Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«МАТИ» – Российский государственный технологический университет
имени К.Э.Циолковского

На правах рукописи

Селин Павел Сергеевич

Метод характеристических функций в задачах оптимизации на некоторых классах сетей

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор Цурков Владимир Иванович

Москва – 2014

Оглавление

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одной из важных задач оптимизации является задача о нахождении максимального потока, впервые сформулированная Харрисом Т. и Россом Ф., и решенная Фордом Л. и Фалкерсоном Д., создавшими первый алгоритм, известный как алгоритм Форда-Фалкерсона [41,48], многократно улучшавшийся в дальнейшем. В работе исследуются классы сетей с фиксированными степенями узлов. Производится произвольное разбиение множества узлов на два подмножества. В теории «Потоки в сетях» это разбиение называется разрезом [1,41,48]. Указанное разбиение задает три подсети, две из которых есть сети, порожденные подмножествами узлов разбиения, а третья – это двудольная сеть. Далее рассматриваются суммы весов (пропускных способностей) дуг всех трех сетей. Учитывая, что исходные сети данного класса имеют заданные степени узлов, для этих сумм строятся достижимые ограничения снизу и сверху. Оценки построены для случаев, когда веса дуг ограничены сверху константой и степенями узлов, а также когда веса дуг ограничены только степенями узлов.

Рассмотрим известную задачу о максимальном потоке [1,41,48]. Сумма весов дуг двудольной сети, указанной выше, есть величина пропускной способности разреза. В этой работе для множества всех сетей с фиксированными степенями узлов при конкретном разбиении найдены нижняя и верхняя достижимые границы величины пропускной способности разреза. Пусть в каждом подмножестве узлов разбиения выбраны по узлу, называемые истоком и стоком (двухполюсная задача). Известна следующая теорема [1,41,48]: величина максимального потока сети из истока в сток равна минимальной пропускной способности разреза. Для класса рассматриваемых сетей вычислены две оценки, такие что: минимальная величина максимального потока равна нижней оценке, а максимальная величина максимального потока не превышает верхней оценки. Для многополюсной задачи, в которой каждый узел одного подмножества узлов – это исток, а каждый узел другого есть сток, указанные две оценки задают следующее: нижняя оценка – это минимальная величина максимального потока, а верхняя – максимальная величина максимального потока.

В практике может возникнуть ситуация, когда на одном из подмножеств узлов должна быть достигнута наименьшая или наибольшая плотность весов дуг, т.е. сумма весов дуг сети, порожденной этим подмножеством узлов должна быть минимальной или максимальной. И для этого случая получены нижняя и верхняя достижимые оценки, зависящие от заданного набора степеней узлов.

Другой задачей оптимизации в моделях транспортного типа, где классические функционалы минимизации заменены на минимаксные, является нахождение минимакса и построение наследственно минимаксной сети [21–29,56]. Для вычисления минимаксных значений построены системы линейных соотношений и показано, что вычисление минимакса осуществляется по простым формулам.

Цели и задачи исследования

В работе рассматриваются классы сетей (взвешенных графов) без петель и с петлями с фиксированными степенями узлов (вершин). Основной результат работы заключен в следующей конструкции:

а) задается неотрицательный параметр, и рассматривается класс указанных сетей с общим множеством узлов, веса дуг (ребер) которых не превосходят этого параметра;

б) множество узлов сетей из класса произвольно разбивается на два подмножества;

в) вводятся три переменные величины, две из которых – это суммы весов дуг, инцидентных только узлам одного из подмножеств разбиения, а третья переменная – это сумма весов дуг, инцидентных узлам двух подмножеств;

г) строятся формулы, выраженные через степени узлов и параметр, задающие оценки снизу и сверху для указанных переменных;

д) показано, что указанные оценки являются точными (достижимыми).

Научная новизна

В работе построен математический аппарат исследования классов сетей (взвешенных графов, графов, мультиграфов [1,2,7,10,34,43]) с фиксированными степенями узлов. Также получены формулы для вычисления минимаксных значений, определяющих необходимые и достаточные условия непустоты рассматриваемых классов сетей, и алгоритм построения наследственно минимаксной сети.

Методы исследования

Настоящая работа основана на идеях, содержащихся в работах о реализуемости степенями вершин наборов целых неотрицательных чисел в граф [13–16,42,43,47] и о реализуемости неотрицательных чисел во взвешенный граф, веса ребер которых не превосходят заданного параметра [17–20].

В работе применяются характеристические функции и уравнения: неотрицательность характеристической функции – это критерий существования сети с заданными степенями узлов и заданным ограничением для весов (пропускных способностей) дуг; характеристические уравнения при специальных разбиениях множества узлов сетей рассматриваемого класса точными равенствами для сумм весов дуг на подмножествах узлов определяют общие свойства сетей классов.

Практическая ценность

Результаты имеют приложение в теории «Потоки в сетях» [41, 45, 48, 50, 51, 53, 54, 57]. Полагая, что веса дуг – это пропускные способности, разбиение множества узлов на два подмножества задает разрез сети и третья переменная – это пропускная способность разреза. Если в одном из подмножеств узлов выбрать узлы-источники, а в другом – узлы-стоки, то ограничения для третьей переменной есть ограничения для величины максимального потока (величина максимального потока равна минимальной величине пропускной способности разреза).

Разбиение узлов сети на два подмножества задает две подсети, порожденные узлами подмножеств, а также двудольную подсеть. Поэтому отдельно исследуется класс двудольных сетей с фиксированными степенями узлов. Следовательно, результаты работы имеют приложения в задачах транспортного типа [3,25,40,44,56], а также в нелинейных, многоиндексных и бесконечномерных обобщениях.

Результаты также имеют применение в сетях связи [4,5,7,8,35,46], сенсорных сетях [49,56].

Апробация

Результаты, представленные в работе докладывались на семинарах в «МАТИ» и на следующих научных конференциях:

XXXI, XXXII и XXXIV «Гагаринские чтения».

2012 Tohoku-Section Joint Convention of Institutes of Electrical and Information Engineers, Japan.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 печатных работах [30, 32, 36–39, 55], две из которых находятся в изданиях из перечня ВАК [30, 39].

Структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 57 наименований. Общий объём работы – 100 страниц.

Во введении представлены определения сетевых и транспортных многогранников, приведены понятия реализуемости и краткий обзор результатов, полученных ранее.

В первой главе введены понятия характеристических функций и уравнений, а также условия c-реализуемости пары векторов в двудольную сеть; получены формулы вычисления минимакса и алгоритм нахождения наследственно минимаксной матрицы смежности усеченного транспортного многогранника. Рассмотрено приведение пары векторов к c-реализуемости в двудольную сеть.

Во второй главе для неотрицательного вектора приводятся понятия характеристических функций и условия c-реализуемости в сеть без петель; получены формулы вычисления минимакса и алгоритм нахождения наследственно минимаксной матрицы смежности усеченного сетевого многогранника. Также рассмотрено приведение вектора к c-реализуемости в сеть без петель.

В третьей главе аналогичные результаты получены для классов сетей с петлями.

Введение

Все n-вершинные сети будем рассматривать с множеством узлов $U(n) = \{u_1, \ldots, u_n\}$, а все n, m-вершинные двудольные сети – с множествами узлов (долями) $U(n) = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и $V(m) = \{v_1, \ldots, v_m\}$. Будем отождествлять n-вершинные сети и n, m-вершинные двудольные сети с неотрицательными матрицами смежности соответственно $X = (x_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и $X = (x_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, где $x_{ij} = x_{ji}$ – вес дуги (петли при $i = j$) – с вершинами u_i и u_j в первом случае и x_{ij} – вес дуги с вершинами u_i и v_j – во втором. Под суммой сетей (матриц) $X' = (x'_{ij})$ и $X'' = (x''_{ij})$ с равными количествами узлов называется сеть (матрица) $X' + X'' = (x'_{ij} + x''_{ij})$.

Для множеств неотрицательных векторов и пар из них применяются следующие обозначения:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{A} = (a_1, \ldots, a_n) : a_i \geqslant 0 \, \forall i\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+ : a_i \geqslant a_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1 \; (\; n \geqslant 2)\};$$

$$\mathbb{R}^{n,m}_{+,=} = \{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) : \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+ , \, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^m_+ , \, \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=} = \{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=} : \boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+ , \, \boldsymbol{B} \in \overline{\mathbb{R}}^m_+ \}.$$

В транспортных задачах [3,40] условие равенства сумм координат пары векторов из $\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ называется замкнутостью или условием баланса.

Многие утверждения и конструкции (не ограничивая общности) рассматриваются с векторами из $\overline{\mathbb{R}}^n_+$: через $\tilde{\boldsymbol{A}}$ обозначим вектор, построенный из вектора $\boldsymbol{A}$ упорядочиванием его координат по невозрастанию.

Обозначим множества сетей с петлями и без петель, степени узлов которых равны координатам вектора $\boldsymbol{A}$ из $\mathbb{R}^n_+$:

$$\Gamma_L(\boldsymbol{A}) = \{X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) : x_{ij} = x_{ji} \geqslant 0 \, \forall i, j; \deg u_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \, \forall i\} \text{ –}$$

класс сетей с петлями,

$\Gamma(\boldsymbol{A}) = \{X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) : X(\boldsymbol{A}) \in \Gamma_L(\boldsymbol{A}); x_{ii} = 0 \; \forall i\}$ – класс сетей без петель;

$\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) = \{X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) : X(\boldsymbol{A}) \in \Gamma_L(\boldsymbol{A}); x_{ij} \leqslant c \; \forall i, j\}$,

$\Gamma(\boldsymbol{A}; c) = \{X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) : X(\boldsymbol{A}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}); x_{ij} \leqslant c \; \forall i, j\}$ – классы сетей, веса дуг (и петель) которых не превосходят заданного неотрицательного параметра c.

Множества сетей-матриц (без петель и с петлями) $\Gamma(\boldsymbol{A})$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A})$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$ называются соответственно сетевыми и усеченными сетевыми многогранниками [28]. Очевидно, что $\Gamma(\boldsymbol{A}) \subset \Gamma_L(\boldsymbol{A})$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \subset \Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$.

Множества двудольных сетей, степени узлов которых равны координатам векторов из пары $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$, обозначим

$$\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \{X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (x_{ij}) : x_{ij} \geqslant 0 \; \forall i, j;$$

$$\deg u_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \; \forall i; \deg v_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \; \forall j\},$$

$$\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \{X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (x_{ij}) : X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}); x_{ij} \leqslant c\}.$$

В транспортных задачах множества $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$ называются соответственно классическим и усеченным транспортными многогранниками [6,7].

Сети-матрицы из многогранников $\Gamma(\boldsymbol{A})$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A})$, $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$, $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$ называются реализациями и c-реализациями (вектора $\boldsymbol{A}$ и пары векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$), а в случае, когда указанные многогранники не являются пустыми множествами, соответствующие им векторы и пара векторов называются реализуемыми и c-реализуемыми.

Для произвольного вектора $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}^n_+ = \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+ : a_i \in \mathbb{Z} \; \forall i\}$ возникает вопрос: является ли он реализуемым в сеть (с петлями или без петель). Сети с весами дуг, равными нулю или единицы называются графами. В случае графа без петель ответ был получен Хакими С. Л. [42].

Утверждение. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{Z}}^n_+ = \{\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+ : a_i \in \mathbb{Z} \; \forall i\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 2q$,

$q \in \mathbb{Z}$. Вектор $\boldsymbol{A}$ реализуем в граф без петель тогда и только тогда, когда реализуемым является вектор $\boldsymbol{A}' = (a_2 - 1, \ldots, a_{a_1+1} - 1, a_{a_1+2}, \ldots, a_n)$.

Данное утверждение содержит в себе алгоритм построения графа с заданным вектором степеней узлов.

Позже работ Хакими, аналитический критерий реализуемости был получен Эрдешем П. и Галлаи Т. [47].

Утверждение. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{Z}}_{+}^{n}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 2q$, $q \in \mathbb{Z}$. Вектор $\boldsymbol{A}$ реализуем в граф без петель тогда и только тогда, когда

$$k(k-1) - \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, a_i\} \geqslant 0 \ \forall k: \ 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Однако, приведенные выше результаты неприменимы в случае взвешенных сетей, сетей с петлями, двудольных сетей, а также в случае ограничения пропускных способностей дуг некоторой константой. Эти случаи были исследованы Мироновым А. А. [14-20] и будут рассмотрены в главах I – III.

Основная конструкция работы, приведенная выше, основана на следующих построениях.

1) Приведены характеристические функции, зависящие от координат векторов и параметра. Если координаты рассматриваемых векторов упорядочены по невозрастанию, то неотрицательность этих функций есть критерий того, что $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$, $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$.

2) Применением характеристических функций получены аналитические формулы вычисления минимаксных значений

$$\min\{c : \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \neq \varnothing\}, \ \min\{c : \Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing\}, \ \min\{c : \Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing\},$$

зависящие от координат вектора $\boldsymbol{A}$ и параметра c. Минимаксные значения определяют необходимые и достаточные условия, при которых усеченные многогранники не являются пустыми множествами.

3) Построены специальные разбиения множества узлов сетей усеченных многогранников $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$, $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, и приведены характеристические уравнения. Эти уравнения точными равенствами связывают значения характеристических функций и сумм весов дуг (и петель) подсетей, порожденных указанным разбиением, для всех сетей усеченных многогранников.

4) В случаях $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$, $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) = \varnothing$ с помощью характеристических функций найдены наименьшие величины, на которые необходимо уменьшить значения сумм координат векторов, чтобы получить c-реализуемую пару векторов и c-реализуемые векторы. С применением характеристических уравнений построены соответствующие c-реализуемые пара векторов и векторы.

Отметим, что полученные результаты имеют общий характер, так как при достаточно больших значениях параметра c усеченные многогранники совпадают с многогранниками $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, $\Gamma(\boldsymbol{A})$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A})$.

I. Двудольные сети с фиксированными степенями узлов

1.1. Характеристические функции и условия c-реализуемости

Сформулируем условия, при которых $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \neq \varnothing$. Для этого введем понятие характеристической функции [22–25,27,29,56].

Определение 1. Пусть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ и $c \geqslant 0$. Характеристической функцией (ХФ) называется

$$\delta_k(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{b_j \geqslant ck} (b_j - ck) - \sum_{i=1}^{k} a_i, \;\; 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.1}$$

Неотрицательность (1.1) есть необходимое условие c-реализуемости пары векторов в двудольную сеть (без петель).

Теорема 1. Пусть $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \neq \varnothing$, где $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$.
Тогда $\delta_k(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \geqslant 0 \; \forall k, 1 \leqslant k \leqslant n$.

В случае $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ ХФ (1.1) можно упростить: если обозначить $l_k(\boldsymbol{B}; c) = \begin{cases} \max\{j : b_j \geqslant ck\}, b_1 \geqslant ck, \\ 0, b_1 < ck, \end{cases}$ то

$$\delta_k(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = ckl_k(\boldsymbol{B}; c) + \sum_{j > l_k(\boldsymbol{B}; c)} b_j - \sum_{i=1}^{k} a_i, \;\; 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.1$'$}$$

В следующем утверждении содержится критерий c-реализуемости пары векторов в двудольную сеть при условии упорядоченности координат векторов по невозрастанию [21–25,27,29,56].

Теорема 2. Если $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$, то
$\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \neq \varnothing \Longleftrightarrow \delta_k(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \geqslant 0 \; \forall k, 1 \leqslant k \leqslant n$.

Пример 1. Применим ХФ (1.1) к паре векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{9,12}_{+,=}$, где $\boldsymbol{A} = (30, 30, 30, 26, 26, 14, 14, 4, 4)$, $\boldsymbol{B} = (21, 21, 21, 21, 19, 19, 17, 17, 8, 8, 3, 3)$ и $c = 2$. Получим $\delta_1(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 2) = -6$, $\delta_2(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 2) = -14$, $\delta_3(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 2) = -24$, $\delta_4(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 2) = -30$, $\delta_5(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 2) = -40$, $\delta_6(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 2) = -38$,

$\delta_7(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2)=-36$, $\delta_8(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2)=-24$, $\delta_9(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2)=-14$ и $\min\limits_k \delta_k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)=$ $=\delta_5(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)=-40$ (это значение потребуется в примере 6). Из теоремы 2 следует, что $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2)=\varnothing$.

Пара векторов $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ из $\overline{\mathbb{R}}^{9,12}_{+,=}$ примера 1 будет исследоваться во всех примерах первого раздела.

Пример 2. К паре векторов $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ примера 1 при $c=4$ применим ХФ (1.1). Тогда $\delta_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)=16$, $\delta_2(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)=26$, $\delta_3(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)=28$, $\delta_4(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)=$ $=34$, $\delta_5(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)=32$, $\delta_6(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)=22$, $\delta_7(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)=8$, $\delta_8(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)=4$, $\delta_9(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)=0$. Из теоремы 2 следует, что $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)\neq\varnothing$.

1.2. Минимакс и наследственно минимаксная матрица смежности для двудольной сети

Для пары векторов $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ найдем наименьшее значение $c=c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, при котором $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)\neq\varnothing$.

Определение 2. Пусть $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$. Величина

$$c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\min\{c:\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)\neq\varnothing\}$$

называется минимаксом для $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ или $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

Это определение связано с очевидным тождеством

$$\min\{c:\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)\neq\varnothing\}=\min_{X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}\max_{i,j}\{x_{ij}:X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(x_{ij})\}.$$

Для минимакса имеет место [21–25,27,29,56].

Теорема 3. Пусть $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ и $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)\neq\varnothing$. Величина c является минимаксом ($c=c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$) $\Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, 1\leqslant k\leqslant n$, что $\delta_k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)=0$ и $b_1\geqslant ck$.

Построим формулу вычисления минимакса $c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, где $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$. Обозначим $T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\{(i,j):a_i>a_{i+1}$ или $i=n$, $b_j>b_{j+1}$ или $j=m\}$. Для

$\forall(t,r) \in T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ построим систему линейных соотношений

$$\begin{cases} c_{tr} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>r} b_j}{tr}, \\ c_{tr} t \leqslant b_r, \\ c_{tr} t > b_{r+1}, \;\; r < m. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если система (1.2) при некоторых (t,r) не имеет решения, то положим $c_{tr} = 0$. Имеет место [25–27,29,31,56]

Лемма 1. Для $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ имеет место

$$c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \max_{(t,r)\in T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})} c_{tr}. \tag{1.3}$$

Отметим, что пара индексов (k,p), при которой $c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = c_{kp}$, определяется неоднозначно.

Определение 3. Сети (матрицы) из $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}))$ называются минимаксными.

Следующая теорема характеризует минимаксные матрицы (см. ХФ $(1.1')$) [25–27,29,56].

Теорема 4. Если $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$, $\delta_k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})) = 0$ и $b_1 \geqslant c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, то для $X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}))$ справедливо

$$x_{ij} = \begin{cases} c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}), \;\; 1 \leqslant i \leqslant k, \; 1 \leqslant j \leqslant l_k(\boldsymbol{B};c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})), \\ 0, \;\; i > k, \; j > l_k(\boldsymbol{B};c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})). \end{cases}$$

Вычисление минимакса $c(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ можно упростить: при его вычислении достаточно использовать первое соотношение из (1.2).

Лемма 2. Пусть $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$. Для $\forall t \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant t \leqslant n$, положим

$$c_{tq} = \max_{\substack{1\leqslant r\leqslant m \\ (t,r)\in T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>r} b_j}{tr} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j}{tq}.$$

Тогда а) $c_{tq}t \leqslant b_q$ и б) $c_{tq}t \geqslant b_{q+1}$ (если $q < m$), причем $c_{tq}t = b_{q+1} \iff$ $\iff c_{tq} = c_{tq''}$, где $q'' = \min\{j : (t,j) \in T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}), j > q\}$.

Доказательство. а) Предположим $c_{tq}t > b_q$. Для q возможны два случая: 1) $b_1 > b_q$ и 2) $b_1 = b_q$.

1) Здесь существует $q' = \max\{j : (t,j) \in T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}), j < q\}$. Тогда для разности $c_{tq} - c_{tq'}$ получим

$$c_{tq} - c_{tq'} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j}{tq} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q'} b_j}{tq'} =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{(q'-q)\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - q'\sum\limits_{j>q} b_j + q\sum\limits_{j>q'} b_j}{qq'} =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{(q'-q)\sum\limits_{i=1}^{t} a_i + (q-q')\sum\limits_{j>q} b_j + q\sum\limits_{j=q'+1}^{q} b_j}{qq'} =$$

$$= \frac{1}{q'} \cdot \frac{-(q-q')\left(\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j\right) + q\sum\limits_{j=q'+1}^{q} b_j}{tq} =$$

$$= \frac{1}{q'} \cdot \left(\frac{\sum\limits_{j=q'+1}^{q} b_j}{t} - \frac{(q-q')c_{tq}t}{t} \right) = \frac{1}{q't}\sum_{j=q'+1}^{q} (b_j - c_{tq}t) =$$

$$= \frac{1}{q't}(q-q')(b_q - c_{tq}t) < 0,$$

что противоречит условию леммы.

2) Так как по предположению $b_q < c_{tq}t$, то здесь $\dfrac{b_q}{t} < \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j}{tq}$ и $b_q q < < \sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j$. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j=1}^{m} b_j > 0$, что противоречит условию замкнутости.

б) Пусть $q < m$. Для разности $c_{tq} - c_{tq''}$ имеем

$$c_{tq} - c_{tq''} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j}{tq} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q''} b_j}{tq''} =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{(q''-q)\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - q''\sum\limits_{j>q} b_j + q\sum\limits_{j>q''} b_j}{qq''} =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{(q''-q)\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - (q''-q)\sum\limits_{j>q''} b_j - q''\sum\limits_{j=q+1}^{q''} b_j}{qq''} =$$

$$= \frac{1}{q} \cdot \frac{(q''-q)\left(\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q''} b_j\right) - q''\sum\limits_{j=q+1}^{q''} b_j}{tq''} =$$

$$= \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{c_{tq''}t(q''-q)}{t} - \frac{\sum\limits_{j=q+1}^{q''} b_j}{t} \right) = \frac{1}{qt}\sum_{j=q+1}^{q''}(c_{tq''}t - b_j) =$$

$$= \frac{1}{qt}(q''-q)(c_{tq''}t - b_{q+1}).$$

Предположим, что $c_{tq}t < b_{q+1}$. Тогда $c_{tq} - c_{tq''} < \dfrac{q''-q}{q}(c_{tq''} - c_{tq})$ и $(c_{tq} - - c_{tq''})\dfrac{q''}{q} < 0$, что противоречит условию леммы.

Пусть $c_{tq}t = b_{q+1}$. Тогда $(c_{tq} - c_{tq''})\dfrac{q''}{q} = 0$, что справедливо тогда и только тогда, когда $c_{tq} = c_{tq''}$.

Из лемм 1 и 2 следует [25–27,31,56]

Теорема 5. Пусть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$. Для минимакса $c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ имеет место

$$c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \max_{(t,r)\in T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})} \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>r} b_j}{tr}. \tag{1.4}$$

Пример 3. Найдем минимакс $c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ для пары векторов примера 1. Здесь $T(A,B) = \{(3,4), (3,6), (3,8), (3,10), (3,12), (5,4), (5,6), (5,8), (5,10), (5,12), (7,4), (7,6), (7,8), (7,10), (7,12), (9,4), (9,6), (9,8), (9,10), (9,12)\}$. Применим теорему 5.

Вычисляя величины c_{tr}, где $(t,r) \in T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, получим $c_{34} = -\frac{1}{3}$, $c_{36} = 1\frac{17}{18}$, $c_{38} = 2\frac{5}{6}$, $c_{3\,10} = 2\frac{4}{5}$, $c_{3\,12} = 2\frac{1}{2}$, $c_{54} = 2\frac{2}{5}$, $c_{56} = 2\frac{13}{15}$, $c_{58} = 3$, $c_{5\,10} = 2\frac{18}{25}$, $c_{5\,12} = 2\frac{11}{30}$, $c_{74} = 2\frac{5}{7}$, $c_{76} = 2\frac{5}{7}$, $c_{78} = 2\frac{9}{14}$, $c_{7\,10} = 2\frac{12}{35}$, $c_{7\,12} = 2\frac{1}{42}$, $c_{94} = 2\frac{1}{3}$, $c_{96} = 2\frac{7}{27}$, $c_{98} = 2\frac{1}{6}$, $c_{9\,10} = 1\frac{41}{45}$, $c_{9\,12} = 1\frac{35}{54}$.

Из теоремы 5 следует, что $c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 3$. Для каждой минимаксной матрицы $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 3)$ имеет место (теорема 4)

$$x_{ij} = \begin{cases} 3, & 1 \leqslant i \leqslant 5,\ 1 \leqslant j \leqslant 8, \\ 0, & 6 \leqslant i \leqslant 9,\ 9 \leqslant j \leqslant 12. \end{cases} \tag{1.5}$$

Определение 4. Сеть (матрица) $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (x_{ij})$ называется равномерной, если справедливы два условия [25–27,31,56]:

а) $a_i = a_p, b_j = b_q \Longrightarrow x_{ij} = x_{pq}$

б) $a_i \geqslant a_p, b_j \geqslant b_q \Longrightarrow x_{ij} \geqslant x_{pq}$.

Каждая неотрицательная матрица $X = (x_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, задает пару векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$, где

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij},\ b_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij},\ \ X = X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$

Будем говорить, что матрица X задает пару векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Определение 5. Для $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ двудольная сеть–матрица (минимаксная) $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ называется наследственно минимаксной, если каждая ее подматрица есть минимаксная матрица пары векторов, которую задает эта подматрица [25–27,31,55,56].

Основные свойства наследственно минимаксных матриц заключены в следующих двух (эквивалентных) утверждениях [25–27,31,56].

Теорема 6. Для каждой пары векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ из $\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ существует единственная наследственно минимаксная матрица $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, причем она является равномерной.

Теорема $6'$. Каждый транспортный многогранник $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ содержит одну и только одну наследственно минимаксную матрицу, которая есть равномерная.

Алгоритм построения наследственно минимаксной матрицы заключен в следующей лемме [25–27,31,55,56].

Лемма 3. Пусть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ и $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}))$, причем $c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = c_{kq}$. Тогда для пар векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}')$ и $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'')$, где
$a'_i = a_i - c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \cdot q, 1 \leqslant i \leqslant k, \quad b'_j = b_{q+j}, 1 \leqslant j \leqslant m - q,$
$a''_i = a_{k+i}, 1 \leqslant i \leqslant n - k, \quad b''_j = b_j - c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \cdot k, 1 \leqslant j \leqslant q,$
имеет место $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') \in \overline{\mathbb{R}}^{k,m-q}_{+,=}$, $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'') \in \overline{\mathbb{R}}^{n-k,q}_{+,=}$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'; c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})) \neq \varnothing$, $\Gamma(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}''; c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})) \neq \varnothing$.

Замечание 1 к лемме 1. Из теоремы 4 следует:
а) если $k = n$, то пара векторов $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'')$ не существует.
б) если $q = m$, то пара векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}')$ не существует.
в) при $k = n$ и $q = m$ пары векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}')$ и $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'')$ не существуют.

Алгоритм 1. Построение наследственно минимаксной двудольной сети–матрицы [25–27,31,55,56].

Пусть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ – произвольная пара векторов из $\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$. Наследственно минимаксная матрица $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (x_{ij})$ строится следующим образом.

Шаг 1. Вычисляется минимакс $c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \max\limits_{(t,r) \in T(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})} c_{tr} = c_{kq}$ (теорема 5) и строятся подматрицы искомой матрицы $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, первая из которых состоит из минимаксных элементов, а вторая – нулевая (теорема 4).

Шаг 2. Вычисляются пары векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}')$, $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'')$ (см. лемму 3), применяется теорема 5 для вычисления минимаксов $c(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}')$, $c(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'')$ и опять применяется теорема 4 для вычислений части элементов подматриц $X_1(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') \in$ $\in \Gamma(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'; c(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'))$ и $X_2(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'') \in \Gamma(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}''; c(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}''))$ искомой матрицы $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

И т. д.

Очевидно, что процесс, содержащийся в алгоритме конечен.

