На правах рукописи

Кокоткин Андрей Александрович

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ О ГРАФАХ РАССТОЯНИЙ И ГРАФАХ ДИАМЕТРОВ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на кафедре анализа данных факультета инноваций и высоких технологий Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Московский физико-технический институт (государственный университет)".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Райгородский Андрей Михайлович. Место работы: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова".

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теории вероятностей и дискретной математики ФГБОУ ВПО "Иркутский государственный университет" Кузьмин Олег Викторович;

- кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических и естественно-научных дисциплин ФГБОУ ВПО "Российский государственный университет туризма и сервиса" Лавренченко Сергей Александрович.

Ведущая организация: Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Защита состоится ___ _________ 2014 года в _____ на заседании диссертационного совета Д 002.017.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Вычислительный центр имени А.А. Дородницына Российской академии наук» по адресу 119991, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН и на сайте http://www.ccas.ru/.

Автореферат разослан ___ _________ 2014 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор В. В. Рязанов

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Настоящая работа стоит на стыке двух дисциплин: вероятностной комбинаторики и дискретной геометрии. Ниже мы расскажем о ключевых задачах каждой из них.

Дискретная геометрия как наука оформилась на рубеже XIX–XXвв. Одним из ее основоположников можно считать Минковского[1], который исследовал расположение целочисленных векторов по отношению к выпуклым телам в пространстве и доказал фундаментальную теорему о выпуклом теле. Столь же значимые результаты в этой теме получили Вороной[2], Коркин, Золотарев[3] и другие. Сейчас это отдельный раздел теории чисел и геометрии, называемый геометрией чисел[4].

С геометрией чисел тесно связано еще одно направление дискретной геометрии. К этому направлению прежде всего относятся следующие три задачи. Первая — классическая задача Ньютона о плотнейшей упаковке шаров в пространстве[5,6,7]. Вторая задача, двойственная к первой, это задача о редчайшем покрытии пространств шарами. Наконец, третья задача, о контактном числе — наибольшем количестве шаров, касающихся данного шара в пространстве[8,9].

Еще одно направление исследований в дискретной геометрии было инициировано Клейн, Эрдешем и Секерешем в 1934 году, которые доказали существование такого числа $N(n)$, что среди любых N точек общего положения на плоскости найдется выпуклый n-угольник[10,11,12,13,14].

---

[1] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, RG Teubner, Leipzig–Berlin, 1953.

[2] Г. Вороной *Собрание сочинений в 3-х томах*, 1952.

[3] A. Korkine, G. Zolotareff, *Sur les formes quadratiques positives*, Math. Ann. 11 (2), 1877, 242–292.

[4] Дж. Касселс, *Геометрия чисел*, Москва, Мир, 1965.

[5] Л. Тот, *Расположения на плоскостии, сфере и в пространстве*, Москва, Физмалит, 1958.

[6] К. Роджерс, *Укладки и покрытия*, Москва, Мир, 1968.

[7] Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, Москва, Мир, 1990.

[8] K. Schutte, B.L. van der Waerden, *Das Problem der dreizehn Kugeln*. Math. Ann. 125, 1953, 325–334.

[9] О. Мусин, *Проблема двадцати пяти сфер*, УМН, 58 (352), 2003, 153–154.

[10] P. Erdős, G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math., 2, 1935, 463–470.

[11] Harborth, Heiko, *Konvexe Funfecke in ebenen Punktmengen*, Elem. Math. T. 33 (5), 1978, 116–118.

[12] J. Horton, *Sets with no empty convex 7-gons*, Canadian Math. Bulletin T. 26 (4), 1983, 482–484.

[13] M. Overmars, *Finding sets of points without empty convex 6-gons*, Discrete and Computational Geometry T. 29 (1), 2003, 153–158.

[14] В. Кошелев *Задача Эрдеша–Секереша о пустых шестиугольниках на плоскости*, Моделирование и анализ информационных систем, 16 (2), 2009, 22–74.

