

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию
Толстихина Ильи Олеговича

На тему: **Неравенства концентрации вероятностной меры в трансдуктивном обучении и РАС-байесовском анализе.**

По специальности: **05.13.17 – «Теоретические основы информатики» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.**

Задачи восстановления функциональных зависимостей играют в настоящее время принципиально важную роль в многочисленных прикладных областях и поэтому являются традиционными проблемами инженерной математики. Основная цель диссертации состоит в развитии математических подходов, позволяющих решать достаточно широкие классы этих задач с помощью методов, используемых в теории статистического обучения. Несмотря на то, что эта теория была предложена и развита в работах В. Н. Валника и А. Я. Червоненкиса в конце 1960-х годов, она до сих пор далека от своего завершения и продолжает активно развиваться. Основная идея, положенная в основу этой теории, связана с принципом минимизации эмпирического риска по заданному классу отображений, используемых для обучения. При этом основная проблема состоит в том, чтобы найти связи между минимальным объемом выборки, необходимым для успешного обучения и сложностью используемого класса отображений. С математической точки зрения эта задача эквивалентна поиску верхних границ для больших отклонений для минимума эмпирического риска. Первоначальные верхние границы, восходящие к работам В. Н. Валника и А. Я. Червоненкиса, были довольно сильно завышены, что было обусловлено идеей решить задачу в максимально общей постановке. Хотя в последние годы было предложено довольно много интересных и оригинальных идей, позволяющих улучшать эти границы, но, к сожалению, их точность до сих пор остается недостаточной для практических применений. Поэтому основная цель диссертационной работы состоит в том, чтобы улучшить существующие границы для минимума эмпирического риска с помощью современных математических методов, используемых в теории концентрации вероятностной меры.

Таким образом, тематика и цели диссертации Толстихина И. О. являются актуальными и обусловлены реальными практическими и важными с теоретической точки

зрения задачами.

Теоретические рассуждения и выводы, сформулированные в ходе изложения диссертации, выполнены корректно и снабжены исчерпывающими доказательствами.

Научная новизна работы заключается в том, что в ней впервые

- получены два новых неравенства концентрации типа Талаграна для максимумов эмпирических процессов и выборок без возвращения, которые учитывают дисперсии случайных величин;
- получена новая оценка избыточного риска в трансдуктивной постановке теории статистического обучения, основанная на локальных мерах сложности рассматриваемого класса отображений;
- для теоретико-группового подхода в комбинаторной теории переобучения предложено учитывать орбиты множества выборок при вычислении точного значения вероятности переобучения. На основе этого подхода получены новые точные оценки вероятности переобучения для трех модельных семейств отображений, бинарные векторы ошибок которых являются различными подмножествами шара в булевом кубе;
- для РАС-байесовского подхода получено новое эмпирическое неравенство Бернштейна, полностью вычислимое на основе обучающей выборки и обеспечивающее более точные оценки избыточного риска по сравнению с известными ранее результатами.

Диссертационная работа носит ярко выраженный теоретический характер. С математической точки зрения, результаты и методы, разработанные в диссертации, без сомнения, могут быть интересны специалистам в области статистической теории обучения. Неравенства концентрации, полученные в диссертационной работе, являются достаточно общими и могут быть использованы в теоретическом анализе задач, в которых выборки без возвращения играют существенную роль. РАС-байесовское неравенство, полученное в диссертационной работе, дает часто более точные верхние границы для обобщающей способности по сравнению с известными ранее.

Кроме того, мне хотелось бы особо подчеркнуть, что в диссертации очень хорошо и методически правильно изложено современное состояние теории статистического обучения и поэтому эта диссертационная работа, безусловно, могла бы быть использована как при изучении этой дисциплины, так и при ее преподавании.

Диссертация имеет очень хорошую и правильную логическую структуру. Она состоит из введения, содержащего обоснование актуальности темы диссертации, и шести глав.

Во введении обосновывается актуальность исследований, формулируются основные цели и задачи, рассматриваемые в диссертационной работе, а также формулируется теоретическая и практическая значимость работы.

В первой главе приводится подробный обзор классических и современных результатов о концентрации вероятностной меры для независимых случайных величин. В частности, в разделе 1.1 рассматриваются суммы независимых, ограниченных случайных величин и для них приводятся классические неравенства Хефдинга, Бернштейна и Беннетта. В разделе 1.2 рассматриваются функции с ограниченными разностями от независимых случайных величин и для них приводятся неравенства Азумы-Хефдинга и МакДиармида. Раздел 1.3 посвящен энтропийному методу в теории концентрации. Этот раздел содержит неравенства для самоограничивающихся функций, а также приводятся эмпирическое неравенство Бернштейна и неравенство Талаграна для максимумов эмпирических процессов.