Пример 4. Построим наследственно минимаксную матрицу $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) =$ $= (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 3)$, где $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ – пара векторов примеров 2 и 3. Часть элементов искомой матрицы определена в (1.5):

$$X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} x_{ij} = 3 & \vdots & X_1 = (x_{ij}) \\ 1 \leqslant i \leqslant 5 & \vdots & 1 \leqslant i \leqslant 5 \\ 1 \leqslant j \leqslant 8 & \vdots & 9 \leqslant j \leqslant 12 \\ \dotfill & \cdots & \dotfill \\ X_2 = (x_{ij}) & \vdots & x_{ij} = 0 \\ 6 \leqslant i \leqslant 9 & \vdots & 6 \leqslant i \leqslant 9 \\ 1 \leqslant j \leqslant 8 & \vdots & 9 \leqslant j \leqslant 12 \end{pmatrix}.$$

Теперь строим наследственно минимаксные матрицы

$$X_1 = X_1(\boldsymbol{A}_1' = (6, 6, 6, 2, 2), \boldsymbol{B}_1' = (8, 8, 3, 3))$$

$$X_2 = X_2(\boldsymbol{A}_1'' = (14, 14, 4, 4), \boldsymbol{B}_1'' = (6, 6, 6, 6, 4, 4, 2, 2)),$$

координаты векторов вычислены по правилам леммы 3. Применяя теорему 5, получим $c(\boldsymbol{A}_1', \boldsymbol{B}_1') = 2 = c_{32}$ и $c(A_1'', B_1'') = 2 = c_{26}$. А из теоремы 4 для подматриц X_1 и

X_2 наследственно минимаксной матрицы получим

$$X_1(\boldsymbol{A}_1', \boldsymbol{B}_1') = \left(\begin{array}{ccc} x_{ij} = 2 & \vdots & X_3 = (x_{ij}) \\ 1 \leqslant i \leqslant 3 & \vdots & 1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 9 \leqslant j \leqslant 10 & \vdots & 11 \leqslant j \leqslant 12 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_4 = (x_{ij}) & \vdots & x_{ij} = 0 \\ 4 \leqslant i \leqslant 5 & \vdots & 4 \leqslant i \leqslant 5 \\ 9 \leqslant j \leqslant 10 & \vdots & 11 \leqslant j \leqslant 12 \end{array}\right),$$

$$X_2(\boldsymbol{A}_1'', \boldsymbol{B}_1'') = \left(\begin{array}{ccc} x_{ij} = 2 & \vdots & X_5 = (x_{ij}) \\ 6 \leqslant i \leqslant 7 & \vdots & 6 \leqslant i \leqslant 7 \\ 1 \leqslant j \leqslant 6 & \vdots & 7 \leqslant j \leqslant 8 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_6 = (x_{ij}) & \vdots & x_{ij} = 0 \\ 8 \leqslant i \leqslant 9 & \vdots & 8 \leqslant i \leqslant 9 \\ 1 \leqslant j \leqslant 6 & \vdots & 7 \leqslant j \leqslant 8 \end{array}\right).$$

Строим наследственно минимаксные матрицы
$X_3 = X_3(\boldsymbol{A}_2' = (2,2,2), \boldsymbol{B}_2' = (3,3))$,
$X_4 = X_4(\boldsymbol{A}_2'' = (2,2), \boldsymbol{B}_2'' = (2,2))$,
$X_5 = X_5(\boldsymbol{A}_2''' = (2,2), \boldsymbol{B}_2''' = (2,2))$,
$X_6 = X_6(\boldsymbol{A}_2^{IV} = (4,4), \boldsymbol{B}_2^{IV} = (2,2,2,2,0,0))$.
Здесь можно применить замечание к лемме 1 и понятие равномерной матрицы. Получим $c(\boldsymbol{A}_2', \boldsymbol{B}_2') = 1$, $c(\boldsymbol{A}_2'', \boldsymbol{B}_2'') = 1$, $c(\boldsymbol{A}_2''', \boldsymbol{B}_2''') = 1$, $c(\boldsymbol{A}_2^{IV}, \boldsymbol{B}_2^{IV}) = 1$ и все элементы подматриц X_3, X_4, X_5 матрицы $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ равны единице, а подматрица X_6 имеет вид

$$X_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этим построена наследственно минимаксная двудольная сеть-матрица (для всех матриц, построенных в примерах настоящей работы, сверху и слева будем указывать координаты векторов, задающих эти матрицы)

$$X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \begin{array}{c} \\ 30\\30\\30\\26\\26\\14\\14\\4\\4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 21 & 21 & 21 & 21 & 19 & 19 & 17 & 17 & 8 & 8 & 3 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

и завершен пример 4: $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};3) \subset \Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};4)$.

1.3. Характеристические уравнения

Пусть $X = (x_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ – произвольная двудольная сеть (матрица) и $U \subseteq U(n)$, $V \subseteq V(m)$. Введем обозначение для сумм весов дуг: $\delta(U,V) = \sum\limits_{\substack{u_i \in U \\ v_j \in V}} x_{ij}$ и, если $x_{ij} \leqslant c\ \forall i,j$, то $\overline{\delta}(U,V) = c|U||V| - \delta(U,V)$.

Определение 6. Пусть $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$, где $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) \neq \varnothing$. Для $\forall k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, k-разбиением $U(n)$ и $V(m)$ относительно пары векторов $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ и ограничения c (относительно множества $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$) называется представление $U(n) = U_1^k \cup U_2^k$ и $V(m) = V_1^k \cup V_2^k$, где $U_1^k = \{u_i : i \leqslant k\}$, $U_2^k = \{u_i : i > k\}$, $V_1^k = \{v_j : b_j \geqslant ck\}$, $V_2^k = \{v_j : b_j < ck\}$.

Приведем соотношение, связывающее суммы весов дуг на подмножествах k-разбиений множеств $U(n)$ и $V(m)$ со значениями ХФ (1.1) [25–27,29,31,56].

Теорема 7. Пусть $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ и $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) \neq \varnothing$. Тогда для $\forall X(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$ имеет место

$$\overline{\delta}(U_1^k,V_1^k) + \delta(U_2^k,V_2^k) = \delta_k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c),\ 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.6}$$

К теореме 7 отметим, что при $\boldsymbol{B} \in \overline{\mathbb{R}}^m_+$ имеет место $V_1^k = \{v_j : 1 \leqslant j \leqslant l_k\}$ и $V_2^k = \{v_j : l_k + 1 \leqslant j \leqslant m\}$, где $l_k = l_k(\boldsymbol{B}; c)$ (см. $(1.1')$).

Определение 7. Соотношение (1.6) называется характеристическим уравнением для множества $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$ [25–27,29,31,56].

Характеристические уравнения (1.6) задают общие свойства всех сетей из $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$.

Пример 5. Определим некоторые общие свойства сетей из $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 3)$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 4)$, где $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ – пара векторов примеров 2 – 4.

а) Рассмотрим $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 3)$ при 5- и 6-разбиениях. Здесь $\delta_5(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 3) = 0$, $\delta_6(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 3) = 8$,
$U_1^5 = \{u_1, \ldots, u_5\}, U_2^5 = \{u_6, \ldots, u_9\}, V_1^5 = \{v_1, \ldots, v_8\}, V_2^5 = \{v_9, \ldots, v_{12}\}$;
$U_1^6 = \{u_1, \ldots, u_6\}, U_2^6 = \{u_7, \ldots, u_9\}, V_1^6 = \{v_1, \ldots, v_6\}, V_2^6 = \{v_7, \ldots, v_{12}\}$.
Применяя (1.6), для $\forall X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 3)$ получим

$$\overline{\delta}(U_1^5, V_1^5) + \delta(U_2^5, V_2^5) = 0,$$

$$\overline{\delta}(U_1^6, V_1^6) + \delta(U_2^6, V_2^6) = 8.$$

Из первого равенства следует $\overline{\delta}(U_1^5, V_1^5) = \delta(U_2^5, V_2^5) = 0$, что для каждой сети $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 3)$ означает: дуги, порожденные подсетью с узлами U_1^5 и V_1^5, насыщены полностью ($x_{ij} = 3, u_i \in U_1^5, v_j \in V_1^5$), а подсеть, порожденная узлами U_2^5 и V_2^5, есть вполне несвязная ($x_{ij} = 0, u_i \in U_2^5, v_j \in V_2^5$). Из второго равенства следует $\delta(U_2^6, V_2^6) \leqslant 8$ и $\overline{\delta}(U_1^6, V_1^6) = 3 \cdot 6 \cdot 6 - \delta(U_1^6, V_1^6) \leqslant 8$, то есть $\delta(U_1^6, V_1^6) \geqslant 100$, что для каждой сети $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 3)$ означает: сумма весов дуг подсети, порожденной узлами U_1^6 и V_1^6, не меньше 100, а сумма весов дуг подсети, порожденной узлами U_2^6 и V_2^6, не превосходит 8.

б) Рассмотрим $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 4)$ при 5-разбиении. Здесь $\delta_5(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 4) = 32$,
$U_1^5 = \{u_1, \ldots, u_5\}, U_2^5 = \{u_6, \ldots, u_9\}, V_1^5 = \{v_1, \ldots, v_4\}, V_2^5 = \{v_5, \ldots, u_{12}\}$.
Из теоремы 7 следует

$$\overline{\delta}(U_1^5, V_1^5) + \delta(U_2^5, V_2^5) = 32.$$

Поэтому $\delta(U_2^5, V_2^5) \leqslant 32$ и $\overline{\delta}(U_1^5, V_1^5) = 4 \cdot 5 \cdot 4 - \delta(U_1^5, V_1^5) \leqslant 32$, то есть $\delta(U_1^5, V_1^5) \geqslant 48$. Поэтому числа 32 и 48 задают ограничения для сумм весов дуг подсетей, порожденных узлами U_2^5, V_2^5 и U_1^5, V_1^5 каждой сети (матрицы) из $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; 4)$. Отметим, что уравнение (1.6) задает ограничения для сумм весов дуг и других порожденных подсетей. Например, в п. 6 примера 5 так как $\sum\limits_{i=1}^{5} a_i = 142$ и $\delta(U_1^5, V_1^5) \geqslant 48$, то $\delta(U_1^5, V_2^5) \leqslant 142 - 48 = 94$.

Замечание 2 к теореме 7. Характеристическое уравнение (1.6) задает "жесткость" для сумм весов дуг подсетей, порожденных k-разбиениями: чем меньше значение ХФ (1.1), тем меньше отличаются веса дуг x_{ij} от 0 при $u_i \in U_2^k$, $v_j \in V_2^k$ и от c при $u_i \in U_1^k$, $v_j \in V_1^k$.

1.4. Приведение пары векторов к c-реализуемости в двудольную сеть

Определение 8. а) Пусть $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{R}_{+}^{n}$. Вектор $\boldsymbol{D}$ называется вписанным в $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{D} \leqslant \boldsymbol{A}$), если $d_i \leqslant a_i \ \forall i \ 1 \leqslant i \leqslant n$.

б) Пусть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}), (\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}) \in \mathbb{R}_{+,=}^{n,m}$. Пара векторов $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E})$ называется вписанной в $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ ($(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}) \leqslant (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$), если $\boldsymbol{D} \leqslant \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{E} \leqslant \boldsymbol{B}$.

Обозначим $\mathfrak{M}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \{(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}) : (\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}) \leqslant (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}), \Gamma(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}; c) \neq \varnothing\}$ множество c-реализуемых пар векторов, вписанных в $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Для произвольной пары векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ будет найдена c-реализуемая пара векторов из $\mathfrak{M}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$ с наибольшей суммой координат каждого вектора.

Применяя ХФ (1.1) для $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}_{+,=}^{n,m}$, введем обозначение

$$\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \begin{cases} |\min\limits_{k} \delta_k(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)|, \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \varnothing, \\ 0, \Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \neq \varnothing. \end{cases} \tag{1.7}$$

В случае $\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) > 0$ через $k^* = k^*(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$ обозначим такой индекс, для которого $|\delta_{k^*}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)| = \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$. Отметим, что значение k^* определено неоднозначно. Например, для пары векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{A} = (5, 5, 4, 4)$, легко проверить, что $\delta_2(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}; 1) = \delta_4(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}; 1) = -2$ и $\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}; 1) = 2$. Поэтому здесь $k^* = 2$ или $k^* = 4$.

Величина (1.7) – это минимальное значение, на которое необходимо уменьшить суммы координат векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, чтобы получить c-реализуемую пару. Основные результаты раздела сформулированы в теоремах 8 и 9 [30, 33, 36 – 39].

Теорема 8. Пусть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$. Тогда

$$\max_{(\boldsymbol{D},\boldsymbol{E})\in\mathfrak{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)} \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}; c).$$

Напомним, что вектор $\tilde{\boldsymbol{A}}$ построен из координат вектора $\boldsymbol{A}$ упорядочиванием их по невозрастанию. Для $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$ и $\alpha \geqslant 0$ положим $\boldsymbol{A}^\alpha = (a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha)$ – такой вектор, что

$$a_i^\alpha = \begin{cases} \alpha, a_i \geqslant \alpha, \\ a_i, a_i < \alpha. \end{cases} \tag{1.8}$$

Пусть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ и $c \geqslant 0$. Очевидно, что существуют такие числа $\alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$, $\alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$, при которых

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}; c) = \sum_{i=1}^{n} \min(\alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c), a_i),$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_j - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}; c) = \sum_{j=1}^{m} \min(\alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c), b_j). \tag{1.9}$$

Правило (1.8) и числа $\alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$, $\alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$ задают пару векторов $(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)}) =$
$= ((a_1^{(\alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c))}, \ldots, a_n^{(\alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c))}), (b_1^{(\alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c))}, \ldots, b_m^{(\alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c))}))$. Отметим, что при $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \neq \varnothing$ справедливо $(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Теорема 9. Пусть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$.
Тогда $\Gamma(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)}; c) \neq \varnothing$.

Доказательство теоремы 8 следует из лемм 4–6, в которых, не ограничивая общности, рассматриваются векторы с упорядоченными по невозрастанию координатами [30, 33, 36 – 39].

Для пары векторов $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ и $c > 0$, где $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) = \varnothing$, построим вспомогательную пару векторов $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ такую, что

$$f_i = \begin{cases} a_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \\ a, n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1; \end{cases}$$

$$h_i = \begin{cases} b_j, 1 \leqslant j \leqslant m, \\ b, m+1 \leqslant j \leqslant m+m_1, \end{cases} \tag{1.10}$$

где $an_1 = bm_1 = \delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$ и $a < \min(a_n, c, 1), b < \min(b_m, c, 1)$. Пара векторов $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ позволит построить пару векторов $(\boldsymbol{D},\boldsymbol{E})$ с наибольшими суммами координат, удовлетворяющую теореме 8.

Лемма 4. Пусть $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ и $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) = \varnothing$, где $c > 0$. Тогда для пары векторов $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$, построенной по правилу (1.10), имеет место $\Gamma(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H};c) \neq$ $\neq \varnothing$, причем $\delta_{k^*}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H};c) = 0$, где $k^* = k^*(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$.

Доказательство. Применим ХФ $(1.1')$ и (1.1) для пары $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ при а) $1 \leqslant$ $\leqslant k \leqslant n$ и б) $n+1 \leqslant k \leqslant n+n_1$.

а) $\delta_k(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H};c) = ckl_k(\boldsymbol{H};c) + \sum\limits_{j>l_k(\boldsymbol{H};c)} h_j - \sum\limits_{i=1}^{k} f_i = ckl_k(\boldsymbol{B};c)+$

$$+\sum_{j>l_k(\boldsymbol{B};c)} b_j + bm_1 - \sum_{i=1}^{k} a_i = \delta_k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) + bm_1 = \delta_k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) + \delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) =$$
$= \delta_k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) - \delta_{k^*}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) \geqslant 0$, и очевидно, что $\delta_{k^*}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H};c) = 0$;

б) $\delta_k(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H};c) = \sum\limits_{j=1}^{m+m_1} h_j - \sum\limits_{h_j \geqslant ck} (h_j - ck) - \sum\limits_{i=1}^{k} f_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j + \delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) -$

$$-\sum_{b_j \geqslant ck} (b_j - ck) - \sum_{i=1}^{n} a_i + a(k-n) \geqslant \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{b_j \geqslant cn} (b_j - cn) - \sum_{i=1}^{n} a_i + \delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) +$$

$$+a(k-n) = \delta_n(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) - \delta_{k^*}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) + a(k-n) > 0.$$

Из теоремы 2 следует, что $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ – c-реализуемая пара векторов.

Лемма 5. Для любой пары $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ существует пара $(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}') = ((a'_1,\ldots,a'_n),(b'_1,\ldots,b'_m)) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$, где $(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}') \leqslant (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, такая, что

$\Gamma(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'; c) \neq \varnothing$ и

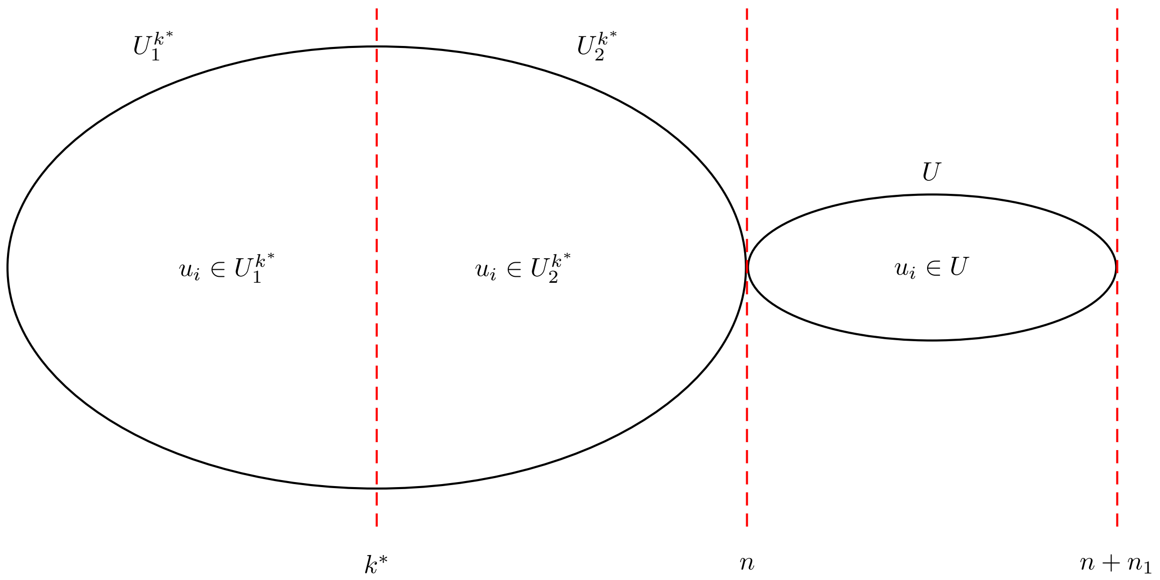
$$\sum_{i=1}^{n} a'_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) (\sum_{j=1}^{m} b'_j = \sum_{j=1}^{m} b_j - \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)),$$

причем $\delta_{k^*}(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'; c) = 0$, если $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \varnothing$, где $k^* = k^*(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$.

Доказательство. При $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \neq \varnothing$ утверждение очевидно, так как в этом случае $\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = 0$ и $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Пусть $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \varnothing$. Если $c = 0$, то утверждению леммы удовлетворяет только пара нулевых векторов. При $c > 0$ рассмотрим пару векторов $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H})$ леммы 4, в которой показано $\Gamma(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}; c) \neq \varnothing$. Пусть $X(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}) = (x_{ij})$ – произвольная двудольная сеть (матрица) из $\Gamma(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}; c)$ с долями $U(n) \cup U$ и $V(m) \cup V$, где $U = \{u_{n+1}, \dots, u_{n+n_1}\}$, $V = \{v_{m+1}, \dots, v_{m+m_1}\}$. Для этой сети применим характеристическое уравнение (1.6) при $k^* = k^*(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$. Так как $\delta_{k^*}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}; c) = 0$ (лемма 4), то

$$\overline{\delta}(U_1^{k^*}, V_1^{k^*}) + \delta(U_2^{k^*} \cup U, V_2^{k^*} \cup V) = 0, \tag{1.11}$$

где $V_1^{k^*} = \{v_1, \dots, v_{l_{k^*}}\}$, $V_2^{k^*} = \{v_{l_{k^*}+1}, \dots, v_m\}$. Схематически на рис. 1 представлено k^*-разбиение множества узлов сети $X(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H})$.



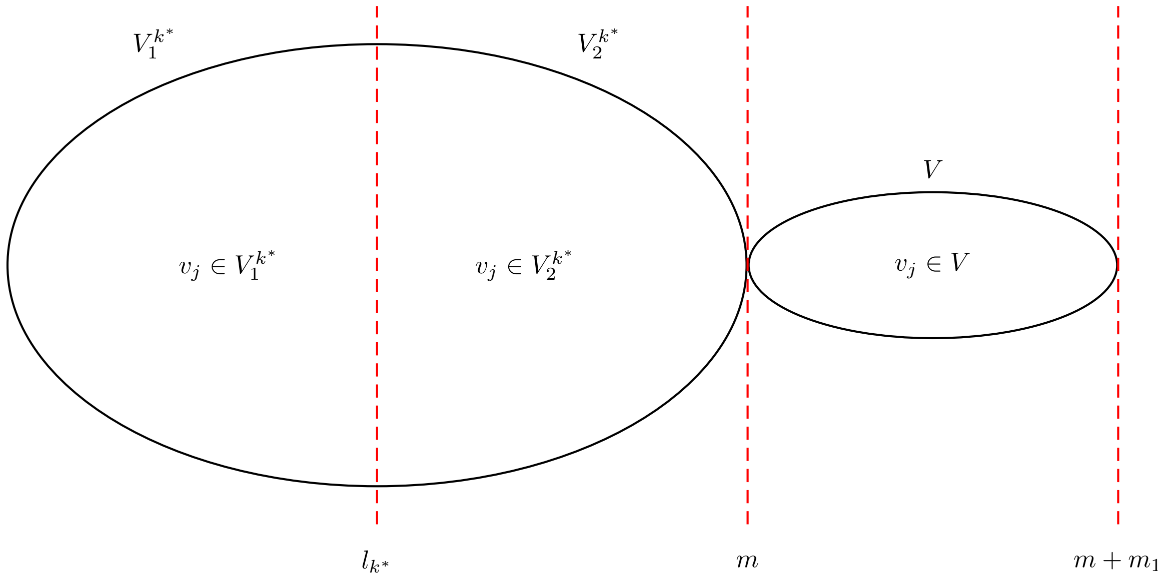


Рис. 1

Из равенства (1.11) следует:

а) $\overline{\delta}(U_1^{k^*}, V_1^{k^*}) = 0$ и $\delta(U_1^{k^*}, V_1^{k^*}) = c|U_1^{k^*}| \cdot |V_1^{k^*}|$. Поэтому для рассматриваемой сети $X(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H})$ имеет место $x_{ij} = c \; \forall i, j$, где $1 \leqslant i \leqslant k^*$, $1 \leqslant j \leqslant l_{k^*} = l_{k^*}(\boldsymbol{H}; c)$;

б) $\delta(U_2^{k^*} \cup U, V_2^{k^*} \cup V) = 0$ и для сети $X(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H})$ справедливо $x_{ij} = 0 \; \forall i, j$, где $k^* + 1 \leqslant i \leqslant n + n_1$, $l_{k^*} + 1 \leqslant j \leqslant m + m_1$.

Из пп. а и б для сети $X(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H})$ получаем: если $x_{ij} > 0$, где $i > k^*$, то $j \leqslant l_{k^*}$, а если $x_{ij} > 0$ при $j \geqslant l_{k^*} + 1$, то $i \leqslant k^*$. Следовательно,

$$\sum_{i=n+1}^{n+n_1} \sum_{j=1}^{l_{k^*}} x_{ij} = an_1 = \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c), \; \sum_{i=1}^{k^*} \sum_{j=m+1}^{m+m_1} x_{ij} = bm_1 = \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c),$$

т.е. все дуги с положительными весами, инцидентные узлам из U, инцидентны только узлам из $V_1^{k^*}$, а все дуги с положительными весами, инцидентные узлам из V, инцидентны только узлам из $U_1^{k^*}$. Удалим из рассматриваемой сети $X(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}) \in \Gamma(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}; c)$ множество узлов $U \cup V$. Получим подсеть $X'(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}')$ сети $X(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{H})$, порожденную множеством узлов $U(n) \cup V(m)$, и пара векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}')$ удовлетворяет утверждению леммы 5.

Покажем, что величина $\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$ есть критическая при построении c-реализуемых пар векторов, вписанных в $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

Лемма 6. Пусть $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$, $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)=\varnothing$ и $(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}')=((a'_1,\ldots,a'_n),(b'_1,\ldots,b'_m))\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$, где $(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}')\leqslant(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, причем

$$\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a'_i<\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c),\ \sum_{j=1}^{m}b_j-\sum_{j=1}^{m}b'_j<\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c).$$

Тогда $\Gamma(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}';c)=\varnothing$.

Доказательство. Предположим, что существует $(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}')<(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, что $\Gamma(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}')\neq\varnothing$, причем $\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a'_i=\delta<\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$. Рассмотрим $X(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}')=(x_{ij})\in\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$. Легко видеть, что существуют такие числа $a>0$, $n_1\in\mathbb{Z}$ и $b>0$, $m_1\in\mathbb{Z}$, для которых $a<\min(a_n,1,c)$, $an_1=\delta$, и $b<\min(b_m,1,c)$, $bm_1=\delta$. Добавим к сети $X(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}')$ два множества изолированных узлов $U=\{u_{n+1},\ldots,u_{n+n_1}\}$ и $V=\{v_{m+1},\ldots,v_{m+m_1}\}$. Для таким образом построенной сети $Y=(y_{ij})$ имеет место

$$y_{ij}=\begin{cases}x_{ij}, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m,\\ 0, n+1\leqslant i\leqslant n+n_1,\ \ m+1\leqslant j\leqslant m+m_1\end{cases}$$

$$Y=\left(\begin{array}{ccc} y_{ij}=x_{ij} & \vdots & y_{ij}=0\\ 1\leqslant i\leqslant n & \vdots & 1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m & \vdots & m+1\leqslant j\leqslant m+m_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_{ij}=0 & \vdots & y_{ij}=0\\ n+1\leqslant i\leqslant n+n_1 & \vdots & n+1\leqslant i\leqslant n+n_1\\ 1\leqslant j\leqslant m & \vdots & m+1\leqslant j\leqslant m+m_1\end{array}\right).$$

Так как $a_i-a'_i\geqslant 0, 1\leqslant i\leqslant n, b_j-b'_j\geqslant 0, 1\leqslant j\leqslant m$,

$$\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a'_i=\sum_{j=1}^{m}b_j-\sum_{j=1}^{m}b'_j=\delta$$

и $an_1 = bm_1 = \delta$, то существует сеть $Y' = (y'_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant n+n_1$, $1 \leqslant j \leqslant m+m_1$, для которой $y'_{ij} = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, или при $n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1$, $m+1 \leqslant j \leqslant m+m_1$, причем

$$\sum_{j=1}^{m} y'_{ij} = a,\ n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1,\ \sum_{i=n+1}^{n+n_1} y'_{ij} = b_j - b'_j, 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y'_{ij} = b,\ m+1 \leqslant j \leqslant m+m_1,\ \sum_{j=m+1}^{m+m_1} y'_{ij} = a_i - a'_i, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Этим построена сеть

$$Y' = \left(\begin{array}{ccc} y'_{ij} = 0 & \vdots & y'_{ij} \\ 1 \leqslant i \leqslant n & \vdots & 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m & \vdots & m+1 \leqslant j \leqslant m+m_1 \\ \dotfill & \cdots & \dotfill \\ y'_{ij} & \vdots & y'_{ij} = 0 \\ n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1 & \vdots & n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant m & \vdots & m+1 \leqslant j \leqslant m+m_1 \end{array} \right),$$

для которой $\delta(U(n), V(m)) = 0$, $\delta(U, V) = 0$, $\delta(U, V(m)) = \delta$, $\delta(U(n), V) = \delta$. Рассмотрим сумму сетей $Z = Y + Y'$. Сеть Z есть c-реализация пары векторов $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'')$, где

$$a''_i = \begin{cases} a_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \\ a, n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1, \end{cases} \quad b''_j = \begin{cases} b_j, 1 \leqslant j \leqslant m, \\ b, m+1 \leqslant j \leqslant m+m_1, \end{cases}$$

т.е. $\Gamma(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}''; c) \neq \varnothing$. Применим ХФ $(1.1')$ к паре векторов $(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}'')$ при $k^* = k^*(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$:

$$\delta_{k^*}(\boldsymbol{A}'', \boldsymbol{B}''; c) = ck^* l_{k^*}(\boldsymbol{B}''; c) + \sum_{j > l_{k^*}(\boldsymbol{B}''; c)} b''_j - \sum_{i=1}^{k^*} a''_i = ck^* l_{k^*}(\boldsymbol{B}; c) +$$

$$+\sum_{j=l_{k^*}(\boldsymbol{B}'';c)+1}^{m} b_j + bm_1 - \sum_{i=1}^{k^*} a_i = \delta_{k^*}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) + \delta = \delta - \delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) < 0,$$

что противоречит $\Gamma(\boldsymbol{A}'',\boldsymbol{B}'';c) \neq \varnothing$ (теорема 2). Лемма 6 доказана и доказана теорема 8.