Следующий класс проблем дискретной геометрии также предложен Эрдешем. Первый вопрос, который был им поставлен, — о наибольшем числе единичных расстояний в множестве из n точек на плоскости и в пространстве[15]. Второй, не менее важный, наоборот, о числе различных расстояний в таком n-точечном множестве[16,17].

Все перечисленные выше задачи исключительно важны для дискретной геометрии, однако необходимо выделить еще две проблемы, которые имеют особенное значение для нашей работы и также носят фундаментальный характер. Первая из них это гипотеза Борсука[18] о разбиении множества на части меньшего диаметра. Вторая — задача Нелсона–Эрдеша–Хадвигера[19] о хроматическом числе метрических пространств, то есть о наименьшем количестве цветов, в которые так можно его покрасить, чтобы никакие две точки одного цвета не находились на расстоянии единица[20].

Теперь очертим круг задач, характерных для вероятностной комбинаторики. Основной метод, используемый здесь, это вероятностный метод. Его основоположником считается Эрдеш[21]. Вероятностный метод позволил доказать или опровергнуть ряд гипотез, державшихся долгое время[22,23].

Одним из основных объектов и одновременно инструментов исследования становится случайный граф. В 1959 году Эрдеш и Реньи[24] дают первую модель случайного графа. Сразу же возникает огромное количество задач об исследовании самых разных характеристик случайного графа, о критических вероятностях для всевозможных его свойств, о рас-

[15] P. Erdős, *On a set of distances of n points*, Amer. Math. Monthly, 53, 1946, 248–250.

[16] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005.

[17] A.M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013, 429 - 460.

[18] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math., 20, 1933, 177–190.

[19] P.K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial Geometry*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, 1995.

[20] A.M. Raigorodskii, *Three lectures on the Borsuk partition problem*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 347 (2007), 202–248.

[21] P. Erdős, *Some Remarks on the Theory of Graphs*, Bulletin of the American Mathematical Society, 53, 1947, 292–294.

[22] П. Эрдёш, Дж. Спенсер, *Вероятностные методы в комбинаторике* Издательство Мир, 1976.

[23] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод* Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[24] P. Erdős, A. Rényi, *On random graphs, I*, Publ. Math. Debrecen, 6, 1959, 290–297.

пределении какой-либо случайной величины на этом графе. Наша работа посвящена двум свойствам: "быть графом расстояний" и "быть графом диаметров".

В настоящее время теория графов переживает очередной расцвет в связи с применением ее к исследованиям социальных и биологических и информационных сетей. Теперь, когда стало возможным эмпирически вычислить некоторые характеристики графа, описывающего сеть Интернет, и графов других социальных сетей, выяснилось, что модель Эрдеша–Реньи ни при каких параметрах (а он в этой модели всего один — вероятность ребра) не может служить сколько-нибудь адекватной моделью для этих графов. В 1999 году Барабаши и Альберт[25] предложили новую модель случайного графа, а Боллобаш[26] и Риордан[27] уточнили ее и доказали, что в ней выполняется по крайней мере два ключевых свойства веб-графа: степенной закон распределения вершин и малый диаметр. С тех пора эта тема получила широкое развитие, были предприняты как попытки улучшения этой модели, так и создания кардинально новых[28].

Цель работы

Цель работы состоит в исследовании двух различных свойств случайного графа в модели Эрдеша–Реньи. Во-первых, изучается свойство быть изоморфным графу расстояний; во-вторых, — свойство быть изоморфным графу диаметров.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные из них:

1. Доказано, что в любом дистанционном графе на плоскости есть большой индуцированный подграф с хроматическим числом не больше четырех.

2. Получены верхние и нижние оценки пороговой вероятности для реализации случайного графа графом расстояний в размерностях от одного до восьми.

[25] A.–L. Barabási, R. Albert, *Emergence of scaling in random networks* Science, 286, 1999, 509–512.
[26] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Univ. Press, Second Edition, 2001.
[27] B. Bollobás, O.Riordan *The degree sequence of a scale-free random graph process* Random Structures and Algorithms, 18(3), 2001, 279–290.
[28] А.М. Райгородский, *Модели интернета*, Интеллект, Долгопрудный, 2013.

