвета не нашлось пары точек на расстоянии единица, то есть

$$\chi(\mathbb{R}^d) = \min\{k \in \mathbb{N}:\ \exists V_1, \ldots, V_k,\ \mathbb{R}^d = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_k,\\ \forall i,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i,\ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 1\},$$

где ρ — обычное евклидово расстояние.

Легко показать, что для любого d величина $\chi(\mathbb{R}^d)$ конечна. Проблема отыскания хроматического числа пространства была впервые поставлена на рубеже 40х–50х годов XX века (см. [11, 12, 23, 27, 34, 46, 62, 63]). Несмотря на значительный интерес, вызванный этой проблемой, она до сих пор, по существу, остается нерешенной. Конечно, $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$, однако уже для плоскости лучшее, что мы знаем, это оценка

$$4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7.$$

Для трехмерного пространства мы имеем

$$6 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 15$$

(см. [36, 54]), наконец для растущей размерности

$$(1.239\ldots + o(1))^d \leqslant \chi(\mathbb{R}^d) \leqslant (3 + o(1))^d$$

(см. [11, 13, 14, 50]).

Поставленная задача может быть переформулирована в терминах теории графов. Прежде всего *дистанционным графом* (или *графом расстояний*) назовем конечный граф $G = (V, E)$, вершины которого суть точки евклидова пространства, а ребра соединяют только пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние единица. Иными словами,

$$V \subset \mathbb{R}^d,\ |V| < \infty,\ E \subseteq \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V :\ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1\}.$$

Напомним, что *хроматическое число* $\chi(G)$ графа $G = (V, E)$ — это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить его вершины, чтобы вершины одного цвета не соединялись ребром, то есть

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} :\ \exists V_1, \ldots, V_k,\ V = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_k,\ \forall i,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i,\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E\}.$$

П. Эрдеш и Н. де Брёйн фактически доказали (см. [35]), что $\chi(\mathbb{R}^d) = \max \chi(G)$, где максимум берется по всем графам расстояний в $\mathbb{R}^d$. Таким образом, изучение хроматических чисел графов расстояний играет исключительную роль при исследовании проблемы отыскания хроматического числа пространства.

В основной части этой главы мы будем рассматривать только случай евклидовой плоскости. Тот факт, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$, означает, конечно, что для любого графа расстояний $G = (V, E)$ на плоскости $\chi(G) \leqslant 7$. Как следствие, $\alpha(G) \geqslant \frac{|V|}{7}$, коль скоро через $\alpha(G)$ мы обозначили *число независимости* графа G, то есть наибольшее количество его вершин, никакие две из которых не соединены ребром:

$$\alpha(G) = \max\{|V'| :\ V' \subset V,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V',\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E\}.$$

Таким образом, в любом "двумерном" графе расстояний на n вершинах найдется индуцированный подграф, имеющий не менее $\frac{n}{7}$ вершин и хроматическое число 1. Это утверждение допускает ряд нетривиальных обобщений и уточнений. В статье [65] нам удалось доказать следующие результаты для графов расстояний на плоскости.

Теорема 1. *В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[\frac{n}{\varkappa}\right]$ и $\chi(G') = 1$, где $\varkappa = 4.36\ldots$*

Теорема 2. *В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[\frac{2n}{\varkappa}\right]$ и $\chi(G') \leqslant 2$.*

Теорема 3. *В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[\frac{3n}{\varkappa}\right]$ и $\chi(G') \leqslant 3$.*

Теорема 4. *В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[\frac{4n}{\varkappa}\right]$ и $\chi(G') \leqslant 4$.*

Наиболее интересной является теорема 4. Фактически в ней утверждается, что в каждом графе расстояний на плоскости есть индуцированный подграф, который почти целиком совпадает с исходным графом (содержит не менее 91.7% его вершин) и допускает раскраску в 4 цвета. Если бы в этом утверждении величину 91.7 удалось заменить на 100, то, ввиду теоремы Эрдеша–де Брёйна, это бы означало, что $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$.

Заметим, что, конечно, теоремы 1–3 являются следствиями теоремы 4. Однако мы будем доказывать их именно в таком порядке из соображений удобства. Заметим также, что теорема 1 встречалась ранее в литературе, но мы начнем именно с ее доказательства в параграфе 1.3: так проще будет описывать общий подход.

Итак, дальнейшая структура главы следующая. В параграфе 1.2 мы сформулируем задачу о реализации случайного графа графом расстояний на плоскости. Там же мы приведем соответствующие основные утверждения — теоремы 5 и 6. В третьем параграфе мы докажем теоремы 1–4, а также новую теорему 8, являющуюся главным инструментом в наших доказательствах. В параграфе 1.4 мы докажем теоремы 5, 6. Пятый параграф мы посвятим обобщениям полученных результатов на другие размерности.

1.2 Постановка вероятностной задачи и формулировки соответствующих результатов

Зачастую задачи теории графов допускают нетривиальную интерпретацию в терминах *случайного графа*. Напомним, что одной из наиболее популярных моделей случайного графа является модель, предложенная Эрдешем и А. Реньи на рубеже 50х–60х годов XX века (см. [4, 15, 28, 30, 40, 45]). Речь идет о вероятностном пространстве $G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{B}_n, \mathbf{P}_n)$. Здесь

$$\Omega_n = \{G = (V, E) : \ |V| = n\} -$$

множество всевозможных графов на n вершинах (без петель и кратных ребер), сигма-алгебра $\mathcal{B}_n$ представляет собой множество всех подмножеств Ω_n, а

$$\mathbf{P}_n(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

иначе говоря, можно считать, что ребра случайного графа появляются независимо друг от друга с вероятностью p. Заметим, что в модели Эрдеша–Реньи величина p может зависеть от n.

Нас будет интересовать в дальнейшем, с какой вероятностью случайный граф в модели $G(n,p)$ допускает реализацию на плоскости в качестве графа расстояний. Как это часто бывает в науке о случайных графах, при одних значениях p эта вероятность будет стремиться к нулю, а при других — к единице. Определим некоторую критическую величину p, отвечающую за вышеупомянутый "фазовый переход", следующим образом:

$$p^*(n) = \sup \left\{ p : \ \mathbf{P}_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^2 \text{ как граф расстояний}) > \frac{1}{2} \right\}.$$

Такая величина называется *пороговой вероятностью*, и она определена корректно ввиду классических результатов о существовании пороговых вероятностей для монотонных свойств случайных графов (см. [30]).

В статье [65] мы доказали следующие результаты.

Теорема 5. *При* $p = \frac{c}{n}$*, где* $c < 1$*, выполнено*

$$\mathbf{P}_n(G \textit{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \to 1, \ n \to \infty.$$

Теорема 6. *При* $p = \frac{c}{n}$*, где* $c > t_0 = 14.797\ldots$*, выполнено*

$$\mathbf{P}_n(G \textit{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \to 0, \ n \to \infty.$$

Теоремы 5 и 6 означают что $\frac{1-\varepsilon}{n} \leqslant p^*(n) \leqslant \frac{t_0+\varepsilon}{n}$ со сколь угодно малым положительным ε и $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Тем самым, мы знаем порядок роста пороговой вероятности.

1.3 Доказательства геометрических результатов

1.3.1 Доказательство теоремы 1

Прежде всего напомним, что *верхней плотностью* измеримого множества $S \subset \mathbb{R}^d$ называется величина

$$\nu = \nu(S) = \varlimsup_{s \to \infty} \sup_{C_s} \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)},$$

где супремум берется по всем кубам со стороной s, а μ — это мера Лебега.

Будем говорить, далее, что *на множестве* S *реализуется расстояние* a, если найдутся такие точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, что $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a$.

Нам понадобится следующая теорема, доказанная Д. Ларманом и К.А. Роджерсом в 1972 году (см. [50]).

Теорема 7. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ существует граф расстояний $G = (V, E)$, $|V| = n$, с числом независимости $\alpha(G) < D$. Тогда если измеримое множество в $\mathbb{R}^d$ имеет верхнюю плотность $\nu \geqslant D/n$, то все расстояния $a > 0$ на этом множестве реализуются.*

Сами Ларман и Роджерс формулировали теорему в несколько иных терминах, но нам потребуется именно такая переформулировка. Из нее мы немедленно получаем

Следствие 1. *Если в $\mathbb{R}^d$ найдется такое измеримое множество с верхней плотностью $\nu \geqslant \nu_0$, что на нем какое-либо расстояние $a > 0$ не реализуется, то для любого графа расстояний G в $\mathbb{R}^d$, имеющего n вершин, выполнено $\alpha(G) \geqslant \nu_0 n$.*

В действительности, следствие 1 — это просто еще одна переформулировка теоремы 7.

Х. Крофт в своей работе (см. [50] и [37]) 1967 года приводит пример измеримого множества на плоскости с верхней плотностью $\nu = \nu_0 = 0.2293\ldots$ и без расстояния единица. Из этого примера и следствия 1 немедленно получаем существование в каждом n-вершинном дистанционном графе на плоскости индуцированного подграфа $G' = (V', E')$, у которого $|V'| \geqslant \nu_0 n$ и $\chi(G') = 1$. Замечая, что $\nu_0 = \frac{1}{\varkappa}$, завершаем доказательство теоремы 1.

Подчеркнем, что результат Крофта по-прежнему остается лучшим из известных, а потому в рамках предложенного подхода теорема 1 дает наиболее точную оценку. Поскольку конструкция Крофта нам еще понадобится, опишем ее подробнее.

Пусть на плоскости дана правильная треугольная решетка Λ_ε, в которой расстояние между ближайшими узлами равно $2 - 2\varepsilon$. Здесь ε — достаточно маленькое число, которое будет оптимально подобрано позднее. Рассмотрим круг B_ε радиуса $\frac{1}{2} - \varepsilon$ и правильный шестиугольник H, центр симметрии которого совпадает с центром B_ε и длина диагонали которого равна единице. Положим $T_\varepsilon = (B_\varepsilon \cap H) \setminus \partial(B_\varepsilon \cap H)$ — открытая "черепаха". Для каждого $\mathbf{x} \in \Lambda_\varepsilon$ обозначим через $\varphi_{\mathbf{x}}(T_\varepsilon)$ копию множества T_ε, получающуюся в результате параллельного переноса, при котором центр симметрии T_ε переходит в $\mathbf{x}$. Множество Крофта — это $K_\varepsilon = \bigcup\limits_{\mathbf{x} \in \Lambda} \varphi_{\mathbf{x}}(T_\varepsilon)$. Выбор величины ε осуществляется так, чтобы значение $\nu(K_\varepsilon)$ было наибольшим.

1.3.2 Доказательства теорем 2–4

Для доказательства нам потребуется новый результат, являющийся усилением теоремы Лармана–Роджерса.

Теорема 8. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан некоторый граф расстояний $G = (V, E)$, $|V| = n$. Предположим, существуют такие числа $k \in \mathbb{N}$ и $\nu_0 \in (0, 1)$, что для любого индуцированного подграфа $G' = (V', E')$ с $|V'| \geqslant [\nu_0 n]$ выполнено $\chi(G') > k$. Тогда для всякого набора измеримых множеств $S_1, S_2, \ldots, S_k$ в $\mathbb{R}^d$ с условием, что множество $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ имеет верхнюю плотность $\nu \geqslant \nu_0$, верно, что каково бы ни было $a > 0$, найдется S_i, на котором реализуется расстояние a.*

Следствие 2. *Если для данного $\nu_0 \in (0, 1)$ найдутся такие k множеств $S_1, S_2, \ldots, S_k$ в $\mathbb{R}^d$, что верхняя плотность множества $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ не меньше ν_0 и некоторое расстояние $a > 0$ не достигается ни на одном из S_i, то для любого графа расстояний G в $\mathbb{R}^d$, имеющего n вершин, найдется индуцированный подграф $G' = (V', E')$ с $|V'| \geqslant [\nu_0 n]$, для которого выполнено $\chi(G') \leqslant k$.*

Следствие очевидно (собственно, оно является переформулировкой теоремы), а теорему 8 мы докажем в пункте 1.3.3. Сейчас мы с помощью следствия завершим доказательства теорем 2–4.

Сделаем параллельный перенос множества Крофта K_ε вдоль линий решетки на расстояние $1 - \varepsilon$. Получим четыре конгруэнтных непересекающихся множества. Берем 2, 3, 4 из них и получаем, с помощью следствия, доказательство теоремы 2, 3, 4 соответственно.

1.3.3 Доказательство теоремы 8

Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — вершины данного графа. Зафиксируем измеримые множества S_1, S_2, $\ldots$, S_k, удовлетворяющие условию теоремы. Тогда для $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ выполнено

$$\varlimsup_{s \to \infty} \sup_{C_s} \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} \geqslant \nu_0 > \nu_0 - \frac{1}{n},$$

где супремум, напомним, берется по всем кубам со стороной s.

Значит, по определению верхнего предела существует $\delta > 0$, при котором для любого s_0 найдется такое $s > s_0$, что

$$\sup_{C_s} \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n}.$$

Далее, по определению супремума получаем, что при прежних ограничениях на δ, s_0 и s существует такой куб C_s, что

$$\frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n}. \qquad (*)$$

Пусть $a > 0$ — произвольное фиксированное число. Мы хотим доказать, что найдется S_i, на котором реализуется расстояние a. Рассмотрим векторы $a\mathbf{x}_1, a\mathbf{x}_2, \ldots, a\mathbf{x}_n$. Покажем теперь, что существуют такие s и C_s, с которыми для любого i выполнено

$$\frac{\mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n}.$$

Введем обозначения: $a\mathbf{x}_i = (x_i^1, \ldots, x_i^d)$, $b \max\limits_{i,j}\{x_i^j\}$, где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, d$.

Возьмем s_0 настолько большим, что

$$\frac{s_0^d - (s_0 - 2b)^d}{s_0^d} < \frac{\delta}{n}.$$

Это, конечно, можно сделать, т.к. выражение в левой части неравенства с ростом s_0 стремится к нулю. Мы знаем (см. (*)), что для этого s_0 найдутся такие $s > s_0$ и C_s, что

$$\frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n}.$$

Положим

$$B = \{\mathbf{y} \in C_s : \ \rho(\mathbf{y}, \partial C_s) < b\}, \ \tilde{C}_s = C_s \setminus B.$$

Заметим, что та часть S, которая содержалась в $\tilde{C}_s$, после сдвига на $a\mathbf{x}_i$ останется в C_s. Тогда для каждого i получаем:

$$\frac{\mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s)}{\mu(C_s)} \geqslant \frac{\mu(S \cap \tilde{C}_s)}{\mu(C_s)} = \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} - \frac{\mu(S \cap B)}{\mu(C_s)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} - \frac{\mu(B)}{\mu(C_s)} > \left(\nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n}\right) - \frac{s^d - (s - 2b)^d}{s^d} > \nu_0 - \frac{1}{n}.$$

Итак, мы доказали, что существуют такие s и C_s, с которыми для любого i выполнено

$$\frac{\mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n}.$$

Суммируем полученные неравенства по i:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s) > (\nu_0 n - 1)\mu(C_s).$$

Стало быть, найдется такая точка $\mathbf{x}^* \in C_s$, что $\mathbf{x}^*$ принадлежит по крайней мере $[\nu_0 n]$ множествам вида $\{S + a\mathbf{x}_i\}$. Без ограничения общности можно считать, что найдется m, не меньшее $[\nu_0 n]$, для которого имеет место $\mathbf{x}^* \in \{S + a\mathbf{x}_i\}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Или, что то же самое,

$$\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_i \in S \text{ при } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Но по условию индуцированный подграф G' на вершинах $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ имеет хроматическое число $\chi(G') > k$. Рассмотрим изоморфный ему граф $G^* = (V^*, E^*)$, где

$$V^* = \{\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_i : \ i = 1, 2, \ldots, m\},$$

$$E^* = \{(\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_2}) : \ (\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}) \in E\}.$$

Поскольку его хроматическое число также больше k, то найдется множество S_j и точки $\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_2} \in S_j$, соединенные ребром. Но тогда на множестве S_j реализуется расстояние a. Теорема доказана.

1.4 Доказательства вероятностных результатов

1.4.1 Доказательство теоремы 5

Нам понадобится теорема, доказанная в [30] в несколько более общей формулировке.

Теорема 9. *Пусть $p = \frac{c}{n}, c < 1$. Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, все компоненты случайного графа в $G(n, p)$ суть деревья или унициклические графы.*

Осталось заметить, что любое дерево или унициклический граф очевидным образом реализуются на плоскости как графы расстояний, и, тем самым, завершить доказательство теоремы.

1.4.2 Доказательство теоремы 6

В теореме 4 утверждается, что в любом графе расстояний $G = (V, E)$ на плоскости найдется большой индуцированный подграф с хроматическим числом, не превосходящим четырех. Иными словами, в таком графе всегда есть четверка непересекающихся независимых множеств вершин большой суммарной мощности. В связи с этим рассмотрим случайную величину $Z_s = Z_s(G)$, равную количеству упорядоченных четверок непересекающихся независимых множеств вершин суммарной мощности s в графе G:

$$Z_s(G) = |\{(V_1, V_2, V_3, V_4) : \ V_i \subset V, \ V_i \cap V_j = \varnothing, \ \forall \ i, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i, \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E, \\ |V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_4| = s\}|.$$

Мы доказали, что для любого плоского графа расстояний $Z_{4k}(G) > 0$, где $k = [\nu n] - 1$, $\nu = 0.2293\ldots$. Стало быть, если $Z_{4k}(G) = 0$, то G не реализуется на плоскости как граф расстояний. Это означает, что если мы покажем, что при $p = \frac{c}{n}$, где $c > t_0 = 14.797\ldots$, выполнено $\mathbf{M}Z_{4k} \to 0$, то мы докажем теорему.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{M}Z_{4k} = \sum_{k_1+\ldots+k_4=4k} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-(k_1+k_2)}^{k_3} C_{n-(k_1+k_2+k_3)}^{k_4} (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{4} C_{k_i}^2}.$$

В силу выпуклости биномиального коэффициента

$$\sum_{i=1}^{4} C_{k_i}^2 \geqslant 4C_k^2.$$

Очевидно также, что максимальное значение величины

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-(k_1+k_2)}^{k_3} C_{n-(k_1+k_2+k_3)}^{k_4}$$

достигается тогда и только тогда, когда максимален полиномиальный коэффициент

$$P(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{(4k)!}{k_1!k_2!k_3!k_4!},$$

то есть при $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$. Отсюда

$$\mathbf{M}Z_{4k} \leqslant n^3 C_n^k C_{n-k}^k C_{n-2k}^k C_{n-3k}^k (1-p)^{4C_k^2}$$

$$= n^3 \frac{n!}{(k!)^4 (n-4k)!} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{2k^2-2k} Q_1(n) \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{(2n^2\nu^2 - 2n\nu)}}{\left(\frac{n\nu}{e}\right)^{4n\nu} \left(\frac{n-4n\nu}{e}\right)^{n-4n\nu}} f(n),$$

где $Q_1(n)$ — функция, растущая не быстрее некоторого полинома. Далее, очевидно,

$$f(n) = Q_2(n) \frac{e^{-2cn\nu^2}}{\nu^{4n\nu}(1-4\nu)^{n-4n\nu}} Q_2(n) e^{-n(4\nu \ln \nu + (1-4\nu)\ln(1-4\nu) + 2c\nu^2)},$$

где $Q_2(n)$ — тоже функция, имеющая полиномиальный порядок роста.

Для того, чтобы последнее выражение стремилось к нулю, достаточно, чтобы

$$4\nu \ln \nu + (1-4\nu)\ln(1-4\nu) + 2c\nu^2 > 0 \Leftrightarrow c > \frac{4\nu \ln \nu + (1-4\nu)\ln(1-4\nu)}{-2\nu^2}.$$

Подставляя значение ν, убеждаемся, что при $c > t_0$ это условие выполнено. Теорема доказана.