Перейдем к доказательству теоремы 9. Для этого вернемся к леммам 4 и 5. Пусть $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ и $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) = \varnothing$, где $c > 0$. Рассмотрим пару векторов $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ из леммы 4, координаты которых удовлетворяют (1.10). Было показано, что $\delta_k(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H};c) \geqslant 0\ \forall k$ и $\delta_{k^*}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H};c) = 0$ (лемма 4).

В доказательстве леммы 5 было показано: если $X(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}) = (x_{ij})$ – произвольная сеть из $\Gamma(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H};c)$, то $\delta(U_1^{k^*},V_1^{k^*}) = c|U_1^{k^*}|\cdot|V_1^{k^*}|$ и $\delta(U_2^{k^*}\cup U, V_2^{k^*}\cup V) = 0$, где $U_1^{k^*} = \{u_1,\ldots,u_{k^*}\}$, $V_1^{k^*} = \{v_1,\ldots,v_{l_{k^*}}\}$, $U_2^{k^*} = U(n)\setminus U_1^{k^*}$, $V_2^{k^*} = V(m)\setminus V_1^{k^*}$, и

$$X(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}) = \left(\begin{array}{ccc} x_{ij}=c & \vdots & x_{ij} \\ 1\leqslant i\leqslant k^* & \vdots & 1\leqslant i\leqslant k^* \\ 1\leqslant j\leqslant l_{k^*} & \vdots & l_{k^*}+1\leqslant j\leqslant m+m_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{ij} & \vdots & x_{ij}=0 \\ k^*+1\leqslant i\leqslant n+n_1 & \vdots & k^*+1\leqslant i\leqslant n+n_1 \\ 1\leqslant j\leqslant l_{k^*} & \vdots & l_{k^*}+1\leqslant j\leqslant m+m_1 \end{array}\right).$$

Поэтому для векторов из пар $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{H})$ и $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ следует

$$\begin{array}{c} a_i \geqslant cl_{k^*}, 1\leqslant i\leqslant k^*;\ b_j \geqslant ck^*, 1\leqslant j\leqslant l_{k^*}; \\ a_i \leqslant cl_{k^*}, i > k^*;\ b_j < ck^*, j > l_{k^*}. \end{array} \tag{1.12}$$

Так как $\delta_{k^*}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) = ck^*l_{k^*} + \sum\limits_{j>l_{k^*}} b_j - \sum\limits_{i=1}^{k^*} a_i < 0$ и $\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) =$ $= -\delta_{k^*}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$, то

$$\sum_{i=1}^{k^*} a_i = ck^*l_{k^*} + \sum_{j>l_{k^*}} b_j + \delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c). \tag{1.13}$$

Рассмотрим пару векторов $(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}})$, где $\alpha_{\boldsymbol{A}} = \alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$, $\alpha_{\boldsymbol{B}} = \alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c)$ (см. (1.9)). Пусть q и r – последние индексы уменьшаемых координат соответственно векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ при переходе к паре $(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}})$: $q = \max\{i : a_i > \alpha_{\boldsymbol{A}}\}$, $r = \max\{j : b_j > \alpha_{\boldsymbol{B}}\}$. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{q} a_i - \alpha_{\boldsymbol{A}} \cdot q = \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c),$$

$$\sum_{j=1}^{r} b_j - \alpha_{\boldsymbol{B}} \cdot r = \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c). \tag{1.14}$$

Лемма 7. Для пар векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ и $(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}})$ имеет место:

а) $k^* = k^*(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \geqslant q$ и б) $l_{k^*} = l_{k^*}(\boldsymbol{B}; c) \geqslant r$.

Доказательство. а) Предположим, что $k^* < q$. Тогда $\sum_{i=1}^{q} a_i = \sum_{i=1}^{k^*} a_i + \sum_{i=k^*+1}^{q} a_i$ и из (1.13) и (1.14) следует

$$\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) + \alpha_{\boldsymbol{A}} \cdot q = ck^* l_{k^*} + \sum_{j > l_{k^*}} b_j + \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) + \sum_{i=k^*+1}^{q} a_i;$$

$$ck^* l_{k^*} + \sum_{j > l_{k^*}} b_j + \sum_{i=k^*+1}^{q} a_i - \alpha_{\boldsymbol{A}} \cdot q = 0. \tag{1.15}$$

Так как $\alpha_{\boldsymbol{A}} \cdot q = \alpha_{\boldsymbol{A}} \cdot k^* + \alpha_{\boldsymbol{A}}(q - k^*)$, то равенство (1.15) можно представить в виде

$$k^*(cl_{k^*} - \alpha_{\boldsymbol{A}}) + \sum_{j > l_{k^*}} b_j + \sum_{i=k^*+1}^{q} (a_i - \alpha_{\boldsymbol{A}}) = 0. \tag{1.16}$$

Из определения числа q следует, что $a_i > \alpha_{\boldsymbol{A}}$ при $i \leqslant q$, а из (1.12) следует $a_q \leqslant cl_{k^*}$ (по предположению $k^* < q$) и $\alpha_{\boldsymbol{A}} \leqslant cl_{k^*}$. Поэтому левая часть (1.16) строго положительна, что противоречит указанному равенству и предположению $k^* < q$. Итак, показано $k^* \geqslant q$.

б) Если предположить $r > l_{k^*}$, то учитывая (1.14), из (1.13) получим

$$ck^* l_{k^*} + \sum_{j=l_{k^*}+1}^{r} b_j + \sum_{j>r} b_j - \sum_{i=1}^{k^*} a_i + \sum_{j=1}^{r} b_j - \alpha_{\boldsymbol{B}} \cdot r = 0.$$

Применяя тождество $\alpha_{\boldsymbol{B}} \cdot r = \alpha_{\boldsymbol{B}} \cdot l_{k^*} + \alpha_{\boldsymbol{B}}(r - l_{k^*})$, последнее равенство примет вид

$$l_{k^*}(ck^* - \alpha_{\boldsymbol{B}}) + \sum_{j=l_{k^*}+1}^{r} (b_j - \alpha_{\boldsymbol{B}}) + \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{k^*} a_i = 0. \tag{1.17}$$

По определению числа r имеем $b_j > \alpha_{\boldsymbol{B}}$ при $j \leqslant r$, а из (1.12) следует $b_j < ck^*$ при $j > l_{k^*}$ и $\alpha_{\boldsymbol{B}} < ck^*$, так как $\alpha_{\boldsymbol{B}} < b_r$. Этим показано, что первые два слагаемых из (1.17) строго положительны. А так как $\sum_{j=1}^{m} b_j \geqslant \sum_{i=1}^{k^*} a_i$, то левая часть (1.17) больше нуля. Из этого противоречия следует, что $r \leqslant l_{k^*}$.

Покажем, что $\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, B^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) \geqslant 0\ \forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$. Этим теорема 9 будет доказана.

Для $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим два случая: $1 \leqslant k \leqslant q$ и $q < k \leqslant n$.

Лемма 8. Если $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \varnothing$, то $\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, B^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) \geqslant 0$ $\forall k, 1 \leqslant k \leqslant q$.

Доказательство. Воспользуемся леммой [25–27,29,56].

Лемма 9. Пусть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ и $a_p = a_q$, где $q - p = 2$, причем $\delta_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \geqslant 0$ и $\delta_q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \geqslant 0$. Тогда $\delta_k(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \geqslant 0\ \forall k, p < k < q$.

Отметим, что для вектора $\boldsymbol{A}^{\alpha_A}$ имеет место $a_1^{(\alpha_{\boldsymbol{A}})} = \ldots = a_q^{(\alpha_{\boldsymbol{A}})}$ и покажем, что а) $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, B^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) \geqslant 0$ и б) $\delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, B^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) \geqslant 0$ (при $q \geqslant 2$).

а) $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) = cql_q(\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) + \sum_{j>l_q(\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c)} b_j^{(\alpha_{\boldsymbol{B}})} - \sum_{i=1}^{q} a_i^{(\alpha_{\boldsymbol{A}})}$. Из леммы 7 следует неравенство $l_q(\boldsymbol{B}; c) \geqslant r = \max\{j : b_j > \alpha_{\boldsymbol{B}}\}$. Поэтому

$$\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) = cql_q(\boldsymbol{B}; c) + \sum_{j>l_q(\boldsymbol{B}; c)} b_j - \alpha_{\boldsymbol{A}} \cdot q. \tag{1.18}$$

Следовательно, $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) = cql_q(\boldsymbol{B}; c) + \sum\limits_{j>l_q(\boldsymbol{B};c)} b_j - \sum\limits_{i=1}^{q} a_i +$ $+\delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \delta_q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) + \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) \geqslant \delta_{k^*}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) + \delta(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = 0.$

б) Предположим, что $\delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) = cl_1(\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) +$ $+ \sum\limits_{j>l_1(\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}};c)} b_j^{(\alpha_{\boldsymbol{B}})} - \alpha_{\boldsymbol{A}} < 0$. Тогда

$$\alpha_{\boldsymbol{A}} > cl_1(\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) + \sum_{j>l_1(\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}};c)} b_j^{(\alpha_{\boldsymbol{B}})}. \tag{1.19}$$

С этим предположением рассмотрим $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, B^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c)$: учитывая (1.18) и (1.19), получим $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) < cql_q(\boldsymbol{B}; c) + \sum\limits_{j>l_q(\boldsymbol{B};c)} b_j -$ $-\left(cl_1(\boldsymbol{B}; c) + \sum\limits_{j>l_1(\boldsymbol{B};c)} b_j\right) q = -cq(l_1(\boldsymbol{B}; c) - l_q(\boldsymbol{B}; c)) + \sum\limits_{j=l_q(\boldsymbol{B};c)+1}^{l_1(\boldsymbol{B};c)} b_j -$ $-(q-1) \sum\limits_{j>l_1(\boldsymbol{B};c)} b_j = \sum\limits_{j=l_q(\boldsymbol{B};c)+1}^{l_1(\boldsymbol{B};c)} (b_j - cq) - (q-1) \sum\limits_{j>l_1(\boldsymbol{B};c)} b_j$. Так как $\sum\limits_{j=l_q(\boldsymbol{B};c)+1}^{l_1(\boldsymbol{B};c)} (b_j - cq) \leqslant 0$ и $(q-1) \sum\limits_{j>l_1(\boldsymbol{B};c)} b_j \geqslant 0$ (см. определения чисел q и $l_q(\boldsymbol{B}; c)$), то $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) < 0$, что противоречит п. а. Из леммы 9 следует, что $\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, B^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) \geqslant 0 \; \forall k, 1 \leqslant k \leqslant q$.

Лемма 10. Если $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}_{+,=}^{n,m}$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \varnothing$, то $\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, B^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) \geqslant 0$ $\forall k, q < k \leqslant n$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) = ckl_k(\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) + \sum_{j>l_k(\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}};c)} b_j^{(\alpha_{\boldsymbol{B}})} - \sum_{i=1}^{k} a_i^{(\alpha_{\boldsymbol{A}})}.$$

В случае $\alpha_{\boldsymbol{B}} \geqslant ck$ из определения числа r имеет место $l_k(\boldsymbol{B}; c) = l_k(B^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) \geqslant r$ и $b_j^{(\alpha_{\boldsymbol{B}})} = b_j$ при $j > r$. Поэтому $\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; c) = ckl_k(\boldsymbol{B}; c) + \sum\limits_{j>l_k(\boldsymbol{B};c)} b_j -$

$$-\sum_{i=1}^{k} a_i+\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) = \delta_k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)+\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) \geqslant \delta_{k^*}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)+\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) = 0.$$

При $\alpha_{\boldsymbol{B}} < ck\, l_k(\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}};c) = 0$ и $\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}},\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}};c) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j^{(\alpha_{\boldsymbol{B}})} - \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^{(\alpha_{\boldsymbol{A}})} \geqslant 0.$

Из лемм 8 и 10 и теоремы 2 следует справедливость теоремы 9.

Некоторые свойства пар векторов с наибольшими суммами координат из $\mathfrak{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$, где $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) = \varnothing$, и их c-реализаций содержатся в теореме.

Теорема 10. Пусть $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$, $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c) = \varnothing$ и $(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}') \in$ $\in \mathfrak{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i' = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c)$. Тогда для пары векторов $(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}')$ и любой реализации $X(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}') = (x_{ij})$ из $\Gamma(\boldsymbol{A}',\boldsymbol{B}';c)$ имеет место:

а) $a_i' \geqslant cl_{k^*}(\boldsymbol{B};c), 1 \leqslant i \leqslant k^* = k^*(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};c), a_i' \leqslant cl_{k^*}(\boldsymbol{B};c), i > k^*,$
$b_j' \geqslant ck^*, 1 \leqslant j \leqslant l_{k^*}(\boldsymbol{B};c), b_j' < ck^*, j > l_{k^*}(\boldsymbol{B};c);$

б) $x_{ij} = \begin{cases} c, 1 \leqslant i \leqslant k^*, 1 \leqslant j \leqslant l_{k^*}, \\ 0, i > k^*, j > l_{k^*}. \end{cases}$

Доказательство следует из п. а и б доказательства леммы 5.

Пример 6. Применим теорему 9 для пары векторов $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ примеров 1 – 6 при $c = 2$. В примере 1 было показано, что $\Gamma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2) = \varnothing$ и $\min\limits_k \delta_k(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2) = \delta_5(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2) = -40$. Следовательно, $\delta(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2) =$ $= -\delta_{k^*}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2) = 40$ и $k^* = 5$. Теперь, применяя (1.9) и (1.8), найдем значения $\alpha_{\boldsymbol{A}} = \alpha_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2)$, $\alpha_{\boldsymbol{B}} = \alpha_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B};2)$ и построим пару векторов $(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}},\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}})$. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{A}$. Заштрихованная площадь равна $\sum\limits_{i=1}^{q} a_i - 40 = 138$. Из определения числа q и равенства (1.14) следует система соотношений

$$\begin{cases} q\cdot\alpha_{\boldsymbol{A}} + \sum\limits_{i=q+1}^{n} a_i = 138, \\ a_q > \alpha_{\boldsymbol{A}}, \\ a_{q+1} \leqslant \alpha_{\boldsymbol{A}} \qquad\qquad (\text{при } q \leqslant 7), \end{cases}$$

решением которой является $q = 5$ и $\alpha_{\boldsymbol{A}} = 20{,}4$.

Для вектора B заштрихованная площадь также равна 138 и из определения числа r и равенства (1.14) следует система

$$\begin{cases} r \cdot \alpha_{\boldsymbol{B}} + \sum\limits_{j=r+1}^{m} b_j = 138, \\ b_r > \alpha_{\boldsymbol{B}}, \\ a_{r+1} \leqslant \alpha_{\boldsymbol{B}} & \text{(при } r \leqslant 10\text{).} \end{cases}$$

Ее решением является $r = 8$ и $\alpha_{\boldsymbol{B}} = 14{,}5$. Итак, получили

$\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}} = (20{,}4; 20{,}4; 20{,}4; 20{,}4; 20{,}4; 14; 14; 4; 4)$,

$\boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}} = (14{,}5; 14{,}5; 14{,}5; 14{,}5; 14{,}5; 14{,}5; 14{,}5; 14{,}5; 8; 8; 3; 3)$.

Из теоремы 9 следует, что $\Gamma(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; 2) \neq \varnothing$. Отметим, что $\delta_5(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}; 2) = 0$, $k^* = 5$, $l_{k^*} = 8$, и очевидно, что справедливо утверждение теоремы 10 для пары векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}') = (\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}})$ при $c = 2$. Заметим, что пара векторов $(\boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{B}'_1)$, задаваемая теоремой 10, определена неоднозначно. Если в примере 4 элементы матрицы $X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, равные трем, заменить на значение 2, то получим матрицу (сеть), являющуюся 2-реализацией пары векторов

$$(\boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{B}'_1) = ((22, 22, 22, 16, 16, 14, 14, 4, 4),$$

$$(16, 16, 16, 16, 14, 14, 12, 12, 8, 8, 3, 3)),$$

задающих эту матрицу. Пары векторов $(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}})$ и $(\boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{B}'_1)$ удовлетворяют условию теоремы 10 и для $\forall\, X = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}^{\alpha_{\boldsymbol{A}}}, \boldsymbol{B}^{\alpha_{\boldsymbol{B}}}) \cup \Gamma(\boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{B}'_1)$ имеет место

$$x_{ij} = \begin{cases} 2; 1 \leqslant i \leqslant 5, 1 \leqslant j \leqslant 8, \\ 0; 6 \leqslant i \leqslant 9, 9 \leqslant j \leqslant 12. \end{cases}$$

II. Сети без петель с фиксированными степенями узлов

2.1. Характеристические функции и условия c-реализуемости

Для вектора $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$ сформулируем критерий реализуемости в сеть без петель [17,18].

Теорема 11. Если $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, то $\Gamma(\boldsymbol{A}) \neq \varnothing \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 2\max_i\{a_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{2.1}$$

Отметим, что в случае целочисленности вектора $\boldsymbol{A}$ (при условии четности суммы координат) этот результат был получен С.Л. Хакими [42].

Построим характеристическую функцию, зависящую от вектора $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$ и параметра $c \geqslant 0$, неотрицательность которой есть критерий c-реализуемости (в случае $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$) [17,18,20,28,30,33].

Определение 9. Для $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $c \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, характеристической функцией (ХФ) называется

$$\delta_k(\boldsymbol{A}; c) = ck(k-1) - \sum_{\substack{i \leqslant k \\ a_i \leqslant ck-c}} (ck - c - a_i) - \sum_{\substack{i \geqslant k+1 \\ a_i \geqslant ck}} (a_i - ck) - \sum_{i \leqslant k} a_i + \sum_{i \geqslant k+1} a_i. \tag{2.2}$$

Неотрицательность ХФ (2.2) есть необходимое условие c-реализуемости вектора в сеть без петель [17,20,28,18,30,33].

Теорема 12. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $c \geqslant 0$. Если $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, то $\delta_k(\boldsymbol{A}; c) \geqslant 0 \; \forall k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

В случае упорядоченности координат вектора по невозрастанию, неотрицательность ХФ (2.2) является необходимым и достаточным условием c-реализуемости [17,20,28,18,30,33,39].

Теорема 13. Если $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$, то $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing \Longleftrightarrow \delta_k(\boldsymbol{A}; c) \geqslant 0 \; \forall k$, $1 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant n$.

Отметим, что при $A \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ ХФ (2.2) имеет более простой вид

$$\delta_k(\boldsymbol{A};c) = ck(k-1) - \sum_{\substack{i \geqslant k+1 \\ a_i \geqslant ck}} (a_i - ck) - \sum_{i \leqslant k} a_i + \sum_{i \geqslant k+1} a_i, c \leqslant ck \leqslant a_k + c; \quad (2.3)$$

$$\delta_k(\boldsymbol{A};c) = ck(k-1) - \sum_{\substack{i \leqslant k \\ a_i \leqslant ck-c}} (ck - c - a_i) - \sum_{i \leqslant k} a_i + \sum_{i \geqslant k+1} a_i, k \leqslant n, ck \geqslant a_k.$$

Оказывается, справедлива

Лемма 11. Если $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$, то $\delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0 \; \forall k, \; c \leqslant ck \leqslant a_k + c \Longleftrightarrow \delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0 \; \forall k, k \leqslant n, ck \geqslant a_k$.

Поэтому имеет место [17,18,30,33,39].

Теорема 14. Если $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$, то

а) $\Gamma(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing \Longleftrightarrow \delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0 \; \forall k, c \leqslant ck \leqslant a_k + c$.

б) $\Gamma(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing \Longleftrightarrow \delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0 \; \forall k, k \leqslant n, ck \geqslant a_k$.

В дальнейшем будем применять ХФ (2.3) и ее упрощенный вид: если обозначить $l'_k(\boldsymbol{A};c) = \begin{cases} \max\{i : a_i \geqslant ck\}, a_{k+1} \geqslant ck, \\ k, a_{k+1} < ck, \end{cases}$ то

$$\delta_k(\boldsymbol{A};c) = ck(l'_k(\boldsymbol{A};c) - 1) - \sum_{i \leqslant k} a_i + \sum_{i > l'_k(\boldsymbol{A};c)} a_i. \quad (2.3')$$

Замечание 3. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $c \geqslant 0$. Для $(1.1')$ и $(2.3')$ если $a_{k+1} \geqslant ck$, то $l_k(\boldsymbol{A};c) = l'_k(\boldsymbol{A};c)$.

Пример 7. Применим ХФ (2.3) к вектору

$$\boldsymbol{A} = (32,32,32,32,18,18,18,18,8,8,8,8,4,4,4) \in \overline{\mathbb{R}}_+^{15}$$

при $c = 2$. Получим $\delta_1(\boldsymbol{A};2) = -4$, $\delta_2(\boldsymbol{A};2) = -8$, $\delta_3(\boldsymbol{A};2) = -18$, $\delta_4(\boldsymbol{A};2) = -28$, $\delta_5(\boldsymbol{A};2) = -32$, $\delta_6(\boldsymbol{A};2) = -36$, $\delta_7(\boldsymbol{A};2) = -40$, $\delta_8(\boldsymbol{A};2) = -44$ и $\min\limits_k \delta_k(\boldsymbol{A};2) = \delta_8(\boldsymbol{A};2) = -44$.

Вектор $\boldsymbol{A}$ из $\overline{\mathbb{R}}_+^{15}$ будет исследоваться во всех примерах разделов 2.1–2.5.

Из теоремы 14 следует, что $\Gamma(\boldsymbol{A};2)=\varnothing$.

Пример 8. К вектору $\boldsymbol{A}$ примера 7 при $c = 4$ применим ХФ (2.3). Тогда $\delta_1(\boldsymbol{A};4) = 24$, $\delta_2(\boldsymbol{A};4) = 36$, $\delta_3(\boldsymbol{A};4) = 32$, $\delta_4(\boldsymbol{A};4) = 28$, $\delta_5(\boldsymbol{A};4) = 32$. Из теоремы 14 следует, что $\Gamma(\boldsymbol{A};4)\neq\varnothing$.

2.2. Минимакс и наследственно минимаксная матрица смежности для сетей без петель

Для вектора $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$ вычислим наименьшее значение $c = c(\boldsymbol{A})$, при котором $\Gamma(\boldsymbol{A};c)\neq\varnothing$.

Определение 10. Пусть $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}_+^n$ и $\Gamma(\boldsymbol{A})\neq\varnothing$. Значение

$$c(\boldsymbol{A})=\min\{c:\Gamma(\boldsymbol{A};c)\neq\varnothing\}$$

называется минимаксом для $\boldsymbol{A}$ или $\Gamma(\boldsymbol{A};c)$ [17,18,30,33,39].

В [17,18,30,33] величина $c(\boldsymbol{A})$ называется весом вектора $\boldsymbol{A}$.

Легко видеть справедливость тождества:

$$\min\{c:\Gamma(\boldsymbol{A};c)\neq\varnothing\}=\min_{X(\boldsymbol{A})\in\Gamma(\boldsymbol{A})}\max_{i,j}\{x_{ij}:X(\boldsymbol{A})=(x_{ij})\}.$$

Для минимакса имеет место [17,18,30,33].

Теорема 15. Пусть $\boldsymbol{A}\in\overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $\Gamma(\boldsymbol{A})\neq\varnothing$. Величина c является минимаксом $(c=c(\boldsymbol{A}))\Longleftrightarrow\Gamma(\boldsymbol{A};c)\neq\varnothing$ и $\exists p\in\mathbb{Z}$, $c\leqslant cp\leqslant a_p+c$, что $\delta_p(\boldsymbol{A};c)=0$.

Перейдем к построению формулы вычисления минимакса $c(\boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{A}\in\overline{\mathbb{R}}_+^n$. Обозначим $T'(\boldsymbol{A}) = \{(i,j) : i,j \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$. Для $\forall\,(t,r)\in T'(\boldsymbol{A})$ построим систему соотношений:

$$\begin{cases} c_{tr}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i\leqslant t}a_i-\sum_{i>r}a_i}{t(r-1)},\\ c_{tt}t\leqslant a_t+c_{tt},\\ c_{tr}t>a_{r+1},\ \ r<n,\\ c_{tr}t\leqslant a_r,\ \ r>t.\end{cases}\tag{2.4}$$

Положим $c_{tr} = 0$, если (2.4) не имеет решений.

Замечание 4. При $r = 1$ (тогда и $t = 1$) система (2.4) не имеет решения, и в этом случае, как указано выше, $c_{11} = 0$, но $c(\boldsymbol{A}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ – нулевой вектор. Поэтому будем предполагать, что в (2.4) вектор $\boldsymbol{A}$ отличен от нулевого и $r > 1$.

Теорема 16. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_{+}^{n}$, где $a_1 > 0$, и $\Gamma(\boldsymbol{A}) \neq \varnothing$. Тогда

$$c(\boldsymbol{A}) = \max_{(t,r)\in T'(\boldsymbol{A})} c_{tr}.$$

Доказательство. Положим $c_{pq} = \max\limits_{(t,r)\in T'(\boldsymbol{A})} c_{tr}$. Из равенства в (2.4) следует $c_{pq}p(q-1) - \sum\limits_{i\leqslant p} a_i + \sum\limits_{i>q} a_i = 0$, а из неравенств в (2.4) следует $q = l'_p(\boldsymbol{A}; c_{pq})$. Поэтому

$$\delta_p(\boldsymbol{A}; c_{pq}) = c_{pq}p(q-1) - \sum_{i\leqslant p} a_i + \sum_{i>q} a_i = 0.$$

Применяя (2.3), получим

$$\delta_p(\boldsymbol{A}; c_{pq}) = c_{pq}p(p-1) - \sum_{\substack{i\geqslant p+1\\ a_i\geqslant c_{pq}p}} (a_i - c_{pq}p) - \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i>p} a_i = 0.$$

Теперь очевидно, что при $c < c_{pq}$ имеет место $\delta_p(\boldsymbol{A}; c) < 0$. Из теоремы 14 следует, что $c(\boldsymbol{A}) \geqslant c_{pq} = \max\limits_{(t,r)\in T'(\boldsymbol{A})} c_{tr}$. Применяя теорему 15 получим, что $\exists\, p \in \mathbb{Z}$, $c \leqslant$ $\leqslant cp \leqslant a_p + c$, при котором

$$\delta_p(\boldsymbol{A}; c(\boldsymbol{A})) = c(\boldsymbol{A})p(l'_p(\boldsymbol{A}; c(\boldsymbol{A})) - 1) - \sum_{i\leqslant p} a_i + \sum_{i>l'_p(\boldsymbol{A};c(\boldsymbol{A}))} a_i = 0.$$

Поэтому

$$c(\boldsymbol{A}) = \frac{\sum\limits_{i\leqslant p} a_i - \sum\limits_{i>l'_p(\boldsymbol{A};c(\boldsymbol{A}))} a_i}{p(l'_p(\boldsymbol{A}; c(\boldsymbol{A})) - 1)} = c_{pl'_p(\boldsymbol{A};c(\boldsymbol{A}))}.$$

Из соотношений $c(\boldsymbol{A}) \geqslant \max\limits_{(t,r)\in T'(A)} c_{tr}$ и $c(\boldsymbol{A}) = c_{pl'_p(\boldsymbol{A};c(\boldsymbol{A}))}$ следует утверждение теоремы.

Определение 11. Сети без петель (матрицы) из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c(\boldsymbol{A}))$ называются минимаксными.

Следующая теорема характеризует минимаксные матрицы [17,18,28,32,55].

Теорема 17. Если $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $\delta_p(\boldsymbol{A}; c(\boldsymbol{A})) = 0$, где $c \leqslant cp \leqslant a_p + c$, то для $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}; c(\boldsymbol{A}))$ имеет место

$$x_{ij} = \begin{cases} c(\boldsymbol{A}), (i,j) \in \{(i,j) : i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant p\} \cup \\ \cup \{(i,j) : 1 \leqslant i \leqslant p, p < j \leqslant l'_p\} \cup \{(i,j) : p < i \leqslant l'_p, 1 \leqslant j \leqslant p\}; \\ 0, (i,j) \in \{(i,j) : p < i \leqslant n, l'_p < j \leqslant n\} \cup \\ \cup \{(i,j) : l'_p < i \leqslant n, p < j \leqslant l'_p\} \cup \{(i,j) : i = j, p < i \leqslant l'_p\}. \end{cases}$$

Упростим вычисление минимакса $c(\boldsymbol{A})$. Обозначим $T(n) = \{(i,i) : 2 \leqslant i \leqslant n\}$ и $T''(\boldsymbol{A}) = \{(i,j) \in T'(\boldsymbol{A}) : i < j; a_i > a_{i+1},\ \ i = n; a_j > a_{j+1},\ \ j = n\}$. Покажем, что при нахождении минимакса можно удалить последние два неравенства из (2.4) и при вычислении $c(\boldsymbol{A})$ рассматривать только пары индексов из $T(\boldsymbol{A}) = T(n) \cup \cup T''(\boldsymbol{A})$. Для этого докажем две леммы.