3. Получены верхние и нижние оценки для размера наибольшего такого подграфа случайного графа, что он представляется как граф диаметров в пространстве произвольной фиксированной размерности.

Основные методы исследования

В работе используются различные методы теории вероятностей и комбинаторики: методы теории случайных графов, приложения теории плотнейших упаковок, вероятностная техника получения оценки для реализации графом диаметров, связанная с применением теоремы о взаимном расположении подмножеств конечного множества (теорема Рёдля).

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области теории графов, комбинаторики, комбинаторной и дискретной геометрии.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских конференциях и семинарах:

— на кафедральном семинаре кафедр дискретной математики и анализа данных (ФИВТ, МФТИ, 2012–2014);

— на семинаре "Вероятностные и алгебраические методы в комбинаторике" под руководством профессора А.М. Райгородского (механико-математический факультет МГУ, 2009–2012);

— на международной конференции "Fete of combinatorics and computer science" (Кестхей, Венгрия, 11–15 августа 2008);

— на международной конференции "Четвертая польская конференция по комбинаторике" (Бедлево, Польша, 17–21 сентября 2012).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора (4 из которых входят в перечень ВАК), список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 68 наименований. Общий объем диссертации составляет 69 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во введении объясняется актуальность работы и излагается история развития комбинаторной и дискретной геометрии, а также вероятностного метода в комбинаторике. Здесь же очерчен круг ключевых задач этих направлений.

Содержание главы 1

В первой главе обсуждается история задач о хроматическом числе пространства и о дистанционных графах, даются необходимые определения, приводятся формулировки и доказательства полученных результатов.

Хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^d)$ пространства $\mathbb{R}^d$ — это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^d$, чтобы среди точек одного цвета не нашлось пары точек на расстоянии единица, то есть

$$\chi(\mathbb{R}^d) = \min\{k \in \mathbb{N}:\ \exists V_1, \ldots, V_k,\ \mathbb{R}^d = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_k,\\ \forall i,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i,\ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 1\},$$

где ρ — обычное евклидово расстояние.

Легко показать, что для любого d величина $\chi(\mathbb{R}^d)$ конечна. Проблема отыскания хроматического числа пространства была впервые поставлена на рубеже 40х–50х годов XX века. Несмотря на значительный интерес, вызванный этой проблемой, она до сих пор, по существу, остается нерешенной. Конечно, $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$, однако уже для плоскости лучшее, что мы знаем, это оценка

$$4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7.$$

Для трехмерного пространства мы имеем[29,30]

$$6 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 15,$$

[29] D. Coulson, *A 15-colouring of 3-space omitting distance one*, Discrete mathematics, 256, 2002, 83–90.
[30] O. Nechushtan, *Note on the space chromatic number*, Discrete Mathematics, 256, 2002, 499–507.

наконец для растущей размерности[31,32]

$$(1.239\ldots+o(1))^d \leqslant \chi(\mathbb{R}^d) \leqslant (3+o(1))^d.$$

Поставленная задача может быть переформулирована в терминах теории графов. Прежде всего *дистанционным графом* (или *графом расстояний*) назовем конечный граф $G=(V,E)$, вершины которого суть точки евклидова пространства, а ребра соединяют только пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние единица. Иными словами,

$$V \subset \mathbb{R}^d,\ |V|<\infty,\ E \subseteq \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V\times V:\ \rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=1\}.$$

Напомним, что *хроматическое число* $\chi(G)$ графа $G=(V,E)$ — это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить его вершины, чтобы вершины одного цвета не соединялись ребром, то есть

$$\chi(G)=\min\{k\in\mathbb{N}:\ \exists V_1,\ldots,V_k,\ V=V_1\sqcup\ldots\sqcup V_k,\\ \forall i,\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in V_i,\ (\mathbf{x},\mathbf{y})\notin E\}.$$

П. Эрдеш и Н. де Брёйн[33] фактически доказали, что $\chi(\mathbb{R}^d)=\max\chi(G)$, где максимум берется по всем графам расстояний в $\mathbb{R}^d$. Таким образом, изучение хроматических чисел графов расстояний играет исключительную роль при исследовании проблемы отыскания хроматического числа пространства.