1.5 Обобщения вероятностных результатов

В этом параграфе мы сперва поговорим про обобщения полученных нами вероятностных результатов на случай $d \geqslant 3$. Затем мы отдельно рассмотрим случай $d = 1$.

1.5.1 Пороговые вероятности для реализации графом расстояний в размерностях $d \geqslant 3$

Положим

$$p_d^*(n) = \sup\left\{p \in [0,1] : \mathbf{P}_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^d \text{ как граф расстояний}) > \frac{1}{2}\right\}.$$

В частности, $p^*(n) = p_2^*(n)$. Сразу ясно, что для любого $d \geqslant 3$ выполнен аналог теоремы 5, откуда $p_d^*(n) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{n}$ со сколь угодно малым положительным ε и $n \geqslant n_0(\varepsilon)$.

Для получения верхних оценок величины $p_d^*(n)$ нам понадобятся обобщения теоремы 4. Как мы помним, доказательство теоремы 4 основано на результате Крофта и теореме 8. Понятно, что и сейчас мы сможем использовать последнюю теорему; нам лишь нужны аналоги результата Крофта в размерностях $d \geqslant 3$. Эти аналоги недавно были получены в работе [48]. А именно, пусть $m_1(\mathbb{R}^d)$ — это супремум верхних плотностей таких измеримых множеств $S \subset \mathbb{R}^d$, что в S не реализуется расстояние 1. В этих терминах конструкция Крофта дает неравенство $m_1(\mathbb{R}^2) \geqslant 0.2293\ldots$ Подобные неравенства установлены в статье [48] для $d \in \{3, \ldots, 8\}$:

$$m_1(\mathbb{R}^3) \geqslant 0.09877, \qquad m_1(\mathbb{R}^6) \geqslant 0.00806,$$

$$m_1(\mathbb{R}^4) \geqslant 0.04413, \qquad m_1(\mathbb{R}^7) \geqslant 0.00352,$$

$$m_1(\mathbb{R}^5) \geqslant 0.01833, \qquad m_1(\mathbb{R}^8) \geqslant 0.00165.$$

Напомним, что в конце пункта 1.3.2 мы использовали 4 конгруэнтных копии множества Крофта. На самом деле, конструкции из работы [48] устроены совершенно аналогично: они тоже имеют решетчатую природу, и для каждого d в $\mathbb{R}^d$ умещаются 2^d их конгруэнтных копий. В итоге обобщением теоремы 4 служит следующий результат.

Теорема 10. *Положим*

$$\nu_3 = 0.09877,\ \nu_4 = 0.04413,\ \nu_5 = 0.01833,$$

$$\nu_6 = 0.00806,\ \nu_7 = 0.00352,\ \nu_8 = 0.00165.$$

Тогда для любого $d \in \{3, \ldots, 8\}$ в любом n-вершинном графе расстояний $G = (V, E)$ в $\mathbb{R}^d$ найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[2^d \nu_d n\right]$ и $\chi(G') \leqslant 2^d$.

Дальнейшая технология полностью совпадает с той, что была разработана в пункте 1.4.2 для доказательства теоремы 6. Теперь для данного d нужно брать $k = [\nu_d n] - 1$ и добиваться того, чтобы величина $\mathbf{M}Z_{2^d k}$ стремилась к нулю (или хотя бы была меньше 1/2 при больших n).

Пусть $p = \frac{c}{n}$. Тогда выкладки из пункта 1.4.2 преобразуются к виду

$$\mathbf{M}Z_{2^d k} \leqslant Q_1(n) \frac{n!}{(k!)^{2^d} (n - 2^d k)!} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{2^{d-1}k^2 - 2^{d-1}k}$$
$$= Q_2(n) e^{-n\left(2^d \nu_d \ln \nu_d + \left(1 - 2^d \nu_d\right) \ln\left(1 - 2^d \nu_d\right) + 2^{d-1} c \nu_d^2\right)}.$$

В итоге нам нужно

$$c > \frac{2^d \nu_d \ln \nu_d + \left(1 - 2^d \nu_d\right) \ln\left(1 - 2^d \nu_d\right)}{-2^{d-1} \nu_d^2}.$$

Теорема 11. *Положим*

$$c_3 = 55.272\ldots,\ c_4 = 164.528\ldots,\ c_5 = 504.285\ldots,$$
$$c_6 = 1365.170\ldots,\ c_7 = 3624.758\ldots,\ c_8 = 8675.785\ldots$$

Тогда при каждом d и $p = \frac{c}{n}$, где $c > c_d$, выполнено

$$\mathbf{P}_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^d \text{ как граф расстояний}) \to 0,\ n \to \infty.$$

Иными словами,
$$\frac{1 - \varepsilon}{n} \leqslant p_d^*(n) \leqslant \frac{c_d + \varepsilon}{n}.$$

Из выкладок, приведенных в статье [48], а также из неравенства, определяющего величины c_d через величины ν_d, следует, что c_d растет как экспонента. В этой связи интересно установить более сильные нижние оценки пороговой вероятности, нежели не зависящая от d нынешняя оценка $p_d^* \geqslant \frac{1-\varepsilon}{n}$.

1.5.2 Пороговые вероятности для реализации графом расстояний в размерности $d = 1$

Здесь мы изучим величину $p_1^*(n)$. Любопытно, что ее поведение будет разительно отличаться от поведения всех остальных величин $p_d^*(n)$. А именно, зависимость от n будет другой.

Теорема 12. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0*, что при всех* $n \geqslant n_0$ *выполнено*

$$\frac{\sqrt[3]{3}-\varepsilon}{n^{4/3}} \leqslant p_1^*(n) \leqslant \frac{\sqrt[3]{12}+\varepsilon}{n^{4/3}}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства нижней оценки. Пусть $p = \frac{c}{n^{4/3}}$, где $c < \sqrt[3]{3}$. Хорошо известно, что при любом $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ случайный граф с асимптотической вероятностью 1 не содержит циклов, то есть является лесом. Значит, и при нашем p случайный граф — "почти наверняка" лес. Допустим, мы доказали, что к тому же степень каждой вершины случайного графа не превосходит двойки с вероятностью, которая при больших n строго больше половины. Тогда нужная оценка получена: лес, у которого каждая вершина имеет степень 0, 1 или 2, — это линейный лес, то есть граф, компоненты которого суть простые цепи или изолированные вершины; ясно, что такой граф реализуется как граф расстояний на прямой.

Итак, пусть Y_3 — случайная величина, равная количеству вершин случайного графа, имеющих степень не ниже тройки. В силу классического неравенства Маркова нам достаточно убедиться в том, что $\mathbf{M}Y_3 < \frac{1}{2} + o(1)$. В самом деле,

$$\mathbf{M}Y_3 = n\sum_{i=3}^{n-1} C_{n-1}^i p^i (1-p)^{n-1-i}$$

$$= n\left(1-(1-p)^{n-1}-(n-1)p(1-p)^{n-2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^2(1-p)^{n-3}\right)$$

$$= n\left(1-\left(1-(n-1)p+\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^2-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}p^3+O\left(n^4p^4\right)\right)-\right.$$

$$-(n-1)p\left(1-(n-2)p+\frac{(n-2)(n-3)}{2}p^2-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}p^3+O\left(n^4p^4\right)\right)-$$

$$\left.-\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^2\left(1-(n-3)p+\frac{(n-3)(n-4)}{2}p^2-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}p^3+O\left(n^4p^4\right)\right)\right)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}p^3 + O\left(n^5p^4\right) = \frac{n^4p^3}{6} + o(1)\frac{n^4\cdot c^3}{6n^4} + o(1) < \frac{1}{2} + o(1).$$

Нижняя оценка доказана.

Для доказательства верхней оценки применим неравенство Чебышёва:

$$\mathbf{P}_n(Y_3 = 0) = \mathbf{P}_n(Y_3 \leqslant 0) = \mathbf{P}_n(-Y_3 \geqslant 0) = \mathbf{P}_n(\mathbf{M}Y_3 - Y_3 \geqslant \mathbf{M}Y_3) \leqslant \frac{\mathbf{D}Y_3}{(\mathbf{M}Y_3)^2}.$$

Допустим, мы показали, что $\frac{\mathbf{D}Y_3}{(\mathbf{M}Y_3)^2} < \frac{1}{2} + o(1)$. Тогда с вероятностью, большей половины при больших n, в случайном графе есть вершины степени 3 или выше. Но графы с такими вершинами нельзя реализовать на прямой.

Итак, мы уже знаем, что при $p = \frac{c}{n^{4/3}}$ выполнено $\mathbf{M}Y_3 = \frac{n^4p^3}{6} + o(1)$. В книге [30] на стр. 69 (лемма 3.10) приведено неравенство

$$\mathbf{D}Y_3 \leqslant \mathbf{M}Y_3 + n^2p(1-p)\left(C_{n-2}^2 p^2(1-p)^{n-4}\right)^2.$$

Заметим, что

$$0 < n^2p(1-p)\left(C_{n-2}^2 p^2(1-p)^{n-4}\right)^2 < n^2p\left(\frac{n^2}{2}p^2\right)^2 = \frac{n^6p^5}{4} = o(1).$$

Значит, с учетом условия $c > \sqrt[3]{12}$ имеем

$$\frac{\mathbf{D}Y_3}{(\mathbf{M}Y_3)^2} \leqslant \frac{\mathbf{M}Y_3 + n^2p(1-p)\left(C_{n-2}^2 p^2(1-p)^{n-4}\right)^2}{(\mathbf{M}Y_3)^2}$$

$$= \frac{\mathbf{M}Y_3 + o(1)}{(\mathbf{M}Y_3)^2} = \frac{6}{n^4p^3} + o(1) = \frac{6}{c^3} + o(1) < \frac{1}{2} + o(1).$$

Теорема доказана.

□

Теорема 12 допускает уточнение. А именно, можно показать, что

$$\frac{\sqrt[3]{6\ln 2} - \varepsilon}{n^{4/3}} \leqslant p_1^*(n) \leqslant \frac{\sqrt[3]{6\ln 2} + \varepsilon}{n^{4/3}}.$$

Иными словами, в одномерном случае мы знаем точное значение пороговой вероятности. Этот факт является прямым следствием теоремы 3.5 из книги [30]. В нашем случае теорема 3.5 утверждает, что при $p \sim \frac{x}{n^{4/3}}$ вероятность того, что максимальная степень вершины случайного графа не больше двух, асимптотически равна $e^{-x^3/6}$. В частности, если $x = \sqrt[3]{6\ln 2}$, то последняя величина — это $1/2$. Дальнейшие рассуждения совпадают с рассуждениями из доказательства теоремы 12.

Стоит отметить, что, когда мы говорим о реализации графа G дистанционным графом H, мы не просто требуем наличия гомоморфизма из G в H, мы хотим, чтобы в образе не было совпадающих вершин. Для случаев $d \geqslant 2$ это замечание не является принципиальным. Однако для текущего случая это имеет значение. Если бы мы разрешили совпадающие вершины, то реализация графа на прямой была бы просто равносильна двудольности, и тогда пороговая вероятность снова имела бы порядок $\frac{1}{n}$.

Глава 2

Реализация случайных графов графами диаметров в размерностях $d = 2$ и $d = 3$

2.1 Введение

Настоящая глава посвящена исследованию некоторых вероятностных характеристик, связанных с классической проблемой Борсука. Напомним, что эта проблема состоит в отыскании *числа Борсука* — величины $f(d)$, равной минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$f(d) = \min\{f:\ \forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^d,\ \operatorname{diam}\Omega = 1,\ \exists\, \Omega_1, \dots, \Omega_f :\\ \Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_f,\ \forall\, i\ \operatorname{diam}\Omega_i < 1\}.$$

Гипотеза Борсука, предложенная своим автором в 1933 году (см. [33]), состояла в том, что $f(d) = d+1$. И ровно шестьдесят лет эта гипотеза оставалась ни доказанной, ни опровергнутой. Лишь в 1993 году Кан и Калаи нашли контрпримеры к гипотезе в размерностях $d \geqslant 2015$. Сейчас известно, что гипотеза Борсука верна при $d \leqslant 3$ и ложна при $d \geqslant 64$ (см. [11, 16–19, 32, 57–59]).

С проблемой Борсука тесно связано понятие *графа диаметров*. Назовем графом диаметров в $\mathbb{R}^d$ любой граф $G = (V, E)$, вершины которого — точки $\mathbb{R}^d$, а ребра — пары вершин, отстоящих друг от друга на максимальное в множестве вершин расстояние:

$$V \subset \mathbb{R}^d,\ |V| < \infty,\ E = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} :\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \operatorname{diam}\, V := \max_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in V} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right\}.$$

Понятно, что минимальное число частей меньшего диаметра, на которые разбивается V (*число Борсука множества* V), — это в точности хроматическое число $\chi(G)$ графа G. Однако было бы некорректно сказать, что $f(d)$ — это максимум таких хроматических чисел. Дело в том, что равенство хроматического числа числу Борсука справедливо лишь в случае конечных множеств;

для бесконечных множеств равенства, вообще говоря, нет: например, если взять в качестве V сферу в $\mathbb{R}^d$, то очевидно, что хроматическое число ее графа диаметров (являющегося паросочетанием) равно двум, тогда как ее число Борсука есть $d+1$ ввиду классической теоремы Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана (см. [52]).

Как мы отметили выше, на плоскости и в пространстве гипотеза Борсука доказана. Более того, существует достаточно много примеров графов диаметров в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ с хроматическими числами 3 и 4 соответственно. Интересно оценить, стало быть, насколько эти примеры часты или редки. Одним из инструментов для такой оценки служит все тот же случайный граф Эрдеша–Реньи (см. [30]).

Положим

$$u_d(n,p) = \max\Big\{k:\ \mathbf{P}_{n,p}\big(\exists\ H=(W,F)\subset G:\ \ |W|=k,\\ H=G|_W,\ H-\text{граф диаметров в }\ \mathbb{R}^d,\ \chi(H)=d+1\big) > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$u'_d(n,p) = \max\Big\{k:\ \mathbf{P}_{n,p}\big(\exists\ H=(W,F)\subset G:\ \ |W|=k,\\ H=G|_W,\ H-\text{связный граф диаметров в }\ \mathbb{R}^d,\ \chi(H)=d+1\big) > \frac{1}{2}\Big\}.$$

Таким образом, мы ищем максимальное количество вершин в индуцированном (связном) подграфе случайного графа, который одновременно реализуется графом диаметров в пространстве и имеет при $d \leqslant 3$ наибольшее возможное в этом случае хроматическое число (при $d \geqslant 64$ такая постановка становится несколько произвольной, но по-прежнему осмысленной). Если для любого k

$$\mathbf{P}_{n,p}\left(\exists\ H=(W,F)\subset G:\ |W|=k,\ H=G|_W,\ H-\text{граф диаметров в }\ \mathbb{R}^d,\\ \chi(H)=d+1\right) \leqslant \frac{1}{2},$$

то полагаем $u_d(n,p)=0$ и аналогично поступаем с величиной $u'_d(n,p)$.

Величина $u_2(n,p)$ была введена в работе [64], а похожие величины для дистанционных графов рассматривались в статьях [9, 10, 20]. В следующем параграфе мы сформулируем все результаты.

2.2 Формулировки результатов

В работах автора [64, 66] был доказан ряд утверждений, которые мы сформулируем ниже. В тех статьях отдельно не говорилось о величинах u и u'.

Однако связность неявно предполагалась, а потому теоремы там формулировались и доказывались формально для u, оставаясь справедливыми для u'. Желая создать максимально ясную картину всех результатов, мы будем в случаях, когда теоремы верны для обеих величин u и u', писать u^*. Если же теорема сформулирована только, скажем, для u, то это значит, что, как минимум, мы не умеем распространить ее на u'.

Теорема 13. *Пусть $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_2^*(n,p) = 0$.*

Теорема 14. *Пусть $q := 1 - p = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_2^*(n,p) = 3$.*

Теорема 15. *Пусть $q = o\left(\frac{1}{n}\right)$, но при этом $qn^{1.5} \to \infty$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_2^*(n,p) = 4$.*

Теорема 16. *Положим $\tau(n) = pn$ и $\sigma(n) = q \ln n$. Пусть $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ стремятся к бесконечности с ростом n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_2^*(n,p) \leqslant (2+\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 17. *Положим $\tau(n) = \frac{p\sqrt[4]{n}}{\ln n}$ и $\sigma(n) = q \ln n$. Пусть $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ стремятся к бесконечности с ростом n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_2^*(n,p) \geqslant \left(2 - \varepsilon + \frac{4\ln p}{\ln(np)}\right)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 18. *Зафиксируем некоторое число $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и положим $\tau(n) = pn^{\alpha}$. Пусть с некоторым $C > 0$ начиная с некоторого n выполнено $1 < \tau(n) < C$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство*

$$u_2^*(n,p) \geqslant (2 - 2\alpha - \varepsilon)\,\frac{\ln n}{p}.$$

Теорема 19. *Пусть найдется такое $c < 1$, что $p < \frac{c}{n}$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_3^*(n,p) = 0$.*

Теорема 20. *Пусть $q = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_3^*(n,p) = 4$.*

Теорема 21. *Положим $\tau(n) = pn$ и $\sigma(n) = q \ln n$. Пусть $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ стремятся к бесконечности с ростом n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_3^*(n,p) \leqslant (2+\varepsilon) \log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 22. *Пусть для всякого $\alpha > 0$ выполнено $pn^\alpha \to \infty$ и $q \ln n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_3^*(n,p) \geqslant (2-\varepsilon) \log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 23. *Зафиксируем некоторое $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ и положим $\tau(n) = pn^\alpha$. Пусть с некоторым $C > 0$ начиная с некоторого n выполнено $1 < \tau(n) < C$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство*

$$u_3^*(n,p) \geqslant (2 - 4\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p}.$$

Видно, что при разумных условиях на асимптотику вероятности ребра теоремы 16 и 17 дают асимптотику величины $u_2^*(n,p)$ и эта асимптотика имеет вид $2 \log_{\frac{1}{1-p}}(np)$. Более того, если p стремится к нулю, то в условиях теоремы 17 выполнено $2 \log_{\frac{1}{1-p}}(np) \sim 2\frac{\ln n}{p}$. Поэтому теорема 18 просто дает аналог оценки из теоремы 17, который лишь в константу раз хуже, но работает на большем диапазоне значений p. Полностью аналогичная картина имеет место в теоремах 21–23. При этом утверждения теорем 16 и 21 совсем идентичны, в теореме 22 практически та же оценка, что и в теореме 17, но более узкий диапазон допустимых вероятностей ребра, а в теореме 23 и диапазон уже, чем в теореме 18, и оценка послабее.

В параграфе 2.3 мы докажем теоремы 13-18, в которых идет речь о величине $u_2^*(n,p)$. Величине $u_3^*(n,p)$ мы посвятим параграф 2.4, здесь будут доказаны теоремы 19-23.

2.3 Доказательства результатов для случая $d = 2$

2.3.1 Доказательство теоремы 13

Хорошо известно, что при $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ случайный граф является лесом (то есть все его компоненты суть деревья) с асимптотической вероятностью 1. Но индуцированный подграф леса на любых k вершинах и с любым $k \in \{1, \ldots, n\}$ сам является лесом, то есть, в частности, имеет хроматическое число не больше двух. Значит, при достаточно больших n и всех k

$$\mathbf{P}_{n,p}(\mathcal{A}(n,p,k)) = \mathbf{P}_{n,p}\Big(\exists\ H = (W,F) \subset G: \\ |W| = k,\ H = G|_W,\ H - \text{граф диаметров},\ \chi(H) = 3\Big) \leqslant \frac{1}{2},$$

так что $u_2^*(n,p) = 0$ при больших n. Теорема доказана.