Лемма 12. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$, где $\Gamma(\boldsymbol{A}) \neq \varnothing$, $a_1 > 0$, и

$$c_{tq} = \max_{\substack{1 < r \leqslant n \\ (t,r) \in T'(\boldsymbol{A}) \setminus T(n)}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>r} a_i}{t(r-1)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{t(q-1)}.$$

Тогда а) $c_{tq}t \geqslant a_{q+1}$ (если $q < n$), причем $c_{tq}t = a_{q+1} \Longleftrightarrow c_{tq} = c_{tq+1}$,
и б) $c_{tq}t \leqslant a_q$.

Доказательство. а) Пусть $q < n$. Для разности $c_{tq} - c_{tq+1}$ имеем

$$c_{tq} - c_{tq+1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{t(q-1)} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q+1} a_i}{tq} =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q+1} a_i - qa_{q+1}}{(q-1)q} = \frac{1}{t(q-1)} \cdot \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q+1} a_i}{q} - a_{q+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{t(q-1)} \cdot (c_{tq+1}t - a_{q+1}).$$

Предположим, что $c_{tq}t < a_{q+1}$. Тогда $c_{tq} - c_{tq+1} < \dfrac{1}{q-1}(c_{tq+1} - c_{tq})$ и $(c_{tq} - c_{tq+1})\dfrac{q}{q-1} < 0$, что противоречит условию леммы.

Пусть $c_{tq}t = a_{q+1}$. Тогда $(c_{tq} - c_{tq+1})\dfrac{q}{q-1} = 0$, что справедливо тогда и только тогда, когда $c_{tq} = c_{tq+1}$.

б) Пусть $q > 2$. Предположим $c_{tq}t > a_q$. Тогда для разности $c_{tq} - c_{tq-1}$ получим

$$c_{tq} - c_{tq-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{t(q-1)} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q-1} a_i}{t(q-2)} =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{-\sum\limits_{i=1}^{t} a_i + \sum\limits_{i>q} a_i + (q-1)a_q}{(q-1)(q-2)} =$$

$$= \frac{1}{q-2} \cdot \frac{-c_{tq}t + a_q}{t} = \frac{1}{t(q-2)}(a_q - c_{tq}t) < 0,$$

что противоречит условию леммы.

Пусть $q = 2$. Тогда $t = 1$ (так как $(t, r) \in T'(\boldsymbol{A}) \setminus T(n)$). Из условия реализуемости (2.1) следует $a_1 \leqslant \sum\limits_{i=2}^{n} a_i$ и $a_1 - \sum\limits_{i=3}^{n} a_i \leqslant a_2$. Теперь очевидно $c_{12} = \dfrac{a_1 - \sum\limits_{i>2} a_i}{1 \cdot (2-1)} \leqslant a_2$. Этим лемма доказана.

Замечание 5. Из леммы 12 следует, что в системе (2.4) второй индекс r можно рассматривать только в случае $a_r > a_{r+1}$ (если $r \neq n$).

Лемма 13. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$, где $\Gamma \neq \varnothing$ и $a_1 > 0$. Если $c_{pq} = c(\boldsymbol{A})$ и $a_p = a_{p+1}$, то $c_{p+1q} = c(\boldsymbol{A})$.

Доказательство. Рассмотрим разность $c_{pq} - c_{p+1q}$, где $q > p$:

$$c_{pq} - c_{p+1q} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{p(q-1)} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{p+1} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{(p+1)(q-1)} =$$

$$= \frac{(p+1)\sum_{i=1}^{p} a_i - (p+1)\sum_{i>q} a_i - p\sum_{i=1}^{p+1} a_i + p\sum_{i>q} a_i}{p(p+1)(q-1)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i>q} a_i - pa_{p+1}}{p(p+1)(q-1)} = \frac{1}{(p+1)(q-1)}(c_{pq}(q-1) - a_{p+1}).$$

Очевидно, что $c_{pq}(q-1) \leqslant a_p = a_{p+1}$. Поэтому, $c_{pq} - c_{p+1q} = c(\boldsymbol{A}) - c_{p+1q} \leqslant \leqslant 0$. Так как $c(\boldsymbol{A}) = \max\limits_{(t,r)\in T'(\boldsymbol{A})} c_{tr} = c_{tq}$, то $c_{pq} - c_{p+1q} \geqslant 0$. Следовательно, $c(\boldsymbol{A}) = c_{p+1q}$.

Лемма 12 исключает из системы (2.4) последние два неравенства. Следовательно, если $c_{tq} = \max\limits_{(t,r)\in T'(\boldsymbol{A})\setminus T(n)} c_{tr}$, то для значения c_{tq} заведомо имеет место $c_{tq}t \leqslant a_q$ и, учитывая замечание к лемме 12, $c_{tq}t > a_{q+1}$ (если $q \neq n$). Поэтому, из теоремы 16 и лемм 12, 13 следует [32,55]

Теорема 18. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$, где $a_1 > 0$, и $\Gamma(\boldsymbol{A}) \neq \varnothing$. Тогда

$$c(\boldsymbol{A}) = \max_{(t,r)\in T(\boldsymbol{A})} \frac{\sum_{i\leqslant t} a_i - \sum_{i>r} a_i}{t(r-1)}.$$

Определение 12. Сеть без петель - матрица $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij})$ – называется равномерной, если справедливы два условия [28,32,33]:

а) $a_i = a_p, a_j = a_q$, где $i \neq j$ и $p \neq q \Longrightarrow x_{ij} = x_{pq}$,

б) $a_i \geqslant a_p, a_j \geqslant a_q$, где $i \neq j$ и $p \neq q \Longrightarrow x_{ij} \geqslant x_{pq}$.

Каждая неотрицательная симметричная матрица $X = (x_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, где $x_{ii} = 0$, задает вектор $\boldsymbol{A}$, для которого $a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, и $X = X(\boldsymbol{A}) \in \Gamma(\boldsymbol{A})$. Будем говорить, что матрица (сеть без петель) X задает вектор $\boldsymbol{A}$.

Определение 13. Сеть без петель (минимаксная) называется наследственно минимаксной, если каждая ее подсеть без петель и каждая двудольная подсеть, порожденные своими узлами, есть минимаксные.

Из теоремы 18 следует лемма, в которой заключен алгоритм построения наследственно минимаксной сети без петель [55].

Лемма 14. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_{+}^{n}$ и $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}; c(\boldsymbol{A}))$, причем $c(\boldsymbol{A}) = c_{kq}$. Тогда для пары векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'')$ и вектора $\boldsymbol{A}'''$, где $a_i' = a_i - c(\boldsymbol{A})(q-1)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $a_i'' = a_i$, $q < i \leqslant n$, $a_i''' = a_i - c(\boldsymbol{A})(q-k)$, $k < i \leqslant q$, имеет место $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'') \in \overline{\mathbb{R}}_{+,=}^{k,n-q}$, $\boldsymbol{A}''' \in \overline{\mathbb{R}}_{+}^{q-k}$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}''; c(\boldsymbol{A})) \neq \varnothing$, $\Gamma(\boldsymbol{A}'''; c(\boldsymbol{A})) \neq \varnothing$.

Алгоритм 2. Построение наследственно минимаксной сети без петель.

Пусть $\boldsymbol{A}$ – произвольный вектор из $\overline{\mathbb{R}}_{+}^{n}$. Наследственно минимаксная сеть строится следующим образом.

Шаг 1. Применяется теорема 18 для вычисления минимакса

$$c(\boldsymbol{A}) = \max_{(t,r)\in T(\boldsymbol{A})} \frac{\sum\limits_{i\leqslant t} a_i - \sum\limits_{i>r} a_i}{t(r-1)} = c_{kq}.$$

Числа c_{kq}, k, q задают веса дуг искомой сети (элементы симметричной матрицы) $X(\boldsymbol{A})$, равные $c(\boldsymbol{A})$ и равные 0 (теорема 17).

Шаг 2. Применяя лемму 14, вычисляются пара векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'')$ и вектор $\boldsymbol{A}'''$. Для пары векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'')$ применяется алгоритм 1 для построения наследственно минимаксной двудольной сети. Этим будут найдены веса дуг x_{ij} искомой сети $X(\boldsymbol{A})$, где $1 \leqslant i \leqslant k, q < j \leqslant n$.

Далее для вектора $\boldsymbol{A}'''$ применяются шаги 1 и 2 данного алгоритма.

И т.д.

Очевидно, что построенная алгоритмом 2 матрица $X(\boldsymbol{A})$ есть равномерная. Справедлива следующая (приводим без доказательства) [32]

Теорема 19. а) Сеть без петель $X(\tilde{\boldsymbol{A}})$, где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{+}^{n}$, построенная алгоритмом 2, является единственной наследственно минимаксной сетью сетевого многогранника $\Gamma(\tilde{\boldsymbol{A}})$.

б) Любой многогранник $\Gamma(\boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{+}^{n}$, содержит одну и только одну наследственно минимаксную сеть.

Пример 9. Построим наследственно минимаксную сеть без петель–матрицу $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}; c)$, где $\boldsymbol{A}$ – вектор примера 7.

Найдем минимакс $c(\boldsymbol{A})$. Здесь $T(\boldsymbol{A}) = \{(2,2); (3,3); (4,4); (4,8); (4,12); (4,15); (5,5); (6,6); (7,7); (8,8); (8,12); (8,15); (9,9); (10,10); (11,11); (12,12); (12,15); (13,13); (14,14); (15,15)\}$. Применяя равенство системы (2.4), вычислим величины c_{tr}, где $(t,r) \in T(\boldsymbol{A})$: $c_{22} = -58$, $c_{33} = -8\frac{2}{3}$, $c_{44} = 1$, $c_{48} = 3$, $c_{4\ 12} = 2\frac{7}{11}$, $c_{4\ 15} = 2\frac{2}{7}$, $c_{55} = 2\frac{2}{5}$, $c_{66} = 2\frac{4}{5}$, $c_{77} = 2\frac{6}{7}$, $c_{88} = 2\frac{11}{14}$, $c_{8\ 12} = 2\frac{3}{22}$, $c_{8\ 15} = 1\frac{11}{14}$, $c_{99} = 2\frac{7}{18}$, $c_{10\ 10} = 2\frac{4}{45}$, $c_{11\ 11} = 1\frac{47}{55}$, $c_{12\ 12} = 1\frac{2}{3}$, $c_{12\ 15} = 1\frac{8}{21}$, $c_{13\ 13} = 1\frac{6}{13}$, $c_{14\ 14} = 1\frac{27}{91}$, $c_{15\ 15} = 1\frac{17}{105}$.

Из теоремы 18 следует, что $c(\boldsymbol{A}) = 3$, причем $c_{48} = 3$. Числа 3, 4, 8 задают веса дуг искомой сети $X(\boldsymbol{A})$, равные трем и равные нулю. Учитывая симметричность матрицы $X(\boldsymbol{A})$, получим

$$X(\boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{ccc}
\begin{matrix} x_{ij} = 3 \\ 1 \leqslant i \leqslant 4 \\ 1 \leqslant j \leqslant 8 \\ i \neq j \end{matrix} & \begin{matrix} x_{ii} = 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant 4 \\ \\ \\ \end{matrix} & \vdots\ \begin{matrix} X_1 = (x_{ij}) \\ 1 \leqslant i \leqslant 4 \\ 9 \leqslant j \leqslant 15 \\ 9 \leqslant j \leqslant 15 \end{matrix} \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
\begin{matrix} x_{ij} = 3 \\ 5 \leqslant i \leqslant 8 \\ 1 \leqslant j \leqslant 4 \end{matrix} & \vdots\ \begin{matrix} X_2 = (x_{ij}) \\ 5 \leqslant i \leqslant 8 \\ 5 \leqslant j \leqslant 8 \end{matrix} & \vdots\ \begin{matrix} x_{ij} = 0 \\ 5 \leqslant i \leqslant 15 \\ 9 \leqslant j \leqslant 15 \end{matrix} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots \\
\begin{matrix} X_3 = x_{ij} \\ 9 \leqslant i \leqslant 15 \\ 1 \leqslant j \leqslant 4 \end{matrix} & \vdots\ \begin{matrix} x_{ij} = 0 \\ 9 \leqslant i \leqslant 15 \\ 5 \leqslant j \leqslant 8 \end{matrix} & \vdots
\end{array}\right).$$

Лемма 14 строит: а) пару векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'') = ((11,11,11,11), (8,8,8,8,4,4,4))$ и б) вектор $\boldsymbol{A}''' = (6,6,6,6)$.

а) Пара $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'')$ задает двудольную подматрицу $X_1 = (x_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, $9 \leqslant \leqslant j \leqslant 15$, искомой матрицы $X(\boldsymbol{A})$. Применяя алгоритм 1, получим, что

$$X_1 = \begin{array}{c} \\ 11 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 8 & 8 & 8 & 8 & 4 & 4 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Так как $X(\boldsymbol{A})$ – симметричная матрица, то подматрица X_1 определяет матрицу $X_3 = (x_{ij})$, $9 \leqslant i \leqslant 15$, $1 \leqslant j \leqslant 4$:

$$X_3 = \begin{array}{c} \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 11 & 11 & 11 & 11 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

б) Очевидно, что вектор $\boldsymbol{A}'''$ задает равномерную матрицу $X_2 = (x_{ij})$, $5 \leqslant i \leqslant \leqslant 8$, $5 \leqslant j \leqslant 8$. Поэтому

$$X_2 = \begin{array}{c} \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 6 & 6 & 6 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Этим построена наследственно минимаксная матрица

$$X(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 32 & 32 & 32 & 32 & 18 & 18 & 18 & 18 & 8 & 8 & 8 & 8 & 4 & 4 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 32 \\ 32 \\ 32 \\ 32 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2.3. Характеристические уравнения

Пусть $X = (x_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ – произвольная сеть без петель (матрица), у которой $x_{ii} = 0, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n$. Введем обозначения для сумм весов дуг: для $U, V \subseteq U(n)$, $U \cap V = \varnothing$, положим $\delta(U) = \sum\limits_{\substack{u_i, u_j \in U \\ i<j}} x_{ij}$, $\delta(U, V) = \sum\limits_{\substack{u_i \in U \\ v_j \in V}} x_{ij}$, и если $x_{ij} \leqslant c\, \forall i, j$, то $\overline{\delta}(U) = \dfrac{c|U|(|U|-1)}{2} - \delta(U), \overline{\delta}(U, V) = c|U||V| - \delta(U, V)$.

Определение 14. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$. Если $c \leqslant ck \leqslant a_k + c$, то k-разбиением множества узлов $U(n)$ любой сети $X \in \Gamma(\boldsymbol{A}; c)$ относительно вектора $\boldsymbol{A}$ называется представление $U(n) = U_1^k \cup U_2^k \cup U_3^k$, где $U_1^k = \{u_i : i \leqslant k\}$, $U_2^k = \{u_i : i > k, a_i \geqslant ck\}, U_3^k = \{u_i : i > k, a_i < ck\}$.

Сумма весов дуг на подмножествах k-разбиения связана с ХФ следующим соотношением [17,18,28,30,33,39].

Теорема 20. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$. Тогда $\forall\ X \in \Gamma(\boldsymbol{A}; c)$ имеет место

$$\delta_k(\boldsymbol{A}; c) = 2\overline{\delta}(U_1^k) + \overline{\delta}(U_1^k, U_2^k) + \delta(U_2^k, U_3^k) + 2\delta(U_3^k), c \leqslant ck \leqslant a_k + c. \quad (2.5)$$

Замечание 6. В [17,18,28,30,33] (и в [15,16] при $c = 1$) представлено расширенное определение k-разбиения и построены характеристические уравнения (включая случай $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$) для $\forall k, 1 \leqslant k \leqslant n$.

Определение 15. Соотношение (2.5) называется характеристическим уравнением.

2.4. Приведение вектора к c-реализуемости в сеть без петель

Пользуясь п. а определения 8, введем следующее обозначение. Обозначим $\mathfrak{M}(\boldsymbol{A}; c) = \{\boldsymbol{D} : \boldsymbol{D} \leqslant \boldsymbol{A}, \Gamma(\boldsymbol{D}; c) \neq \varnothing\}$ множество всех c-реализуемых векторов, вписанных в $\boldsymbol{A}$. В данном разделе для произвольного вектора $\boldsymbol{A}$ будет найден c-реализуемый вектор из $\mathfrak{M}(\boldsymbol{A}; c)$ с наибольшей суммой координат.

Применяя ХФ (2.2) для $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ введем обозначение

$$\delta(\boldsymbol{A}; c) = \begin{cases} |\min\limits_k \delta_k(\boldsymbol{A}; c)|, \Gamma(\boldsymbol{A}; c) = \varnothing, \\ 0, \Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing. \end{cases} \quad (2.6)$$

Если $\delta(\boldsymbol{A}; c) > 0$, то положим $k^* = k^*(\boldsymbol{A}; c)$ – такое число, что $\delta(\boldsymbol{A}; c) = |\delta_{k^*}(\boldsymbol{A}; c)|$. Заметим, что индекс k^* определен неоднозначно.

Основные результаты раздела сформулированы в теоремах 21 и 22 [30, 33, 36, 38, 39].

Теорема 21. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда

$$\max_{\boldsymbol{D} \in \mathfrak{M}(\boldsymbol{A}; c)} \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}; c),$$

где вектор $\tilde{\boldsymbol{A}}$ получен из вектора $\boldsymbol{A}$ упорядочиванием его координат по невозрастанию.

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$ и $c \geqslant 0$. Очевидно, что существует $\alpha(\boldsymbol{A};c)$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}};c) = \sum_{i=1}^{n} \min(\alpha(\boldsymbol{A};c), a_i).$$

По правилу (1.8), величина $\alpha = \alpha(\boldsymbol{A};c)$ задает вектор

$$\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)} = (a_1^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))}, \ldots, a_n^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))}). \tag{2.7}$$

Теорема 22. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда $\Gamma(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) \neq \varnothing$.

Доказательство теоремы 21 следует из лемм 15–17, в которых будем предполагать упорядоченность координат вектора по невозрастанию [30].

Построим конструкцию, которая позволит доказать теорему 21.

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$ и $\Gamma(\boldsymbol{A};c) = \varnothing$. Дополним вектор $\boldsymbol{A}$ координатами, значения которых "малы", а сумма которых равна $\delta(\boldsymbol{A};c)$, и покажем, что полученный вектор c-реализуем. Пусть $\boldsymbol{F} = (f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+n_1})$ – такой вектор, что

$$f_i = \begin{cases} a_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \\ a, n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1, \end{cases} \tag{2.8}$$

причем $an_1 = \delta(\boldsymbol{A};c)$, $a < \min(1, c, a_n)$.

Лемма 15. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $\Gamma(\boldsymbol{A};c) = \varnothing$. Тогда $\Gamma(\boldsymbol{F};c) \neq \varnothing$, причем $\delta_{k^*}(\boldsymbol{F};c) = 0$.

Доказательство. Из определения числа $l'_k(\boldsymbol{A};c)$ легко видеть, что $l'_k(\boldsymbol{F};c) = l'_k(\boldsymbol{A};c)$, $c \leqslant ck \leqslant f_k + c$. Поэтому из $(2.3')$ следует, что $\delta_k(\boldsymbol{F};c) = \delta_k(\boldsymbol{A};c) + \delta(\boldsymbol{A};c)$. Из (2.6) следует, что $\delta_k(\boldsymbol{F};c) \geqslant 0$, $c \leqslant ck \leqslant f_k + c$, причем $\delta_{k^*}(\boldsymbol{F};c) = \delta_{k^*}(\boldsymbol{A};c) + \delta(\boldsymbol{A};c) = 0$. Из теоремы 14 следует $\Gamma(\boldsymbol{F};c) \neq \varnothing$.

Лемма 16. Для $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ существует $\boldsymbol{A}' \leqslant \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{A}' = (a'_1, \ldots, a'_n) \in \mathbb{R}_+^n$, что $\Gamma(\boldsymbol{A}';c) \neq \varnothing$, причем $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a'_i = \delta(\boldsymbol{A};c)$ и $\delta_{k^*}(\boldsymbol{A}';c) = 0$, где $k^* = k^*(\boldsymbol{A};c)$.

Доказательство. Пусть вектор $\boldsymbol{F}$ удовлетворяет условию леммы 15. Рассмотрим произвольную c-реализацию $X(\boldsymbol{F}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{F}; c)$ с множеством узлов $U(n + n_1)$. Для $X(\boldsymbol{F})$ применим характеристическое уравнение (2.5) при $k^* = k^*(\boldsymbol{A}; c)$. Учитывая, что $\delta_{k^*}(\boldsymbol{F}; c) = 0$, получим

$$2\overline{\delta}(U_1^{k^*}) + \overline{\delta}(U_1^{k^*}, U_2^{k^*}) + \delta(U_2^{k^*}, U_3^{k^*} \cup U) + \delta(U_3^{k^*} \cup U) = 0,$$

где $U(n) = U_1^{k^*} \cup U_2^{k^*} \cup U_3^{k^*}$ – k^*-разбиение множества узлов $U(n)$ относительно вектора A и $U = \{u_{n+1}, \ldots, u_{n+n_1}\}$. Схематически на рис. 2 представлено k^*-разбиение узлов сети $X(F)$.

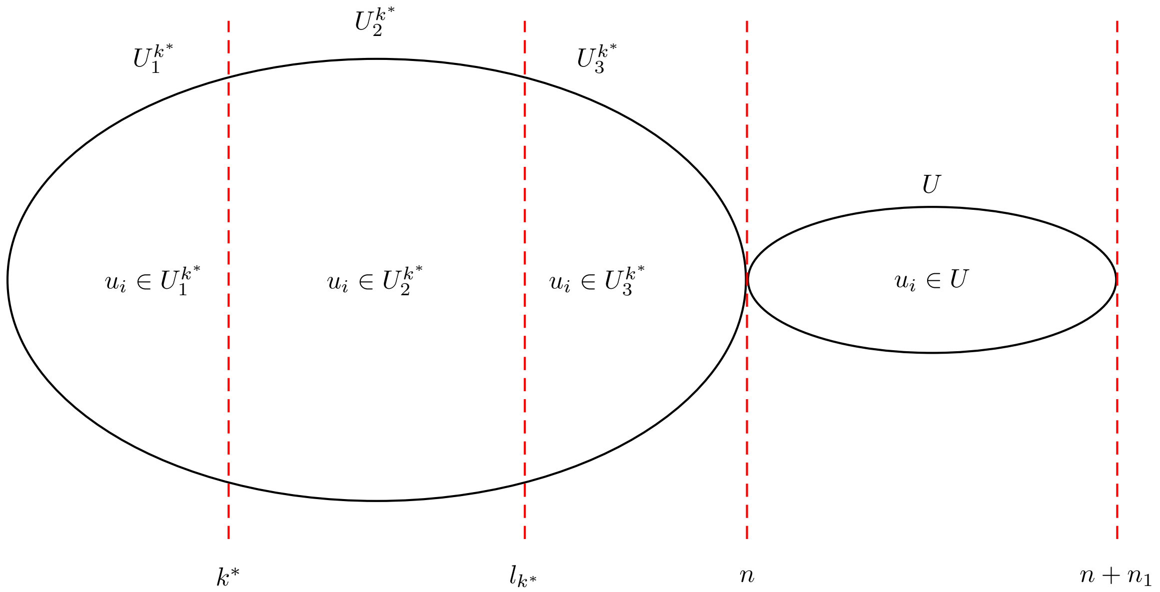


Рис. 2

Из равенств $\delta(U_2^{k^*}, U_3^{k^*} \cup U) = 0$ и $\delta(U_3^{k^*} \cup U) = 0$ следует, что $x_{ij} = 0$, $i > k^*$ и $j > l'_{k^*}(\boldsymbol{F}; c)$ и

$$\sum_{u_i \in U_1^{k^*}} \sum_{u_j \in U} x_{ij} = \delta(\boldsymbol{A}; c).$$

Следовательно, все дуги с положительными весами, инцидентные узлам из U, инцидентны только узлам из $U_1^{k^*}$. Удалим из сети $X(\boldsymbol{F})$ множество узлов U. Этим получим подсеть $X'(\boldsymbol{A}')$ сети $X(\boldsymbol{F})$, порожденную множеством узлов $U(n)$, и вектор $\boldsymbol{A}'$ удовлетворяет утверждению леммы.

Покажем, что величина $\delta(\boldsymbol{A}; c)$ есть наименьшая, на которую нужно уменьшить сумму координат вектора $\boldsymbol{A}$, чтобы получить вписанный в $\boldsymbol{A}$ c-реализуемый вектор.

`Лемма 17.` Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ и $A'' < A$. Если $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a''_i = \delta < \delta(\boldsymbol{A}; c)$, то $\Gamma(\boldsymbol{A}''; c) = \varnothing$.

Предположим, что $\Gamma(\boldsymbol{A}''; c) \neq \varnothing$ и $X(\boldsymbol{A}'') \in \Gamma(\boldsymbol{A}''; c)$. Очевидно, что существуют такие числа $a > 0$ и $n_1 \in \mathbb{Z}$, для которых $a < \min(a_n, 1, c)$ и $an_1 = \delta$. Добавим к сети $X(\boldsymbol{A}'')$ множество изолированных узлов $U = \{u_{n+1}, \ldots, u_{n+n_1}\}$ и получим новую сеть $Y = (y_{ij})$: $y_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \\ 0, n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1, \ \ n+1 \leqslant j \leqslant n+n_1, \end{cases}$

$$Y = \left(\begin{array}{c c c} y_{ij} = x_{ij} & \vdots & y_{ij} = 0 \\ 1 \leqslant i, j \leqslant n & \vdots & 1 \leqslant i \leqslant n \\ & \vdots & n+1 \leqslant j \leqslant n+n_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{ij} = 0 & \vdots & y_{ij} = 0 \\ n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1 & \vdots & n+1 \leqslant i, j \leqslant n+n_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n & \vdots & \end{array} \right).$$

Так как $a_i - a''_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n, \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a''_i = \delta$ и $an_1 = \delta$, то существует сеть $Y' = (y'_{ij})$, для которой $y'_{ij} = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$, или $n+1 \leqslant i, j \leqslant n+n_1$, причем

$$\sum_{j=n+1}^{n+n_1} y'_{ij} = a_i - a''_i, 1 \leqslant i \leqslant n:$$

$$Y' = \left(\begin{array}{ccc} y'_{ij} = 0 & \vdots & y'_{ij} \\ 1 \leqslant i, j \leqslant n & \vdots & 1 \leqslant i \leqslant n \\ & \vdots & n+1 \leqslant j \leqslant n+n_1 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ y'_{ij} & \vdots & y_{ij} = 0 \\ n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1 & \vdots & n+1 \leqslant i, j \leqslant n+n_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n & \vdots & \end{array} \right).$$

Для сети Y' имеет место $\delta(U(n)) = 0, \delta(U) = 0, \delta(U(n), U) = \delta$.

Рассмотрим сумму сетей $Z = Y + Y'$. Сеть $Z = Z(\boldsymbol{A}''')$ есть c-реализация вектора A''', где $a'''_i = \begin{cases} a_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \\ a, n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1, \end{cases}$ то есть $\Gamma(\boldsymbol{A}'''; c) \neq \varnothing$. Рассмотрим ХФ $(2.3')$ от вектора A''' при $k^* = k^*(\boldsymbol{A}; c)$: $\delta_{k^*}(\boldsymbol{A}'''; c) = ck^*(l'_{k^*}(\boldsymbol{A}'''; c) - 1) - \sum\limits_{i \leqslant k^*} a'''_i + \sum\limits_{i > l'_{k^*}(\boldsymbol{A}'''; c)} a'''_i = ck^*(l'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) - 1) - \sum\limits_{i \leqslant k^*} a_i + \sum\limits_{i > l'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c)} a_i + an_1 = \delta_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) + \delta = \delta - \delta(\boldsymbol{A}; c) < 0$. Следовательно, предположение $\Gamma(\boldsymbol{A}'''; c) \neq \varnothing$ неверно (теорема 14) и лемма 17 доказана.

Лемма 17 завершает доказательство теоремы 21.

Доказательство теоремы 22.

Если $\delta(\boldsymbol{A}; c) = 0$, то $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)}$ и утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$ и вектор $\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)}$ удовлетворяет (2.7). Положим $q = \max\{i : a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} < a_i\}$ – последний индекс координаты, уменьшаемой при переходе от вектора $\boldsymbol{A}$ к $\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)}$. Покажем, что $k^* \geqslant q$. Для этого вернемся к доказательству лемм 16, 17. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{F}$ и k^*-разбиение множества узлов $U(n) \cup U$ сети $X(\boldsymbol{F}; c)$. Из равенств $\overline{\delta}(U_1^{k^*}) = 0, \overline{\delta}(U_1^{k^*}, U_2^{k^*}) = 0$ следует: $a_i \geqslant cl'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) - c, 1 \leqslant i \leqslant k^*$; $ck^* \leqslant a_i \leqslant cl'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) - c, k^* < i \leqslant l'_{k^*}; a_i < ck^*, i > l'_{k^*}$.