В этой главе мы сначала рассматриваем случай евклидовой плоскости. Тот факт, что $\chi(\mathbb{R}^2)\leqslant 7$, означает, конечно, что для любого графа расстояний $G=(V,E)$ на плоскости $\chi(G)\leqslant 7$. Как следствие, $\alpha(G)\geqslant \frac{|V|}{7}$, коль скоро через $\alpha(G)$ мы обозначили *число независимости* графа G, то есть наибольшее количество его вершин, никакие две из которых не соединены ребром:

$$\alpha(G)=\max\{|V'|:\ V'\subset V,\ \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in V',\ (\mathbf{x},\mathbf{y})\notin E\}.$$

[31] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств*, Успехи матем. наук, 56(1), 2001, 107–146.

[32] D. Larman, C. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19, 1972, 1–24.

[33] N.G. de Bruijn and P. Erdős, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., Ser. A, 54 (5), 1951, 371–373.

Таким образом, в любом “двумерном” графе расстояний на n вершинах найдется индуцированный подграф, имеющий не менее $\frac{n}{7}$ вершин и хроматическое число 1. Это утверждение допускает ряд нетривиальных обобщений и уточнений. В работе [2] нам удалось доказать следующие результаты для графов расстояний на плоскости. Эти доказательства приводятся в параграфе 1.3.

Теоремы 1–4. *Пусть $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[\frac{kn}{\varkappa}\right]$ и $\chi(G') \leqslant k$, где $\varkappa = 4.36\ldots$*

Для доказательства этих теорем использовался новый результат, являющийся усилением известной теоремы Лармана–Роджерса[34].

Теорема 8. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан некоторый граф расстояний $G = (V, E)$, $|V| = n$. Предположим, существуют такие числа $k \in \mathbb{N}$ и $\nu_0 \in (0, 1)$, что для любого индуцированного подграфа $G' = (V', E')$ с $|V'| \geqslant [\nu_0 n]$ выполнено $\chi(G') > k$. Тогда для всякого набора измеримых множеств $S_1, S_2, \ldots, S_k$ в $\mathbb{R}^d$ с условием, что множество $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ имеет верхнюю плотность $\nu \geqslant \nu_0$, верно, что каково бы ни было $a > 0$, найдется S_i, на котором реализуется расстояние a.*

Наиболее интересным является случай $k = 4$. Фактически он означает, что в каждом графе расстояний на плоскости есть индуцированный подграф, который почти целиком совпадает с исходным графом (содержит не менее 91.7% его вершин) и допускает раскраску в 4 цвета. Если бы в этом утверждении величину 91.7 удалось заменить на 100, то, ввиду теоремы Эрдеша–де Брёйна, это бы означало, что $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$.

Зачастую задачи теории графов допускают нетривиальную интерпретацию в терминах *случайного графа*. Напомним, что одной из наиболее популярных моделей случайного графа является модель, предложенная Эрдешем и А. Реньи[35] на рубеже 50х–60х годов XX века. Речь идет о вероятностном пространстве $G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{B}_n, \mathbf{P}_n)$. Здесь

$$\Omega_n = \{G = (V, E) : \ |V| = n\} -$$

[34] D. Larman, C. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19, 1972, 1–24.

[35] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Univ. Press, Second Edition, 2001.

множество всевозможных графов на n вершинах (без петель и кратных ребер), сигма-алгебра $\mathcal{B}_n$ представляет собой множество всех подмножеств Ω_n, а

$$\mathbf{P}_n(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2-|E|}.$$

Иначе говоря, можно считать, что ребра случайного графа появляются независимо друг от друга с вероятностью p. Заметим, что в модели Эрдеша–Реньи величина p может зависеть от n.