2.3.2 Доказательство теоремы 14

При $q = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$ с асимптотической вероятностью 1 дополнение $\overline{G}$ случайного графа G до полного графа K_n является паросочетанием (набором изолированных ребер и вершин). Значит, при больших n с вероятностью больше $\frac{1}{2}$ граф G содержит треугольник, то есть обладает свойством $\mathcal{A}(n,p,3)$. Однако при $k \geqslant 4$ с той же вероятностью любой k-вершинный индуцированный подграф H случайного графа либо является циклом на четырех вершинах (при $k = 4$), либо имеет строго больше, чем k, ребер. В первом случае $\chi(H) = 2$; во втором случае H нельзя реализовать графом диаметров на плоскости. Значит, при $k \geqslant 4$ свойство $\mathcal{A}(n,p,k)$ не выполнено с нужной вероятностью. Теорема доказана.

2.3.3 Доказательство теоремы 15

Сперва покажем, что $u_2^*(n,p) \leqslant 4$. Поскольку $q = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то с асимптотической вероятностью 1 дополнение $\overline{G}$ случайного графа G до полного графа K_n является лесом. Значит, у $\overline{G}$ с большой вероятностью на любых k вершинах не более $k-1$ ребер. Соответственно, у G, наоборот, на каждых k вершинах не менее $C_k^2 - (k-1) = C_{k-1}^2$ ребер. Но из работы [43] мы знаем, что у любого графа диаметров на плоскости, имеющего k вершин, не более k ребер. Следовательно, свойство $\mathcal{A}(n,p,k)$ может иметь большую вероятность лишь при условии, что $C_{k-1}^2 \leqslant k$, откуда $k \leqslant 4$.

Покажем теперь, что $u_2^*(n,p) \geqslant 4$. Для этого достаточно взять какой-нибудь подходящий граф диаметров с четырьмя вершинами, который имеет хроматическое число 3 и с большой вероятностью содержится в случайном графе. Возьмем граф A_4, представляющий собой треугольник, к одной вершине которого прицеплено третье ребро.

Дополнением до A_4 в полном графе служит граф, компоненты которого суть цепь P_2 длины 2 и одна изолированная вершина. Докажем, стало быть, что при наших условиях случайный граф $\overline{G}$ с большой вероятностью содержит одновременно и указанную цепь, и указанную вершину.

Поскольку $q = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то изолированная вершина с асимптотической вероятностью 1 есть (см. [30]). На самом деле, здесь хватило бы даже условия $q = \frac{c \ln n}{n}$ с любым $c < 1$.

Пусть теперь X — случайная величина, равная количеству индуцированных копий P_2 в случайном графе $\overline{G}$. Нам достаточно установить асимптотику $\mathbf{P}_{n,q}(X \geqslant 1) \to 1$, $n \to \infty$. Применим неравенство Чебышёва:

$$\mathbf{P}_{n,q}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}_{n,q}(X \leqslant 0) = 1 - \mathbf{P}_{n,q}(\mathbf{M}X - X \geqslant \mathbf{M}X) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}X}{(\mathbf{M}X)^2}.$$

Обозначим через $\mathbf{M}_f^2 X$ второй факториальный момент величины X. Тогда $\mathbf{D}X = \mathbf{M}_f^2 X + \mathbf{M}X - (\mathbf{M}X)^2$, то есть

$$1 - \frac{\mathbf{D}X}{(\mathbf{M}X)^2} = 1 - \frac{\mathbf{M}_f^2 X}{(\mathbf{M}X)^2} - \frac{1}{\mathbf{M}X} + 1.$$

Если мы проверим, что $\mathbf{M}X \to \infty$ и $\mathbf{M}_f^2 X \sim (\mathbf{M}X)^2$, то правая часть последнего равенства будет асимптотически равна единице, и теорема будет доказана.

Во-первых, $\mathbf{M}X = 3C_n^3 q^2 p$. Далее, $\mathbf{M}X = \Theta\left(n^3 q^2\right)$, поскольку $p \to 1$. Но по условию теоремы $qn^{1.5} \to \infty$, и, стало быть, $n^3 q^2 \to \infty$. Первая асимптотика проверена.

Во-вторых,

$$\mathbf{M}_f^2 X = \sum_{H_1, H_2} \mathbf{M}X_{H_1,H_2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам различных графов $H_1, H_2 \subset K_n$, изоморфных графу P_2, а X_{H_1,H_2} — индикатор одновременного попадания графов H_1, H_2 в случайный граф $\overline{G}$ в качестве индуцированных подграфов. Если выделить только те слагаемые, в которых графы H_1, H_2 имеют непересекающиеся множества вершин, то получится величина $9C_n^3 C_{n-3}^3 (q^2 p)^2 \sim (\mathbf{M}X)^2$. Нетрудно видеть, учитывая асимптотику $qn^{1.5} \to \infty$, что остальные слагаемые бесконечно малы по сравнению с указанной величиной. Таким образом, мы действительно имеем $\mathbf{M}_f^2 X \sim (\mathbf{M}X)^2$.

Теорема доказана.

2.3.4 Доказательство теоремы 16

Сперва докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть в графе G, имеющем n вершин, для некоторого $k < n$ выполнено следующее условие: у любого индуцированного подграфа H графа G, имеющего k вершин, число ребер строго больше k. Тогда для любого $l > k$*

выполнено то же самое, то есть у любого индуцированного подграфа H графа G, имеющего l вершин, число ребер строго больше l.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы при $l = k + 1$. Пусть $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$. Пусть также $W = \{w_1, \ldots, w_{k+1}\} \subseteq V$. Рассмотрим $W' = \{w_1, \ldots, w_k\}$. По условию леммы $|E(G|_{W'})| > k$. Если $|E(G|_{W'})| \geqslant k + 2 = l + 1$, то тем более $|E(G|_W)| \geqslant l + 1$, и нужный факт установлен. Предположим, стало быть, что $|E(G|_{W'})| = k + 1$. Если теперь хотя бы одно ребро идет из w_{k+1} в W', то снова $|E(G|_W)| \geqslant k + 2 = l + 1$, и все в порядке. Допустим, однако, что из w_{k+1} ни одно ребро не идет в W'. Поскольку $|E(G|_{W'})| = k + 1$, в W' есть хотя бы одна вершина графа $G|_{W'}$ степени не меньше двух. Без ограничения общности это w_1. Рассмотрим $W'' = \{w_2, \ldots, w_{k+1}\}$. С одной стороны, сделанное выше допущение означает, что $|E(G|_{W''})| \leqslant |E(G|_{W'})| - 2 = k - 1$. С другой стороны, $|W''| = k$, так что по условию леммы $|E(G|_{W''})| \geqslant k + 1$. Противоречие, и лемма доказана. $\square$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ (см. условие теоремы 16) и положим

$$k = k(n) = \left\lceil (2 + \varepsilon) \log_{\frac{1}{1-p}}(np) \right\rceil .$$

Прежде всего покажем, что $k \to \infty$. В самом деле, с учетом неравенства $-\ln(1 - p) < \frac{p}{1-p}$ имеем

$$\log_{\frac{1}{1-p}}(np) = \frac{\ln(np)}{-\ln(1-p)} > \frac{(1-p)\ln(np)}{p}.$$

Значит, если $p \not\to 1$, то, поскольку $np \to \infty$, получаем $k \to \infty$. Если же $p \to 1$, то заменяем $1 - p = q$ на $\frac{\sigma(n)}{\ln n}$ (см. условие теоремы) и получаем, в свою очередь,

$$\frac{(1-p)\ln(np)}{p} = \frac{\sigma(n)\ln(np)}{p\ln n} \sim \sigma(n) \to \infty.$$

Далее, снова воспользуемся тем фактом, что у любого графа диаметров на плоскости, имеющего k вершин, число ребер не больше k.

Обозначим через $\mathcal{A}_k$ событие, состоящее в том, что у любого индуцированного подграфа H случайного графа G, имеющего k вершин, число ребер строго больше k. Положим $P_k = \mathbf{P}_{n,p}(\mathcal{A}_k)$. Если найдется такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant n_0$ выполнено $P_k > \frac{1}{2}$, то с вероятностью, большей половины, в случайном графе G не найдется индуцированного подграфа H, представимого как граф диаметров и имеющего k вершин. А по лемме 1 не найдется и такого подграфа большего размера, то есть $u(n, p) < k$.

В дальнейшем мы покажем, что $P_k \to 1$ при $n \to \infty$, и это завершит доказательство теоремы 16.

Обозначим через X_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа, имеющих не более k ребер. Тогда $P_k = \mathbf{P}_{n,p}(X_k = 0)$ и с учетом неравенства Маркова

$$P_k = \mathbf{P}_{n,p}(X_k = 0) = 1 - \mathbf{P}_{n,p}(X_k \geqslant 1) \geqslant 1 - \mathbf{M}X_k,$$

так что остается доказать асимптотику $\mathbf{M}X_k \to 0$. За счет линейности математического ожидания получаем

$$\mathbf{M}X_k = C_n^k \sum_{i=0}^{k} C^i_{C_k^2} p^i q^{C_k^2 - i}.$$

Убедимся в том, что в этой сумме максимальным является последнее слагаемое. Для этого разделим $(i+1)$-ое слагаемое на i-ое $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ и проверим, что отношение не меньше единицы:

$$\frac{C^{i+1}_{C_k^2} p^{i+1} q^{C_k^2 - i - 1}}{C^i_{C_k^2} p^i q^{C_k^2 - i}} = \frac{C_k^2 - i}{i+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Понятно, что функция $\frac{C_k^2 - i}{i+1}$ убывает по i. Значит,

$$\frac{C_k^2 - i}{i+1} \cdot \frac{p}{q} \geqslant \frac{C_k^2 - k + 1}{k} \cdot \frac{p}{q} > \frac{C_k^2 - k}{k} \cdot \frac{p}{q} = \frac{k-3}{2} \cdot \frac{p}{q}.$$

Мы хотим показать, что

$$\frac{k-3}{2} \cdot \frac{p}{q} \geqslant 1,$$

а покажем даже, что

$$\frac{k-3}{2} \cdot \frac{p}{q} \to \infty.$$

Упростим, стало быть, запись и рассмотрим выражение $\frac{kp}{q}$. Поскольку $np \to \infty$ и $-\ln(1-p) < \frac{p}{1-p}$, имеем

$$\frac{kp}{q} > \frac{2\ln(np)}{-\ln(1-p)} \cdot \frac{p}{1-p} > 2\ln(np) \to \infty.$$

Итак, при больших n

$$\mathbf{M}X_k \leqslant (k+1) C_n^k C^k_{C_k^2} p^k q^{C_k^2 - k}.$$

Воспользуемся простыми оценками $C_a^b \leqslant \left(\frac{3a}{b}\right)^b$ и $C_a^b \leqslant \frac{a^b}{b!}$. Получаем

$$\mathbf{M}X_k \leqslant (k+1)\left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{(C_k^2)^k}{k!} p^k q^{C_k^2-k} \leqslant \left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{k^{2k}}{k!} p^k q^{C_k^2-k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{k^{2k}}{(k/e)^k} p^k q^{C_k^2-k} = (3e)^k n^k p^k q^{\frac{k(k-3)}{2}} = \left(3enpq^{\frac{k-3}{2}}\right)^k.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что в ее условиях величина $npq^{\frac{k-3}{2}}$ стремится к нулю. Итак,

$$npq^{\frac{k-3}{2}} < \exp\left(\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\ln(np)}{-\ln q}\ln q + \ln(np)\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\ln(np)\right) \to 0.$$

Теорема доказана.

2.3.5 Доказательство теоремы 17

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$k = \left[\left(2-\varepsilon+\frac{4\ln p}{\ln(np)}\right)\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right].$$

Поскольку в теореме 17 при больших n заведомо $p > \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$, а также с учетом $p \leqslant 1$, имеем

$$\frac{4\ln p}{\ln(np)} = 4 - \frac{4\ln n}{\ln(np)} \geqslant 4 - \frac{4\ln n}{\frac{3}{4}\ln n} = -\frac{4}{3}.$$

Значит, во всяком случае

$$u(n,p) \geqslant \left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)\log_{\frac{1}{1-p}}(np),$$

а неограниченный рост последней величины мы установили при доказательстве теоремы 16 даже в более слабых ограничениях на функцию p. Таким образом, $k \to \infty$.

Нам достаточно показать, что при больших n выполнено $u(n,p) \geqslant k$. Наличие целой части не играет никакой роли, т.к. $k \to \infty$ и при необходимости мы просто можем заменить ε на $\varepsilon' \in (0,\varepsilon)$. В дальнейшем некоторые неравенства будут выполнены лишь при $n \geqslant n_0$, но мы не будем каждый раз говорить об этом.

Любой цикл с нечетным числом вершин можно реализовать на плоскости как граф диаметров с хроматическим числом 3. Обозначим через Y_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа G, являющихся циклами. Если мы докажем, что при больших n выполнено $\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) > \frac{1}{2}$, то при тех же n мы получим $u(n,p) \geqslant k$. Как всегда, мы докажем еще больше: $\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) \to 1$.

В силу неравенства Чебышёва имеем

$$\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) = \mathbf{P}_{n,p}(Y_k \geqslant 1) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}Y_k}{(\mathbf{M}Y_k)^2}.$$

Как и в пункте 2.3.3, остается установить две асимптотики: $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ и $\mathbf{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbf{M}Y_k)^2$. За счет линейности математического ожидания имеем

$$\mathbf{M}Y_k = C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k}.$$

Нетрудно видеть, что

$$k = \Theta\left(\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right) < \Theta\left(\frac{\ln n}{-\ln(1-p)}\right) \leqslant \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right) =$$

$$= \Theta\left(\frac{\sqrt[4]{n}\ln n}{\tau(n)\ln n}\right) = o\left(\sqrt[4]{n}\right).$$

Поэтому $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ и

$$\mathbf{M}Y_k \sim \frac{n^k}{k!}\frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k} = \frac{n^k}{2k} p^k q^{C_k^2 - k} > \frac{1}{2k} n^k p^k q^{k^2/2} = \frac{1}{2k}\left(npq^{k/2}\right)^k.$$

Поскольку $k \to \infty$, для обоснования асимптотики $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ достаточно найти такое $\delta > 0$, что

$$npq^{k/2} = \exp\left(\ln(np) + \frac{k}{2}\ln q\right) \geqslant 1 + \delta.$$

Это равносильно существованию такого $\delta > 0$, что $\ln(np) + \frac{k}{2}\ln q \geqslant \delta$. После подстановки явного выражения для k имеем

$$\ln(np) + \left(2 - \varepsilon' + \frac{4\ln p}{\ln(np)}\right)\frac{\ln(np)}{-2\ln q}\ln q = \left(1 - \frac{2-\varepsilon'}{2}\right)\ln(np) - 2\ln p =$$

$$\frac{\varepsilon'}{2}\ln(np) - 2\ln p > \frac{\varepsilon'}{2}\ln(np) \to \infty,$$

и все в порядке.

Проверим теперь асимптотику $\mathbf{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbf{M}Y_k)^2$. Как обычно,

$$\mathbf{M}_f^2 Y_k = \sum_{C_1, C_2} \mathbf{M}Y_{C_1, C_2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам $C_1, C_2 \subset K_n$ различных k-вершинных циклов , а Y_{C_1,C_2} — индикатор одновременного попадания циклов C_1, C_2 в случайный граф G в качестве индуцированных подграфов. Отдельно рассмотрим слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) = \varnothing$ и слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \varnothing$. В первом случае получаем выражение

$$S_1 = C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k} \right)^2 \sim \left(C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k} \right)^2 = (\mathbf{M}Y_k)^2.$$

Предпоследний переход сделан за счет $k = o\left(\sqrt[4]{n}\right)$. Если покажем теперь, что

$$S_2 = \sum_{C_1, C_2} Y_{C_1,C_2} - S_1 = o((\mathbf{M}Y_k)^2),$$

то завершим доказательство теоремы.

Для каждой пары циклов C_1, C_2, которые различны, но пересекаются хотя бы по одной вершине (именно такие пары задают S_2) можно найти число общих вершин (обозначим его через $m = m(C_1, C_2)$) и число общих ребер (обозначим его через $l = l(C_1, C_2)$). Очевидно, что $m \in \{1, \ldots, k-1\}$, $l \in \{0, \ldots, m-1\}$. Таким образом,

$$S_2 \leqslant \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{l=0}^{m-1} C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(\frac{(k-1)!}{2} \right)^2 p^{2k-l} q^{2(C_k^2 - k) - C_m^2 + l}.$$

Допустим, мы доказали, что при всех m, l

$$\frac{C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(\frac{(k-1)!}{2} \right)^2 p^{2k-l} q^{2(C_k^2 - k) - C_m^2 + l}}{C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2} \right)^2 p^{2k} q^{2(C_k^2 - k)}} = o\left(\frac{1}{k^2} \right).$$

Тогда

$$S_2 \leqslant k^2 C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2} \right)^2 p^{2k} q^{2(C_k^2 - k)} \cdot o\left(\frac{1}{k^2} \right) =$$
$$= o\left(C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2} \right)^2 p^{2k} q^{2(C_k^2 - k)} \right) = o((\mathbf{M}Y_k)^2),$$

и теорема доказана.

Итак, имеем

$$\frac{C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(\frac{(k-1)!}{2} \right)^2 p^{2k-l} q^{2(C_k^2 - k) - C_m^2 + l}}{C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2} \right)^2 p^{2k} q^{2(C_k^2 - k)}} = \frac{k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1)}{(n-2k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2k+m)} \times$$

$$\times C_k^m p^{-l} q^{-C_m^2+l} \leqslant 2k^{2m} n^{-m} p^{-l} q^{-C_m^2+l} \leqslant 2k^{2m} n^{-m} p^{-m+1} q^{-C_m^2}.$$

Остается показать, что при всех $m \in \{1, \ldots, k-1\}$ выполнено

$$k^2 k^{2m} n^{-m} p^{-m+1} q^{-C_m^2} =$$

$$= \exp\big((2m+2)\ln k - m\ln n - (m-1)\ln p - C_m^2 \ln q\big) \to 0.$$

Если рассмотреть выражение в показателе экспоненты как функцию от m, то ввиду неравенства $\ln q < 0$ это квадратичная функция с положительным коэффициентом при m^2. Значит, ее максимум по m достигается либо при $m = 1$, либо при $m = k-1$. При $m = 1$ имеем (с учетом $k = o\left(\sqrt[4]{n}\right)$)

$$4\ln k - \ln n = \ln\left(\frac{k^4}{n}\right) = \ln(o(1)) \to -\infty,$$

и все в порядке. При $m = k-1$ имеем

$$2k\ln k - (k-1)\ln n - (k-2)\ln p - C_{k-1}^2 \ln q \leqslant$$

$$\leqslant k\left(\ln(k^2) - \frac{k-2}{k}\ln(np) - \frac{k}{2}\ln q\right) \leqslant$$

$$\leqslant k\left(\ln(k^2) - \frac{k-2}{k}\ln(np) - \left(2 - \varepsilon' + \frac{4\ln p}{\ln(np)}\right)\frac{\ln(np)}{-2\ln q}\ln q\right) =$$

$$= k\left(\frac{2-\varepsilon'}{2}\ln(np) + \left(\frac{2}{k} - 1\right)\ln(np) + \ln(k^2) + 2\ln p\right) =$$

$$= k\ln(np)\left(\frac{2-\varepsilon'}{2} - 1 + \frac{2}{k} + \frac{\ln(kp)^2}{\ln(np)}\right) = k\ln(np)\left(-\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{2}{k} + \frac{\ln(kp)^2}{\ln(np)}\right).$$

Ясно, что $\frac{2}{k} \to 0$. Более того,

$$\frac{\ln(kp)^2}{\ln(np)} < \frac{\ln\left(6\frac{\ln(np)}{-\ln(1-p)}p\right)^2}{\ln(np)} < \frac{\ln\left(36\ln^2(np)\right)}{\ln(np)} = \frac{\ln 36 + 2\ln\ln(np)}{\ln(np)} \to 0.$$

В итоге

$$k\ln(np)\left(-\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{2}{k} + \frac{\ln(kp)^2}{\ln(np)}\right) < -\frac{k\varepsilon'\ln(np)}{4} \to -\infty,$$

и снова все в порядке.