Предположим, что $k^* < q$. Применим $(2.3')$ для очевидного тождества $\sum\limits_{i=1}^{q} a_i - \alpha(\boldsymbol{A};c)q = \delta(\boldsymbol{A};c)$. Учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{q} a_i = \sum\limits_{i=1}^{k^*} a_i + \sum\limits_{i=k^*+1}^{q} a_i$, получим $(l'_{k^*}(\boldsymbol{A};c)-1)ck^* + \sum\limits_{i>l'_{k^*}(\boldsymbol{A};c)} a_i + \sum\limits_{i=k^*+1}^{q} a_i - \alpha(\boldsymbol{A};c)q = 0$. Так как $\alpha(\boldsymbol{A};c)q = \alpha(\boldsymbol{A};c)k^* + \alpha(\boldsymbol{A};c)(q-k^*)$, то имеет место

$$(cl'_{k^*}(\boldsymbol{A};c) - c - \alpha(\boldsymbol{A};c))k^* + \sum_{i>l'_{k^*}(\boldsymbol{A};c)} a_i + \sum_{i=k^*+1}^{q} (a_i - \alpha(\boldsymbol{A};c)) = 0. \quad (2.9)$$

Из определения числа q следует $a_q - \alpha(\boldsymbol{A};c) > 0$. Так как $a_q \leqslant cl'_{k^*}(\boldsymbol{A};c) - c$, то $l'_{k^*}(\boldsymbol{A};c) - 1 - \alpha(\boldsymbol{A};c) > 0$. Следовательно, левая часть формулы (2.9) строго положительна, что является противоречием предположению $k^* < q$. Этим показано, что $k^* = k^*(\boldsymbol{A};c) \geqslant q$.

Перейдем к доказательству того, что вектор $\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)}$ – c-реализуем, то есть $\Gamma(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) \neq \varnothing$. Для этого покажем, что $\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A})};c) \geqslant 0\ \forall k,\ c \leqslant ck \leqslant a_k^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} + c$.

Рассмотрим два случая:

а) $1 \leqslant k \leqslant q$;

б) $cq < ck \leqslant a_k + c$.

а) Здесь $a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} = \alpha(\boldsymbol{A};c), 1 \leqslant i \leqslant q$ и достаточно показать $\delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant 0$ и $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant 0$, что следует из леммы 18 [30].

`Лемма 18.` Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $a_p = a_q$, где $q > p$, $cq \leqslant a_q + c$, причем $\delta_p(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0$ и $\delta_q(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0$. Тогда $\delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0\ \forall k, p \leqslant k \leqslant q$.

Рассмотрим разность ХФ $(2.3')$ для векторов $\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)}$ и $\boldsymbol{A}$ при $k = q$:

$$\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) - \delta_q(\boldsymbol{A};c) = cq(l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)-1) - \sum_{i=1}^{q} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} +$$

$$+ \sum_{i>l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} - cq(l'_q(\boldsymbol{A};c)-1) + \sum_{i=1}^{q} a_i - \sum_{i>l'_q(\boldsymbol{A};c)} a_i.$$

Так как $a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} = a_i$ при $i > q$ и $l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) = l'_q(\boldsymbol{A};c)$, то $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) - \delta_q(\boldsymbol{A};c) = \sum\limits_{i=1}^{q} a_i - \sum\limits_{i=1}^{q} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} = \delta(\boldsymbol{A};c)$. Следовательно, $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) = \delta(\boldsymbol{A};c) + \delta_q(\boldsymbol{A};c) \geqslant \delta(\boldsymbol{A};c) - \delta(\boldsymbol{A};c) = 0$.

Этим получили, что $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant 0$.

Отметим, что при $q = k^*$ имеет место $\delta_{k^*}(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) = \delta(\boldsymbol{A};c) + \delta_{k^*}(\boldsymbol{A};c) = 0$.

Если $q = 1$, то п. а доказан. Рассмотрим случай $q > 2$ и пусть $k = 1$. Здесь ХФ $(2.3')$ для вектора $\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)}$ имеет вид

$$\delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) = cl'_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) - c - \alpha(\boldsymbol{A};c) + \sum_{i > l'_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))}.$$

Предположим $\delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) < 0$. Тогда

$$\alpha(\boldsymbol{A};c) > cl'_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) - c + \sum_{i > l'_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))}. \tag{2.10}$$

При этом предположении рассмотрим $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)$. Имеет место

$$\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) = cq(l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) - 1) - \sum_{i=1}^{q} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} + \sum_{i > l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} =$$

$$= cq(l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) - 1) - \alpha(\boldsymbol{A};c)q + \sum_{i > l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))}.$$

Из (2.10) следует, что

$$\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) < cq(l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) - 1) -$$

$$- \left(c(l'_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) - 1) + \sum_{i > l'_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} \right) q +$$

$$+ \sum_{i > l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} = cq(l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) - l'_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)) - q \sum_{i > l'_1(\boldsymbol{A};c)+1} a_i +$$

$$+\sum_{l'_q(\boldsymbol{A};c)<i\leqslant l'_1(\boldsymbol{A};c)} a_i+\sum_{i>l'_1(\boldsymbol{A};c)} a_i=\sum_{l'_q(\boldsymbol{A};c)<i\leqslant l'_1(\boldsymbol{A};c)}(a_i-cq)-(q-1)\sum_{i>l'_1(\boldsymbol{A};c)} a_i.$$

Так как $a_i < cq$ при $i > l'_q(\boldsymbol{A};c)$ и $q \geqslant 1$, то $\delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) < 0$, что есть противоречие. Следовательно, $\delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant 0$. Из леммы 18 следует, что $\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant$ $\geqslant 0$ при $1 \leqslant k \leqslant q$.

б) Здесь $cq < ck \leqslant a_k + c$. Для разности значений ХФ $(2.3')$ от векторов $\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)}$ и $\boldsymbol{A}$ при этих k имеет место

$$\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)-\delta_k(\boldsymbol{A};c)=ck(l'_k(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)-1)-\sum_{i=1}^{k} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))}+$$

$$+\sum_{i>l'_k(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))}-ck(l'_k(\boldsymbol{A};c)-1)+\sum_{i=1}^{k} a_i-\sum_{i>l'_k(\boldsymbol{A};c)} a_i.$$

Так как $l'_k(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) = l'_k(\boldsymbol{A};c)$ и $a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))} = a_i$ при $i > q$, то

$$\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c)-\delta_k(\boldsymbol{A};c)=\sum_{i=1}^{k} a_i-\sum_{i=1}^{k} a_i^{(\alpha(\boldsymbol{A};c))}=\delta(\boldsymbol{A};c)$$

и $\delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) = \delta(\boldsymbol{A};c)+\delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant \delta(\boldsymbol{A};c)-\delta(\boldsymbol{A};c) = 0$. Отметим, если $k =$ $= k^*$ (и $k^* > q$), то $\delta_{k^*}(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A};c)};c) = \delta(\boldsymbol{A};c)+\delta_{k^*}(\boldsymbol{A};c) = \delta(\boldsymbol{A};c)-\delta(\boldsymbol{A};c) = 0$. Этим доказана теорема 22.

`Замечание 7`. Для случая $\Gamma(\boldsymbol{A};c) = \varnothing$ вписанный в $\boldsymbol{A}$ c-реализуемый вектор с наибольшей суммой координат определен неоднозначно (теоремы 21 и 22). Пусть $\boldsymbol{A} =$ $= (10,8,8,7,4,4,3,2) \in \overline{\mathbb{R}}^8_+$. Легко проверить, что $\Gamma(\boldsymbol{A};1) = \varnothing$ и $\delta(\boldsymbol{A};1) = 8$. Теорема 22 задает 1-реализуемый вектор $(6\frac{1}{4},6\frac{1}{4},6\frac{1}{4},6\frac{1}{4},5,4,4,3,2)$. Но 1-реализуем и вектор $(7,7,6,5,4,4,3,2)$, вписанный в $\boldsymbol{A}$, сумма координат которого также на 8 отличается от суммы координат вектора $\boldsymbol{A}$.

2.5. Ограничения для сумм весов дуг класса сетей без петель с фиксированными степенями узлов при произвольном разбиении множества узлов

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$, где $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$ и $U_1 \cup U_2 = U(n)$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ – разбиение множества $U(n)$. Разбиение множества $U(n)$ задает два подвектора $\boldsymbol{A}_1 = (a_i)$, $u_i \in U_1$, $\boldsymbol{A}_2 = (a_i)$, $u_i \in U_2$, и каждую сеть $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij})$ из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$ можно представить в виде $X(\boldsymbol{A}) = X_1(\boldsymbol{A}_1) + X_2(\boldsymbol{A}_2) + X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$, где $X_1(\boldsymbol{A}_1) = (x_{ij})$, $u_i, u_j \in U_1$, $X_2(\boldsymbol{A}_2) = (x_{ij})$, $u_i, u_j \in U_2$, $X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) = (x_{ij})$, $u_i \in U_1, u_j \in$ $\in U_2$. Приведем оценки снизу и сверху для сумм весов дуг $\delta(U_1)$, $\delta(U_2)$, $\delta(U_1, U_2)$. Напомним, что через $\tilde{\boldsymbol{A}}$ обозначается вектор, получаемый из вектора $\boldsymbol{A}$ упорядочиванием координат по невозрастанию. В теореме 21 содержится доказательство следующей леммы [30,36].

Лемма 19. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$, $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$ и $U(n) = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \varnothing$ – произвольное разбиение множества узлов $U(n)$. Тогда для любого представления сети $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}; c)$ в виде $X(\boldsymbol{A}) = X_1(\boldsymbol{A}_1) + X_2(\boldsymbol{A}_2) + X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ имеет место

$$\begin{gathered}
\delta(U_1) \leqslant \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{u_i \in U_1} a_i - \max(\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c))\Bigg), \\
\delta(U_2) \leqslant \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{u_i \in U_2} a_i - \max(\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c))\Bigg), \\
\delta(U_1, U_2) \geqslant \max(\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)),
\end{gathered} \tag{2.11}$$

где числа $\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c)$, $\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)$ определены формулой (2.6).

Для произвольной пары векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}_+^m$ и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} b_j, \tag{2.12}$$

найдется такое число $s_{\boldsymbol{A}}$, что

$$\sum_{j=1}^{m} \min(b_j, s_{\boldsymbol{A}}) = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Для пары векторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}})$, где

$$b_j^{\boldsymbol{A}} = \begin{cases} s_{\boldsymbol{A}}, & b_j \geqslant s_{\boldsymbol{A}}, \\ b_j, & b_j < s_{\boldsymbol{A}}, \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant m \tag{2.13}$$

выполняется условие замкнутости, то есть $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$.

Случай (2.12) в транспортных задачах называется открытым. В [29] получен следующий результат.

Лемма 20. Пусть для векторов $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^m_+$ справедливо (2.12). Для множества матриц

$$\Gamma_{\leqslant}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; c) = \{X(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (x_{ij}) : 0 \leqslant x_{ij} \leqslant c \ \forall i, j,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant b_j, 1 \leqslant j \leqslant m\}$$

имеет место

$$c(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}) = \min\{c : \Gamma_{\leqslant}(\boldsymbol{A}, B; c) \neq \varnothing\}.$$

В теореме 8 содержится доказательство следующей леммы [30,36].

Лемма 21. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$ и $U(n) = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \varnothing$ – произвольное разбиение множество узлов $U(n)$, где

$$\sum_{u_i \in U_1} a_i \leqslant \sum_{u_i \in U_2} a_i.$$

Тогда для любого представления сети $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}; c)$ в виде $X(\boldsymbol{A}) =$ $= X_1(\boldsymbol{A}_1) + X_2(\boldsymbol{A}_2) + X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ имеет место

$$\delta(U_1) \geqslant \frac{1}{2}\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c),$$

$$\delta(U_2) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{u_i \in U_2} a_i - \sum_{u_i \in U_1} a_i + \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c)\right), \tag{2.14}$$

$$\delta(U_1, U_2) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c),$$

где число $\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c)$ определено в формуле (1.7).

Объединим леммы 19 и 21 [30,36].

Теорема 23. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$, $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$ и $X(\boldsymbol{A})$ – произвольная сеть из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$. При любом разбиении множества узлов $U(n) = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ для сумм весов дуг $\delta(U_1), \delta(U_2), \delta(U_1, U_2)$ подсетей $X_1(\boldsymbol{A}_1), X_2(\boldsymbol{A}_2), X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ имеет место

$$\frac{1}{2}\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c) \leqslant \delta(U_1) \leqslant \frac{1}{2}\biggl(\sum_{u_i \in U_1} a_i - \max(\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c))\biggr),$$

$$\frac{1}{2}\biggl(\sum_{u_i \in U_2} a_i - \sum_{u_i \in U_1} a_i + \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c)\biggr) \leqslant \delta(U_2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\biggl(\sum_{u_i \in U_2} a_i - \max(\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c))\biggr),$$

$$\max(\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)) \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c).$$

Ниже будет показано, что усилить результат теоремы 23 невозможно.

Пример 10. Для вектора
$\boldsymbol{A} = (32, 32, 32, 32, 18, 18, 18, 18, 8, 8, 8, 8, 4, 4, 4)$ примеров 7 и 8 найдем оценки для сумм весов дуг $\delta(U_1)$, $\delta(U_2)$, $\delta(U_1, U_2)$ при $c = 4$, где $U(15) = U_1 \cup$ $\cup\ U_2$, – разбиение множества узлов: $U_1 = \{u_3, u_4, u_7, u_8, u_{11}, u_{12}, u_{15}\}$, $U_2 =$ $= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}, u_{14}\}$. Тогда $\boldsymbol{A}_1 = (32, 32, 18, 18, 8, 8, 4)$ и $\boldsymbol{A}_2 =$ $= (32, 32, 18, 18, 8, 8, 4, 4)$ и, как легко подсчитать,

$$\sum_{u_i \in U_1} a_i = 120 < \sum_{u_i \in U_2} a_i = 124.$$

Применяя (2.6), получим $\delta(\boldsymbol{A}_1;4) = 32$ и $\delta(\boldsymbol{A}_2;4) = 28$. Из теоремы 23 или леммы 19 следует, что

$$\delta(U_1) \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{u_i\in U_1} a_i - \delta(\boldsymbol{A}_1;4)\right) = \frac{1}{2}\,(120-32) = 44,$$

$$\delta(U_2) \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{u_i\in U_2} a_i - \delta(\boldsymbol{A}_1;4)\right) = \frac{1}{2}\,(124-32) = 46,$$

$$\delta(U_1,U_2) \geqslant \delta(\boldsymbol{A}_1;4) = 32.$$

По правилу (2.13) уменьшим сумму координат вектора $\boldsymbol{A}_2$ на 4: $\boldsymbol{A}_2^{\boldsymbol{A}_1} = (30,30,18,18,8,8,4,4)$. Применяя (1.7), получим $\delta(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2^{\boldsymbol{A}_1};4) = 12$. Из теоремы 23 или леммы 21 следует, что

$$\delta(U_1) \geqslant \frac{1}{2}\cdot 12 = 6,$$

$$\delta(U_2) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{u_i\in U_2} a_i - \sum_{u_i\in U_1} a_i + 12\right) = \frac{1}{2}(124-120+12) = 8,$$

$$\delta(U_1,U_2) \leqslant \sum_{u_i\in U_1} a_i - 12 = 120-12 = 108.$$

Итак получили, что для любой сети $X(\boldsymbol{A})$ из $\Gamma(\boldsymbol{A};4)$ имеет место

$$6 \leqslant \delta(U_1) \leqslant 44;\;\; 8 \leqslant \delta(U_2) \leqslant 46;\;\; 32 \leqslant \delta(U_1,U_2) \leqslant 108.$$

Очевидно, что для вектора $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, где $\Gamma(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing$, оценки для величин $\delta(U_1)$, $\delta(U_2)$ и $\delta(U_1,U_2)$ зависят от разбиения множества узлов $U(n) = U_1 \cup U_2$ и от параметра c.

2.6. Приложение в теории «Потоки в сетях»

Результаты, содержащиеся в теореме 23, имеют приложения в теории «Потоки в сетях». Рассмотрим усеченный сетевой многогранник $\Gamma(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing$, где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$. Любую неориентированную сеть из $\Gamma(\boldsymbol{A};c)$ можно рассматривать как ориентированную с симметричной матрицей весов дуг (пропускных способностей дуг). Пусть $U(n) = U_1 \cup U_2$, где $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ – произвольное разбиение множества узлов $U(n)$, которое задает разрез любой сети из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$. В подмножествах U_1 и U_2 выберем соответственно узлы-источники и узлы-стоки: $V_1 \subseteq U_1, V_2 \subseteq U_2$.

Рассмотрим классическую задачу о максимальном потоке. Пусть $X(\boldsymbol{A})$ – некоторая сеть из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$. Задача о вычислении максимального потока из множества источников V_1 в множество стоков V_2 сводится к двухполюсной. Добавляются два новых узла u_0 и u_{n+1} и множество дуг (u_0, u_i), где $u_i \in V_1$, и (u_{n+1}, u_i), где $u_i \in V_2$, для пропускных способностей которых полагается

$$x_{0i} = \sum_{u_j \in U(n)} x_{ij}, u_i \in V_1; \;\; x_{in+1} = \sum_{u_j \in U(n)} x_{ij}, u_i \in V_2.$$

Затем применяется известный алгоритм вычисления максимального потока «метод пометок».

Здесь рассматривается другая потоковая задача, в которой полагается, что сами узлы формируют пропускные способности дуг. Для разреза, определяемого разбиением множества узлов $U(n) = U_1 \cup U_2$, формула (см. $(2.11), (2.14)$)

$$\max(\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)) \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c) \qquad (2.15)$$

задает ограничения его пропускных способностей всех сетей из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$. Поэтому неравенства в (2.15) влияют на ограничения величины любого (в том числе и максимального) потока из множества источников V_1 в множество стоков V_2 для любой сети из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$. Будет показано, что неравенства из (2.15) задают точные нижнюю и верхнюю границы величины пропускной способности разреза $\delta(U_1, U_2)$.

Возможен случай, когда ограничения для величины $\delta(U_1, U_2)$ в (2.15) строгие. Но в общем случает услилить неравенства в (2.15) невозможно. Отметим также, что ограничения в неравенствах (2.11) и (2.14) для величин $\delta(U_1), \delta(U_2)$ в общем случае являются достижимыми. Покажем это на простых примерах, в которых рассмотрим и потоковые задачи.

Пример 11. Исследуем целочисленный вектор

$$A = (8, 8, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \in \overline{\mathbb{R}}^9_+$$

для а) $c = 1$ и б) $c = 2$ при разбиении множества узлов (вершин) $U(9) = U_1 \cup \cup U_2$, где $U_1 = \{u_2, u_7, u_8, u_9\}$, $U_2 = \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_6\}$. Здесь $\boldsymbol{A}_1 = (8, 2, 2, 2)$, $A_2 = (8, 2, 2, 2, 2)$. Пусть V_1 – множество узлов-источников из U_1 и V_2 – множество узлов-стоков из U_2.

а) Легко проверить, что $|\Gamma(\boldsymbol{A}; 1)| = 1$, причем единственная реализация $X(\boldsymbol{A}) = = (x_{ij})$ из $\Gamma(\boldsymbol{A}; 1)$ есть граф

$$X_1(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c} \\ 8 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 8 & 8 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Применяя (2.15), получим $5 \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant 11$. На рис 3. представлена геометрическая реализация сети (графа) $X_1(\boldsymbol{A})$.

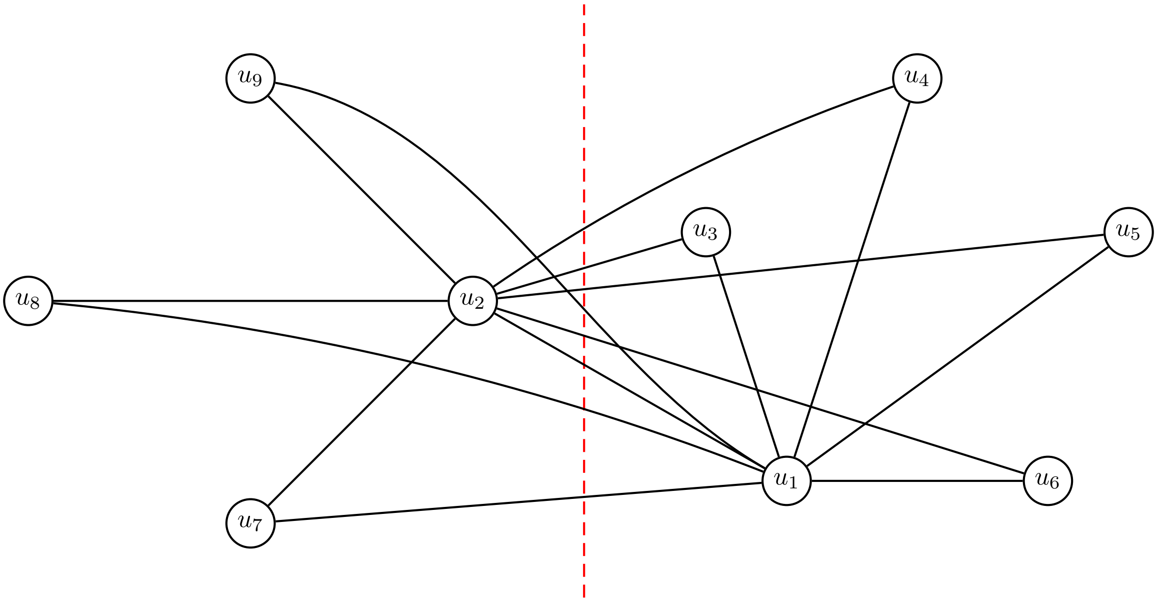


Рис. 3. $X_1(\boldsymbol{A})$

Легко видеть, что $\delta(U_1, U_2) = 8$ и $5 < \delta(U_1, U_2) < 11$ (здесь неравенства в (2.15) есть строгие). Отметим, что для сети $X_1(\boldsymbol{A})$ (любой сети из $\Gamma(\boldsymbol{A}; 1)$)

1) при каждом выборе V_1 и V_2 величина любого потока из V_1 в V_2 меньше, чем 11;

2) существуют такие V_1 и V_2, что величина максимального потока из V_1 в V_2 меньше, чем 5.

Для величин $\delta(U_1)$, $\delta(U_2)$ формулы из (2.11) и (2.14) дают следующий результат: $1{,}5 \leqslant \delta(U_1) \leqslant 4{,}5$ и $2{,}5 \leqslant \delta(U_2) \leqslant 5{,}5$. Однако $\delta(U_1) = 3$ и $\delta(U_2) = 4$ (неравенства в (2.11) и (2.14) также являются строгими).

б) При том же разбиении множества вершин для пропускной способности разреза из (2.15) получим

$$2 \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant 14. \tag{2.16}$$

Здесь нижняя и верхняя оценки пропускной способности разреза $\delta(U_1, U_2)$ достигаются. На рис. 4 и 5 изображены сети - мульгиграфы $X_2(\boldsymbol{A})$ и $X_3(\boldsymbol{A})$ из $\Gamma(\boldsymbol{A}; 2)$:

$$X_2(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c} \\ 8 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 8 & 8 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$X_3(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c} \\ 8 \\ 8 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 8 & 8 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

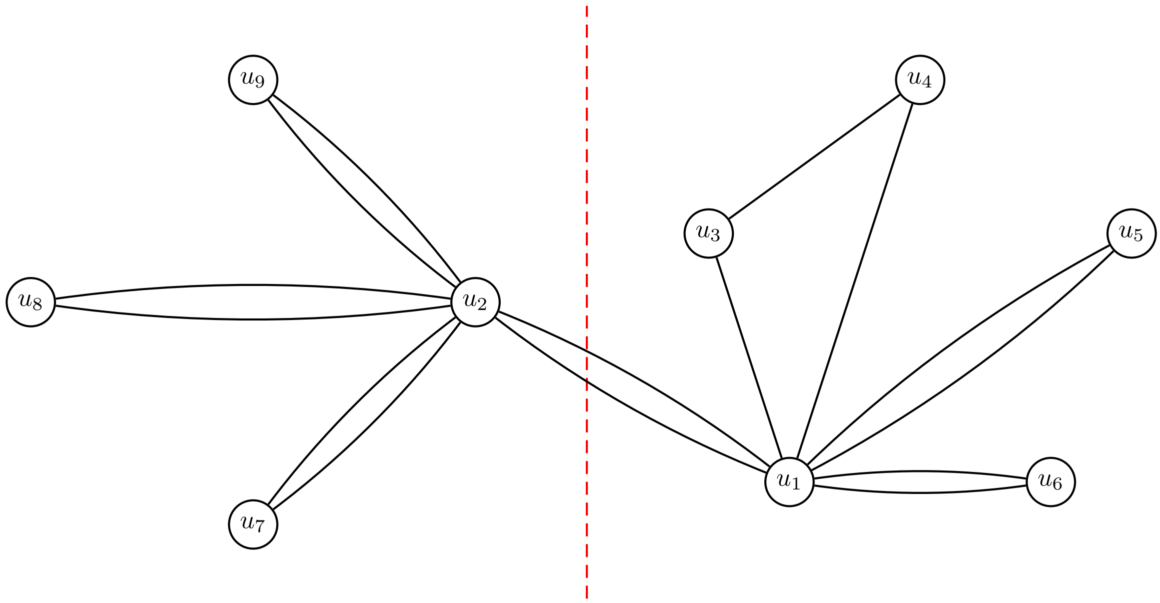


Рис. 4. $X_2(\boldsymbol{A})$

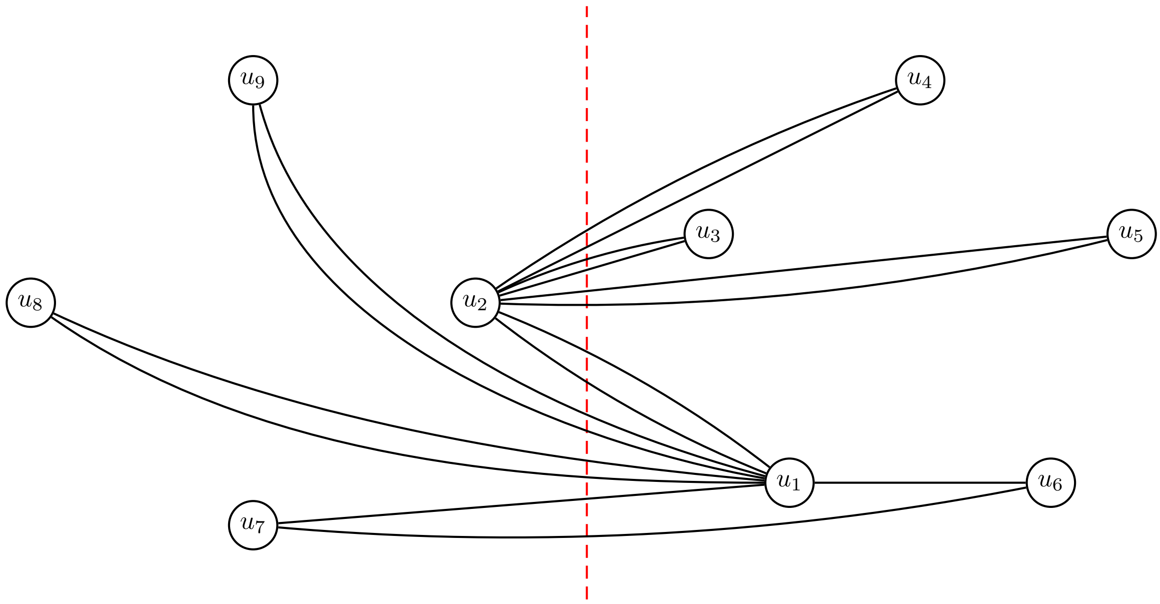


Рис. 5. $X_3(\boldsymbol{A})$

Легко видеть, что для сетей $X_2(\boldsymbol{A})$, $X_3(\boldsymbol{A})$ соответственно имеет место $\delta(U_1, U_2) = 2$ и $\delta(U_1, U_2) = 14$.

Отметим, что верхняя оценка (2.16) есть тривиальная, так как сумма координат вектора A_1 равна 14.