Нас интересует, с какой вероятностью случайный граф в модели $G(n,p)$ допускает реализацию на плоскости в качестве графа расстояний. Как это часто бывает в науке о случайных графах, при одних значениях p эта вероятность будет стремиться к нулю, а при других — к единице. Определим некоторую критическую величину p, отвечающую за вышеупомянутый "фазовый переход", следующим образом:

$$p^*(n) =$$
$$= \sup\left\{p \in [0,1] : \mathbf{P}_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^2 \text{ как граф расстояний}) > \frac{1}{2}\right\}.$$

Такая величина называется *пороговой вероятностью*, и она определена корректно ввиду классических результатов о существовании пороговых вероятностей для монотонных свойств случайных графов.

В той же статье [2] мы доказали следующие результаты.

Теорема 5. *При $p = \frac{c}{n}$, где $c < 1$, выполнено*

$$\mathbf{P}_n(G \textit{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \to 1, \ n \to \infty.$$

Теорема 6. *При $p = \frac{c}{n}$, где $c > t_0 = 14.797\ldots$, выполнено*

$$\mathbf{P}_n(G \textit{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \to 0, \ n \to \infty.$$

Теоремы 5 и 6, доказанные в параграфе 1.4, означают, что $\frac{1-\varepsilon}{n} \leqslant p^*(n) \leqslant \frac{t_0+\varepsilon}{n}$ со сколь угодно малым положительным ε и $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Тем самым, мы знаем порядок роста пороговой вероятности.

В параграфе 1.5 мы вводим более общую величину

$$p_d^*(n) =$$
$$= \sup\left\{p \in [0,1] : \mathbf{P}_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^d \text{ как граф расстояний}) > \frac{1}{2}\right\}.$$

Нам удалось показать, что для размерностей 3–8 также верна

Теорема 11. *Положим*

$$c_3 = 55.272\ldots, \quad c_4 = 164.528\ldots, \quad c_5 = 504.285\ldots,$$

$$c_6 = 1365.170\ldots, \quad c_7 = 3624.758\ldots, \quad c_8 = 8675.785\ldots$$

Тогда при каждом d и $p = \frac{c}{n}$, где $c > c_d$, выполнено

$$\mathbf{P}_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^d \text{ как граф расстояний}) \to 0, \ n \to \infty.$$

Иными словами,

$$\frac{1-\varepsilon}{n} \leqslant p_d^*(n) \leqslant \frac{c_d+\varepsilon}{n},$$

причем величина c_d растет как экспонента. В одномерном случае порядок роста другой. В пункте 1.5.2 мы доказали, что имеет место следующая

Теорема 12. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при всех $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$\frac{\sqrt[3]{3}-\varepsilon}{n^{4/3}} \leqslant p_1^*(n) \leqslant \frac{\sqrt[3]{12}+\varepsilon}{n^{4/3}}.$$

На самом деле в одномерном случае мы знаем точное значение пороговой вероятности. А именно, в том же пункте 1.5.2 мы доказали, что

$$\frac{\sqrt[3]{6\ln 2}-\varepsilon}{n^{4/3}} \leqslant p_1^*(n) \leqslant \frac{\sqrt[3]{6\ln 2}+\varepsilon}{n^{4/3}}.$$

Содержание главы 2

Вторая глава (как и третья) посвящена исследованию некоторых вероятностных характеристик, связанных с классической проблемой Борсука. Напомним, что эта проблема состоит в отыскании *числа Борсука* — величины $f(d)$, равной минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$f(d) = \min\{f : \ \forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^d, \ \mathrm{diam}\,\Omega = 1, \ \exists\, \Omega_1, \ldots, \Omega_f : \ \Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_f, \\ \forall\, i \ \ \mathrm{diam}\,\Omega_i < 1\}.$$

Гипотеза Борсука[36], предложенная своим автором в 1933 году, состояла в том, что $f(d) = d+1$. И ровно шестьдесят лет эта гипотеза оставалась ни

[36] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math., 20, 1933

доказанной, ни опровергнутой. Лишь в 1993 году Кан и Калаи[37] нашли контрпримеры к гипотезе в размерностях $d \geqslant 2015$. Сейчас известно, что гипотеза Борсука верна при $d \leqslant 3$ и ложна при $d \geqslant 64$[38].