Теорема доказана.

2.3.6 Доказательство теоремы 18

Как и раньше, зафиксируем $\varepsilon > 0$, и положим

$$k = \left[(2 - 2\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p} \right].$$

В данном случае очевидно, что $k \to \infty$. И целая часть нас по-прежнему не беспокоит.

Обозначим через Y_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа G, являющихся циклами. Если мы докажем, что при больших n выполнено $\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) > \frac{1}{2}$, то при тех же n мы получим $u_2^*(n,p) \geqslant k$. Как всегда, мы докажем еще больше: $\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) \to 1$.

Как и в пункте 2.3.5, пользуемся неравенством Чебышёва, так что достаточно проверить справедливость соотношений $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ и $\mathbf{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbf{M}Y_k)^2$.

Итак, начинаем с математического ожидания. За счет его линейности имеем

$$\mathbf{M}Y_k = C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k}.$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\tau \in (1, C)$ выполнено

$$k = \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right) = \Theta\left(\frac{n^\alpha \ln n}{\tau}\right) = o\left(\sqrt{n}\right).$$

Поэтому $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ и

$$\mathbf{M}Y_k \sim \frac{n^k}{k!} \frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k} = \frac{n^k}{2k} p^k q^{C_k^2 - k} > \frac{1}{2k} n^k p^k q^{k^2/2} = \frac{1}{2k} \left(npq^{k/2}\right)^k.$$

Поскольку $k \to \infty$, для обоснования асимптотики $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ достаточно найти такое $\delta > 0$, что

$$npq^{k/2} = \exp\left(\ln(np) + \frac{k}{2} \ln q\right) \geqslant 1 + \delta.$$

Это равносильно существованию такого $\delta > 0$, что $\ln(np) + \frac{k}{2} \ln q \geqslant \delta$. После подстановки явного выражения для k с учетом $p < -\ln q$ имеем

$$\ln(np) + \left(1 - \alpha - \frac{\varepsilon'}{2}\right) \frac{\ln q}{p} \ln n \geqslant \ln(np) - \left(1 - \alpha - \frac{\varepsilon'}{2}\right) \ln n.$$

Теперь вспомним, что $p > n^{-\alpha}$, и оценим снизу первое слагаемое:

$$(1 - \alpha) \ln n - \left(1 - \alpha - \frac{\varepsilon'}{2}\right) \ln n = \frac{\varepsilon'}{2} \ln n \to \infty,$$

и все в порядке.

Проверим теперь асимптотику $\mathbf{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbf{M} Y_k)^2$. Как и прежде,

$$\mathbf{M}_f^2 Y_k = \sum_{C_1, C_2} \mathbf{M} Y_{C_1, C_2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам $C_1, C_2 \subset K_n$ различных k-вершинных циклов, а Y_{C_1, C_2} — индикатор одновременного попадания циклов C_1, C_2 в случайный граф G в качестве индуцированных подграфов. Рассмотрим, как и ранее, отдельно слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) = \varnothing$ и слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \varnothing$. В первом случае получаем выражение

$$S_1 = C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k} \right)^2 \sim \left(C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k q^{C_k^2 - k} \right)^2 = (\mathbf{M} Y_k)^2.$$

Предпоследний переход сделан за счет $k = o\left(\sqrt{n}\right)$. Если покажем теперь, что

$$S_2 = \sum_{C_1, C_2} Y_{C_1, C_2} - S_1 = o((\mathbf{M} Y_k)^2),$$

то завершим доказательство теоремы.

Для каждой пары циклов C_1, C_2, которые различны, но пересекаются хотя бы по одной вершине (именно такие пары задают S_2) можно найти число общих вершин (обозначим его через $m = m(C_1, C_2)$) и число общих ребер (обозначим его через $l = l(C_1, C_2)$). Очевидно, что $m \in \{1, \ldots, k\}$, $l \in \{0, \ldots, m-1\}$. Таким образом,

$$S_2 \leqslant \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=0}^{m-1} C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m A(k, m, l) p^{2k-l} q^{2(C_k^2 - k) - C_m^2 + l},$$

где $A(k, m, l)$ — число способов образовать пару циклов с выбранными k вершинами для каждого, пересекающихся по выбранным m вершинам и каким-то l ребрам. Если в теореме 17 мы очень грубо оценили величину, аналогичную величине $A(k, m, l)$, то теперь нам придется действовать значительно аккуратнее.

Обозначим количество изолированных цепей, по которым пересекаются два цикла, через r. Стоит отметить, что здесь мы рассматриваем и вырожденные цепи, состоящие из одной вершины. В каждой такой цепи количество вершин, разумеется, на единицу больше числа ребер. А значит, общее число вершин в пересечении в точности на r больше, чем число ребер. Иными словами, $r = m - l$. Заметим, что и дополнительное множество из $k - m$ “свободных” вершин каждого цикла, по которым они не пересекаются, также состоит из r цепей.

Будем конструировать нашу пару циклов следующим образом. Выберем сперва r цепей из m вершин в пересечении (обозначим это число через $g(m,r)$), а потом r цепей среди свободных $k-m$ вершин каждого цикла (соответственно, $g(k-m,r)$). Ясно, что каждая пара циклов задается подобным выбором, а значит, мы имеем оценку сверху

$$A(k,m,l) \leqslant g(m,m-l)g^2(k-m,m-l).$$

Осталось понять, как выбрать r цепей из m вершин. Для этого сначала расставим всевозможными способами все вершины, а потом между ними на $m-1$ место поставим $r-1$ перегородку. Получаем $g(m,r) = m!C_{m-1}^{r-1}$. Окончательно имеем

$$A(k,m,l) \leqslant m!C_{m-1}^{m-l-1}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2.$$

Покажем теперь, что $\frac{S_2}{S_1} = o(1)$, и завершим тем самым доказательство теоремы. Итак, имеем

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m A(k,m,l) p^{2k-l} q^{2(C_k^2-k)-C_m^2+l}}{C_n^k C_{n-k}^k \left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2 p^{2k} q^{2(C_k^2-k)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{k!}{(k-m)!}\right)^2 \frac{(n-2k)!}{(n-2k+m)!}\frac{C_{m-1}^{m-l-1}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2}{\left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2} p^{-l} q^{-C_m^2+l} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{m-1} 8k^2 n^{-m} C_{m-1}^l \left(C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2 n^{\alpha l} e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}}.$$

Здесь в последнем неравенстве мы пользуемся тем, что $k = o(\sqrt{n})$, делая оценку

$$\frac{(n-2k)!}{(n-2k+m)!} = \frac{1}{(n-2k+1)\cdot\ldots\cdot(n-2k+m)} \leqslant 2n^{-m},$$

справедливую при больших n.

Разобьем внешнюю сумму на две — $\sum' + \sum''$ — и покажем, что обе они стремятся к нулю с ростом n. В первую войдут слагаемые при $m < \frac{k}{\ln k}$, а во вторую — оставшиеся, то есть при $m \geqslant \frac{k}{\ln k}$. Рассмотрим первую из них. Заметим, что $C_{m-1}^l < 2^m$ и $C_{k-m-1}^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-l-1}$. Более того,

$$\frac{C_k^{m-l-1}}{C_k^{m-1}} = \frac{(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-l)}{(k-m+2)(k-m+3)\cdot\ldots\cdot(k-m+l+1)} \leqslant \frac{m^l}{(k/2)^l} = \left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

ведь $m = O\left(\frac{k}{\ln k}\right), l = O\left(\frac{k}{\ln k}\right)$. Следовательно, $C_k^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l$, откуда

$$\sum{}' < \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{m-1} 8k^2 n^{-m} 2^m \left(\frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l\right)^2 n^{\alpha l} e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{m-1} 8\left(\frac{2}{n}\right)^m k^{2m} \frac{1}{((m-1)!)^2}\left(\frac{4m^2}{k^2}n^\alpha\right)^l e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{m-1} 8\left(\frac{2}{n}\right)^m k^{2m} \frac{m^2}{(m!)^2}\left(\frac{4m^2}{k^2}n^\alpha\right)^l e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{m-1} 8\left(\frac{2}{n}\right)^m k^{2m} \frac{m^2}{(m/e)^{2m}}\left(\frac{4m^2}{k^2}n^\alpha\right)^l e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{m-1} 8\left(\frac{2}{n}\right)^m k^{2m} \frac{m^2}{(m/e)^{2l}}\left(\frac{4m^2}{k^2}n^\alpha\right)^l e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{m-1} 8\left(\frac{2}{n}\right)^m k^{2m} m^2 \left(\frac{4e^2}{k^2}n^\alpha\right)^l e^{\frac{m^2}{2}n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{m-1} 8m^2 \left(\frac{2k^2}{n}e^{\frac{m}{n^\alpha}}\right)^m \left(\frac{4e^2}{k^2}n^\alpha\right)^l.$$

Все выражение, кроме последней скобки, от l не зависит. Значит, можно вынести его за внутреннюю сумму и рассмотреть ее отдельно:

$$\sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{4e^2}{k^2}n^\alpha\right)^l \leqslant \sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{n^\alpha p^2}{c\ln^2 n}\right)^l = \sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{\tau^2}{cn^\alpha \ln^2 n}\right)^l \leqslant \sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{C^2}{cn^\alpha}\right)^l < 2.$$

Возвращаясь к сумме по m, с учетом неравенств $k \leqslant 2n^\alpha \ln n$ и $\alpha < \frac{1}{2}$ имеем

$$\sum{}' < \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}} 16m^2\left(\frac{2k^2}{n}e^{\frac{m}{n^\alpha}}\right)^m \leqslant \sum_{m=1}^{\frac{k}{\ln k}}\left((16m^2)^{1/m}\frac{8n^{2\alpha}\ln^2 n}{n}e^{\frac{k}{(\ln k)n^\alpha}}\right)^m.$$

Легко видеть, что $(16m^2)^{1/m} = O(1)$, $e^{\frac{k}{(\ln k)n^\alpha}} = O(1)$, а $\frac{8n^{2\alpha}\ln^2 n}{n} = o(1)$. Таким образом, мы имеем здесь сумму, ограниченную сверху геометрической прогрессией со знаменателем и первым членом стремящимися к нулю, а это значит, наконец, что и вся сумма стремится к нулю.

Теперь рассмотрим случай $m \geqslant \frac{k}{\ln k}$. Здесь воспользуемся оценкой $C_{k-m-1}^{m-l-1} \leqslant C_k^m \leqslant \left(\frac{ek}{m}\right)^m \leqslant (e \ln k)^m$. Тогда

$$\sum\nolimits'' = \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \sum_{l=0}^{m-1} 8k^2 n^{-m} C_{m-1}^l \left(C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2 n^{\alpha l} e^{\frac{m^2}{2} n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \sum_{l=0}^{m-1} 8k^2 n^{-m} 2^m (e^2 \ln^2 k)^m n^{\alpha m} e^{\frac{m^2}{2} n^{-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} 8mk^2 \left(2e^2 \frac{(\ln^2 k) n^\alpha e^{\frac{m}{2n^\alpha}}}{n}\right)^m \leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} 8 \left(k^{\frac{3}{m}} 2e^2 \frac{(\ln^2 k) n^\alpha e^{\frac{k}{2n^\alpha}}}{n}\right)^m.$$

Как и в случае с $\sum'$, достаточно показать, что выражение в скобках стремится к нулю с ростом n. Первая его часть ограничена, поскольку $k^{\frac{3}{m}} \leqslant k^{\frac{3 \ln k}{k}} \to 1$. Рассмотрим вторую часть и подставим в экспоненту выражение для k:

$$(\ln^2 k) n^{\alpha-1} \exp\left(\frac{k}{2n^\alpha}\right) \leqslant (\ln^2 n) n^{\alpha-1} \exp\left(\frac{(2-2\alpha-\varepsilon) n^\alpha \ln n}{2n^\alpha}\right) =$$

$$= (\ln^2 n) n^{\alpha-1} n^{1-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}} = (\ln^2 n) n^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при любом положительном ε, что и доказывает теорему.

2.4 Доказательства результатов для случая $d = 3$

Заметим, что если в графе диаметров в $\mathbb{R}^3$ число вершин k, то в нем не больше $2k - 2$ ребер (см. [34]).

2.4.1 Доказательство теоремы 19

Хорошо известно, что при ограничениях на p, заданных в формулировке теоремы, случайный граф с асимптотической вероятностью 1 является унициклическим. Но индуцированный подграф такого графа на любых k вершинах и с любым $k \in \{1, \dots, n\}$ сам является унициклическим, то есть, в частности, имеет хроматическое число не больше трех. Значит, при достаточно больших n и всех k

$$\mathbf{P}_{n,p}\,(\exists\ H = (W, F) \subset G :\ |W| = k,\ H = G|_W,$$
$$H - \text{граф диаметров},\ \chi(H) = 4) < \frac{1}{2},$$

так что $u_3^*(n,p) = 0$. Теорема доказана.

2.4.2 Доказательство теоремы 20

При $q = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$ с асимптотической вероятностью 1 дополнение $\overline{G}$ случайного графа G до полного графа K_n является паросочетанием. Значит, при больших n с вероятностью больше $\frac{1}{2}$ граф G содержит K_4, который имеет хроматическое число 4, у которого 4 вершины и который реализуется как граф диаметров (тетраэдр) в пространстве. Однако при $k \geqslant 5$ с той же вероятностью любой k-вершинный индуцированный подграф H случайного графа либо является полным графом без двух несмежных ребер (при $k = 5$), либо имеет строго больше, чем $2k-2$, ребер. В первом случае $\chi(H) = 3$; во втором случае H нельзя реализовать графом диаметров в $\mathbb{R}^3$. Значит, при $k \geqslant 5$ требуемое свойство выполнено с вероятностью меньше половины. Теорема доказана.

2.4.3 Доказательство теоремы 21

Отметим, что доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 16. Однако здесь появляются другие константы, и поэтому мы приведем его полностью.

Итак, зафиксируем $\varepsilon > 0$ (см. условие теоремы) и положим

$$k = k(n) = \left\lceil (2+\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np) \right\rceil.$$

Прежде всего покажем, что $k \to \infty$. В самом деле, с учетом неравенства $-\ln(1-p) < \frac{p}{1-p}$ имеем

$$\log_{\frac{1}{1-p}}(np) = \frac{\ln(np)}{-\ln(1-p)} > \frac{(1-p)\ln(np)}{p}.$$

Значит, если $p \not\to 1$, то, поскольку $np \to \infty$, получаем $k \to \infty$. Если же $p \to 1$, то заменяем $1 - p = q$ на $\frac{\sigma(n)}{\ln n}$ (см. условие теоремы) и получаем, в свою очередь,

$$\frac{(1-p)\ln(np)}{p} = \frac{\sigma(n)\ln(np)}{p\ln n} \sim \sigma(n) \to \infty.$$

Далее, снова воспользуемся тем фактом, что у любого графа диаметров в $\mathbb{R}^3$, имеющего k вершин, число ребер не больше $2k-2$.

Обозначим через $\mathcal{B}_k$ событие, состоящее в том, что у любого индуцированного подграфа H случайного графа G, имеющего k вершин, число ребер строго больше $2k-2$. Положим $P_k = \mathbf{P}_{n,p}(\mathcal{B}_k)$. Если найдется такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant n_0$ выполнено $P_k > \frac{1}{2}$, то с вероятностью, большей половины, в случайном графе G не найдется индуцированного подграфа H, представимого как граф диаметров и имеющего k вершин. А значит, не найдется и такого подграфа большего размера, то есть $u_3^*(n,p) < k$.

В дальнейшем мы покажем, что $P_k \to 1$ при $n \to \infty$, и это завершит доказательство теоремы.

Обозначим через X_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа, имеющих не более $2k-2$ ребер. Тогда $P_k = \mathbf{P}_{n,p}(X_k = 0)$ и с учетом неравенства Маркова

$$P_k = \mathbf{P}_{n,p}(X_k = 0) = 1 - \mathbf{P}_{n,p}(X_k \geqslant 1) \geqslant 1 - \mathbf{M}X_k,$$

так что остается доказать асимптотику $\mathbf{M}X_k \to 0$. За счет линейности математического ожидания получаем

$$\mathbf{M}X_k = C_n^k \sum_{i=0}^{2k-2} C_{C_k^2}^i p^i q^{C_k^2 - i} \leqslant C_n^k \sum_{i=0}^{2k} C_{C_k^2}^i p^i q^{C_k^2 - i}.$$

Убедимся в том, что в последней сумме максимальным является последнее слагаемое. Для этого разделим $(i+1)$-ое слагаемое на i-ое ($0 \leqslant i \leqslant 2k-1$) и проверим, что отношение не меньше единицы:

$$\frac{C_{C_k^2}^{i+1} p^{i+1} q^{C_k^2 - i - 1}}{C_{C_k^2}^i p^i q^{C_k^2 - i}} = \frac{C_k^2 - i}{i+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Понятно, что функция $\frac{C_k^2 - i}{i+1}$ убывает по i. Значит,

$$\frac{C_k^2 - i}{i+1} \cdot \frac{p}{q} \geqslant \frac{C_k^2 - 2k + 1}{2k} \cdot \frac{p}{q} > \frac{C_k^2 - 2k}{2k} \cdot \frac{p}{q} = \frac{k-5}{4} \cdot \frac{p}{q}.$$

Мы хотим показать, что

$$\frac{k-5}{4} \cdot \frac{p}{q} \geqslant 1,$$

а покажем даже, что

$$\frac{k-5}{4} \cdot \frac{p}{q} \to \infty.$$

Упростим, стало быть, запись и рассмотрим выражение $\frac{kp}{q}$. Поскольку $np \to \infty$ и $-\ln(1-p) < \frac{p}{1-p}$, имеем

$$\frac{kp}{q} > \frac{2\ln(np)}{-\ln(1-p)} \cdot \frac{p}{1-p} > 2\ln(np) \to \infty.$$

Итак, при больших n

$$\mathbf{M}X_k \leqslant (2k+1)C_n^k C_{C_k^2}^{2k} p^{2k} q^{C_k^2-2k}.$$

Воспользуемся простыми оценками $C_a^b \leqslant \left(\frac{3a}{b}\right)^b$ и $C_a^b \leqslant \frac{a^b}{b!}$. Получаем

$$\mathbf{M}X_k \leqslant (2k+1)\left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{(C_k^2)^{2k}}{(2k)!} p^{2k} q^{C_k^2-2k} \leqslant \left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{k^{4k}}{(2k)!} p^{2k} q^{C_k^2-2k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{3n}{k}\right)^k \frac{k^{4k}}{((2k)/e)^{2k}} p^{2k} q^{\frac{k(k-5)}{2}} = \left(\frac{3}{4}e^2\right)^k n^k k^k p^{2k} q^{\frac{k(k-5)}{2}} = \left(\frac{3}{4}e^2 nkp^2 q^{\frac{k-5}{2}}\right)^k.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что в ее условиях величина $nkp^2q^{\frac{k-5}{2}}$ стремится к нулю. Итак,

$$nkp^2q^{\frac{k-5}{2}} < \exp\left(\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\ln(np)}{-\ln q}\ln q + \ln(np) + \ln(kp)\right) =$$

$$= \exp\left(\ln(np)\left(\frac{\ln(kp)}{\ln(np)} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \to 0,$$

поскольку при достаточно больших n

$$\frac{\ln(kp)}{\ln(np)} < \frac{\ln\left(3\frac{\ln(np)}{-\ln(1-p)}p\right)}{\ln(np)} \leqslant \frac{\ln(3\ln(np))}{\ln(np)} = \frac{\ln 3 + \ln\ln(np)}{\ln(np)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теорема доказана.

2.4.4 Доказательство теоремы 22

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$k = \left[(2-\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right].$$

Мы уже убедились в том, что $k \to \infty$. Нам достаточно показать, что при больших n выполнено $u_3^*(n,p) \geqslant k$. Наличие целой части не играет никакой роли, т.к. $k \to \infty$ и при необходимости мы просто можем заменить ε на $\varepsilon' \in (0,\varepsilon)$. В дальнейшем некоторые неравенства будут выполнены лишь при $n \geqslant n_0$, но мы не будем каждый раз говорить об этом.