Нетрудно убедиться, что для сетей из $\Gamma(\boldsymbol{A}; 2)$

1) при любом выборе узлов-источников V_1 и узлов-стоков V_2 величина максимального потока из V_1 в V_2 имеет те же ограничения, что и величина пропускной способности разреза $\delta(U_1, U_2)$ (см. (2.16));

2) существует такая сеть (например, $X_2(\boldsymbol{A})$), в которой при любом выборе $V_1 \subseteq U_1$ и $V_2 \subseteq U_2$ величина максимального потока из V_1 в V_2 равна 2;

3) существует такая сеть (например, $X_3(\boldsymbol{A})$, где $V_1 = U_1$ и $V_2 = U_2$), в которой значение максимального потока из V_1 в V_2 равно 14.

Для величин $\delta(U_1)$ и $\delta(U_2)$, применяя формулы (2.11) и (2.14), получим

$$0 \leqslant \delta(U_1) \leqslant 6, \;\; 1 \leqslant \delta(U_2) \leqslant 7. \tag{2.17}$$

Легко видеть, что в первом мультиграфе $\delta(U_1) = 6$ и $\delta(U_2) = 7$ достигаются верхние ограничения в (2.17), а во втором мультиграфе $\delta(U_1) = 0$ и $\delta(U_2) = 1$ – нижние ограничения в (2.17).

`Пример 12.` Рассмотрим целочисленный вектор

$$\boldsymbol{A} = (5, 5, 4, 4, 4, 4, 2, 2) \in \overline{\mathbb{R}}_+^8$$

и $c = 1$. При разбиении множества узлов (вершин) $U(8) = U_1 \cup U_2$, где $U_1 = \{u_1, u_3, u_4, u_7\}$, $U_2 = \{u_2, u_5, u_6, u_8\}$ получим $A_1 = A_2 = (5, 4, 4, 2)$ и для пропускной способности разреза любой сети из $\Gamma(A; 1)$ (см. (2.15))

$$5 \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant 13. \tag{2.18}$$

Здесь нижняя и верхняя оценки для величины пропускной способности разреза $\delta(U_1, U_2)$ усеченного сетевого многогранника $\Gamma(\boldsymbol{A}; 1)$ являются точными. На рис. 6 и 7 изображены сети - графы

$$X_1(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c} \\ 5\\5\\4\\4\\4\\4\\2\\2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$X_2(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c} \\ 5\\5\\4\\4\\4\\4\\2\\2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

из $\Gamma(\boldsymbol{A}; 1)$, для которых соответственно $\delta(U_1, U_2) = 5$ и $\delta(U_1, U_2) = 13$.

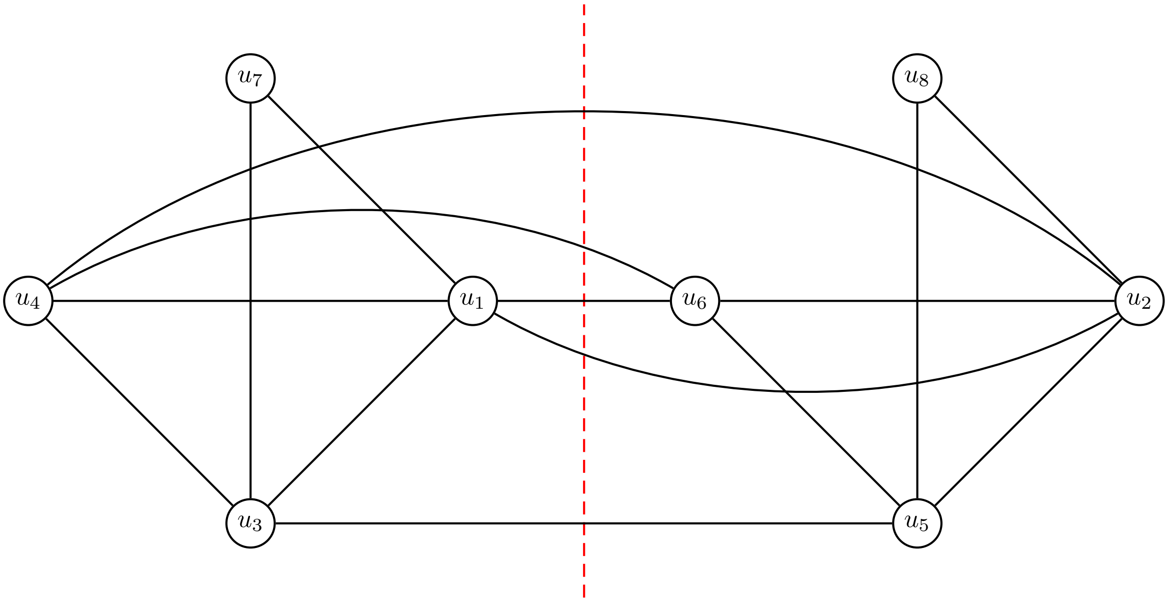


Рис. 6. $X_1(\boldsymbol{A})$

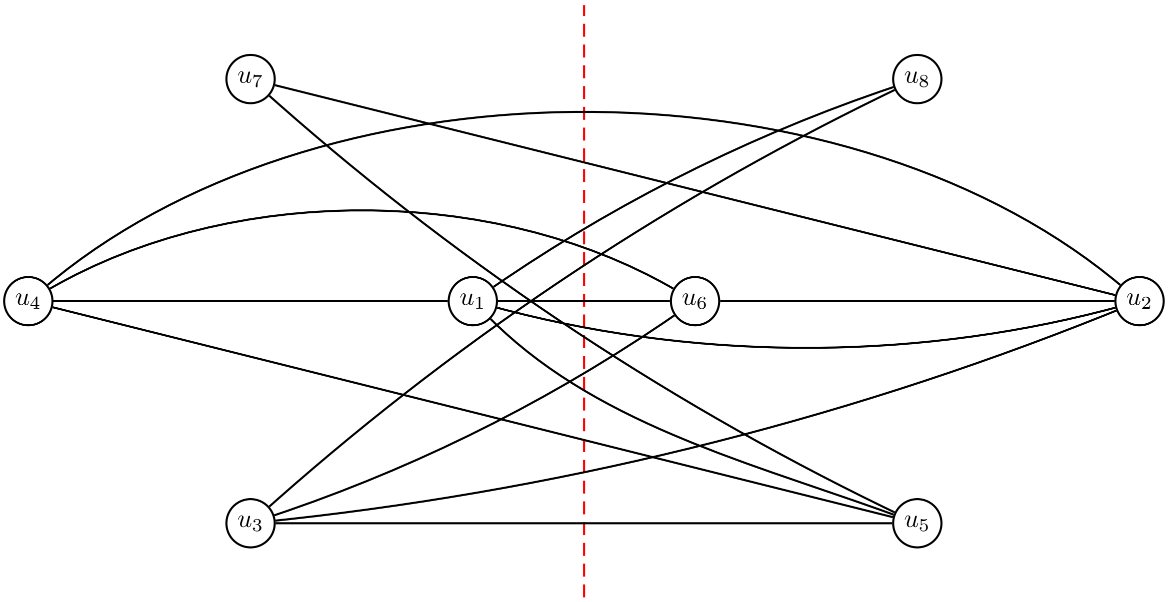


Рис. 7. $X_2(\boldsymbol{A})$

Рассмотрим величину $\delta(U_1) = \delta(U_2)$. Неравенства (2.11) и (2.14) задают ограничения

$$1 \leqslant \delta(U_1) \leqslant 5. \tag{2.19}$$

Легко видеть, что в первом графе достигается верхняя оценка (2.19), а во втором – нижняя оценка.

Пусть V_1 – множество узлов-источников из U_1 и V_2 – множество узлов-стоков из U_2. Применим формулу (2.18) для усеченного многогранника $\Gamma(\boldsymbol{A}; 1)$:

1) величина каждого потока из V_1 в V_2 любой сети не превосходит 13;

2) существует такая сеть (например, $X_2(\boldsymbol{A})$, где $V_1 = U_1$ и $V_2 = U_2$), в которой величина максимального потока равна 13;

3) существует такая сеть (например, $X_1(\boldsymbol{A})$), в которой величина максимального потока равна 5;

4) существует такая сеть (например, $X_1(\boldsymbol{A})$), где $V_1 = \{U_4\}$, $V_2 = \{U_2\}$ в которой величина максимального потока меньше 5.

Из теоремы 23 и примеров 11 и 12 следуют теоремы 24, 25 и замечание 8.

`Теорема 24.` Для любого вектора $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, где $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, и произвольного разбиения множества узлов $U(n) = U_1 \cup U_2$ оценки, приведенные в теореме 23, являются точными (достижимыми).

`Замечание 8.` Результаты теоремы 23 имеют приложение в теории графов и мультиграфов.

`Теорема 25.` Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $\Gamma(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing, U(n) = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \varnothing$, и $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$, где V_1 – множество узлов-источников и V_2 – множество узлов-стоков. Для сетей усеченного сетевого многогранника $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$ справедливы следующие утверждения:

а) для произвольной сети из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$ величина любого потока (в том числе и максимального) из V_1 в V_2 не превосходит верхней оценки значения пропускной способной разреза $\delta(U_1, U_2)$ формулы (2.15);

б) существует сеть из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$, в которой (например, при $V_1 = U_1$ и $V_2 = U_2$) величина максимального потока из V_2 в V_2 не менее нижней оценки значения $\delta(U_1, U_2)$ формулы (2.15);

в) если существует сеть, в которой значение $\delta(U_1, U_2)$ достигает верхней оценки из (2.15), то найдется сеть (например, при $V_1 = U_1$ и $V_2 = U_2$), где величина максимального потока из V_1 в V_2 равна правой части (2.15);

г) если существует сеть, в которой величина $\delta(U_1, U_2)$ достигает нижней оценки из (2.15), то найдется сеть, где величина максимального потока из V_1 в V_2 не превосходит левой части (2.15), причем существует сеть (например, когда $V_1 = U_1$ и $V_2 = U_2$) с величиной максимального потока, равной нижней оценки для $\delta(U_1, U_2)$.

III. Сети с петлями с фиксированными степенями узлов

3.1. Характеристические функции и условия c-реализуемости

Очевидно, что для любого вектора $\boldsymbol{A}$ из $\mathbb{R}^n_+$ имеет место $\Gamma_L(\boldsymbol{A}) \neq \varnothing$.

Определение 16. Для $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $c \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, характеристической функцией (ХФ) называется [17,19,20,28,33]

$$\Delta_k(\boldsymbol{A}; c) = ck^2 - \sum_{\substack{i \leqslant k \\ a_i \leqslant ck}} (ck - a_i) - \sum_{\substack{i \geqslant k+1 \\ a_i \geqslant ck}} (a_i - ck) - \sum_{i \leqslant k} a_i + \sum_{i \geqslant k+1} a_i. \quad (3.1)$$

Неотрицательность (3.1) есть необходимое условие c-реализуемости вектора в сеть с петлями [17,19,20,28,33].

Теорема 26. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $c \geqslant 0$. Если $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, то $\Delta_k(\boldsymbol{A}; c) \geqslant 0$ $\forall k, 1 \leqslant k \leqslant n$.

В случае упорядоченности координат вектора по невозрастанию, неотрицательность ХФ (3.1) является необходимым и достаточным условием c-реализуемости [17,19,20,28,33,39].

Теорема 27. Если $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$, то $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing \Longleftrightarrow \Delta_k(\boldsymbol{A}; c) \geqslant 0 \; \forall k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Отметим, что при $A \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ ХФ (3.1) имеет более простой вид:

$$\Delta_k(\boldsymbol{A}; c) = ck^2 - \sum_{\substack{i \geqslant k+1 \\ a_i \geqslant ck}} (a_i - ck) - \sum_{i \leqslant k} a_i + \sum_{i \geqslant k+1} a_i, c \leqslant ck \leqslant a_k; \quad (3.2)$$

$$\Delta_k(\boldsymbol{A}; c) = ck^2 - \sum_{\substack{i \leqslant k \\ a_i \leqslant ck}} (ck - a_i) - \sum_{i \leqslant k} a_i + \sum_{i \geqslant k+1} a_i, k \leqslant n, ck \geqslant a_k.$$

Имеет место

Лемма 22. Если $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$, то $\Delta_k(\boldsymbol{A}; c) \geqslant 0 \, \forall k, c \leqslant ck \leqslant a_k \Longleftrightarrow \Delta_k(\boldsymbol{A}; c) \geqslant$ $\geqslant 0 \, \forall k, k \leqslant n, ck \geqslant a_k$.

Поэтому справедлива [17,19,20,28,33,39]

Теорема 28. Если $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$, то а) $\Gamma_L(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing \Longleftrightarrow \Delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0\ \forall k, c \leqslant ck \leqslant a_k$.

б) $\Gamma_L(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing \Longleftrightarrow \Delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0\ \forall k, k \leqslant n, ck \geqslant a_k$.

В дальнейшем будем применять ХФ (3.2) и ее упрощенный вид

$$\Delta_k(\boldsymbol{A};c) = ckl'_k(\boldsymbol{A};c) - \sum_{i\leqslant k} a_i + \sum_{i>l'_k(\boldsymbol{A};c)} a_i, \qquad (3.2')$$

где $l'_k(\boldsymbol{A};c)$ определено в $(2.3')$.

Пример 13. Применим ХФ (3.2) к вектору

$$\boldsymbol{A} = (35,35,35,35,20,20,20,20,8,8,8,8,4,4,4) \in \overline{\mathbb{R}}_+^{15}$$

при $c = 2$. Получим $\Delta_1(\boldsymbol{A};2) = -5$, $\Delta_2(\boldsymbol{A};2) = -10$, $\Delta_3(\boldsymbol{A};2) = -21$, $\Delta_4(\boldsymbol{A};2) = -32$, $\Delta_5(\boldsymbol{A};2) = -36$, $\Delta_6(\boldsymbol{A};2) = -40$,
$\Delta_7(\boldsymbol{A};2) = -44$, $\Delta_8(\boldsymbol{A};2) = -48$ и $\min_k \Delta_k(\boldsymbol{A};2) = \Delta_8(\boldsymbol{A};2) = -48$. Из теоремы 28 следует, что $\Gamma_L(\boldsymbol{A};2) = \varnothing$.

Вектор $\boldsymbol{A}$ из $\overline{\mathbb{R}}_+^{15}$ примера 13 будет исследоваться во всех примерах разделов 3.1–3.5.

Пример 14. К вектору $\boldsymbol{A}$ примера 13 при $c = 4$ применим ХФ (3.2). Тогда $\Delta_1(\boldsymbol{A};4) = 25$, $\Delta_2(\boldsymbol{A};4) = 38$, $\Delta_3(\boldsymbol{A};4) = 35$, $\Delta_4(\boldsymbol{A};4) = 32$, $\Delta_5(\boldsymbol{A};4) = 44$. Из теоремы 28 следует, что $\Gamma_L(\boldsymbol{A};4) \neq \varnothing$.

3.2. Минимакс и наследственно минимаксная матрица смежности для сетей с петлями

Для вектора $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$ вычислим наименьшее значение $c = c_L(\boldsymbol{A})$, при котором $\Gamma_L(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing$.

Определение 17. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$. Значение

$$c_L(\boldsymbol{A}) = \min\{c : \Gamma_L(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing\}$$

называется минимаксом для $\boldsymbol{A}$ или $\Gamma_L(\boldsymbol{A};c_L)$ [17,19,20,28,33,39].

В [17,19,20,28,33] минимакс $c_L(\boldsymbol{A})$ называется весом вектора $\boldsymbol{A}$.

Легко видеть справедливость тождества

$$\min\{c : \Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing\} = \min_{X(\boldsymbol{A}) \in \Gamma_L(\boldsymbol{A})} \max_{i,j}\{x_{ij} : X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij})\}.$$

Для минимакса имеет место [17,19,20,28,33].

Теорема 29. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Величина c является минимаксом ($c = c_L(\boldsymbol{A})$) $\Longleftrightarrow \Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$ и $\exists p \in \mathbb{Z}, c \leqslant cp \leqslant a_p$, что $\Delta_p(\boldsymbol{A}; c) = 0$.

Перейдем к построению формулы вычисления минимакса $c_L(\boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Для $\forall\ (t, r) \in T'(\boldsymbol{A})$ (см. (2.4)) построим систему соотношений

$$\begin{cases} c_{tr} = \dfrac{\sum\limits_{i \leqslant t} a_i - \sum\limits_{i > r} a_i}{tr}, \\ c_{tr} t > a_{r+1}, \ \ r < n, \\ c_{tr} t \leqslant a_r, \ \ r > t. \end{cases} \tag{3.3}$$

Положим $c_{tr} = 0$, если (3.3) не имеет решений.

Теорема 30. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Тогда

$$c_L(\boldsymbol{A}) = \max_{(t,r) \in T'(\boldsymbol{A})} c_{tr}.$$

Доказательство. Положим $c_{pq} = \max\limits_{(t,r) \in T'(\boldsymbol{A})} c_{tr}$. Из равенства в (3.3) следует $c_{pq} pq - \sum\limits_{i \leqslant p} a_i + \sum\limits_{i > q} a_i = 0$, а из неравенств в (3.3) следует $q = l'_p(\boldsymbol{A}; c_{pq})$. Поэтому

$$\Delta_p(\boldsymbol{A}; c_{pq}) = c_{pq} pq - \sum_{i \leqslant p} a_i + \sum_{i > q} a_i = 0.$$

Применяя (3.3), получим

$$\Delta_p(\boldsymbol{A}; c_{pq}) = c_{pq} p^2 - \sum_{\substack{i \geqslant p+1 \\ a_i \geqslant c_{pq} p}} (a_i - c_{pq} p) - \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i > p} a_i = 0.$$

Теперь очевидно, что при $c < c_{pq}$ имеет место $\Delta_p(\boldsymbol{A}; c) < 0$. Из теоремы 28 следует, что $c_L(\boldsymbol{A}) \geqslant c_{pq} = \max\limits_{(t,r)\in T'(\boldsymbol{A})} c_{tr}$. Применяя теорему 29 получим, что $\exists\ p \in \mathbb{Z}$, $c \leqslant cp \leqslant a_p$, при котором

$$\Delta_p(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A})) = c_L(\boldsymbol{A}) p l'_p(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A})) - \sum_{i\leqslant p} a_i + \sum_{i > l'_p(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A}))} a_i = 0.$$

Поэтому

$$c_L(\boldsymbol{A}) = \frac{\sum\limits_{i\leqslant p} a_i - \sum\limits_{i > l'_p(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A}))} a_i}{p l'_p(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A}))} = c_{p l'_p(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A}))}.$$

Из соотношений $c_L(\boldsymbol{A}) \geqslant \max\limits_{(t,r)\in T'(A)} c_{tr}$ и $c_L(\boldsymbol{A}) = c_{p l'_p(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A}))}$ следует утверждение теоремы.

Определение 18. Сети с петлями (матрицы) из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A}))$ называются минимаксными.

Следующая теорема характеризует минимаксные матрицы [17,19,20,28,33].

Теорема 31. Если $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ и $\Delta_p(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A})) = 0$, где $c \leqslant cp \leqslant a_p$, то для $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma_L(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A}))$ имеет место

$$x_{ij} = \begin{cases} c_L(\boldsymbol{A}), (i,j) \in \{(i,j) : 1 \leqslant i, j \leqslant p\} \cup \\ \cup \{(i,j) : 1 \leqslant i \leqslant p, p < j \leqslant l'_p\} \cup \{(i,j) : p < i \leqslant l'_p, 1 \leqslant j \leqslant p\}; \\ 0, (i,j) \in \{(i,j) : p < i \leqslant n, l'_p < j \leqslant n\} \cup \\ \cup \{(i,j) : l'_p < i \leqslant n, p < j \leqslant l'_p\}. \end{cases}$$

Упростим вычисление минимакса $c_L(\boldsymbol{A})$. Обозначим $T_L(n) = \{(i,i) : 1 \leqslant \leqslant i \leqslant n\}$. Покажем, что при нахождении минимакса можно удалить все неравенства из (3.3) и при вычислении $c_L(\boldsymbol{A})$ рассматривать только пары индексов из $T_L(\boldsymbol{A}) = = T_L(n) \cup T''(\boldsymbol{A})$ (см. лемму 12). Для этого докажем две леммы.

Лемма 23. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ и

$$c_{tq} = \max_{\substack{1<r\leqslant n \\ (t,r)\in T'(\boldsymbol{A})\setminus T'(n)}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>r} a_i}{tr} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{tq}.$$

Тогда а) $c_{tq}t \geqslant a_{q+1}$ (если $q < n$), причем $c_{tq}t = a_{q+1} \Longleftrightarrow c_{tq} = c_{tq+1}$, и

б) $c_{tq}t \leqslant a_q$.

Доказательство а) Пусть $q < n$. Для разности $c_{tq} - c_{tq+1}$, аналогично п. а леммы 12, получим

$$c_{tq} - c_{tq+1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{tq} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q+1} a_i}{t(q+1)} =$$

$$= \frac{1}{tq} \cdot (c_{tq+1}t - a_{q+1}).$$

Предположим, что $c_{tq}t < a_{q+1}$. Тогда $c_{tq} - c_{tq+1} < \dfrac{1}{q}(c_{tq+1} - c_{tq})$ и $(c_{tq} - c_{tq+1})\dfrac{q+1}{q} < 0$, что противоречит условию леммы.

Пусть $c_{tq}t = a_{q+1}$. Тогда $(c_{tq} - c_{tq+1})\dfrac{q+1}{q} = 0$, что справедливо тогда и только тогда, когда $c_{tq} = c_{tq+1}$.

б) Пусть $q > 1$. Предположим $c_{tq}t > a_q$. Тогда для разности $c_{tq} - c_{tq-1}$, так же как и в п. б доказательства леммы 12, получим

$$c_{tq} - c_{tq-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{tq} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i>q-1} a_i}{t(q-1)} =$$

$$= \frac{1}{t(q-1)}(a_q - c_{tq}t) < 0,$$

что противоречит условию леммы. Этим лемма доказана.

Замечание 9. Из леммы 23 следует, что в системе (3.3) второй индекс r можно рассматривать только в случае $a_r > a_{r+1}$ (если $r \neq n$).

Лемма 24. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_{+}^{n}$. Если $c_{pq} = c_L(\boldsymbol{A})$ и $a_p = a_{p+1}$, то $c_{p+1q} = c_L(\boldsymbol{A})$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 13, для разности $c_{pq} - c_{p+1q}$, где $q > p$, получим

$$c_{pq} - c_{p+1q} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{pq} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{p+1} a_i - \sum\limits_{i>q} a_i}{(p+1)q} =$$

$$= \frac{1}{(p+1)q}(c_{pq}q - a_{p+1}).$$

Очевидно, что $c_{pq}q \leqslant a_p = a_{p+1}$. Поэтому, $c_{pq} - c_{p+1q} = c_L(\boldsymbol{A}) - c_{p+1q} \leqslant 0$. Так как $c_L(\boldsymbol{A}) = \max\limits_{(t,r)\in T'(\boldsymbol{A})} c_{tr} = c_{tq}$, то $c_{pq} - c_{p+1q} \geqslant 0$. Следовательно, $c_L(\boldsymbol{A}) = c_{p+1q}$.

Лемма 23 исключает из системы (3.3) все неравенства. Следовательно, если $c_{tq} = \max\limits_{(t,r)\in T'(\boldsymbol{A})\setminus T'(n)} c_{tr}$, то для значения c_{tq} заведомо имеет место $c_{tq}t \leqslant a_q$ и, учитывая замечание к лемме 23, $c_{tq}t > a_{q+1}$ (если $q \neq n$). Поэтому из теоремы 31 и лемм 23, 24 следует [32]

Теорема 32. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_{+}^{n}$. Тогда

$$c_L(\boldsymbol{A}) = \max_{(t,r)\in T_L(\boldsymbol{A})} \frac{\sum\limits_{i\leqslant t} a_i - \sum\limits_{i>r} a_i}{tr}.$$

Определение 19. Сеть с петлями–матрица $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij})$ называется равномерной, если справедливы два условия [19,28]:

а) $a_i = a_p, a_j = a_q \Longrightarrow x_{ij} = x_{pq}$,

б) $a_i \geqslant a_p, a_j \geqslant a_q \Longrightarrow x_{ij} \geqslant x_{pq}$.

Каждая неотрицательная симметричная матрица $X = (x_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, где $x_{ii} = 0$, задает вектор $\boldsymbol{A}$, для которого $a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$, и $X = X(\boldsymbol{A}) \in \Gamma_L(\boldsymbol{A})$. Будем говорить, что матрица (сеть с петлями) X задает вектор $\boldsymbol{A}$.

Определение 20. Сеть с петлями (минимаксная) называется наследственно минимаксной, если каждая подсеть и каждая двудольная подсеть, порожденные своими узлами, есть минимаксные.

Из теоремы 32 следует лемма, в которой заключен алгоритм построения наследственно минимаксной сети с петлями.

Лемма 25. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma_L(\boldsymbol{A}; c_L(\boldsymbol{A}))$, причем $c_L(\boldsymbol{A}) = c_{kq}$. Тогда для пары векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'')$ и вектора $\boldsymbol{A}'''$, где $a_i' = a_i - c_L(\boldsymbol{A})(q-1)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $a_i'' = a_i$, $q < i \leqslant n$, $a_i''' = a_i - c_L(\boldsymbol{A})(q-k)$, $k < i \leqslant q$, имеет место $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'') \in \overline{\mathbb{R}}_+^{k,n-q}$, $\boldsymbol{A}''' \in \overline{\mathbb{R}}_{+,=}^{q-k}$ и $\Gamma_L(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}''; c_L(\boldsymbol{A})) \neq \varnothing$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}'''; c_L(\boldsymbol{A})) \neq \varnothing$.

Алгоритм 3. Построение наследственно минимаксной сети с петлями.

Пусть $\boldsymbol{A}$ – произвольный вектор из $\overline{\mathbb{R}}_+^n$. Наследственно минимаксная сеть строится следующим образом.

Шаг 1. Применяется теорема 32 для вычисления минимакса

$$c_L(\boldsymbol{A}) = \max_{(t,r)\in T(\boldsymbol{A})} \frac{\sum\limits_{i\leqslant t} a_i - \sum\limits_{i>r} a_i}{tr} = c_{kq}.$$

Числа c_{kq}, k, q задают веса дуг искомой сети (элементы симметричной матрицы) $X(\boldsymbol{A})$, равные $c_L(\boldsymbol{A})$ и равные 0 (теорема 31).

Шаг 2. Применяя лемму 25, вычисляются пара векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'')$ и вектор $\boldsymbol{A}'''$. Для пары векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'')$ применяется алгоритм 1 для построения наследственно минимаксной двудольной сети. Так будут найдены веса дуг x_{ij} искомой сети $X(\boldsymbol{A})$, где $1 \leqslant i \leqslant k, q < j \leqslant n$.

Далее для вектора $\boldsymbol{A}'''$ применяются шаги 1 и 2 данного алгоритма.

И т.д.

Очевидно, что построенная таким образом матрица $X(\boldsymbol{A})$ есть равномерная. Справедлива следующая (без доказательства) [32]

Теорема 33. а) Сеть с петлями $X(\tilde{\boldsymbol{A}})$, где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, построенная алгоритмом 3, является единственной наследственно минимаксной сетью сетевого многогранника $\Gamma_L(\tilde{\boldsymbol{A}})$.

б) Любой многогранник $\Gamma_L(\boldsymbol{A})$, где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, содержит одну и только одну наследственно минимаксную сеть с петлями.

Пример 15. Построим наследственно минимаксную сеть с петлями (матрицу) $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\boldsymbol{A}; c)$, где $\boldsymbol{A}$ – вектор примера 13.

Найдем минимакс $c_L(\boldsymbol{A})$. Здесь $T_L(\boldsymbol{A}) = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (4,8); (4,12); (4,15); (5,5); (6,6); (7,7); (8,8); (8,12); (8,15); (9,9); (10,10); (11,11); (12,12); (12,15); (13,13); (14,14); (15,15)\}$. Применяя равенство системы (3.3), вычислим величины c_{tr}, где $(t,r) \in T(\boldsymbol{A})$:

$c_{11} = -194$ $c_{22} = -31$, $c_{33} = -6$, $c_{44} = 1$, $c_{48} = 3$, $c_{4\ 12} = 2\frac{2}{3}$, $c_{4\ 15} = 2\frac{1}{3}$, $c_{55} = 2\frac{6}{25}$, $c_{66} = 2\frac{2}{3}$, $c_{77} = 2\frac{38}{49}$, $c_{88} = 2\frac{3}{4}$, $c_{8\ 12} = 2\frac{1}{6}$, $c_{8\ 15} = 1\frac{5}{6}$, $c_{99} = 2\frac{10}{27}$, $c_{10\ 10} = 2\frac{2}{25}$, $c_{11\ 11} = 1\frac{103}{121}$, $c_{12\ 12} = 1\frac{2}{3}$, $c_{12\ 15} = 1\frac{2}{5}$, $c_{1313} = 1\frac{79}{169}$, $c_{1414} = 1\frac{15}{49}$, $c_{1515} = 1\frac{13}{75}$.