С проблемой Борсука тесно связано понятие *графа диаметров*. Назовем графом диаметров в $\mathbb{R}^d$ любой граф $G = (V, E)$, вершины которого — точки $\mathbb{R}^d$, а ребра — пары вершин, отстоящих друг от друга на максимальное в множестве вершин расстояние:

$$V \subset \mathbb{R}^d, \quad |V| < \infty, \quad E = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \operatorname{diam} V := \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right\}.$$

Понятно, что минимальное число частей меньшего диаметра, на которые разбивается V (*число Борсука множества* V), — это в точности хроматическое число $\chi(G)$ графа G. Однако было бы некорректно сказать, что $f(d)$ — это максимум таких хроматических чисел. Дело в том, что равенство хроматического числа числу Борсука справедливо лишь в случае конечных множеств; для бесконечных множеств равенства, вообще говоря, нет: например, если взять в качестве V сферу в $\mathbb{R}^d$, то очевидно, что хроматическое число ее графа диаметров (являющегося паросочетанием) равно двум, тогда как ее число Борсука есть $d+1$ ввиду классической теоремы Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана[39].

На плоскости и в пространстве гипотеза Борсука доказана. Более того, существует достаточно много примеров графов диаметров в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ с хроматическими числами 3 и 4 соответственно. Интересно оценить, стало быть, насколько эти примеры часты или редки.

Положим

$$\begin{aligned} u_d(n,p) = \max \Big\{ k : \ \mathbf{P}_{n,p} \big(\exists\ H = (W, F) \subset G : \ \ |W| = k, \\ H = G|_W, \ H - \text{граф диаметров в } \ \mathbb{R}^d, \ \chi(H) = d+1 \big) > \frac{1}{2} \Big\}, \end{aligned}$$

[37] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 29(1), 1993, 60–62

[38] T. Jenrich, *A 64-dimensional two-distance counterexample to Borsuk's conjecture*, 2013, http://arxiv.org/abs/1308.0206v5.

[39] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam theorem*, Universitext, Springer, Berlin, 2003.

$$u'_d(n,p) = \max\Big\{k: \ \mathbf{P}_{n,p}\big(\exists\ H=(W,F)\subset G: \ |W| = k,$$
$$H = G|_W,\ H - \text{связный граф диаметров в } \ \mathbb{R}^d,\ \chi(H) = d+1\big) > \frac{1}{2}\Big\}.$$

Иными словами, мы ищем максимальное количество вершин в индуцированном (связном) подграфе случайного графа, который одновременно реализуется графом диаметров в пространстве и имеет при $d \leqslant 3$ наибольшее возможное в этом случае хроматическое число (при $d \geqslant 64$ такая постановка становится несколько произвольной, но по-прежнему осмысленной). Если для любого k

$$\mathbf{P}_{n,p}\left(\exists\ H=(W,F)\subset G: \ |W| = k,\ H = G|_W,\ H - \text{граф диаметров в } \mathbb{R}^d,\ \chi(H) = d+1\right) \leqslant \frac{1}{2},$$

то полагаем $u_d(n,p) = 0$ и аналогично поступаем с величиной $u'_d(n,p)$.

В этой главе сформулированы и доказаны теоремы, полученные нами в [1, 3], верные для размерностей $d = 2$, $d = 3$. В том случае, когда теоремы верны для обеих величин u_d, и u'_d, мы пишем u^*_d.