Обозначим через Y_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа G, являющихся пирамидами с циклом длины $k-1$ в основании. Если мы докажем, что при больших n выполнено $\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) > \frac{1}{2}$, то при тех же n мы получим $u_3^*(n,p) \geqslant k$. Как всегда, мы докажем еще больше: $\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) \to 1$.

В силу неравенства Чебышёва имеем

$$\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) = \mathbf{P}_{n,p}(Y_k \geqslant 1) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}Y_k}{(\mathbf{M}Y_k)^2}.$$

Для доказательства теоремы остается установить две стандартных асимптотики: $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ и $\mathbf{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbf{M}Y_k)^2$. За счет линейности математического ожидания имеем

$$\mathbf{M}Y_k = C_n^k k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)}.$$

Нетрудно видеть, что поскольку p^{-1} не превосходит любую положительную степень n, то по крайней мере

$$k = \Theta\left(\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right) < \Theta\left(\frac{\ln n}{-\ln(1-p)}\right) \leqslant \Theta\left(\frac{\ln n}{p}\right) < \Theta\left(n^{\frac{1}{5}} \ln n\right) = o\left(\sqrt[4]{n}\right).$$

Поэтому с большим запасом $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ и

$$\mathbf{M}Y_k \sim \frac{n^k}{k!} k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} = \frac{n^k}{2(k-1)} p^{2k-2} q^{C_k^2-(2k-2)} >$$

$$> \frac{1}{2k} n^k p^{2k} q^{k^2/2} = \frac{1}{2k}\left(np^2 q^{k/2}\right)^k.$$

Поскольку $k \to \infty$, для обоснования асимптотики $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ достаточно найти такое $\delta > 0$, что

$$np^2 q^{k/2} = \exp\left(\ln(np) + \ln p + \frac{k}{2}\ln q\right) \geqslant 1 + \delta.$$

Это равносильно существованию такого $\delta > 0$, что $\ln(np) + \ln p + \frac{k}{2}\ln q \geqslant \delta$. После подстановки явного выражения для k имеем

$$\ln(np) + \ln p + (2-\varepsilon')\frac{\ln(np)}{-2\ln q}\ln q = \left(1 - \frac{2-\varepsilon'}{2}\right)\ln(np) + \ln p =$$

$$= \ln(np)\left(\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\ln p}{\ln(np)}\right) > \frac{\varepsilon'}{4}\ln(np) \to \infty,$$

т.к. в наших условиях $\frac{\ln p}{\ln(np)} \to 0$, и все в порядке.

Проверим теперь асимптотику $\mathbf{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbf{M}Y_k)^2$. Имеет место стандартное соотношение

$$\mathbf{M}_f^2 Y_k = \sum_{C_1,C_2} \mathbf{M}Y_{C_1,C_2},$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным парам различных пирамид на k вершинах, $C_1, C_2 \subset K_n$, а Y_{C_1,C_2} — индикатор одновременного попадания пирамид C_1, C_2 в случайный граф G в качестве индуцированных подграфов. Отдельно рассмотрим слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) = \varnothing$ и слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \varnothing$. В первом случае получаем выражение

$$S_1 = C_n^k C_{n-k}^k \left(k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2 - (2k-2)} \right)^2 \sim$$

$$\sim \left(C_n^k k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2 - (2k-2)} \right)^2 = (\mathbf{M} Y_k)^2.$$

Предпоследний переход сделан за счет $k = o\left(\sqrt[4]{n}\right)$. Если покажем теперь, что

$$S_2 = \sum_{C_1, C_2} Y_{C_1, C_2} - S_1 = o\left((\mathbf{M} Y_k)^2 \right),$$

то завершим доказательство теоремы. Для каждой пары пирамид C_1, C_2, которые различны, но пересекаются хотя бы по одной вершине (именно такие пары задают S_2) можно найти число общих вершин (обозначим его через $m = m(C_1, C_2)$) и число общих ребер (обозначим его через $l = l(C_1, C_2)$). Очевидно, что $m \in \{1, \ldots, k\}$, $l \in \{0, \ldots, 2m-2\}$. Таким образом,

$$S_2 \leqslant \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=0}^{2m-2} C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(k \frac{(k-2)!}{2} \right)^2 p^{4k-4-l} q^{2(C_k^2 - (2k-2)) - C_m^2 + l}.$$

Допустим, мы доказали, что при всех m, l

$$\frac{C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(k \frac{(k-2)!}{2} \right)^2 p^{4k-4-l} q^{2(C_k^2 - (2k-2)) - C_m^2 + l}}{C_n^k C_{n-k}^k \left(k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2 - (2k-2)} \right)^2} = o\left(\frac{1}{k^2} \right).$$

Тогда

$$S_2 \leqslant 2k^2 C_n^k C_{n-k}^k \left(k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2 - (2k-2)} \right)^2 o\left(\frac{1}{k^2} \right) =$$

$$= o\left(C_n^k C_{n-k}^k \left(k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2 - (2k-2)} \right)^2 \right) = o((\mathbf{M} Y_k)^2),$$

и теорема доказана. Итак, имеем

$$\frac{C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m \left(k \frac{(k-2)!}{2} \right)^2 p^{4k-4-l} q^{2(C_k^2 - (2k-2)) - C_m^2 + l}}{C_n^k C_{n-k}^k \left(k \frac{(k-2)!}{2} p^{2k-2} q^{C_k^2 - (2k-2)} \right)^2} =$$

$$= \frac{k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1)}{(n-2k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2k+m)} C_k^m p^{-l} q^{-C_m^2 + l} \leqslant$$

$$\leqslant 2k^{2m}n^{-m}p^{-l}q^{-C_m^2+l} \leqslant 2k^{2m}n^{-m}p^{-2m+2}q^{-C_m^2}.$$

Остается показать, что при всех $m \in \{1, \ldots, k\}$ выполнено

$$k^2k^{2m}n^{-m}p^{-2m+2}q^{-C_m^2} =$$

$$= \exp\big((2m+2)\ln k - m\ln n - (2m-2)\ln p - C_m^2 \ln q\big) \to 0.$$

Если рассмотреть выражение в показателе экспоненты как функцию от m, то ввиду неравенства $\ln q < 0$ это квадратичная функция с положительным коэффициентом при m^2. Значит, ее максимум по m достигается либо при $m = 1$, либо при $m = k$. При $m = 1$ имеем (с учетом $k = o\left(\sqrt[4]{n}\right)$)

$$4\ln k - \ln n = \ln\left(\frac{k^4}{n}\right) = \ln(o(1)) \to -\infty,$$

и все в порядке. При $m = k$ имеем

$$(2k+2)\ln k - k\ln n - (2k-2)\ln p - C_k^2 \ln q =$$

$$= k\left(\ln(k^2) + \frac{2\ln k}{k} - \ln(np) - \frac{k-2}{k}\ln p - \frac{k-1}{2}\ln q\right) \leqslant$$

$$\leqslant k\left(\ln(k^2) + \frac{2\ln k}{k} - \ln(np) - \ln p - (2-\varepsilon')\,\frac{\ln(np)}{-2\ln q}\ln q\right) =$$

$$= k\left(\frac{-\varepsilon'}{2}\ln(np) + \ln(k^2) + \frac{2\ln k}{k} - \ln p\right) =$$

$$= k\ln(np)\left(-\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\ln(k^2)}{\ln(np)} + \frac{2\ln k}{k\ln(np)} - \frac{\ln p}{\ln(np)}\right) \to -\infty,$$

поскольку $k \to \infty$, $np \to \infty$, $\frac{\ln p}{\ln(np)} \to 0$ и

$$\frac{\ln(k^2)}{\ln(np)} < \frac{2\ln\left(\frac{2\ln(np)}{-\ln(1-p)}\right)}{\ln(np)} < \frac{2\ln\left(\frac{2\ln(np)}{p}\right)}{\ln(np)} = \frac{2(\ln 2 + \ln\ln(np) - \ln p)}{\ln(np)} \to 0.$$

Снова все в порядке, и теорема доказана.

2.4.5 Доказательство теоремы 23

Как всегда, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем

$$k = \left[(2 - 4\alpha - \varepsilon)\,\frac{\ln n}{p}\right].$$

Величина k слегка отличается от своего аналога в теореме 18, и мы совсем скоро поймем, за счет чего это отличие. Но сразу видно, что отличие лишь в константе, а поскольку ограничения в теореме 23 сильнее, чем в теореме 18, снова с запасом выполнено $k \to \infty$ и $k = o\left(\sqrt{n}\right)$ (на самом деле $k = o\left(\sqrt[4]{n}\right)$).

Действуем стандартно, доказывая, что $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ и $\mathbf{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbf{M}Y_k)^2$. Разумеется, здесь Y_k — число пирамид, как в теореме 22, а не число циклов, как в теореме 18. Тем не менее выкладки будут скорее подобны расчетам из пункта 2.3.6.

В пункте 2.4.3 мы убедились в том, что свойство $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ заведомо выполнено, коль скоро $\ln(np) + \ln p + \frac{k}{2}\ln q \to \infty$. Практически такое же условие мы проверяли и в пункте 2.3.6, причем там были как раз нынешние ограничения на параметры. Однако там не было слагаемого $\ln p$, и именно с этим связано различие между нынешним видом функции k (с вычитаемым 4α) и видом аналогичной функции в 2.3.6 (с вычитаемым 2α):

$$\ln(np) + \ln p + \frac{k}{2}\ln q = \ln(np^2) + \frac{k}{2}\ln q > (1-2\alpha)\ln n - \left(1 - 2\alpha - \frac{\varepsilon'}{2}\right)\ln n =$$

$$= \frac{\varepsilon'}{2}\ln n \to \infty.$$

Займемся вторыми моментами. Здесь тоже имеет место “симбиоз” подходов и оценок из пунктов 2.4.3 и 2.3.6. По-прежнему все сводится к доказательству того, что $\frac{S_2}{S_1} = o(1)$. И, если S_1 — в точности то же, что и в 2.4.3, то S_2 оценивается настолько же аккуратнее, чем в 2.4.3, насколько аккуратнее это было сделано для одноименной величины в 2.3.6:

$$S_2 \leqslant \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=0}^{2m-2} C_n^k C_{n-k}^{k-m} C_k^m B(k,m,l) p^{4k-4-l} q^{2(C_k^2 - (2k-2)) - C_m^2 + l},$$

где $B(k,m,l)$ — число способов образовать пару пирамид с выбранными k вершинами для каждой, пересекающихся по выбранным m вершинам и каким-то l ребрам.

Оценим величину $B(k,m,l)$. Прежде всего назовем *главной вершиной* пирамиды ту ее вершину, которая не принадлежит циклу. Пусть даны две пирамиды, у каждой из которых k вершин, а также m общих вершин и l общих ребер. Обозначим множество общих вершин U, множество вершин первой пирамиды, не принадлежащих U, — U_1, множество вершин второй пирамиды, не принадлежащих U, — U_2. Пусть D_1, D_2 — главные вершины наших пирамид. Возможны пять случаев: 1) $D_1 = D_2 \in U$; 2) $D_1, D_2 \in U$, но $D_1 \neq D_2$; 3) $D_1 \in U$, $D_2 \in U_2$; 4) $D_2 \in U$, $D_1 \in U_1$; 5) $D_1 \in U_1$, $D_2 \in U_2$. В первом случае нашим пирамидам отвечают два цикла длины $k-1$, имеющие $m-1$ общих вершин и $l-m+1$ общих ребер. Ясно, что таких пар пирамид не больше, чем $mA(k-1,m-1,l-m+1)$. Во втором случае основание первой пирамиды проходит через главную вершину второй пирамиды, а основание второй пирамиды проходит через главную вершину первой пирамиды. Естественно, у этих циклов только $m-2$ общие вершины, а число их общих ребер лежит в пределах от l до $l-5$. Поэтому в случае 2) пар пирамид не больше, чем

$$m^2(A(k-1,m-2,l)+A(k-1,m-2,l-1)+A(k-1,m-2,l-2)+$$
$$+A(k-1,m-2,l-3)+A(k-1,m-2,l-4)+A(k-1,m-2,l-5)).$$

Рассуждая аналогично, оцениваем число пар циклов в случаях 3) и 4), как

$$2(k-m)m(A(k-1,m-1,l)+A(k-1,m-1,l-1)+A(k-1,m-1,l-2)),$$

а в случае 5) — как

$$(k-m)^2A(k-1,m,l)<k^2A(k,m,l)\leqslant k^2m!2^m\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2.$$

Всякий раз мы считаем $A=0$, коль скоро один из параметров отрицательный. К каждой величине A применим оценку из пункта 2.3.6:

$$A(k-1,m-2,l)\leqslant g(m-2,m-l-2)g^2(k-m+1,m-l-2)=$$
$$=(m-2)!C_{m-3}^{m-l-3}\left((k-m+1)!C_{k-m}^{m-l-3}\right)^2<m!2^mk^2\left((k-m)!C_{k-m}^{m-l-3}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-2,l-1)\leqslant g(m-2,m-l-1)g^2(k-m+1,m-l-1)=$$
$$=(m-2)!C_{m-3}^{m-l-2}\left((k-m+1)!C_{k-m}^{m-l-2}\right)^2<m!2^mk^2\left((k-m)!C_{k-m}^{m-l-2}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-2,l-2)\leqslant g(m-2,m-l)g^2(k-m+1,m-l)=$$
$$=(m-2)!C_{m-3}^{m-l-1}\left((k-m+1)!C_{k-m}^{m-l-1}\right)^2<m!2^mk^2\left((k-m)!C_{k-m}^{m-l-1}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-2,l-3)\leqslant g(m-2,m-l+1)g^2(k-m+1,m-l+1)=$$
$$=(m-2)!C_{m-3}^{m-l}\left((k-m+1)!C_{k-m}^{m-l}\right)^2<m!2^mk^2\left((k-m)!C_{k-m}^{m-l}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-2,l-4)\leqslant g(m-2,m-l+2)g^2(k-m+1,m-l+2)=$$
$$=(m-2)!C_{m-3}^{m-l+1}\left((k-m+1)!C_{k-m}^{m-l+1}\right)^2<m!2^mk^2\left((k-m)!C_{k-m}^{m-l+1}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-2,l-5)\leqslant g(m-2,m-l+3)g^2(k-m+1,m-l+3)=$$
$$=(m-2)!C_{m-3}^{m-l+2}\left((k-m+1)!C_{k-m}^{m-l+2}\right)^2<m!2^mk^2\left((k-m)!C_{k-m}^{m-l+2}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-1,l) \leqslant g(m-1,m-l-1)g^2(k-m,m-l-1) =$$
$$= (m-1)!C_{m-2}^{m-l-2}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-2}\right)^2 < m!2^m\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-2}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-1,l-1) \leqslant g(m-1,m-l)g^2(k-m,m-l) =$$
$$= (m-1)!C_{m-2}^{m-l-1}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2 < m!2^m\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-1,l-2) \leqslant g(m-1,m-l+1)g^2(k-m,m-l+1) =$$
$$= (m-1)!C_{m-2}^{m-l}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l}\right)^2 < m!2^m\left((k-m)!C_{k-m-1}^{m-l}\right)^2;$$

$$A(k-1,m-1,l-m+1) \leqslant g(m-1,2m-l-2)g^2(k-m,2m-l-2) =$$
$$= (m-1)!C_{m-2}^{2m-l-3}\left((k-m)!C_{k-m-1}^{2m-l-3}\right)^2 < m!2^m\left((k-m)!C_{k-m-1}^{2m-l-3}\right)^2.$$

В итоге

$$B(k,m,l) \leqslant m!2^m((k-m)!)^2\left(m\left(C_{k-m-1}^{2m-l-3}\right)^2 + m^2k^2\left(\left(C_{k-m}^{m-l-3}\right)^2 + \right.\right.$$
$$+\left(C_{k-m}^{m-l-2}\right)^2 + \left(C_{k-m}^{m-l-1}\right)^2 + \left(C_{k-m}^{m-l}\right)^2 + \left(C_{k-m}^{m-l+1}\right)^2 + \left.\left(C_{k-m}^{m-l+2}\right)^2\right) +$$
$$\left.+2km\left(\left(C_{k-m-1}^{m-l-2}\right)^2 + \left(C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2 + \left(C_{k-m-1}^{m-l}\right)^2\right) + k^2\left(C_{k-m-1}^{m-l-1}\right)^2\right).$$

Более того, совсем тривиальна оценка

$$B(k,1,l) \leqslant k^2\left(\frac{(k-1)!}{2}\right)^2.$$

Вернемся к дроби $\frac{S_2}{S_1}$:

$$\frac{S_2}{S_1} = \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{2m-2}\frac{C_n^kC_{n-k}^{k-m}C_k^mB(k,m,l)p^{4k-4-l}q^{2(C_k^2-(2k-2))-C_m^2+l}}{C_n^kC_{n-k}^k\left(k\frac{(k-2)!}{2}p^{2k-2}q^{C_k^2-(2k-2)}\right)^2} <$$
$$< \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{2m-2}4\left(\frac{k!}{(k-m)!}\right)^2\frac{(n-2k)!}{(n-2k+m)!}\frac{B(k,m,l)}{m!((k-1)!)^2}p^{-l}q^{-C_m^2+l} <$$
$$< \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{2m-2}8k^2n^{-m}\frac{B(k,m,l)}{m!((k-m)!)^2}p^{-l}q^{-C_m^2+l}.$$

Для дальнейшей оценки, как и в пункте 2.3.6, разобьем суммирование на Σ' и Σ'', проводя границу на прежнем $m = \frac{k}{\ln k}$.