Из теоремы 32 следует, что $c_L(\boldsymbol{A}) = 3$, причем $c_{48} = 3$. Числа 3, 4, 8 задают веса дуг искомой сети $X(\boldsymbol{A})$, равные 3 и равные 0. Учитывая симметричность матрицы $X(\boldsymbol{A})$, получим

$$X(\boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{c:c:c}
\multicolumn{2}{c:}{\begin{matrix} x_{ij}=3 \\ 1\leqslant i\leqslant 4 \\ 1\leqslant j\leqslant 8 \end{matrix}} & \begin{matrix} X_1=(x_{ij}) \\ 1\leqslant i\leqslant 4 \\ 9\leqslant j\leqslant 15 \end{matrix} \\
\hdashline
\begin{matrix} x_{ij}=3 \\ 5\leqslant i\leqslant 8 \\ 1\leqslant j\leqslant 4 \end{matrix} & \begin{matrix} X_2=(x_{ij}) \\ 5\leqslant i\leqslant 8 \\ 5\leqslant j\leqslant 8 \end{matrix} & \begin{matrix} x_{ij}=0 \\ 5\leqslant i\leqslant 15 \\ 9\leqslant j\leqslant 15 \end{matrix} \\
\cdashline{1-2}
\begin{matrix} X_3=x_{ij} \\ 9\leqslant i\leqslant 15 \\ 1\leqslant j\leqslant 4 \end{matrix} & \begin{matrix} x_{ij}=0 \\ 9\leqslant i\leqslant 15 \\ 5\leqslant j\leqslant 8 \end{matrix} &
\end{array}\right).$$

Лемма 25 строит: а) пару векторов $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'') = ((11,11,11,11), (8,8,8,8,4,4,4))$ и б) вектор $\boldsymbol{A}''' = (8,8,8,8)$.

а) Пара $(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'')$ задает двудольную подсеть $X_1 = (x_{ij}), 1 \leqslant i \leqslant 4, 9 \leqslant j \leqslant 15$, искомой матрицы $X(\boldsymbol{A})$. Применяя алгоритм 1 получим, что

$$X_1 = \begin{array}{c} \\ 11 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 4 & 4 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Так как $X(\boldsymbol{A})$ – симметричная матрица, то подматрица X_1 определяет матрицу $X_3 = (x_{ij}), 9 \leqslant i \leqslant 15, 1 \leqslant j \leqslant 4$:

$$X_3 = \begin{array}{c} \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 11 & 11 & 11 & 11 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

б) Очевидно, что вектор $\boldsymbol{A}'''$ задает равномерную матрицу $X_2 = (x_{ij}), 5 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant 8, 5 \leqslant j \leqslant 8$. Поэтому

$$X_2 = \begin{array}{c} \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 8 & 8 & 8 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Этим построена наследственно минимаксная матрица

$$X(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c} \\ 35\\35\\35\\35\\20\\20\\20\\20\\8\\8\\8\\8\\4\\4\\4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} 35 & 35 & 35 & 35 & 20 & 20 & 20 & 20 & 8 & 8 & 8 & 8 & 4 & 4 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3.3. Характеристические уравнения

Пусть $X = (x_{ij}), 1 \leqslant i, j \leqslant n$ – произвольная сеть с петлями. Для подмножества $U \subseteq U(n)$ введем обозначения для сумм весов петель: $\delta_L(U) = \sum\limits_{u_i \in U} x_{ii}$, $\overline{\delta}_L(U) = c|U| - \delta_L(U)$.

Определение 21. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}^n_+$ и $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$. Если $c \leqslant ck \leqslant a_k$, то k-разбиением множества узлов $U(n)$ любой сети $X \in \Gamma(\boldsymbol{A}; c)$ относительно вектора $\boldsymbol{A}$ называется представление $U(n) = U_1^k \cup U_2^k \cup U_3^k$, где $U_1^k = \{u_i : i \leqslant k\}$, $U_2^k = \{u_i : i > k, a_i \geqslant ck\}, U_3^k = \{u_i : i > k, a_i < ck\}$.

Сумма весов дуг на подмножествах k-разбиения связана с ХФ следующим соотношением [17,19,20,28,33,39].

Теорема 34. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $\Gamma_L(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing$. Тогда $\forall\ X \in \Gamma(\boldsymbol{A};c)$ имеет место:

$$\begin{gathered}\Delta_k(\boldsymbol{A};c) = 2\overline{\delta}(U_1^k) + \overline{\delta}_L(U_1^k) + \overline{\delta}(U_1^k, U_2^k) + \\ +\delta(U_2^k, U_3^k) + \delta_L(U_3^k) + 2\delta(U_3^k), c \leqslant ck \leqslant a_k.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Замечание 10. В [17,19,20,28,33] представлено расширенное определение k-разбиения и построены характеристические уравнения (включая случай $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$) для $\forall k, 1 \leqslant k \leqslant n$.

Определение 22. Соотношение (3.4) называется характеристическим уравнением.

3.4. Приведение вектора к c-реализуемости в сеть с петлями

Обозначим $\mathfrak{M}_L(\boldsymbol{A};c) = \{\boldsymbol{D} : \boldsymbol{D} \leqslant \boldsymbol{A}, \Gamma_L(\boldsymbol{D};c) \neq \varnothing\}$ – множество всех c-реализуемых векторов, вписанных в $\boldsymbol{A}$. В данном параграфе для произвольного вектора $\boldsymbol{A}$ будет найден c-реализуемый вектор из $\mathfrak{M}_L(\boldsymbol{A};c)$ с наибольшей суммой координат.

Применяя ХФ (3.2) для $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ введем обозначение

$$\Delta(\boldsymbol{A};c) = \begin{cases} |\min\limits_k \Delta_k(\boldsymbol{A};c)|, \Gamma_L(\boldsymbol{A};c) = \varnothing, \\ 0, \Gamma_L(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing. \end{cases} \tag{3.5}$$

Если $\Delta(\boldsymbol{A};c) > 0$, то положим $k^* = k^*(\boldsymbol{A};c)$ – такое число, что $\Delta(\boldsymbol{A};c) = |\Delta_{k^*}(\boldsymbol{A};c)|$. Заметим, что индекс k^* определен неоднозначно.

Основные результаты раздела III сформулированы в теоремах 35 и 36 [33,36–39].

Теорема 35. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда

$$\max_{\boldsymbol{D} \in \mathfrak{M}_L(\boldsymbol{A};c)} \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n a_i - \Delta(\tilde{\boldsymbol{A}};c),$$

где вектор $\tilde{\boldsymbol{A}}$ получен из вектора $\boldsymbol{A}$ упорядочиванием его координат по невозрастанию.

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$ и $c \geqslant 0$. Очевидно, что существует $\alpha_L(\boldsymbol{A};c)$, для которого

$$\sum_{i=1}^n a_i - \Delta(\tilde{\boldsymbol{A}};c) = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_L(\boldsymbol{A};c), a_i).$$

По правилу (1.8) величина $\alpha = \alpha_L(\boldsymbol{A}; c)$ задает вектор

$$\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)} = (a_1^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))}, \ldots, a_n^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))}). \tag{3.6}$$

Теорема 36. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда $\Gamma_L(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)}; c) \neq \varnothing$.

Доказательство теоремы 35 следует из лемм 26–28, в которых будем предполагать упорядоченность координат вектора по невозрастанию.

Построим конструкцию, которая позволит доказать теорему 35.

Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) = \varnothing$. Дополним вектор $\boldsymbol{A}$ координатами, значения которых ”малы”, а сумма которых равна $\Delta(\boldsymbol{A}; c)$, и покажем, что полученный вектор c-реализуем. Пусть $\boldsymbol{F} = (f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+n_1})$ – такой вектор, что

$$f_i = \begin{cases} a_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \\ a, n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1, \end{cases} \tag{3.7}$$

причем $an_1 = \Delta(\boldsymbol{A}; c)$, $a < \min(1, c, a_n)$.

Лемма 26. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) = \varnothing$. Тогда $\Gamma_L(\boldsymbol{F}; c) \neq \varnothing$, причем $\Delta_{k^*}(\boldsymbol{F}; c) = 0$.

Доказательство. Из определения числа $l'_k(\boldsymbol{A}; c)$ легко видеть, что $l'_k(\boldsymbol{F}; c) = l'_k(\boldsymbol{A}; c)$, $c \leqslant ck \leqslant f_k$. Поэтому из $(3.2')$ следует, что $\Delta_k(\boldsymbol{F}; c) = \Delta_k(\boldsymbol{A}; c) + \Delta(\boldsymbol{A}; c)$. Из (3.5) следует, что $\Delta_k(\boldsymbol{F}; c) \geqslant 0$, $c \leqslant ck \leqslant f_k$, причем $\Delta_{k^*}(\boldsymbol{F}; c) = \Delta_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) + \Delta(\boldsymbol{A}; c) = 0$. Из теоремы 28 следует $\Gamma_L(\boldsymbol{F}; c) \neq \varnothing$.

Лемма 27. Для $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ существует $\boldsymbol{A}' \leqslant \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{A}' = (a'_1, \ldots, a'_n) \in \mathbb{R}_+^n$, что $\Gamma_L(\boldsymbol{A}'; c) \neq \varnothing$, причем $\sum\limits_{i=1}^n a_i - \sum\limits_{i=1}^n a'_i = \Delta(\boldsymbol{A}; c)$ и $\Delta_{k^*}(\boldsymbol{A}'; c) = 0$, где $k^* = k^*(\boldsymbol{A}; c)$.

Доказательство.

Пусть вектор $\boldsymbol{F}$ удовлетворяет условию леммы 26. Рассмотрим произвольную c-реализацию $X(\boldsymbol{F}) = (x_{ij}) \in \Gamma_L(\boldsymbol{F}; c)$ с множеством узлов $U(n+n_1)$. Для $X(\boldsymbol{F})$ применим характеристическое уравнение (3.4) при $k^* = k^*(\boldsymbol{A}; c)$. Учитывая, что $\Delta_{k^*}(\boldsymbol{F}; c) = 0$, получим

$$2\overline{\delta}(U_1^{k^*}) + \overline{\delta}_L(U_1^{k^*}) + \overline{\delta}(U_1^{k^*}, U_2^{k^*}) + \delta(U_2^{k^*}, U_3^{k^*} \cup U) + \delta_L(U_3^{k^*} \cup U) + 2\delta(U_3^{k^*} \cup U) = 0,$$

где $U(n) = U_1^{k^*} \cup U_2^{k^*} \cup U_3^{k^*}$ – k^*-разбиения множества узлов $U(n)$ относительно вектора A и $U = \{u_{n+1}, \ldots, u_{n+n_1}\}$. Из равенств $\delta(U_2^{k^*}, U_3^{k^*} \cup U) = 0$, $\delta(U_3^{k^*} \cup U) = 0$ и $\delta_L(U_3^{k^*} \cup U) = 0$ следует, что $x_{ij} = 0$, $i > k^*$ и $j > l'_{k^*}(\boldsymbol{F}; c)$ и $\sum\limits_{u_i \in U_1^{k^*}} \sum\limits_{u_j \in U} x_{ij} = \Delta(\boldsymbol{A}; c)$. Следовательно, все дуги с положительными весами, инцидентные узлам из U, инцидентны только узлам из $U_1^{k^*}$. Удалим из сети $X(\boldsymbol{F})$ множество узлов U. Этим получим подсеть $X'(\boldsymbol{A}')$ сети $X(\boldsymbol{F})$, порожденную множеством узлов $U(n)$, и вектор $\boldsymbol{A}'$ удовлетворяет утверждению леммы. Схематически на рис. 8 представлено k^*-разбиение узлов сети $X(F)$.

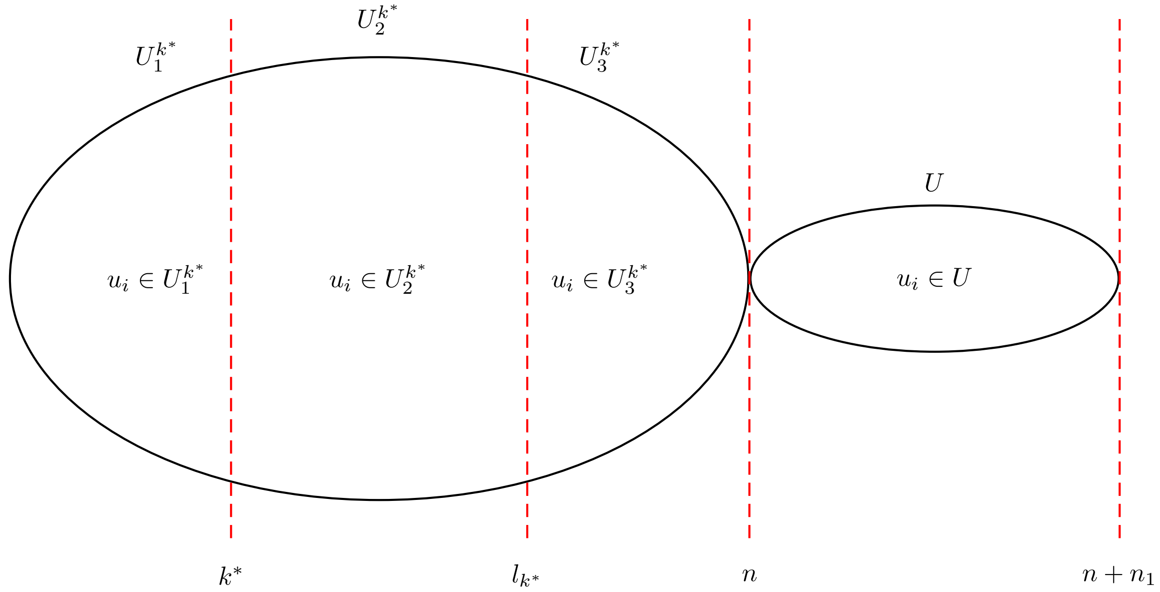


Рис. 8

Покажем, что величина $\Delta(\boldsymbol{A}; c)$ есть наименьшая, на которую нужно уменьшить сумму координат вектора $\boldsymbol{A}$, чтобы получить вписанный в $\boldsymbol{A}$ c-реализуемый вектор.

Лемма 28. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $A'' < A$. Если $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a''_i = \Delta < \Delta(\boldsymbol{A}; c)$, то $\Gamma_L(\boldsymbol{A}''; c) = \varnothing$.

Доказательство.

Предположим, что $\Gamma_L(\boldsymbol{A}''; c) \neq \varnothing$ и $X(\boldsymbol{A}'') \in \Gamma_L(\boldsymbol{A}''; c)$. Очевидно, что существуют такие числа $a > 0$ и $n_1 \in \mathbb{Z}$, для которых $a <$

$< \min(a_n, 1, c)$ и $an_1 = \Delta$. Добавим к сети $X(\boldsymbol{A}'')$ множество изолированных узлов $U = \{u_{n+1}, \ldots, u_{n+n_1}\}$ и получим новую сеть $Y = (y_{ij})$, где $y_{ij} = $
$= \begin{cases} x_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \\ 0, n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1, \;\; n+1 \leqslant j \leqslant n+n_1 : \end{cases}$

$$Y = \left(\begin{array}{ccc} y_{ij} = x_{ij} & \vdots & y_{ij} = 0 \\ 1 \leqslant i, j \leqslant n & \vdots & 1 \leqslant i \leqslant n \\ & \vdots & n+1 \leqslant j \leqslant n+n_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{ij} = 0 & \vdots & y_{ij} = 0 \\ n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1 & \vdots & n+1 \leqslant i, j \leqslant n+n_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n & \vdots & \end{array}\right).$$

Так как $a_i - a_i'' \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i'' = \Delta$ и $an_1 = \Delta$, то существует двудольная сеть $Y' = (y'_{ij})$, для которой $y'_{ij} = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$, или $n+1 \leqslant i$, $j \leqslant n+n_1$, причем $\sum\limits_{j=n+1}^{n+n_1} y'_{ij} = a_i - a_i'', 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$Y' = \left(\begin{array}{ccc} y'_{ij} = 0 & \vdots & y'_{ij} \\ 1 \leqslant i, j \leqslant n & \vdots & 1 \leqslant i \leqslant n \\ & \vdots & n+1 \leqslant j \leqslant n+n_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_{ij} & \vdots & y_{ij} = 0 \\ n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1 & \vdots & n+1 \leqslant i, j \leqslant n+n_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n & \vdots & \end{array}\right).$$

Для сети Y' имеет место $\delta(U(n)) = 0$, $\delta_L(U(n)) = 0$, $\delta(U) = 0$, $\delta_L(U) = 0$, $\delta(U(n), U) = \Delta$.

Рассмотрим сумму сетей $Z = Y + Y'$. Сеть $Z = Z(\boldsymbol{A}''')$ есть c-реализация вектора A''', где $a_i''' = \begin{cases} a_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \\ a, n+1 \leqslant i \leqslant n+n_1, \end{cases}$

то есть $\Gamma_L(\boldsymbol{A}'''; c) \neq \varnothing$. Применим ХФ $(3.2')$ для вектора A''' при $k^* = k^*(\boldsymbol{A}; c)$: $\Delta_{k^*}(\boldsymbol{A}'''; c) = ck^* l'_{k^*}(\boldsymbol{A}'''; c) - \sum\limits_{i \leqslant k^*} a_i''' + \sum\limits_{i > l'_{k^*}(\boldsymbol{A}'''; c)} a_i''' = ck^* l'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) - - \sum\limits_{i \leqslant k^*} a_i + \sum\limits_{i > l'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c)} a_i + an_1 = \Delta_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) + \Delta = \Delta - \Delta(\boldsymbol{A}; c) < 0$. Следовательно, предположение $\Gamma_L(\boldsymbol{A}'''; c) \neq \varnothing$ неверно (теорема 28) и лемма 28 доказана.

Лемма 28 завершает доказательство теоремы 35.

Доказательство теоремы 36.

Если $\Delta(\boldsymbol{A}; c) = 0$, то есть $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, то $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A}; c)}$ и утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и вектор $\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A}; c)}$ удовлетворяет (3.6). Положим $q = \max\{i : a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A}; c))} < a_i\}$ – последний индекс координаты, уменьшаемой при переходе от вектора $\boldsymbol{A}$ к $\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A}; c)}$. Покажем, что $k^* \geqslant q$. Для этого вернемся к доказательству лемм 27, 28. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{F}$ и k^*-разбиение множества узлов $U(n) \cup U$ сети $X(\boldsymbol{F}; c)$. Из равенств $\overline{\delta}(U_1^{k^*}) = 0$, $\overline{\delta}_L(U_1^{k^*}) = 0$, $\overline{\delta}(U_1^{k^*}, U_2^{k^*}) = 0$ следует: $a_i \geqslant cl'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c)$, $1 \leqslant i \leqslant k^*$; $ck^* \leqslant a_i \leqslant cl'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c)$, $k^* < i \leqslant l_{k^*}$; $a_i < ck^*$, $i > l_{k^*}$.

Предположим, что $k^* < q$. Применим $(3.2')$ для очевидного тождества $\sum\limits_{i=1}^{q} a_i - - \alpha_L(\boldsymbol{A}; c) q = \Delta(\boldsymbol{A}; c)$. Учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{q} a_i = \sum\limits_{i=1}^{k^*} a_i + \sum\limits_{i=k^*+1}^{q} a_i$, получим $l'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) ck^* + \sum\limits_{i > l'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c)} a_i + \sum\limits_{i=k^*+1}^{q} a_i - \alpha_L(\boldsymbol{A}; c) q = 0$. Так как $\alpha_L(\boldsymbol{A}; c) q = = \alpha_L(\boldsymbol{A}; c) k^* + \alpha_L(\boldsymbol{A}; c)(q - k^*)$, то имеет место:

$$(cl'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) - \alpha_L(\boldsymbol{A}; c)) k^* + \sum_{i > l'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c)} a_i + \sum_{i=k^*+1}^{q} (a_i - \alpha_L(\boldsymbol{A}; c)) = 0. \quad (3.8)$$

Из определения числа q следует $a_q - \alpha_L(\boldsymbol{A}; c) > 0$. Так как $a_q \leqslant cl'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c)$, то $l'_{k^*}(\boldsymbol{A}; c) - \alpha_L(\boldsymbol{A}; c) > 0$. Следовательно, левая часть формулы (3.8) строго положительна, что является противоречием предположению $k^* < q$. Этим показано, что $k^* = k^*(\boldsymbol{A}; c) \geqslant q$.

Перейдем к доказательству того, что вектор $\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)}$ – c-реализуем, то есть $\Gamma_L(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) \neq \varnothing$. Для этого покажем, что $\Delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha(\boldsymbol{A})};c) \geqslant 0\ \forall k,\ c \leqslant ck \leqslant \leqslant a_k^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))}$.

Рассмотрим два случая:

а) $1 \leqslant k \leqslant q$;

б) $cq < ck \leqslant a_k$.

а) Здесь $a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} = \alpha_L(\boldsymbol{A};c)$, $1 \leqslant i \leqslant q$, и достаточно показать $\Delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant 0$ и $\Delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant 0$, что следует из леммы 29 [39].

Лемма 29. Пусть $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $a_p = a_q$, где $q > p$, $cq \leqslant a_q$, причем $\Delta_p(\boldsymbol{A};c) \geqslant \geqslant 0$ и $\Delta_q(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0$. Тогда $\Delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant 0\ \forall k,\ p \leqslant k \leqslant q$.

Рассмотрим разность ХФ $(3.2')$ для векторов $\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)}$ и $\boldsymbol{A}$ при $k = q$:

$$\Delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) - \Delta_q(\boldsymbol{A};c) = cql'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) - \sum_{i=1}^{q} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} +$$

$$+ \sum_{i > l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} - cql'_q(\boldsymbol{A};c) + \sum_{i=1}^{q} a_i - \sum_{i > l'_q(\boldsymbol{A};c)} a_i.$$

Так как $a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} = a_i$ при $i > q$ и $l'_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) = l'_q(\boldsymbol{A};c)$, то $\Delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) - \Delta_q(\boldsymbol{A};c) = \sum\limits_{i=1}^{q} a_i - \sum\limits_{i=1}^{q} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} = \Delta(\boldsymbol{A};c)$. Следовательно, $\Delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) = \Delta(\boldsymbol{A};c) + \Delta_q(\boldsymbol{A};c) \geqslant \Delta(\boldsymbol{A};c) - \Delta(\boldsymbol{A};c) = 0$.

Таким образом, получили, что $\Delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant 0$.

Отметим, что при $q = k^*$ имеет место $\Delta_{k^*}(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) = \Delta(\boldsymbol{A};c) + + \Delta_{k^*}(\boldsymbol{A};c) = 0$.

Если $q = 1$, то п. а доказан. Рассмотрим случай $q > 2$, и пусть $k = 1$. Здесь ХФ $(3.2')$ для вектора $\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)}$ имеет вид

$$\Delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) = cl'_1(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) - \alpha_L(\boldsymbol{A};c) + \sum_{i > l'_1(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))}.$$

Предположим $\Delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)<0$. Тогда

$$\alpha_L(\boldsymbol{A};c) > cl_1'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) + \sum_{i>l_1'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))}. \tag{3.9}$$

При этом предположении рассмотрим $\Delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)$. Имеет место

$$\Delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) = cql_q'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) - \sum_{i=1}^{q} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} +$$

$$+ \sum_{i>l_q'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} = cql_q'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) -$$

$$-\alpha_L(\boldsymbol{A};c)q + \sum_{i>l_q'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))}.$$

Из (3.9) следует, что

$$\Delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) < cql_q'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) -$$

$$-\left(c(l_1'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) + \sum_{i>l_1'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))}\right) q +$$

$$+ \sum_{i>l_q'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} = cq(l_q'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) - l_1'(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)) -$$

$$-q \sum_{i>l_1'(\boldsymbol{A};c)+1} a_i + \sum_{l_q'(\boldsymbol{A};c)<i\leqslant l_1'(\boldsymbol{A};c)} a_i + \sum_{i>l_1'(\boldsymbol{A};c)} a_i =$$

$$= \sum_{l_q'(\boldsymbol{A};c)<i\leqslant l_1'(\boldsymbol{A};c)} (a_i - cq) - (q-1) \sum_{i>l_1'(\boldsymbol{A};c)} a_i.$$

Так как $a_i < cq$ при $i > l_q'(\boldsymbol{A};c)$ и $q \geqslant 1$, то $\Delta_q(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) < 0$, что есть противоречие. Следовательно, $\Delta_1(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant 0$. Из леммы 29 следует, что $\Delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) \geqslant 0$ при $1 \leqslant k \leqslant q$.

б) Здесь $cq < ck \leqslant a_k$. Для разности значений ХФ $(3.2')$ от векторов $\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)}$ и $\boldsymbol{A}$ при этих k

$$\Delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) - \Delta_k(\boldsymbol{A};c) = ckl'_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) - \sum_{i=1}^{k} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} +$$

$$+ \sum_{i > l'_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c)} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} - ckl'_k(\boldsymbol{A};c) + \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i > l'_k(\boldsymbol{A};c)} a_i.$$

Так как $l'_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) = l'_k(\boldsymbol{A};c)$ и $a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} = a_i$ при $i > q$, то

$$\Delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) - \Delta_k(\boldsymbol{A};c) = \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i^{(\alpha_L(\boldsymbol{A};c))} = \Delta(\boldsymbol{A};c)$$

и $\Delta_k(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) = \Delta(\boldsymbol{A};c) + \Delta_k(\boldsymbol{A};c) \geqslant \Delta(\boldsymbol{A};c) - \Delta(\boldsymbol{A};c) = 0$.

Отметим, если $k = k^*$ (и $k^* > q$), то $\Delta_{k^*}(\boldsymbol{A}^{\alpha_L(\boldsymbol{A};c)};c) = \Delta(\boldsymbol{A};c) + \Delta_{k^*}(\boldsymbol{A};c) = \Delta(\boldsymbol{A};c) - \Delta(\boldsymbol{A};c) = 0$. Так доказана теорема 36.

`Замечание 11.` Для случая $\Gamma_L(\boldsymbol{A};c) = \varnothing$ вписанный в $\boldsymbol{A}$ c-реализуемый вектор с наибольшей суммой координат определен неоднозначно (теоремы 35 и 36). Пусть $\boldsymbol{A} = (10,8,8,7,4,4,3,2) \in \mathbb{R}_+^8$ (см. замечание 7). Легко проверить, что $\Gamma_L(\boldsymbol{A};1) = \varnothing$ и $\Delta(\boldsymbol{A};1) = 4$. Теорема 36 задает 1-реализуемый в сеть с петлями вектор $(7\frac{1}{3}, 7\frac{1}{3}, 7\frac{1}{3}, 7, 4, 4, 3, 2)$. Но 1-реализуем и вектор $(8,7,7,7,4,4,3,2)$, вписанный в $\boldsymbol{A}$, сумма координат которого также на 4 отличается от суммы координат вектора $\boldsymbol{A}$.

3.5. Ограничения для сумм весов дуг класса сетей с петлями с фиксированными степенями узлов при произвольном разбиении множества узлов.

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$, где $\Gamma_L(\boldsymbol{A};c) \neq \varnothing$ и $U_1 \cup U_2 = U(n)$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ – разбиение множества $U(n)$. Разбиение множества $U(n)$ задает два подвектора $\boldsymbol{A}_1 = (a_i), u_i \in U_1$, $\boldsymbol{A}_2 = (a_i), u_i \in U_2$, и каждую сеть $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij})$ из $\Gamma_L(\boldsymbol{A};c)$ можно представить в виде $X(\boldsymbol{A}) = X_1(\boldsymbol{A}_1) + X_2(\boldsymbol{A}_2) + X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$, где $X_1(\boldsymbol{A}_1) = (x_{ij})$,

$u_i, u_j \in U_1$, $X_2(\boldsymbol{A}_2) = (x_{ij})$, $u_i, u_j \in U_2$, $X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) = (x_{ij})$, $u_i \in U_1, u_j \in$ $\in U_2$. Приведем оценки снизу и сверху для величин $2\delta(U_1) + \delta_L(U_1)$, $2\delta(U_2) +$ $+ \delta_L(U_2)$, $\delta(U_1, U_2)$. Напомним, что через $\tilde{\boldsymbol{A}}$ обозначается вектор, получаемый из вектора $\boldsymbol{A}$ упорядочиванием его координат по невозрастанию. В теореме 35 содержится доказательство следующей леммы [33,36–39].