Теорема 13. *Пусть $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u^*_2(n,p) = 0$.*

Теорема 14. *Пусть $q := 1 - p = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u^*_2(n,p) = 3$.*

Теорема 15. *Пусть $q = o\left(\frac{1}{n}\right)$, но при этом $qn^{1.5} \to \infty$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u^*_2(n,p) = 4$.*

Теорема 16. *Положим $\tau(n) = pn$ и $\sigma(n) = q\ln n$. Пусть $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ стремятся к бесконечности с ростом n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u^*_2(n,p) \leqslant (2+\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 17. *Положим* $\tau(n) = \frac{p\sqrt[4]{n}}{\ln n}$ *и* $\sigma(n) = q \ln n$. *Пусть* $\tau(n)$ *и* $\sigma(n)$ *стремятся к бесконечности с ростом* n. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *выполнено*

$$u_2^*(n,p) \geqslant \left(2 - \varepsilon + \frac{4 \ln p}{\ln(np)}\right) \log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 18. *Зафиксируем некоторое число* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *и положим* $\tau(n) = pn^{\alpha}$. *Пусть с некоторым* $C > 0$ *начиная с некоторого* n *выполнено* $1 < \tau(n) < C$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *имеет место неравенство*

$$u_2^*(n,p) \geqslant (2 - 2\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p}.$$

Теорема 19. *Пусть найдется такое* $c < 1$, *что* $p < \frac{c}{n}$. *Тогда при всех достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $u_3^*(n,p) = 0$.

Теорема 20. *Пусть* $q = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$. *Тогда при всех достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $u_3^*(n,p) = 4$.

Теорема 21. *Положим* $\tau(n) = pn$ *и* $\sigma(n) = q \ln n$. *Пусть* $\tau(n)$ *и* $\sigma(n)$ *стремятся к бесконечности с ростом* n. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *выполнено*

$$u_3^*(n,p) \leqslant (2 + \varepsilon) \log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 22. *Пусть для всякого* $\alpha > 0$ *выполнено* $pn^{\alpha} \to \infty$ *и* $q \ln n \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *выполнено*

$$u_3^*(n,p) \geqslant (2 - \varepsilon) \log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 23. *Зафиксируем некоторое* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ *и положим* $\tau(n) = pn^{\alpha}$. *Пусть с некоторым* $C > 0$ *начиная с некоторого* n *выполнено* $1 < \tau(n) < C$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *имеет место неравенство*

$$u_3^*(n,p) \geqslant (2 - 4\alpha - \varepsilon) \frac{\ln n}{p}.$$

Видно, что при разумных условиях на асимптотику вероятности ребра теоремы 16 и 17 дают асимптотику величины $u_2^*(n,p)$ и эта асимптотика имеет вид $2\log_{\frac{1}{1-p}}(np)$. Более того, если p стремится к нулю, то в условиях теоремы 17 выполнено $2\log_{\frac{1}{1-p}}(np) \sim 2\frac{\ln n}{p}$. Поэтому теорема 18 просто дает аналог оценки из теоремы 17, который лишь в константу раз хуже, но работает на большем диапазоне значений p. Полностью аналогичная картина имеет место в теоремах 21–23. При этом утверждения теорем 16 и 21 совсем идентичны, в теореме 22 практически та же оценка, что и в теореме 17, но более узкий диапазон допустимых вероятностей ребра, а в теореме 23 и диапазон уже, чем в теореме 18, и оценка послабее.

В параграфе 2.3 мы доказываем теоремы 13–18, в которых идет речь о величине $u_2^*(n,p)$. Величине $u_3^*(n,p)$ мы посвящаем параграф 2.4, здесь доказаны теоремы 19–23.

Содержание главы 3

В этой главе сформулированы и доказаны результаты о величинах $u_d(n,p)$ и $u'_d(n,p)$, введенных в главе 2, верные для произвольной фиксированной размерности. Эти результаты мы получили в работе [5].