Рассмотрим Σ'. Хорошо видно, что оценка величины $B(k,m,l)$ отлично сокращается с величиной $m!((k-m)!)^2$, стоящей в знаменателе. В то же время при текущих ограничениях на m и l справедливы неравенства

$$C_{k-m-1}^{2m-l-3} \leqslant C_{k-m+1}^{2m-l-1} \leqslant C_k^{2m-l-1} \leqslant C_k^{2m-1}\left(\frac{4m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{2m-1}}{(2m-1)!}\left(\frac{4m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l-3} \leqslant C_{k-m+1}^{m-l-2} \leqslant C_k^{m-l-2} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^{l+1} \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l-2} \leqslant C_{k-m+1}^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l} \leqslant C_k^{m-l} \leqslant C_k^{m}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l+1} \leqslant C_k^{m-l+1} \leqslant C_k^{m}\left(\frac{2m}{k}\right)^{l-1} \leqslant \frac{k^{m}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^{l-1} \leqslant \frac{k^{m+1}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m}^{m-l+2} \leqslant C_k^{m-l+2} \leqslant C_k^{m+2}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m+2}}{(m+2)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m-1}^{m-l-2} \leqslant C_{k-m+1}^{m-l} \leqslant C_k^{m-l} \leqslant C_k^{m}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m-1}^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-l-1} \leqslant C_k^{m-1}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l,$$

$$C_{k-m-1}^{m-l} \leqslant C_k^{m-l} \leqslant C_k^{m}\left(\frac{2m}{k}\right)^l \leqslant \frac{k^{m}}{m!}\left(\frac{2m}{k}\right)^l.$$

При $m \geqslant 4$ имеем $4m-2 \geqslant 2m+6$. При $m=3$ слагаемого $A(k-1,m-2,l-5)$ в оценке величины $B(k,l,m)$ нет, так что хватает неравенства $4m-2 \geqslant 2m+4$. При $m=2$ нет слагаемых $A(k-1,m-2,l-5), A(k-1,m-2,l-4)$, так что хватает неравенства $4m-2 \geqslant 2m+2$. Так или иначе

$$\frac{B(k,m,l)}{m!2^m((k-m)!)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{16m^2}{k^2}\right)^l \frac{1}{((m-1)!)^2}\left(mk^{4m-2}+6m^2k^{4m-2}+6mk^{4m-2}+k^{4m-2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{16m^2}{k^2}\right)^l \frac{1}{((m-1)!)^2} \cdot 24m^2k^{4m-2}.$$

Значит,

$$\Sigma' \leqslant 8k^2n^{-1}\frac{B(k,1,0)}{((k-1)!)^2} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{2m-2} 8k^2n^{-m}2^m \cdot 24m^2k^{4m-2}\left(\frac{16m^2}{k^2}\right)^l \frac{1}{((m-1)!)^2}p^{-l}e^{\frac{m^2}{2n^\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2k^4}{n} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{2m-2} \left((192m^2)^{\frac{1}{m}}e^{\frac{m}{2n^\alpha}}\frac{2k^4}{n}\right)^m \frac{m^4}{\left(\frac{m}{e}\right)^{2m}} \left(\frac{16m^2}{k^2}n^\alpha\right)^l \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2k^4}{n} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{2m-2} \left((192m^2)^{\frac{1}{m}}e^{\frac{m}{2n^\alpha}}\frac{2k^4}{n}\right)^m \frac{m^4}{\left(\frac{m}{e}\right)^{l}} \left(\frac{16m^2}{k^2}n^\alpha\right)^l =$$

$$= \frac{2k^4}{n} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{2m-2} \left((192m^6)^{\frac{1}{m}}e^{\frac{m}{2n^\alpha}}\frac{2k^4}{n}\right)^m \left(\frac{16em}{k^2}n^\alpha\right)^l \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2k^4}{n} + \sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}} \sum_{l=0}^{2m-2} \left((192m^6)^{\frac{1}{m}}e^{\frac{m}{2n^\alpha}}\frac{2k^4}{n}\right)^m \left(\frac{16e}{k\ln k}n^\alpha\right)^l.$$

Ясно, что $\sum\limits_{l=0}^{2m-2} \left(\frac{16e}{k\ln k}n^\alpha\right)^l < 2$, откуда с учетом $k = o\left(\sqrt[4]{n}\right)$ получаем

$$\Sigma' < o(1) + 2\sum_{m=2}^{\frac{k}{\ln k}} \left((192m^6)^{\frac{1}{m}}e^{\frac{m}{2n^\alpha}}\frac{2k^4}{n}\right)^m = o(1).$$

Перейдем к Σ''. При $m \geqslant \frac{k}{\ln k}$ в оценках биномиальных коэффициентов, из которых складывается величина $B(k,m,l)$, вынужденно опустим сомножители типа $\left(\frac{2m}{k}\right)^l$, а сохранившееся k заменим на $2k$. Например,

$$C_{k-m-1}^{2m-l-3} \leqslant C_{k-m-1+l+2}^{2m-l-3+l+2} = C_{k+l-m+1}^{2m-1} \leqslant C_{k+2m-2-m+1}^{2m-1} = C_{k+m-1}^{2m-1} \leqslant$$

$$\leqslant C_{2k}^{2m-1} \leqslant \frac{(2k)^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

Далее,

$$C_{k-m-1}^{2m-l-3} \leqslant \frac{(2k)^{2m-1}}{(2m-1)!} \leqslant (2m)(2k)^{-1}\left(\frac{2ek}{2m}\right)^{2m} \leqslant \frac{m}{k}(e\ln k)^{2m}.$$

Аналогично и каждый из оставшихся коэффициентов не превосходит $4k^2\left(e^2\ln^2 k\right)^m$.

Получаем

$$\Sigma'' \leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \sum_{l=0}^{2m-2} 8k^2 n^{-m} 2^m \cdot 24m^2 \cdot 32k^5 \left(e^4 \ln^4 k\right)^m p^{-l} e^{\frac{m^2}{2n^\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} 8k^2 n^{-m} 2^m \cdot 48m^3 \cdot 32k^5 \left(e^4 \ln^4 k\right)^m n^{2\alpha m} e^{\frac{m^2}{2n^\alpha}} <$$

$$< \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \left(2e^4 \left(2 \cdot 10^4 k^{10}\right)^{\frac{1}{m}} n^{2\alpha-1} (\ln^4 k) e^{\frac{m}{2n^\alpha}}\right)^m =$$

$$= \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \left(2e^4 \left(2 \cdot 10^4 k^{10}\right)^{\frac{1}{m}} n^{2\alpha-1} (\ln^4 k) \exp\left(\left(1 - 2\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \ln n\right)\right)^m =$$

$$= \sum_{m=\frac{k}{\ln k}}^{k} \left(2e^4 \left(2 \cdot 10^4 k^{10}\right)^{\frac{1}{m}} n^{2\alpha-1} (\ln^4 k) n^{1-2\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^m = o(1).$$

Теорема доказана.

Глава 3

Реализация случайных графов графами диаметров в размерности $d \geqslant 4$

3.1 Введение и формулировки результатов

Нам удалось получить аналоги теорем 13–23 (см. [68]) при любом фиксированном d. Однако, начиная с $d = 4$, нижние оценки мы получили только для $u_d(n, p)$. Верхние же оценки верны для обеих величин.

Теорема 24. *Пусть для всякого $\alpha > 0$ выполнено $pn^\alpha \to \infty$ и $q \ln n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $d \geqslant 4$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_d(n, p) \geqslant (2 - \varepsilon) \log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 24 отличается от теоремы 22 исключительно тем, что в ее доказательстве по существу используется возможность не требовать связности подграфа. Также отсутствие условия связности дает аналоги теорем 18 и 23. Более того, эти аналоги при $d < 4$ даже усиливают результаты указанных теорем. Но, повторим, это специфика величины u.

Теорема 25. *Зафиксируем некоторое $\alpha \in \left(0, \frac{1}{d}\right)$ и положим $\tau(n) = pn^\alpha$. Пусть с некоторым $C > 0$ начиная с некоторого n выполнено $1 < \tau(n) < C$. Тогда для любого d и любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство*

$$u_d(n, p) \geqslant (2 - 2\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p}.$$

Как мы и говорили, результат сильнее результата теоремы 23, ведь и диапазон допустимых значений α шире, и в оценке вычитается не 4α, а 2α. Правда, теорема 18 — это просто частный случай новой теоремы 25. Зато из доказательства будет видно, что при $d > 2$ границу $\frac{1}{d}$ можно сдвинуть вправо до $\frac{2}{d+1}$.

Перейдем к верхним оценкам. Они снова верны и для u, и для u'.

Теорема 26. *Пусть p — это либо константа, либо произвольная функция, которая стремится к нулю при $n \to \infty$, но при этом ограничена снизу величиной $\frac{c}{n}$, где $c > 1$. Тогда для любого d и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_d^*(n,p) \leqslant (2+\varepsilon)(d+1)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 26 дает абсолютно универсальную верхнюю оценку, работающую даже в более широком диапазоне, нежели теорема 16. В этом ее большой плюс. Однако при $d = 2, 3$ значение полученной в ней оценки несколько хуже ранее известных. Следующая теорема устраняет эту проблему ценой сокращения диапазона допустимых вероятностей ребра.

Теорема 27. *Пусть p — константа. Тогда для любого d и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_d^*(n,p) \leqslant (2+\varepsilon)\left[\frac{d}{2}\right]\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 27 отлично согласуется с теоремами 16 и 21. Тем не менее, в ней p — константа. Дело в том, что доказательство теоремы 27 опирается на ряд тонких утверждений, многие из которых с трудом обобщаются на случаи непостоянных вероятностей (ср. [48]). Отметим также, что при $d \geqslant 4$ нижние и верхние оценки начинают отличаться друг от друга, так что асимптотику найти уже не удается.

Наконец, обобщением и даже усилением теорем 13 и 19 служит следующая

Теорема 28. *Пусть $d \geqslant 3$ и найдется такое $c < 2(d-1)\ln(d-1)$, что $p < \frac{c}{n}$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_d^*(n,p) = 0$.*

При $d = 3$ теорема 28 уточняет теорему 19, т.к. здесь мы имеем ограничение $c < 4\ln 2$, которое слабее неравенства $c < 1$.

В этой главе мы сперва докажем теоремы 26 и 28. В параграфе 3.3 мы приведем доказательства теорем 24 и 25. А доказательству теоремы 27 мы посвятим параграф 3.4.

3.2 Верхние оценки

3.2.1 Доказательство теоремы 26

Напомним, что в главе 1 мы обозначили через $\alpha(G)$ *число независимости* произвольного графа G, то есть число элементов в наибольшем множестве вершин, которые попарно не соединены ребрами (такие множества называются *независимыми*). Понятно, что $\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Положим

$$k = \left[(2+\varepsilon)(d+1)\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right].$$

Хорошо известно (см. [30]), что для функций p из утверждения теоремы 26 и для любого $\delta > 0$ выполнено

$$\mathbf{P}_{n,p}\left(\alpha(G) \leqslant (2+\delta)\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right) \to 1, \;\; n \to \infty.$$

Значит, для любого $l \geqslant k$ имеем при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}_{n,p}\left(\forall\; H = (W,F) \subset G : |W| = l, H = G|_W, \;\alpha(H) \leqslant (2+\delta)\log_{\frac{1}{1-p}}(np)\right) \to 1,$$

то есть

$$\mathbf{P}_{n,p}\left(\forall\; H = (W,F) \subset G : |W| = l, H = G|_W, \;\chi(H) \geqslant \frac{l}{(2+\delta)\log_{\frac{1}{1-p}}(np)}\right) \to 1.$$

Выбирая δ достаточно малым, получаем

$$\frac{k}{(2+\delta)\log_{\frac{1}{1-p}}(np)} > d+1,$$

откуда

$$\mathbf{P}_{n,p}\left(\exists\; H = (W,F) \subset G : \;|W| = l, \;H = G|_W, \;H - \quad \mathbb{R}^d, \;\chi(H) = d+1\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}_{n,p}\left(\exists\; H = (W,F) \subset G : \;|W| = l, \;H = G|_W, \;\chi(H) = d+1\right) \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Следовательно, при больших n имеем $u_d^*(n,p) \leqslant k$, и теорема доказана.

3.2.2 Доказательство теоремы 28

Тут рассуждение похоже на рассуждение из предыдущего пункта. На сей раз мы апеллируем к замечательной теореме Ахлиоптаса–Наора (см. [26]).

Теорема 29. *Пусть* $p = \frac{c}{n}$, $c > 0$. *Пусть* k_c *— это наименьшее* k*, с которым* $c < 2k\ln k$. *Тогда*

$$\mathbf{P}_{n,p}\left(\chi(G) \in \{k_c, k_c+1\}\right) \to 1, \;\; n \to \infty.$$

В нашем случае $c < 2(d-1)\ln(d-1)$. Значит, по теореме 29 имеем

$$\mathbf{P}_{n,p}\left(\chi(G) \leqslant d\right) \to 1, \;\; n \to \infty,$$

откуда *для любого* l верна оценка

$$\mathbf{P}_{n,p}\left(\exists\; H = (W,F) \subset G : \;|W| = l, \;H = G|_W, \;H - \quad \mathbb{R}^d, \;\chi(H) = d+1\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}_{n,p}\left(\exists\; H = (W,F) \subset G : \;|W| = l, \;H = G|_W, \;\chi(H) = d+1\right) \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Следовательно, при больших n имеем $u_d^*(n,p) = 0$, и теорема доказана.

3.3 Нижние оценки

3.3.1 Доказательство теоремы 24

Рассмотрим граф $H = H_{d,k} = K \cup T$ на k вершинах, являющийся объединением клики K размера $d+1$ и независимого множества T размера $k-(d+1)$, причем вершины подграфа T также не соединяются ребрами с вершинами графа K. Назовем такой граф *кометой*. Очевидно, комета является графом диаметров в $\mathbb{R}^d$: для ее реализации достаточно голову кометы K расположить в вершинах правильного симплекса, а ее хвост T разместить внутри него.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$k = \left[(2-\varepsilon)\frac{\ln n}{-\ln q}\right], \quad q = 1-p.$$

Ясно, что в условиях теоремы $k \to \infty$ и $k \sim (2-\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np)$ при $n \to \infty$. Поэтому нам достаточно показать, что при больших n выполнено $u_d(n,p) \geqslant k$.

В дальнейшем некоторые неравенства будут выполнены лишь при $n \geqslant n_0$, но мы не будем каждый раз говорить об этом.

Обозначим через Y_k случайную величину, равную количеству индуцированных k-вершинных подграфов случайного графа G, являющихся кометами с головой размера $d+1$ в основании. Если мы докажем, что при больших n выполнено $\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) > \frac{1}{2}$, то при тех же n мы получим $u_d(n,p) \geqslant k$. Мы докажем еще больше: $\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) \to 1$.

В силу неравенства Чебышёва, как всегда, имеем

$$\mathbf{P}_{n,p}(Y_k > 0) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}Y_k}{(\mathbf{M}Y_k)^2}.$$

Для доказательства теоремы остается установить две асимптотики: $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ и $\mathbf{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbf{M}Y_k)^2$. За счет линейности математического ожидания имеем

$$\mathbf{M}Y_k = C_n^k C_k^{d+1} p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2}.$$

Нетрудно видеть, что поскольку p^{-1} не превосходит любую положительную степень n, то по крайней мере

$$k = O\left(\frac{\ln n}{p}\right) = o\left(\sqrt{n}\right).$$

Поэтому $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$ при $n \to \infty$ и

$$\mathbf{M}Y_k \sim \frac{n^k}{k!} C_k^{d+1} p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2} > \frac{n^k}{k^k} p^{d^2} q^{\frac{k^2}{2}} > \frac{1}{k^{d^2}}\left(\frac{n}{k} q^{\frac{k}{2}}\right)^k \geqslant \frac{1}{k^{d^2}}\left(\frac{npq^{\frac{k}{2}}}{2\ln n}\right)^k.$$

У нас $k \to \infty$ и d — константа, а стало быть, для доказательства асимптотики $\mathbf{M}Y_k \to \infty$ достаточно показать, что $\frac{npq^{\frac{k}{2}}}{\ln n} \to \infty$. Подставляя явное выражение для k, при некотором $\varepsilon' = \varepsilon + o(1)$ имеем

$$\frac{npq^{\frac{k}{2}}}{\ln n} = \frac{npe^{(2-\varepsilon')\frac{\ln n}{-2\ln q}\ln q}}{\ln n} = \frac{npe^{(-\ln n)(1-\frac{\varepsilon'}{2})}}{\ln n} = \frac{npn^{-(1-\frac{\varepsilon'}{2})}}{\ln n} = \frac{n^{\frac{\varepsilon'}{2}}p}{\ln n}.$$

Наконец, учтем, что $pn^{\frac{\varepsilon'}{4}} \to \infty$, а $\ln n < n^{\frac{\varepsilon'}{4}}$:

$$\frac{n^{\frac{\varepsilon'}{2}}p}{\ln n} = \frac{n^{\frac{\varepsilon'}{4}}}{\ln n}\left(n^{\frac{\varepsilon'}{4}}p\right) \to \infty,$$

и все в порядке.

Проверим теперь асимптотику $\mathbf{M}_f^2 Y_k \sim (\mathbf{M}Y_k)^2$. Разумеется,

$$\mathbf{M}_f^2 Y_k = \sum_{C_1,C_2} \mathbf{M}Y_{C_1,C_2},$$

где суммирование, как обычно, ведется по всем упорядоченным парам $C_1, C_2 \subset K_n$ различных k-вершинных комет, а Y_{C_1,C_2} — индикатор одновременного попадания комет C_1, C_2 в случайный граф G в качестве индуцированных подграфов. Рассмотрим отдельно слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) = \varnothing$ и слагаемые с $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \varnothing$. В первом случае получаем выражение

$$S_1 = C_n^k C_{n-k}^k \left(C_k^{d+1} p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2}\right)^2 \sim \left(C_n^k C_k^{d+1} p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2}\right)^2 = (\mathbf{M}Y_k)^2.$$

Предпоследний переход сделан за счет $k = o\left(\sqrt{n}\right)$. Если покажем теперь, что

$$S_2 = \sum_{C_1,C_2} Y_{C_1,C_2} - S_1 = o((\mathbf{M}Y_k)^2),$$

то завершим доказательство теоремы.

Для каждой пары комет $C_1 = K_1 \cup T_1,\ C_2 = K_2 \cup T_2$ посмотрим на количество вершин в пересечении их частей:

1. $|K_1 \cap K_2| = k_1 \in \{0, \ldots, d+1\}$,
2. $|T_1 \cap K_2| = k_2 \in \{0, 1\}$,
3. $|K_1 \cap T_2| = k_3 \in \{0, 1\}$,
4. $|T_1 \cap T_2| = k_4 \in \{0, \ldots, k-(d+1)\}$.

В этих обозначениях

$$S_2 = \sum \left(C_n^k C_k^{d+1}\right) \left(C_{d+1}^{k_1} C_{k-(d+1)}^{k_2} C_{d+1-k_1}^{k_3} C_{k-(d+1)-k_2}^{k_4}\right) \times$$
$$\times \left(C_{n-k}^{k-(d+1)-(k_3+k_4)} C_{n-2k+(d+1)+(k_3+k_4)}^{(d+1)-(k_1+k_2)}\right) p^{2C_{d+1}^2 - C_{k_1}^2} q^{2(C_k^2 - C_{d+1}^2) - C_{k_4}^2},$$

где сумма берется по всем допустимым упорядоченным наборам (k_1, k_2, k_3, k_4). Здесь первая скобка отвечает за первую комету, вторая скобка — за общие вершины комет, а третья — за оставшиеся вершины второй кометы. Убедимся, что $\frac{S_2}{S_1} = o(1)$, и завершим тем самым доказательство теоремы. Итак, имеем

$$\frac{S_2}{S_1} = \sum \frac{\left(C_n^k C_k^{d+1}\right)\left(C_{d+1}^{k_1} C_{k-(d+1)}^{k_2} C_{d+1-k_1}^{k_3} C_{k-(d+1)-k_2}^{k_4}\right)\left(C_{n-k}^{k-(d+1)-(k_3+k_4)} C_{n-2k+(d+1)+(k_3+k_4)}^{(d+1)-(k_1+k_2)}\right)}{C_n^k C_{n-k}^k \left(C_k^{d+1}\right)^2} \times$$

$$\times \frac{p^{2C_{d+1}^2 - C_{k_1}^2} q^{2(C_k^2 - C_{d+1}^2) - C_{k_4}^2 - k_2 - k_3}}{\left(p^{C_{d+1}^2} q^{C_k^2 - C_{d+1}^2}\right)^2}.$$

Нас интересует лишь вопрос стремления к нулю приведенной величины, поэтому, делая в дальнейшем ее верхние оценки, мы будем пренебрегать константами в них. Соответствующие неравенства мы будем обозначать символом “$\ll$”. В частности, у нас d — константа, и этим мы воспользуемся:

$$\frac{S_2}{S_1} \ll \sum \frac{\left(k C_k^{k_4}\right)\left(C_n^{k-(d+1)-(k_3+k_4)} C_n^{(d+1)-(k_1+k_2)}\right)}{C_n^k C_k^{d+1}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-C_{k_4}^2 - 2}.$$

Разобьем последнюю сумму на две части: Σ_1 — это часть, в которой $k_4 = 0$; Σ_2 — это часть, в которой $k_4 \geqslant 1$. Оценим каждую из частей максимальным слагаемым, умноженным на количество всех слагаемых, которое имеет порядок k. Имеем (с оптимальными k_1, k_2, k_3)

$$\Sigma_1 \ll \frac{k^2}{k^{d+1}} \cdot \frac{n^{k-(d+1)-k_3} n^{(d+1)-(k_1+k_2)} k!}{n^k \left(k-(d+1)-k_3\right)!} p^{-C_{k_1}^2} q^{-2} \leqslant \frac{n^{-k_1-k_2-k_3} k^{d+1+k_3}}{k^{d-1}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-2} =$$

$$= \frac{k^{2+k_3}}{n^{k_1+k_2+k_3}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-2} \leqslant \frac{k^3}{n^{k_1+k_2+k_3}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-2}.$$

У нас $k_4 = 0$, откуда следует, что не равна нулю сумма $k_1 + k_2 + k_3$, ведь мы рассматриваем пересекающиеся кометы. Кроме того, $k_1 \leqslant d+1$, а значит, наше выражение оценивается сверху величиной $\frac{k^3}{np^{d^2}q^2}$, ввиду чего, подставляя явное выражение для k, получим

$$\frac{k^3}{np^{d^2}q^2} \leqslant \frac{(2\ln n)^3}{p^{3+d^2} n q^2} = \left(\frac{2\ln n}{n^{1/6} q^{2/3}}\right)^3 \frac{1}{\left(pn^{\frac{1}{2(3+d^2)}}\right)^{3+d^2}} \to 0,$$

потому что оба множителя стремятся к нулю.