Лемма 30. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$ и $U(n) = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \varnothing$ – произвольное разбиение множества узлов $U(n)$. Тогда для любого представления сети $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$ в виде $X(\boldsymbol{A}) = X_1(\boldsymbol{A}_1) + X_2(\boldsymbol{A}_2) + X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ имеет место

$$
\begin{gathered}
2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - \max(\Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)), \\
2\delta(U_2) + \delta_L(U_2) \leqslant \sum_{u_i \in U_2} a_i - \max(\Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)), \qquad (3.10) \\
\delta(U_1, U_2) \geqslant \max(\Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)),
\end{gathered}
$$

где числа $\Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c)$, $\Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)$ определены формулой (3.5).

Из теоремы 8 и леммы 20 следует утверждение [33,36–39].

Лемма 31. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$ и $U(n) = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \varnothing$ – произвольное разбиение множество узлов $U(n)$, где $\sum_{u_i \in U_1} a_i \leqslant \sum_{u_i \in U_2} a_i$. Тогда для любого представления сети $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$ в виде $X(\boldsymbol{A}) = X_1(\boldsymbol{A}_1) +$ $+ X_2(\boldsymbol{A}_2) + X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ имеет место

$$
\begin{gathered}
2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) \geqslant \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c), \\
2\delta(U_2) + \delta_L(U_2) \geqslant \sum_{u_i \in U_2} a_i - \sum_{u_i \in U_1} a_i + \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c), \qquad (3.11) \\
\delta(U_1, U_2) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c),
\end{gathered}
$$

где число $\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c)$ определено в формуле (1.7).

Объединим леммы 30 и 31 [33,36].

Теорема 37. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_+^n$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$ и $X(\boldsymbol{A})$ – произвольная сеть из $\Gamma(\boldsymbol{A}; c)$. При любом разбиении множества узлов $U(n) = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \varnothing$ для величин $2\delta(U_1) + \delta_L(U_1), 2\delta(U_2) + \delta_L(U_2), \delta(U_1, U_2)$ подсетей $X_1(\boldsymbol{A}_1)$, $X_2(\boldsymbol{A}_2)$, $X_3(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$

$$\delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c) \leqslant 2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - \max(\Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)),$$

$$\sum_{u_i \in U_2} a_i - \sum_{u_i \in U_1} a_i + \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c) \leqslant 2\delta(U_2) + \delta_L(U_2) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{u_i \in U_2} a_i - \max(\Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)),$$

$$\max(\Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)) \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c).$$

Пример 16. Для вектора $\boldsymbol{A}$ примеров 11 и 12 найдем оценки для величин $2\delta(U_1) + \delta_L(U_1)$, $2\delta(U_2) + \delta_L(U_2)$, $\delta(U_1, U_2)$ при $c = 4$, где $U(15) = U_1 \cup$ $\cup$ U_2 – разбиение множества узлов: $U_1 = \{u_3, u_4, u_7, u_8, u_{11}, u_{12}, u_{15}\}$, $U_2 =$ $= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{13}, u_{14}\}$. Тогда $\boldsymbol{A}_1 = (35, 35, 20, 20, 8, 8, 4)$ и $\boldsymbol{A}_2 =$ $= (35, 35, 20, 20, 8, 8, 4, 4)$ и, как легко видеть, $\sum_{u_i \in U_1} a_i = 130 < \sum_{u_i \in U_2} a_i = 134$.

Применяя (3.5), получим $\Delta(\boldsymbol{A}_1; 4) = 26$ и $\Delta(\boldsymbol{A}_2; 4) = 22$. Из теоремы 37 или леммы 30 следует, что

$$2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - \Delta(\boldsymbol{A}_1; 4) = 130 - 26 = 104,$$

$$2\delta(U_2) + \delta_L(U_2) \leqslant \sum_{u_i \in U_2} a_i - \Delta(\boldsymbol{A}_1; 4) = 134 - 22 = 112,$$

$$\delta(U_1, U_2) \geqslant \Delta(\boldsymbol{A}_1; 4) = 26.$$

По правилу (2.13) уменьшим сумму координат вектора $\boldsymbol{A}_2$ на 4: $\boldsymbol{A}_2^{\boldsymbol{A}_1} = (33, 33, 20, 20, 8, 8, 4, 4)$. Применяя (1.7), получим $\delta(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2^{\boldsymbol{A}_1}; 4) = 22$. Из теоремы 37 или леммы 31 следует, что

$$2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) \geqslant 22,$$

$$2\delta(U_2) + \delta_L(U_2) \geqslant \sum_{u_i \in U_2} a_i - \sum_{u_i \in U_1} a_i + 22 = 134 - 130 + 22 = 26,$$

$$\delta(U_1, U_2) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - 22 = 130 - 22 = 108.$$

Итак, получили, что для любой сети $X(\boldsymbol{A})$ из $\Gamma(\boldsymbol{A}; 4)$

$$22 \leqslant 2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) \leqslant 104;\;\; 26 \leqslant \delta(U_2) \leqslant 112;\;\; 26 \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant 108.$$

Очевидно, что для вектора $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, где $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, оценки для величин $\delta(U_1)$, $\delta(U_2)$ и $\delta(U_1, U_2)$ зависят от разбиения множества узлов $U(n) = U_1 \cup U_2$ и от параметра c.

3.6. Приложение в теории «Потоки в сетях»

Теорема 37 имеет приложение в теории «Потоки в сетях». Рассмотрим усеченный сетевой многогранник $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$. Любую неориентированную сеть с петлями из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$ можно рассматривать как ориентированную с симметричной матрицей весов дуг (пропускных способностей дуг). Пусть $U(n) = U_1 \cup U_2$, где $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ – произвольное разбиение множества узлов $U(n)$, которое задает разрез любой сети из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$. В подмножествах U_1 и U_2 выберем соответственно узлы-источники и узлы-стоки: $V_1 \subseteq U_1, V_2 \subseteq U_2$.

Здесь рассмотрим потоковую задачу, в которой положим, что сами узлы формируют пропускные способности дуг. Для разреза, определяемого разбиением множества узлов $U(n) = U_1 \cup U_2$, формула (см. $(3.10), (3.11)$)

$$\max(\Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1; c), \Delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_2; c)) \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant \sum_{u_i \in U_1} a_i - \delta(\tilde{\boldsymbol{A}}_1, \tilde{\boldsymbol{A}}_2^{\boldsymbol{A}_1}; c) \qquad (3.12)$$

задает ограничения его пропускных способностей всех сетей с петлями из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$. Поэтому неравенства в (3.12) влияют на ограничения величины любого (в том числе и максимального) потока из множества источников V_1 в множество стоков V_2 для любой сети из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$. Далее будет показано, что неравенства из (3.12) задают точные нижнюю и верхнюю границы величины пропускной способности разреза $\delta(U_1, U_2)$.

Возможен случай, когда ограничения для величины $\delta(U_1, U_2)$ в (3.12) строгие. Но в общем случает услилить неравенства в (3.12) невозможно. Отметим также, что ограничения в неравенствах (3.10) и (3.11) для величин $2\delta(U_1) + \delta_L(U_1)$, $2\delta(U_2) + \delta_L(U_2)$ в общем случае являются достижимыми. Покажем это на простом примере, в котором рассмотрим и потоковые задачи.

Пример 17. Исследуем целочисленный вектор

$$A = (9, 9, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2) \in \overline{\mathbb{R}}^9_+$$

для а) $c = 1$ и б) $c = 2$ при разбиении множества узлов (вершин) $U(9) = U_1 \cup \cup U_2$, где $U_1 = \{u_2, u_7, u_8, u_9\}$, $U_2 = \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_6\}$. Здесь $\boldsymbol{A}_1 = (9, 2, 2, 2)$, $A_2 = (9, 3, 2, 2, 2)$. Пусть V_1 – множество узлов-источников из U_1 и V_2 – множество узлов-стоков из U_2.

а) Легко проверить, что $|\Gamma_L(\boldsymbol{A}; 1)| = 1$, причем единственная реализация $X(\boldsymbol{A}) = (x_{ij})$ из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; 1)$ есть граф с петлями:

$$X_1(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c} \\ 9 \\ 9 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 9 & 9 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Применяя (3.12), получим $5 \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant 11$. На рис 9. представлена геометрическая реализация сети (графа) $X_1(\boldsymbol{A})$.

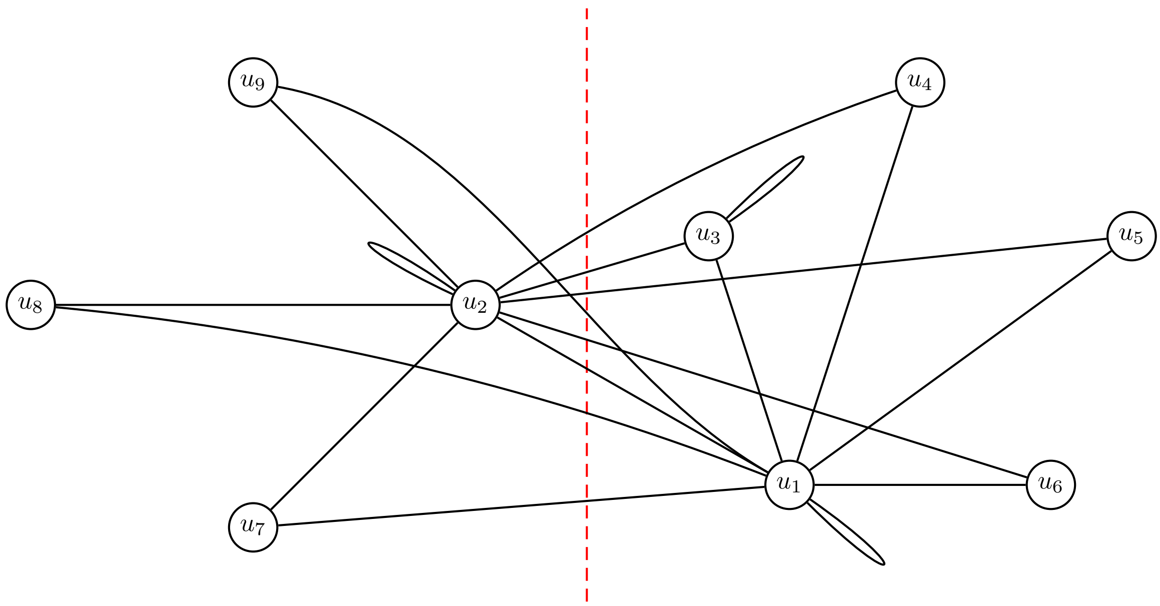


Рис. 9. $X_1(\boldsymbol{A})$

Легко видеть, что $\delta(U_1, U_2) = 8$ и $5 < \delta(U_1, U_2) < 11$ (здесь неравенства в (3.12) есть строгие). Отметим, что для сети с петлями $X_1(\boldsymbol{A})$ (любой сети из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; 1)$)

1) при каждом выборе V_1 и V_2 величина любого потока из V_1 в V_2 меньше, чем 11;

2) существуют такие V_1 и V_2, что величина максимального потока из V_1 в V_2 меньше, чем 5.

Для величин $2\delta(U_1) + \delta_L(U_1)$, $2\delta(U_2) + \delta_L(U_2)$ формулы из (3.10) и (3.11) дают следующий результат: $4 \leqslant 2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) \leqslant 10$ и $7 \leqslant 2\delta(U_2) + \delta_L(U_2) \leqslant 13$. Однако $2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) = 7$ и $2\delta(U_2) + \delta_L(U_1) = 10$ (неравенства в (3.10) и (3.11) также являются строгими).

б) При том же разбиении множества вершин для пропускной способности разреза из (3.12) получим

$$1 \leqslant \delta(U_1, U_2) \leqslant 15. \tag{3.13}$$

Здесь нижняя и верхняя оценки пропускной способности разреза $\delta(U_1, U_2)$ достигаются. На рис. 10 и 11 изображены сети - мульгиграфы с петлями $X_2(\boldsymbol{A})$ и $X_3(\boldsymbol{A})$ из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; 2)$:

$$X_2(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c} \\ 9\\9\\3\\2\\2\\2\\2\\2\\2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} 9 & 9 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$X_3(\boldsymbol{A}) = \begin{array}{c} \\ 9\\9\\3\\2\\2\\2\\2\\2\\2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} 9 & 9 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

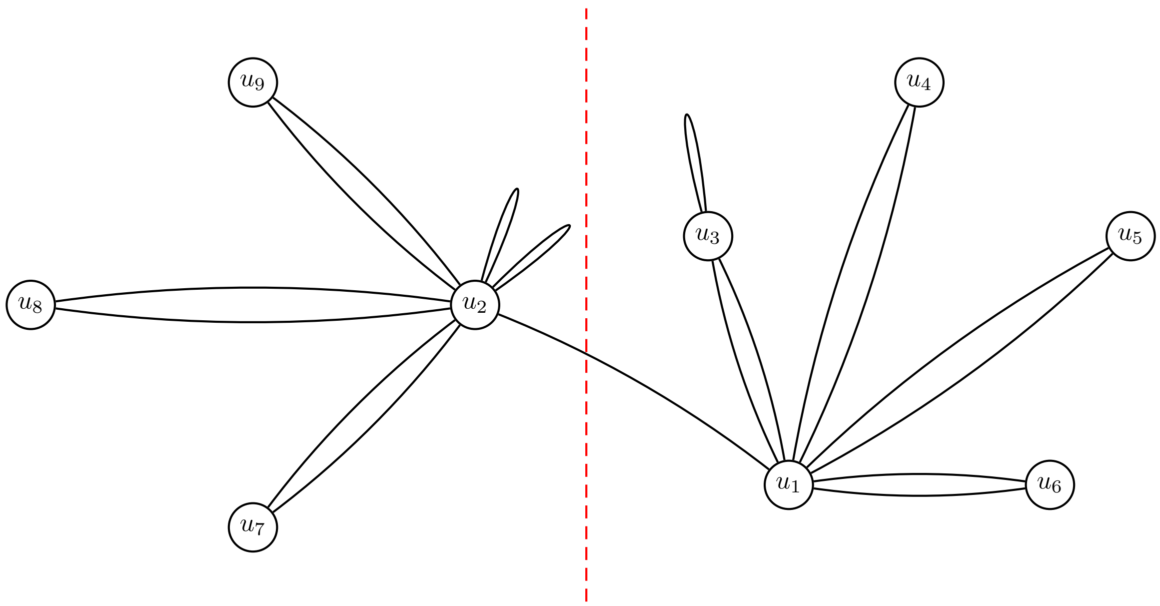


Рис. 10. $X_2(\boldsymbol{A})$

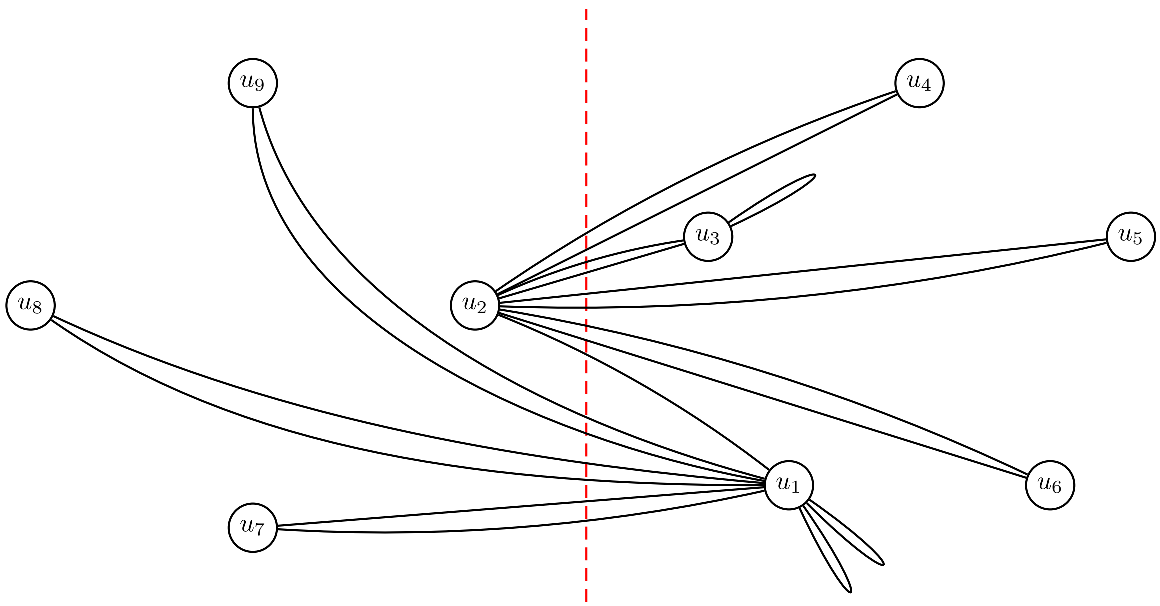


Рис. 11. $X_3(\boldsymbol{A})$

Легко видеть, что для сетей $X_2(\boldsymbol{A})$, $X_3(\boldsymbol{A})$ соответственно имеет место $\delta(U_1, U_2) = 1$ и $\delta(U_1, U_2) = 15$.

Нетрудно убедиться, что для сетей из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; 2)$

1) при любом выборе узлов-источников V_1 и узлов-стоков V_2 величина максимального потока из V_1 в V_2 имеет те же ограничения, что и величина пропускной способности разреза $\delta(U_1, U_2)$ (см. (3.13));

2) существует такая сеть (например, $X_2(\boldsymbol{A})$), в которой при любом выборе $V_1 \subseteq U_1$ и $V_2 \subseteq U_2$ величина максимального потока из V_1 в V_2 равна 1;

3) существует такая сеть (например, $X_3(\boldsymbol{A})$, где $V_1 = U_1$ и $V_2 = U_2$), в которой значение максимального потока из V_1 в V_2 равно 15.

Для величин $2\delta(U_1) + \delta_L(U_1)$ и $2\delta(U_2) + \delta_L(U_2)$, применяя формулы (3.10) и (3.11), получим

$$0 \leqslant 2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) \leqslant 14, \;\; 3 \leqslant 2\delta(U_2) + \delta_L(U_2) \leqslant 17. \tag{3.14}$$

Легко подсчитать, что в первом мультиграфе $2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) = 14$ и $2\delta(U_2) + + \delta_L(U_2) = 17$ достигаются верхние ограничения в (3.14), а во втором мультиграфе $2\delta(U_1) + \delta_L(U_1) = 0$ и $2\delta(U_2) + \delta_L(U_2) = 3$ – нижние ограничения в (3.14).

Из теоремы 37 и примера 17 следуют теоремы 38, 39 и замечание 12.

Теорема 38. Для любого вектора $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, где $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, и произвольного разбиения множества узлов $U(n) = U_1 \cup U_2$ оценки, приведенные в теореме 37, являются точными (достижимыми).

Замечание 12. Результаты теоремы 37 имеют приложение в теории графов, мультиграфов с петлями.

Теорема 39. Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n_+$, $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c) \neq \varnothing$, $U(n) = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap \cap U_2 = \varnothing$, и $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$, где V_1 – множество узлов-источников и V_2 – множество узлов-стоков. Для сетей усеченного сетевого многогранника $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$ справедливы следующие утверждения:

а) для произвольной сети из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$ величина любого потока (в том числе и максимального) из V_2 в V_2 не превосходит верхней оценки значения пропускной способной разреза $\delta(U_1, U_2)$ формулы (3.12);

б) существует сеть из $\Gamma_L(\boldsymbol{A}; c)$, в которой (например, при $V_1 = U_1$ и $V_2 = U_2$) величина максимального потока из V_1 в V_2 не менее нижней оценки значения $\delta(U_1, U_2)$ формулы (3.12);

в) если существует сеть с петлями, в которой значение $\delta(U_1, U_2)$ достигает верхней оценки из (3.12), то найдется сеть с петлями (например, при $V_1 = U_1$ и $V_2 = U_2$), где величина максимального потока из V_1 в V_2 равна правой части (3.12);

г) если существует сеть с петлями, в которой величина $\delta(U_1, U_2)$ достигает нижней оценки из (3.12), то найдется сеть, где величина максимального потока из V_1 в V_2 не превосходит левой части (3.12), причем существует сеть с петлями (например, когда $V_1 = U_1$ и $V_2 = U_2$) с величиной максимального потока, равной нижней оценки для $\delta(U_1, U_2)$.

Заключение

Итак, в работе построен математический аппарат исследования классов неориентированных сетей с петлями и без петель с фиксированными степенями узлов. Этот аппарат применим в теории «Потоки в сетях», рассматривая сети как ориентированные с симметричной матрицей пропускных способностей дуг. Например, для двухполюсной сети из класса рассматриваемых сетей, получена минимальная величина максимального потока, а также получено ограничение максимальной величины максимального потока. Аналогичная проблема решена и в случае, когда любой узел есть исток или сток. Указанный подход позволяет строить сети с максимальной плотностью весов дуг на выделенном подмножестве узлов.

Также для рассматриваемых классов сетей с применением характеристических функций были получены аналитические формулы для вычисления минимаксных значений, выраженных через координаты вектора и неотрицательный параметр. Минимаксные значения определяют необходимые и достаточные условия, при которых усеченные сетевые и транспортные многогранники не пустые множества. Также получен алгоритм построения наследственно минимаксной сети в сетевых многогранниках.

Следующим шагом может быть распространение результатов исследования на целочисленные сети, а также многоиндексные, нелинейные и бесконечномерные обобщения. Однако, эти задачи остаются за рамками данной работы и только прогнозируются.

Список литературы

1. Басакер Р. Саати Т. Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974.
2. Берж К. Теория графов и ее приложения. М.: ИЛ, 1962. 320 с.
3. Гольдштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 382 с.
4. Давыдов Г.Б., Рогинский В.Н., Толчан А.Я. Сети электросвязи. М.: Связь, 1977.
5. Ершов В.А. Коммутация на интегральной цифровой сети связи. М.: Связь, 1978.
6. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с.
7. Зыков А.А. Теория конечных графов. Новосибирск: Наука, 1969.
8. Клейнрок Л. Коммуникационные сети. М.: Наука, 1970.
9. Кононенко А.М., Трухановский Н.Н. О транспортных многогранниках с максимальным числом вершин // Изв. АН БССР, сер. физ.-матем наук. 1978. N5. С. 23–25.
10. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.
11. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.Н. Высшая математика. Математическое программирование. Минск: Высшая школа, 1994. 288 с.
12. Мизин И.А., Уринсон Л.С., Храмешин Г.К. Передача информации в сетях с коммутацией сообщений. М.: Связь, 1972. 319 с.
13. Миронов А.А. О реализуемости множества целых неотрицательных чисел степенями вершин графа // Тр. МИИТа. 1976. Вып. 510. С. 68–77.
14. Миронов А.А. Геометрия точек пространства $\mathbb{R}^n$, реализуемых в граф // УМН. 1977. Т. 32. N 6. С. 231–232.
15. Миронов А.А. Некоторые свойства наборов чисел, реализуемых в граф // Тр. МИИТа. 1979. Вып. 640. С. 115–120.
16. Миронов А.А. О реализуемости наборов чисел в граф и свойства графов с заданным набором степеней // Тр. Гор. ГУ, 1981. С. 76-97.

17. Миронов А.А. О свойствах наборов степеней вершин обобщенных графов // ДАН. 1992. Т. 342. N 5. С. 959-963.
18. Миронов А.А., Цурков В.И. Сетевые модели с фиксированными параметрами на узлах связи I // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. N 4. С. 212-223.
19. Миронов А.А., Цурков В.И. Сетевые модели с фиксированными параметрами на узлах связи II // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. N 6. С. 3-14.
20. Миронов А.А. Обобщенные графы с ограничениями для степеней вершин // ДАН. 1993. Т. 333. N 4. С. 437-439.
21. Миронов А.А., Цурков В.И. Класс распределительных задач с минимаксным критерием // ДАН. 1994. Т. 336. N 1. С. 35-38.
22. Миронов А.А., Цурков В.И. Транспортные и сетевые задачи с минимаксным критерием // РАН. Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1995. Т. 35. N 1. С. 24-45.
23. Миронов А.А., Цурков В.И. Транспортные задачи с минимаксным критерием // ДАН. 1996. Т. 346. N 2. С. 168-171.
24. Миронов А.А. Задачи транспортного типа с минимаксным критерием // А и Т. 1996. N 12. С. 109-118.
25. Миронов А.А., Цурков В.И. Минимакс в транспортных задачах. М.: Наука, 1997.
26. Миронов А.А., Цурков В.И. Наследственно минимаксные матрицы в моделях транспортного типа // Изв. РАН Теория и системы управления. 1998. N 6. С. 104-121.
27. Миронов А.А., Цурков В.И. Открытые транспортные модели с минимаксным критерием // ДАН. 2001. Т. 381. N 4. С. 448-451.
28. Миронов А.А. Выпуклые многогранники в задачах оптимазации на сетях // РАН. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 2002. Т. 42. N 5. С. 729-740
29. Миронов А.А., Цурков В.И. Замкнутые транспортные модели с минимаксным критерием // А и Т. 2002. N 3. С. 50-61.
30. Миронов А.А., Селин П.С. Метод разбиения сетей с фиксированными степенями узлов и потоки в сетях // Изв. РАН Теория и системы управления. 2005. N 6. С. 89-100.

31. Миронов А.А., Соколов А.А., Цурков В.И. Алгоритм построения наследственно минимаксной матрицы классического транспортного многогранника // Тр. ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. 2006. 10(1). С. 43 - 46.
32. Миронов А.А., Селин П.С., Матвеев И.А. Наследственно минимаксная сеть с фиксированным вектором степеней узлов // Тр. ИСА РАН. Динамика неоднородных систем. 2006. 10(1). С. 187 - 192.
33. Миронов А.А. Взвешенные графы с фиксированными степенями вершин и потоки в сетях // Изв. РАН Теория и системы управления. 2007. N 3. С. 1–4.
34. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1968. 353 с.
35. Рогинский В.Н., Харкевич А.Д., Шнепс М.А., Давыдов Г.Б., Толчан А.Я. Теория сетей связи. М.: Радио и связь, 1981. 192 с.
36. Селин П.С. Об ограничениях в сетях с фиксированными параметрами на узлах связи // Тез. докл. Междунар. молодежной научн. конф. «XXXI Гагаринские чтения» 2005. Т. 5. С. 47-48.
37. Селин П.С. Ограничения при обмене информацией в сетях с петлями с фиксированными степенями узлов // Тез. докл. Междунар. молодежной научн. конф. «XXXII Гагаринские чтения» 2006. Т. 5. С. 68-70.
38. Селин П.С. О достижимости оценок в потоковых задачах на классах сетей с петлями и без петель с фиксированными степенями узлов. // Научн. тр. Междунар. молодежной научн. конф. «XXXIV Гагаринские чтения» 2008. Т. 5. С. 100-102.
39. Селин П.С., Цурков В.И. Метод характеристических функций для классов сетей с фиксированными степенями узлов // Изв. РАН Теория и системы управления. 2014. N 5. С. 59-68.
40. Триус Е.Б. Задачи математического программирования транспортного типа. М.: Современное радио, 1967. 208 с.
41. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.
42. Хакими С.Л. О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа // Кибернет. сб. нов. сер. Вып. 2. М.: Мир, 1966.
43. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.

44. Хачатуров В.Р., Монтлевич В.М. Решение нелинейных производственно транспортных задач с неделимыми потребителями. М: ВЦ АН СССР, 1987. 24 с.
45. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974. 520 с.
46. Шнепс М.А. Система распределения информации. Методы расчета. Справ. пособие. М.: Связь, 1979.
47. Эрдеш П., Галлаи Т. Графы с заданными степенями вершин // Mat. Lapok, 11. 1960. P. 264-274.
48. Ford L.R. Network Flow Theory. The RAND Corp., 1956. 923 p.
49. Goldsmith A. Wireless communications. Cambridge university press. 2005. 571 p.
50. Gomory R.E. Hu T.C. Multi-terminal Network Flows // J. Soc. Ind. Appl. Math, 9. 1961. P. 551-570.
51. Gomory R.E. An algorithm for integer solutions for linear programs, in recent advaces in mathematical programming // Mc Graw Hill. 1963. P. 269-302.
52. Lewis F.L. Wireless sensor networks // Smart Environments: Technologies, Protocols, and Applications. John Wiley. New York. 2004.
53. Hu T.C. Multi-commodity Network Flows // MIT Interim Tech. Rept. 8. 1958.
54. Kuhn H.W., Tucker A.W. Nonlinear programming in J. Neyman // (ed.) Proceedings of the second berkley symposium on mathematical statistics and probability. Berkley: Uneversity of California Press. 1951. P. 481-492.
55. Selin P., Obara H. The algorithm for constructing a hereditarily minimax network with predefined vector of node degrees // 2012 Tohoku-Section Joint Convention Record of Institutes of Electrical and Information Engineers, Japan.
56. Tsurkov V., Mironov A. Minimax under transportation constrains. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1999.
57. Hitchcock F.L. Distribution of a product from several sources to numerous localities // J. Math Phys. V. 20. 1941. P. 224-230.