Теорема 24. *Пусть для всякого $\alpha > 0$ выполнено $pn^\alpha \to \infty$ и $q\ln n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для любого d и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_d(n,p) \geqslant (2-\varepsilon)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Таким образом, нижняя оценка справедлива в любой размерности, но в чуть разных условиях (для размерности 2 ограничений меньше). Повторим, однако, что если для размерностей 2 и 3 эта оценка выполнялась также для величины со штрихом, то при $d \geqslant 4$ метод немного другой и на величину со штрихом он не распространяется.

Теорема 25. *Зафиксируем некоторое $\alpha \in \left(0, \frac{1}{d}\right)$ и положим $\tau(n) = pn^\alpha$. Пусть с некоторым $C > 0$ начиная с некоторого n выполнено $1 < \tau(n) < C$. Тогда для любого d и любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство*

$$u_d(n,p) \geqslant (2-2\alpha-\varepsilon)\,\frac{\ln n}{p}.$$

Теорема 26. *Пусть p — это либо константа, либо произвольная функция, которая стремится к нулю при $n \to \infty$, но при этом ограничена снизу величиной $\frac{c}{n}$, где $c > 1$. Тогда для любого d и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_d^*(n,p) \leqslant (2+\varepsilon)(d+1)\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 26 дает абсолютно универсальную верхнюю оценку, работающую даже в более широком диапазоне, нежели теорема 16. В этом ее большой плюс. Однако при $d = 2, 3$ значение полученной в ней оценки несколько хуже ранее известных. Следующая теорема устраняет эту проблему ценой сокращения диапазона допустимых вероятностей ребра.

Теорема 27. *Пусть p — это константа. Тогда для любого d и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$u_d^*(n,p) \leqslant (2+\varepsilon)\left[\frac{d}{2}\right]\log_{\frac{1}{1-p}}(np).$$

Теорема 27 отлично согласуется с теоремами 16 и 21. Тем не менее, в ней p — константа. Слегка оторваться от этого ограничения можно. Но сделать это довольно тяжело, т.к. доказательство теоремы 27 опирается на ряд тонких утверждений, многие из которых с трудом обобщаются на случаи непостоянных вероятностей. Отметим также, что при $d \geqslant 4$ нижние и верхние оценки начинают отличаться друг от друга, так что асимптотику найти уже не удается.

Наконец, обобщением и даже усилением теорем 13 и 19 служит следующая

Теорема 28. *Пусть $d \geqslant 3$ и найдется такое $c < 2(d-1)\ln(d-1)$, что $p < \frac{c}{n}$. Тогда при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $u_d^*(n,p) = 0$.*

Теоремы 26, 28 доказаны в параграфе 3.2, теоремы 24, 25 — в параграфе 3.3, наконец, теореме 27 посвящен четвертый параграф. В пятом параграфе рассмотрены сложности обобщения последней теоремы на случай убывающей вероятности ребра p.

В заключении даны возможные направления дальнейших исследований.

Благодарности

Автор признателен профессору Андрею Михайловичу Райгородскому за постановку задач и неоценимую помощь в работе.

Список публикаций по теме диссертации

[1] А.А. Кокоткин, А.М. Райгородский, *О реализации случайных графов графами диаметров*, Труды МФТИ, 4 (2012), N1, 19 – 28.

[2] А.А. Кокоткин, А.М. Райгородский, *О больших подграфах графа расстояний, имеющих маленькое хроматическое число*, Современная математика. Фундаментальные направления, 51 (2013), 64 – 73.

[3] А.А. Кокоткин, А.М. Райгородский, *О реализации подграфов случайного графа графами диаметров на плоскости и в пространстве*, Труды МФТИ, 6 (2014), N2, 44 – 60.

[4] А.А. Кокоткин, *О реализации подграфов случайного графа графами диаметров в евклидовых пространствах*, Доклады РАН, 456 (2014), N6, 1 – 3.

[5] А.А. Кокоткин, *О больших подграфах графа расстояний, имеющих маленькое хроматическое число*, Математические заметки, 96 (2014), N 2, 15 – 18.