В случае $k_4 \geqslant 1$ имеем за счет аналогичных выкладок

$$\Sigma_2 \ll \frac{k^{2k_4+3}}{n^{k_1+k_2+k_3+k_4}} p^{-C_{k_1}^2} q^{-C_{k_4}^2 - 2} \leqslant \frac{1}{p^{k_1^2} n^{k_1}} \left(\frac{k^{5k_4}}{n^{k_4}} q^{-\frac{k_4^2}{2} - 2}\right) =$$

$$= \frac{1}{p^{k_1^2} n^{k_1}} \left(\frac{k^5}{n} q^{-\frac{k_4}{2} - \frac{2}{k_4}} \right)^{k_4}.$$

Заметим, что множитель $\frac{1}{p^{k_1^2} n^{k_1}} = \frac{1}{(pn^{1/k_1})^{k_1^2}}$ стремится к нулю, если $k_1 > 0$, и равен единице в случае $k_1 = 0$. А значит, для завершения доказательства достаточно проверить, что выражение в последней скобке стремится к нулю. В силу того, что

$$k_4 < k = (2 - \varepsilon') \frac{\ln n}{-\ln q} \leqslant 2 \frac{\ln n}{p},$$

имеем

$$\frac{k^5 q^{-\frac{k_4}{2} - \frac{2}{k_4}}}{n} \leqslant \frac{k^5 e^{-(2-\varepsilon')\frac{\ln n}{-2\ln q}\ln q}}{nq^2} = \frac{k^5}{n^{\frac{\varepsilon'}{2}} q^2} \leqslant 32 \frac{\ln^5 n}{p^5 q^2 n^{\frac{\varepsilon'}{2}}} 2 \frac{\ln^5 n}{q^2 n^{\frac{\varepsilon'}{4}}} \frac{1}{(pn^{\frac{\varepsilon'}{20}})^5} \to 0,$$

и все доказано.

3.3.2 Доказательство теоремы 25

Как и в теореме 24, рассматриваем кометы. При этом

$$k = \left[(2 - 2\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p} \right].$$

Очевидно, что $k \to \infty$. Более того,

$$k = \Theta \left(\frac{\ln n}{p} \right) = \Theta \left(n^{\alpha} \ln n \right) = o \left(\sqrt{n} \right),$$

ведь $\alpha < \frac{1}{d} \leqslant \frac{1}{2}$. Отметим, что граница $\frac{1}{d}$ нужна только здесь. В дальнейшем хватит и границы $\frac{2}{d+1}$.

Как и в пункте 3.2.1, нужно сперва проверить, что $\frac{npq^{k/2}}{\ln n} \to \infty$:

$$\frac{npq^{\frac{k}{2}}}{\ln n} \geqslant \frac{n^{1-\alpha}}{\ln n} e^{-\left(1-\alpha-\frac{\varepsilon'}{2}\right)\ln n} = \frac{n^{\frac{\varepsilon'}{2}}}{\ln n} \to \infty.$$

И снова остается убедиться в том, что в обозначениях пункта 3.2.1 выполнено $\frac{S_2}{S_1} \to 0$. Оценивая слегка аккуратнее, получаем

$$\frac{S_2}{S_1} \ll \sum \frac{k^{k_2+k_3+2k_4}}{n^{k_1+k_2+k_3+k_4} k_4!} p^{-\frac{k_1^2}{2}} q^{-C_{k_4}^2}.$$

Каждое слагаемое можно записать в виде произведения трех сомножителей:

$$\left(\frac{k}{n} \right)^{k_2+k_3} \cdot \left(np^{\frac{k_1}{2}} \right)^{-k_1} \cdot \frac{k^{2k_4} q^{-C_{k_4}^2}}{n^{k_4} k_4!}.$$

Зафиксируем произвольные k_1, k_2, k_3 и рассмотрим сумму таких слагаемых по k_4 (обозначим эти слагаемые $L_{k_1,k_2,k_3}(k_4)$).

Пусть сперва $k_4 = 0$. Тогда либо $k_1 > 0$, либо $k_2 + k_3 > 0$ (кометы пересекаются). Но у нас $\frac{k}{n} \to 0$ и

$$np^{\frac{k_1}{2}} \geqslant n \cdot n^{-\alpha\frac{k_1}{2}} \geqslant n^{1-\alpha\frac{d+1}{2}} \to \infty,$$

поскольку $\alpha < \frac{2}{d+1}$. Значит, в любом случае $L_{k_1,k_2,k_3}(0) \to 0$.

Пусть теперь $k_4 \leqslant n^\alpha$. Покажем, что величины $L_{k_1,k_2,k_3}(k_4)$ убывают по k_4:

$$\frac{L_{k_1,k_2,k_3}(k_4)}{L_{k_1,k_2,k_3}(k_4+1)} = \frac{n(k_4+1)}{k^2}q^{k_4} \geqslant \frac{n(k_4+1)}{k^2}e^{-(1+o(1))pn^\alpha} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n(k_4+1)}{k^2}e^{-C+o(1)} \to \infty.$$

Значит, при любых k_1, k_2, k_3 сумма величин $L_{k_1,k_2,k_3}(k_4)$ по k_4 от нуля до n^α стремится к нулю, как и первое слагаемое.

Есть еще кусок суммы, в котором $k_4 > n^\alpha$. В этом куске всегда

$$\frac{k^{2k_4}q^{-C_{k_4}^2}}{n^{k_4}k_4!} \leqslant \left(\frac{ek^2q^{-\frac{k_4}{2}}}{nk_4}\right)^{k_4}.$$

В свою очередь,

$$\frac{ek^2q^{-\frac{k_4}{2}}}{nk_4} \ll \frac{n^{2\alpha}(\ln n)^2e^{(1+o(1))\frac{pk}{2}}}{n^{1+\alpha}} = n^{\alpha-1}(\ln n)^2e^{\left(1-\alpha-\frac{\varepsilon'}{2}\right)\ln n} = (\ln n)^2n^{-\frac{\varepsilon'}{2}} \to 0.$$

Таким образом, каждое из слагаемых при $k_4 > n^\alpha$ можно оценить, например, величиной 2^{-n^α}. А число этих слагаемых имеет порядок k, то есть их сумма также стремится к нулю.

В итоге при любых k_1, k_2, k_3 сумма величин $L_{k_1,k_2,k_3}(k_4)$ по k_4 стремится к нулю. Но количество различных наборов чисел k_1, k_2, k_3 не превосходит константы, откуда и получаем, что вся сумма стремится к нулю. Теорема доказана.

3.4 Доказательство теоремы 27

Доказательство довольно трудоемкое. Поэтому, желая сделать изложение максимально прозрачным, мы сперва рассмотрим случай $d = 4$ и $p = const$, а затем во втором параграфе приведем рассуждение для $d > 4$, $p = const$. Наконец, в параграфе 3.5 мы обсудим проблему распространения полученных результатов на случаи медленно убывающих функций p.

3.4.1 Случай $d = 4$, $p = const$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 2)$ и положим

$$k = k(n) = \left\lceil (4+\varepsilon)\frac{\ln n}{-\ln q} \right\rceil .$$

Обозначим $cl(G, r)$ число r-клик в данном графе G. Известно (см. [48]), что существуют такие числа $\delta > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ и любого графа диаметров G на n вершинах в $\mathbb{R}^4$ выполнено неравенство

$$cl(G, 3) \leqslant n^{3-\delta},$$

то есть в любом достаточно большом графе диаметров в четырехмерном пространстве число треугольников сильно меньше, чем в полном графе.

Мы хотим доказать, что $u_4^*(n, p) \leqslant k$. Для этого достаточно показать, что лишь с вероятностью, стремящейся к нулю, в $G(n, p)$ найдется индуцированный подграф на k вершинах, в котором число треугольников не превосходит $k^{3-\delta}$, то есть

$$\mathbf{P}\left(\exists H_k \subset G(n,p):\ cl(H_k, 3) \leqslant k^{3-\delta}\right) \to 0.$$

Будем постепенно оценивать эту величину сверху. Разумеется,

$$\mathbf{P}\left(\exists H_k \subset G(n,p):\ cl(H_k, 3) \leqslant k^{3-\delta}\right) \leqslant C_n^k \mathbf{P}\left(cl(G(k,p), 3) \leqslant k^{3-\delta}\right).$$

Далее будем пользоваться частным случаем теоремы Редля (см. [28, 60]), который можно сформулировать следующим образом.

Теорема 30. *Зафиксируем произвольное число t и рассмотрим граф K_k — полный граф на k вершинах. Обозначим через $Sis(k,t)$ произвольную максимальную по мощности совокупность подграфов графа K_k, изоморфных K_t, в которой никакие два подграфа не имеют общих ребер. Тогда при $k \to \infty$ выполнено*

$$a := |Sis(k,t)| \sim \frac{C_k^2}{C_t^2} = \frac{k^2}{t(t-1)}(1+o(1)).$$

Теперь вернемся к нашему случайному графу $G(k, p)$. Пусть σ — перестановка множества его вершин. Пусть $F_3(\sigma, G(k,p), t)$ — это количество таких треугольников в $G(k, p)$, что в перестановке σ каждый из них является подграфом ровно в одной клике K_t из $Sis(k, t)$. В работе [48] получен следующий результат.

Теорема 31. *Если дан граф H_k на k вершинах и в нем количество треугольников не превосходит величины $k^{3-\delta}$, то для любого фиксированного t найдется такая перестановка σ множества его вершин, что*

$$F_3(\sigma, H_k, t) \leqslant k^{2-\delta}(t-2)(1+\zeta_t(k)),$$

где $\zeta_t(k) = o(1)$ *при* $k \to \infty$.

Введем еще одно обозначение $z = k^{2-\delta}(t-2)(1+\zeta_t(k))$ и продолжим оценку вероятности:

$$C_n^k \mathbf{P}\left(cl(G(k,p),3) \leqslant k^{3-\delta}\right) \leqslant C_n^k \mathbf{P}\left(\bigcup_{\sigma}(F_3(\sigma, G(k,p), t) \leqslant z)\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_n^k k! \mathbf{P}\left(F_3(e, G(k,p), t) \leqslant z\right) = C_n^k k! \sum_{i=0}^{z} \mathbf{P}\left(F_3(e, G(k,p), t) = i\right),$$

где e — тождественная перестановка. Обозначим теперь $\mathcal{P}_3(t,p)$ вероятность того, что в случайном графе $G(t,p)$ нет треугольника. Тогда

$$C_n^k k! \sum_{i=0}^{z} \mathbf{P}\left(F_3(e, G(k,p), t) = i\right)) \leqslant C_n^k k! \sum_{i=0}^{z} \sum_{j=0}^{i} C_a^j \left(\mathcal{P}_3(t,p)\right)^{a-j} \left(1 - \mathcal{P}_3(t,p)\right)^j.$$

Оценивая через количество слагаемых, умноженное на максимальное из них, имеем

$$C_n^k k! \sum_{i=0}^{z} \sum_{j=0}^{i} C_a^j \left(\mathcal{P}_3(t,p)\right)^{a-j} \left(1 - \mathcal{P}_3(t,p)\right)^j \leqslant n^k (z+1)^2 a^z \left(\mathcal{P}_3(t,p)\right)^{a-z} =$$

$$n^k \left(\mathcal{P}_3(t,p)\right)^{a(1+o(1))}. \quad (3.1)$$

Последнее верно в силу того, что, во-первых, $z = o(a)$ при $k \to \infty$ и, значит, $a - z = a(1+o(1))$, а во-вторых,

$$(z+1)^2 a^z = e^{o\left(k^2\right)}, \ \ \left(\mathcal{P}_3(t,p)\right)^{a(1+o(1))} \leqslant e^{-\Omega\left(k^2\right)}.$$

Оценим величину $\mathcal{P}_3(t,p)$. Для этого воспользуемся теоремой из работы [56].

Теорема 32. *Если* p *подчиняется ограничениям теоремы 27, то*

$$\ln\left(\mathcal{P}_3(t,p)\right) = (1+\xi(t)) \ln\left(\mathbf{P}(\textit{граф } G(t,p) \textit{ двудолен})\right),$$

где $\xi(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Переходим, стало быть, к оценке вероятности того, что случайный граф $G = (V, E)$ на t вершинах двудолен:

$$\mathbf{P}(\text{граф } G(t,p) \text{ двудолен}) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{t} \sum_{W} \sum_{G} \mathbf{P}(G),$$

где первое суммирование ведется по размеру первой доли (который определяет и размер второй), второе суммирование ведется по всем долям размера m, а третье — по всем двудольным графам $G = (W \sqcup (V \backslash W), E)$. Пусть l — количество ребер между долями. Тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{t}\sum_{W}\sum_{G}\mathbf{P}(G) \leqslant \sum_{m=0}^{t}\sum_{W}\sum_{l=0}^{m(t-m)} q^{C_m^2+C_{t-m}^2}C_{m(t-m)}^{l}p^{l}q^{m(t-m)-l}.$$

Множитель $q^{C_m^2+C_{t-m}^2}$ от l не зависит, выносим его за знак суммы, тогда формула превращается в бином Ньютона для $(p+q)^{m(t-m)} = 1$, а значит, все выражение оценивается сверху величиной

$$\sum_{m=0}^{t}\sum_{W} q^{C_m^2+C_{t-m}^2} = \sum_{m=0}^{t} C_t^m q^{C_m^2+C_{t-m}^2}.$$

В дальнейшем мы будем подбирать t таким, каким нам нужно, поэтому уже сейчас можно считать, что t четно. В таком случае максимальным является слагаемое, в котором $m = \frac{t}{2}$. Действительно, при таком m и биномиальный коэффициент наибольший, и сумма в показателе степени q минимальна в силу выпуклости биномиального коэффициента. Количество слагаемых в нашей сумме равно $t+1$, а значит, она оценивается сверху выражением

$$\sum_{m=0}^{t} C_t^m q^{C_m^2+C_{t-m}^2} \leqslant (t+1)\frac{t!}{\left(\left(\frac{t}{2}\right)!\right)^2}\cdot q^{2C_{\frac{t}{2}}^2}.$$

Далее, используя тривиальные оценки, получаем

$$(t+1)\frac{t!}{\left(\left(\frac{t}{2}\right)!\right)^2}\cdot q^{2C_{\frac{t}{2}}^2} \leqslant (t+1)\frac{te\left(\frac{t}{e}\right)^t}{\left(e\left(\frac{t}{2e}\right)^{\frac{t}{2}}\right)^2} q^{\frac{t(t-2)}{4}} \leqslant t^2 2^t q^{\frac{t(t-2)}{4}} =$$

$$= \exp\left\{2\ln t + t\ln 2 + \frac{t(t-2)}{4}\ln q\right\} \leqslant \exp\left\{4t + \frac{t(t-2)}{4}\ln q\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{t(t-2)}{4}(-\ln q)\left(\frac{16}{(t-2)(-\ln q)} - 1\right)\right\}.$$

Пришла пора выбрать константу t. Положим ее равной любому четному числу, которое не меньше величины $\max\left\{2\left\lceil\frac{192}{(-\ln q)\varepsilon}+1\right\rceil, 2\left\lceil\frac{24}{\varepsilon}+1\right\rceil\right\}$ и с которым функция $\xi(t)$ из теоремы 32 принимает такое значение, что $1+\xi(t) \geqslant \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{24}}$. В таком случае по крайней мере $t \geqslant 2\left(\frac{192}{(-\ln q)\varepsilon}+1\right)$, и выражение в скобках оценивается как

$$\frac{16}{(t-2)(-\ln q)} - 1 \leqslant \frac{16(-\ln q)\varepsilon}{384(-\ln q)} - 1 = \frac{\varepsilon}{24} - 1.$$

В силу этого окончательно имеем

$$\mathbf{P}(\text{граф } G(t,p) \text{ двудолен}) \leqslant \exp\left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)\frac{t(t-2)}{4}\ln q\right\}.$$

Таким образом, нам удалось оценить сверху вероятность того, что случайный граф $G(t,p)$ двудолен, а через нее и вероятность того, что в $G(t,p)$ нет треугольников. Возвращаясь к нашей оценке (3.1) и используя теорему 32, получаем

$$n^k\left(\mathcal{P}_3(t,p)\right)^{a(1+o(1))} = \exp\left\{k\ln n + a(1+o(1))\ln\mathcal{P}_3(t,p)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{k\ln n - \frac{k^2}{t(t-1)}(1+o(1))(1+\xi(t))\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)\frac{t(t-2)}{4}(-\ln q)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{k\ln n - \frac{k^2}{t(t-1)}(1+o(1))\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^{3/2}\frac{t(t-2)}{4}(-\ln q)\right\}.$$

Здесь мы подставили явное выражение для a. В нем $o(1)$ — некоторая функция от k. Поскольку при $n\to\infty$ растет k, постольку можно выбрать такое n, что будет выполнено $1+o(1)\geqslant\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{24}}$, а значит, экспонента не превосходит такого выражения:

$$\exp\left\{k\ln n\left(1-\frac{k}{(\ln n)t(t-1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\frac{t(t-2)}{4}(-\ln q)\right)\right\}.$$

Нам нужно проверить, что вся эта экспонента стремится к нулю с ростом n. Для этого достаточно доказать, что, скажем,

$$\frac{k}{(\ln n)t(t-1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\frac{t(t-2)}{4}(-\ln q) > 1+\frac{\varepsilon}{16}.$$

Подставляем явное выражение для k:

$$\frac{k}{(\ln n)t(t-1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\frac{t(t-2)}{4}(-\ln q) =$$
$$= \frac{(4+\varepsilon)\ln n}{4(-\ln q)(\ln n)}\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\frac{t-2}{t-1}(-\ln q) =$$
$$= \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\left(1-\frac{1}{t-1}\right).$$

Вспоминаем, что $t\geqslant\frac{24}{\varepsilon}+1$, а значит, $1-\frac{1}{t-1}\geqslant 1-\frac{\varepsilon}{24}$. Окончательно имеем

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^3 \geqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{8}\right) = 1+\frac{\varepsilon}{8}-\frac{\varepsilon^2}{32} > 1+\frac{\varepsilon}{16},$$

ведь у нас $\varepsilon<2$. Теорема доказана.

3.4.2 Случай $d > 4$, $p = const$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0,2)$, введем обозначение $s = \left[\frac{d}{2}\right] + 1$ и положим

$$k = k(n) = \left\lceil (2+\varepsilon)\left[\frac{d}{2}\right]\frac{\ln n}{-\ln q}\right\rceil.$$

Известно (см. [48]), что существуют такие числа $\delta > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ и любого графа диаметров G на n вершинах в $\mathbb{R}^d$ выполнено неравенство

$$cl(G,s) \leqslant n^{s-\delta},$$

то есть в любом достаточно большом графе диаметров в d-мерном пространстве число s-клик сильно меньше, чем в полном графе. Отметим, что при $d = 4$ величина s равна трем, и это согласуется с тем, что мы использовали в предыдущем пункте.

Как и в предыдущем пункте, оценка $u_d^*(n,p) \leqslant k$ сводится к проверке стремления к нулю величины

$$C_n^k \mathbf{P}\left(cl(G(k,p),s) \leqslant k^{s-\delta}\right).$$

Как и раньше, рассмотрим систему $Sis(k,t)$ (величину t мы выберем позднее). Из теоремы 30 по-прежнему

$$a := |Sis(k,t)| = \frac{k^2}{t(t-1)}(1+o(1)).$$

Пусть $F_s(\sigma, G(k,p), t)$ — это количество таких s-клик в $G(k,p)$, что в перестановке σ каждая из них является подкликой ровно в одной клике K_t из $Sis(k,t)$. Аналогом теоремы 31 служит теорема 33, фактически доказанная в [48].

Теорема 33. *Если дан граф H_k на k вершинах и в нем количество s-клик не превосходит величины $k^{s-\delta}$, то для любого фиксированного t найдется такая перестановка σ множества его вершин, что*

$$F_s(\sigma, H_k, t) \leqslant k^{2-\delta}\frac{(t-2)!}{(t-s)!}(1+\zeta_{t,s}(k)),$$

где $\zeta_{t,s}(k) = o(1)$ при $k \to \infty$.

С учетом теоремы 33 выкладки, предшествующие неравенству 3.1, повторяются почти дословно. Только надо ввести величину $\mathcal{P}_s(t,p)$ — вероятность того, что в $G(t,p)$ нет s-клик:

$$C_n^k \mathbf{P}\left(cl(G(k,p),s) \leqslant k^{s-\delta}\right) \leqslant n^k \left(\mathcal{P}_s(t,p)\right)^{a(1+o(1))}. \tag{3.2}$$

Теорема 32 также допускает обобщение (см. [56]).

Теорема 34. *Если p подчиняется ограничениям теоремы 27, то*

$$\ln\left(\mathcal{P}_s(t,p)\right) = (1+\xi_s(t))\ln\left(\mathbf{P}(\textit{граф } G(t,p)\ (s-1)\textit{-долен})\right),$$

где $\xi_s(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Переходим, стало быть, к оценке вероятности того, что случайный граф $G=(V,E)$ на t вершинах имеет $s-1$ долю:

$$\mathbf{P}(\text{граф } G(t,p)\ (s-1)\text{-долен}) = \frac{1}{(s-1)!}\sum_{(m_1,\ldots,m_{s-1})}\sum_{W_1,\ldots,W_{s-1}}\sum_{G}\mathbf{P}(G),$$

где первое суммирование ведется по всем возможным размерам соответствующих долей, то есть $m_i = |W_i|$ и $\sum_{i=1}^{s-1} m_i = t$, второе суммирование ведется по всем долям выбранных размеров, а третье — по всем $(s-1)$-дольным графам $G=(W_1 \sqcup \ldots \sqcup W_{s-1}, E)$. Обозначим теперь для всех $i,j \in \{1,\ldots,s-1\}$ количество ребер между соответствующими долями W_i и W_j через $l_{i,j} \in \{0,\ldots,m_i m_j\}$. Тогда наша сумма примет вид

$$\frac{1}{(s-1)!}\sum_{(m_1,\ldots,m_{s-1})}\sum_{W_1,\ldots,W_{s-1}}\sum_{(l_{1,2},\ldots,l_{s-2,s-1})} q^{\sum C_{m_r}^2}\prod_{i,j} C_{m_i m_j}^{l_{i,j}} p^{l_{i,j}} q^{m_i m_j - l_{i,j}}.$$

Множитель $q^{\sum C_{m_r}^2}$ от $l_{i,j}$ не зависит, выносим его за знак суммы, после чего, коль скоро у нас все слагаемые положительны, мы можем сумму произведений оценить сверху произведением сумм:

$$\frac{1}{(s-1)!}\sum_{\mathbf{m}}\sum_{W_1,\ldots,W_{s-1}} q^{\sum C_{m_r}^2}\sum_{\mathbf{l}}\prod_{i,j} C_{m_i m_j}^{l_{i,j}} p^{l_{i,j}} q^{m_i m_j - l_{i,j}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathbf{m}}\sum_{W_1,\ldots,W_{s-1}} q^{\sum C_{m_r}^2}\prod_{i,j}\sum_{l_{i,j}=0}^{m_i m_j} C_{m_i m_j}^{l_{i,j}} p^{l_{i,j}} q^{m_i m_j - l_{i,j}} =$$

$$= \sum_{\mathbf{m}}\sum_{W_1,\ldots,W_{s-1}} q^{\sum C_{m_r}^2}\prod_{i,j} 1 = \sum_{\mathbf{m}} \frac{t!}{m_1! m_2! \cdot \ldots \cdot m_{s-1}!} q^{\sum C_{m_r}^2}.$$

В последнем выражении появляется полиномиальный коэффициент — число способов разбить множество вершин мощности t на подмножества заданных мощностей. Пусть t делится на $s-1$. В таком случае максимальным является слагаемое, в котором $m_r = \frac{t}{s-1}$ при всех r. Действительно, при таких m_r и полиномиальный коэффициент наибольший, и сумма $\sum C_{m_r}^2$ минимальна в силу выпуклости биномиального коэффициента. Количество слагаемых в нашей сумме равно C_{t+s-2}^{s-2}, а значит, она оценивается сверху выражением

$$\sum_{\mathbf{m}} \frac{t!}{m_1! m_2! \cdot \ldots \cdot m_{s-1}!} q^{\sum C_{m_r}^2} \leqslant C_{t+s-2}^{s-2}\frac{t!}{\left(\left(\frac{t}{s-1}\right)!\right)^{s-1}} \cdot q^{(s-1)C_{\frac{t}{s-1}}^2}.$$

Далее, используя тривиальные оценки и допущение $t > s$, получаем

$$C_{t+s-2}^{s-2}\frac{t!}{\left(\left(\frac{t}{s-1}\right)!\right)^{s-1}} \cdot q^{(s-1)C^2_{\frac{t}{s-1}}} \leqslant (t+s)^{s-2}\frac{te(\frac{t}{e})^t}{\left(e\left(\frac{t}{e(s-1)}\right)^{\frac{t}{s-1}}\right)^{s-1}}q^{\frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}} \leqslant$$

$$\leqslant (t+s)^{s-1}(s-1)^t q^{\frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}} \leqslant (2t)^{s-1}(s-1)^t q^{\frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}} =$$

$$= \exp\left\{(s-1)\ln(2t) + t\ln(s-1) + \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}\ln q\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{3(s-1)t - \frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}(-\ln q)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{t(t-s+1)(-\ln q)}{2(s-1)}\left(\frac{6(s-1)^2}{(t-s+1)(-\ln q)} - 1\right)\right\}.$$

Пусть $t \geqslant (s-1)\left(\frac{144(s-1)}{(-\ln q)(\varepsilon)} + 1\right)$. Тогда

$$\frac{6(s-1)^2}{(t-s+1)(-\ln q)} - 1 \leqslant \frac{6(s-1)^2(-\ln q)\varepsilon}{144(s-1)^2(-\ln q)} - 1 = \frac{\varepsilon}{24} - 1.$$

В силу этого получаем

$$\mathbf{P}(\text{граф } G(t,p) \ (s-1)\text{-долен}) \leqslant \exp\left\{\left(1 - \frac{\varepsilon}{24}\right)\frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}\ln q\right\}.$$

Таким образом, нам удалось оценить сверху вероятность того, что случайный граф $G(t,p)$ имеет $(s-1)$ долю, а через нее и вероятность того, что в $G(t,p)$ нет K_s. Возвращаясь к нашей оценке 3.2 и используя теорему 34, получаем

$$n^k\left(\mathcal{P}_s(t,p)\right)^{a(1+o(1))} = \exp\left\{k\ln n + a(1+o(1))\ln\mathcal{P}_s(t,p)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{k\ln n - \frac{k^2}{t(t-1)}(1+o(1))(1+\xi_s(t))\left(1 - \frac{\varepsilon}{24}\right)\frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}(-\ln q)\right\}.$$

Опять же, можно считать, что и $1+\xi_s(t) \geqslant \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{24}}$, и, начиная с некоторого n, выполнено $1+o(1) \geqslant \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{24}}$, а значит, экспонента не превосходит такого выражения:

$$\exp\left\{k\ln n\left(1 - \frac{k}{(\ln n)t(t-1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}(-\ln q)\right)\right\}.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\frac{k}{(\ln n)t(t-1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}(-\ln q) > 1 + \frac{\varepsilon}{16}.$$

Подставляем выражение для k:

$$\frac{k}{(\ln n)t(t-1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}(-\ln q)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(2+\varepsilon)(s-1)(\ln n)}{(-\ln q)(\ln n)t(t-1)}\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\frac{t(t-s+1)}{2(s-1)}(-\ln q)=$$

$$=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^2\left(1-\frac{s-2}{t-1}\right)\geqslant\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{24}\right)^3>1+\frac{\varepsilon}{16},$$

коль скоро $t\geqslant\frac{24(s-2)}{\varepsilon}+1$, а $\varepsilon<2$. Теорема доказана.

3.5 Проблема со случаем $p\to 0$

Из доказательств, приведенных в предыдущих параграфах, видно, что одним из основных условий их благополучного завершения было условие нестремления к бесконечности величины t. Если в теоремах 31 и 33 (ср. [48]) от этого условия легко избавиться, то с теоремой 30 все намного сложнее. Однако некоторый шанс побороться с этим препятствием есть. А именно, Кузюрин в работе [49] доказал следующее усиление теоремы Рёдля.

Теорема 35. *Пусть при $k\to\infty$ выполнено $t=t(k)\to\infty$, но $t<c\sqrt{k}$ при некотором постоянном $c<1$. Тогда*

$$|Sis(k,t)|\sim\frac{C_k^2}{C_t^2}=\frac{k^2}{t(t-1)}(1+o(1)).$$

У нас есть несколько ограничений на значение t. Прежде всего $t\gg\frac{1}{p}$, и, если $p\to 0$, то t — не константа. Тем не менее, в свете теоремы 23 достаточно было бы асимптотики $\frac{1}{p}=o\left(\sqrt{k}\right)$. Она равносильна тому, что $p\sqrt{k}\to\infty$, то есть

$$p\sqrt{\frac{\ln n}{p}}\to\infty\Longleftrightarrow\sqrt{p\ln n}\to\infty\Longleftrightarrow p\ln n\to\infty.$$

Казалось бы, это победа, но, к сожалению, условие $t\gg\frac{1}{p}$ не единственное. Есть еще требование $1+\xi_s(t)\geqslant\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{24}}$. Величина $\xi_s(t)$ фигурирует в теореме 34, и, разумеется, она, вообще говоря, зависит от p. Когда p — константа, эта зависимость не играет роли, как и зависимость от s. Однако при $p\to 0$ нужно разбираться в деталях. Из работы [56] нам не удалось вывести явную зависимость от p. Скорее всего в условиях $p\ln n\to\infty$ эта зависимость невелика и по-прежнему t будет удовлетворять теореме 35. Однако проверить мы этого не можем и лишь высказываем соответствующую гипотезу. Как устроена жизнь в ситуации, когда $p\ln n=O(1)$, не ясно совсем.

Заключение

В заключение мы подытожим полученные результаты и укажем дальнейшие возможные пути исследования.

В первой главе мы оценивали пороговую вероятность p_d^* для реализации случайного графа графом расстояний в $\mathbb{R}^d$. В одномерном случае мы знаем точное ее значение. В случаях $d = 2, \ldots, 8$ известен порядок роста пороговой вероятности, причем константа в верхней оценке растет как экспонента по d, а нижняя от d не зависит. В этой связи интересно установить более сильные нижние оценки.

Во второй и третьей главах речь шла о величине $u_d(n,p)$ (и ее связном собрате $u'_d(n,p)$) — размере максимального (связного) подграфа, реализующегося как граф диаметров и имеющего хроматическое число $d+1$. В размерностях $d = 2$ и $d = 3$ при определенных разумных ограничениях на вероятность ребра удалось получить асимптотику обеих этих величин. Также доказаны верхние и нижние оценки на более широком диапазоне значений p, отличающиеся лишь в константу раз.

В размерностях $d \geqslant 4$ картина иная. Нижних оценок для величины $u'_d(n,p)$ нет совсем, интересно было бы разработать метод для их получения. Верхние оценки найдены для обеих величин, но в более сильной из них (и более содержательной) не удается оторваться от ограничения $p = const$. Побороть его — еще одно хорошее направление исследования.

Наконец, во всех поставленных задачах, даже в случае произвольной размерности d, эта размерность, тем не менее, была фиксирована. Естественным, и пока совершенно не затронутым, вопросом становится получение асимптотик введенных нами величин при $d \to \infty$.

Список литературы

[1] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод* Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[2] Г. Вороной *Собрание сочинений в 3-х томах*, 1952.

[3] Дж. Касселс, *Геометрия чисел*, Москва, Мир, 1965.

[4] В.Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, Москва, 2002.

[5] Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, Москва, Мир, 1990.

[6] В. Кошелев *Задача Эрдеша–Секереша о пустых шестиугольниках на плоскости*, Моделирование и анализ информационных систем, 16 (2), 2009, 22–74.

[7] А.Б. Купавский, А.М. Райгородский, М.В. Титова, *О плотнейших множествах без расстояния единица в пространствах малых размерностей*, Труды МФТИ, 4 (2012), N1, 91–110.

[8] О. Мусин, *Проблема двадцати пяти сфер*, УМН, 58 (352), 2003, 153–154.

[9] С.В. Нагаева, А.М. Райгородский, *О вложимости конечных графов расстояний с большим хроматическим числом в случайные графы*, итоги науки и техники, Сер. "Современная математика", 62 (2009), 47–66.

[10] С.В. Нагаева, А.М. Райгородский, *О реализации случайных графов графами расстояний в пространствах фиксированной размерности*, Доклады РАН, 424 (2009), N3, 315– 317.

[11] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств*, Успехи матем. наук, 56 (2001), N1, 107–146.

[12] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.

[13] А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства*, Успехи матем. наук, 55 (2000), N2, 147–148.

[14] А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2007.

[15] А.М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, Москва, 2011.

[16] А.М. Райгородский, *О размерности в проблеме Борсука*, Успехи матем. наук, 52 (1997), N6, 181–182.

[17] А.М. Райгородский, *Об одной оценке в проблеме Борсука*, Успехи матем. наук, 54 (1999), N2, 185–186.

[18] А.М. Райгородский, *Контрпримеры к гипотезе Борсука на сферах малого радиуса*, Доклады РАН, 434 (2010), N2, 161–163.

[19] А.М. Райгородский, *Вокруг гипотезы Борсука*, Итоги науки и техники. Серия "Современная математика", 23 (2007), 147–164

[20] А.М. Райгородский, *Проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера и реализация случайных графов в пространстве*, Успехи матем. наук, 61 (2006), N4, 195–196.

[21] А.М. Райгородский, *Модели интернета*, Интеллект, Долгопрудный, 2013.

[22] К. Роджерс, *Укладки и покрытия*, Москва, Мир, 1968.

[23] А. Сойфер, *Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее*, Матем. просвещение, Вып. 8, 2004.

[24] Л. Тот, *Расположения на плоскостии, сфере и в пространстве*, Москва, Физмалит, 1958.

[25] П. Эрдёш, Дж. Спенсер, *Вероятностные методы в комбинаторике* Издательство Мир, 1976.

[26] D. Achlioptas, A. Naor, *The two possible values of the chromatic number of a random graph*, Annals of Math., 162 (2005), 1335–1351.

[27] P.K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial geometry*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.

[28] N. Alon, J. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Interscience Series in Discrete Math. and Optimization, Second Edition, 2000.

[29] A.–L. Barabási, R. Albert, *Emergence of scaling in random networks* Science, 286, 1999, 509–512.

[30] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Univ. Press, Second Edition, 2001.

[31] B. Bollobás, O.Riordan *The degree sequence of a scale-free random graph process* Random Structures and Algorithms, 18(3), 2001, 279–290.

[32] V.G. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer, Berlin, 1997.

[33] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math., 20 (1933), 177–190.

[34] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.

[35] N.G. de Bruijn and P. Erdős, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., Ser. A, 54 (1951), N5, 371–373.

[36] D. Coulson, *A 15-colouring of 3-space omitting distance one*, Discrete mathematics, 256 (2002), 83–90.

[37] H.T. Croft, *Incident incidents*, Eureka (Cambridge), 30 (1967), 22–26.

[38] P. Erdős, *On a set of distances of n points*, Amer. Math. Monthly, 53, 1946, 248–250.

[39] P. Erdős, *Some Remarks on the Theory of Graphs*, Bulletin of the American Mathematical Society, 53, 1947, 292–294.

[40] P. Erdős, A. Rényi, *On random graphs, I*, Publ. Math. Debrecen, 6, 1959, 290–297.

[41] P. Erdős, G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math., 2, 1935, 463–470.

[42] Harborth, Heiko, *Konvexe Funfecke in ebenen Punktmengen*, Elem. Math. T. 33 (5), 1978, 116–118.

[43] H. Hopf, E. Pannwitz, Aufgabe Nr. 167, Jahresbericht Deutsch. Math.-Verein., 43 (1934), p. 114.

[44] J. Horton, *Sets with no empty convex 7-gons*, Canadian Math. Bulletin T. 26 (4), 1983, 482–484.

[45] S. Janson, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley, NY, 2000.

[46] V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Math. Association of America, 1991.

[47] A. Korkine, G. Zolotareff, *Sur les formes quadratiques positives*, Math. Ann. 11 (2), 1877, 242–292.

[48] A.B. Kupavskiy, A.M. Raigorodskii, M.V. Titova, *New bounds for the distance Ramsey number*, Discrete Mathematics, 313 (2013), N22, 2566–2574.

[49] N.N. Kuzyurin, *On the Difference Between Asymptotically Good Packings and Coverings*, Europ. J. Combinatorics 16 (1995), 35–40.

[50] D.G. Larman and C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19 (1972), 1–24.

[51] C. Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, Groningen, 1969.

[52] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam theorem*, Universitext, Springer, Berlin, 2003.

[53] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, RG Teubner, Leipzig–Berlin, 1953.

[54] O. Nechushtan, *Note on the space chromatic number*, Discrete Mathematics, 256 (2002), 499–507.

[55] M. Overmars, *Finding sets of points without empty convex 6-gons*, Discrete and Computational Geometry T. 29 (1), 2003, 153–158.

[56] H.J. Proemel, A. Steger, *On the asymptotic structure of sparse triangle free graphs*, J. Graph Theory, 21 (1996), N2, 137–151.

[57] A.M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013, 429–460.

[58] A.M. Raigorodskii, *On the chromatic numbers of spheres in* $\mathbb{R}^n$, Combinatorica, 32 (2012), N1, 111–123.

[59] A.M. Raigorodskii, *Three lectures on the Borsuk partition problem*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 347 (2007), 202–248.

[60] V. Rödl, *On a packing and covering problem*, Eur. J. Combinatorics, 6 (1985), 69–78.

[61] K. Schutte, B.L. van der Waerden, *Das Problem der dreizehn Kugeln*. Math. Ann. 125, 1953, 325–334.

[62] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer, 2009.

[63] L.A. Székely, *Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems*, Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer, 11 (2002), 649–666.

[64] А.А. Кокоткин, А.М. Райгородский, *О реализации случайных графов графами диаметров*, Труды МФТИ, 4 (2012), N1, 19–28.

[65] А.А. Кокоткин, А.М. Райгородский, *О больших подграфах графа расстояний, имеющих маленькое хроматическое число*, Современная математика. Фундаментальные направления, 51 (2013), 64–73.

[66] А.А. Кокоткин, А.М. Райгородский, *О реализации подграфов случайного графа графами диаметров на плоскости и в пространстве*, Труды МФТИ, 6 (2014), N2, 44 – 60.

[67] А.А. Кокоткин, *О реализации подграфов случайного графа графами диаметров в евклидовых пространствах*, Доклады РАН, 456 (2014), N6, 1 – 3.

[68] А.А. Кокоткин, *О больших подграфах графа расстояний, имеющих маленькое хроматическое число*, Математические заметки, 96 (2014), N 2, 15 – 18.