Во второй главе приводятся результаты теории концентрации вероятностной меры для случайных величин, выбранных без возвращения из некоторого конечного множества. В первой части этой главы содержится подробный обзор известных результатов: в разделе 2.1 рассматриваются суммы случайных величин и для них приводятся неравенство Стирлинга и метод редукции Хефдинга; в разделе 2.2 рассматриваются функции от случайных величин, определенные на множестве разбиений генеральной выборки, и для них формулируется неравенство Эль-Янива-Печиони, которое является аналогом неравенства Мак-Диармида и субгауссовское неравенство С. Г. Бобкова. В разделе 2.3 приводятся основные новые результаты второй главы, а именно, два новых неравенства концентрации типа Талаграна для максимумов эмпирических процессов и выборок без возвращения, учитывающие дисперсии случайных величин.

В третьей главе дается подробный обзор ряда классических и современных результатов индуктивной постановки теории статистического обучения. В разделе 3.1 приводятся основные определения и обсуждаются различные постановки задач. Раздел 3.2 содержит обзор и сравнение ряда подходов к получению оценок избыточного риска и обобщающей способности. В этом разделе, в частности, рассмотрены методы, опирающиеся на неравенство Буля, включая границу Вапника-Червоненкиса, границу «бритвы Оккама» и границу, основанную на покрытиях множества отображений. Также рассматриваются оценки, основанные на глобальной Радемахеровской сложности и приводятся неравенства симметризации и сжатия. Затем, в подразделе 3.2.3 приводится обзор современного состояния так называемого локального анализа.

Четвертая глава посвящена задачам трансдуктивной теории статистического обучения. Для решения этих задач применяются методы локального анализа, описанные в третьей главе. В разделе 4.1 приводится формальная постановка задач трансдуктивной теории. В разделе 4.2 также даются новые оценки обобщающей способности, которые, в отличие от известных результатов, учитывают дисперсию потерь и справедливы для произвольных классов отображений и ограниченных функций потерь. Подробные доказательства результатов приводятся в разделе 4.3. Новыми в этой главе являются следующие результаты:

- получены оценки обобщающей способности, учитывающие дисперсию потерь (теоремы 39 и 40);

- показано (следствие 12), что математическое ожидание максимума эмпирического процесса в трансдуктивном обучении можно оценить сверху его индуктивным аналогом. Этот результат позволяет применять для анализа сложности класса отображений в трансдуктивной постановке все известные факты из теории эмпирических процессов;
- получены новые оценки избыточного риска в трансдуктивном обучении, основанные на локальных мерах сложности семейств отображений (теоремы 41–42 и следствия 13–14).

В пятой главе рассматривается комбинаторная теория переобучения, которая, как показано в диссертационной работе, тесно связанная с трансдуктивным обучением. В разделе 5.1 вводятся определения и ставится формальная постановка задачи. В разделе 5.2 приводится сравнение постановки комбинаторной теории переобучения с постановкой трансдуктивного обучения. В подразделе 5.2.2 предлагается при вычислении вероятности переобучения помимо орбит векторов ошибок учитывать также орбиты выборок и приводится новая формула вычисления точного значения вероятности переобучения. В подразделе 5.2.3 обсуждаются свойства сходства и расслоения семейств векторов ошибок и их влияние на вероятность переобучения. В разделе 5.2 рассматривается теоретико-групповой подход к комбинаторной теории переобучения. В подразделе 5.2.1 вводятся определения и обозначения, а также содержится обзор известных результатов. В этой главе получены следующие новые результаты:

- в теоретико-групповом подходе предложено рассматривать орбиты разбиений генеральной выборки (леммы 21 и 22), что приводит к разложению вероятности переобучения по орбитам разбиений (теорема 44);
- получены новые точные оценки вероятности переобучения для модельных семейств (теоремы 45, 47 и 48), являющихся различными подмножествами шара в булевом кубе.

Шестая глава посвящена РАС-байесовскому анализу. В разделах 6.1 и 6.2 вводятся основные понятия и определения, описывается общий подход к выводу РАС-байесовских неравенств. Приводится также подробный обзор имеющихся результатов, включая неравенство МакАллистера (известное как РАС-байесовское неравенство Хефдинга), РАС-байесовское неравенство Бернштейна и РАС-байесовское kl -неравенство. Здесь же дается подробное сравнение этих трех неравенств и обсуждаются их применения в индуктивном обучении. Основными новыми результатами этой главы являются следующие:

- РАС-байесовское неравенство для дисперсии (теорема 54);
- РАС-байесовское эмпирическое неравенство Бернштейна (теорема 55), которой является вычислимым и часто приводит к более точным верхним границам по сравнению с ранее известными;

- численные эксперименты в задаче бинарной классификации, которые хорошо согласуются с теоретическим анализом.

В целом диссертация очень ясно и аккуратно написана. По содержанию работы можно сделать следующие замечания:

- Графические иллюстрации в диссертации, на мой взгляд, недостаточно информативны. Например, глядя на рис. 1, можно ошибочно заключить, что при больших ϵ вероятности больших отклонений сближаются с границей Хефдинга. Чтобы избежать подобного рода выводов на основе графического представления математических результатов, достаточно в данном случае строить графики в логарифмическом масштабе.
- В диссертационной работе имеется ряд орфографических опечаток.

Отмечу, что перечисленные выше недостатки не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Основные научные результаты диссертации Толстихина И. О. своевременно и полно опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Автореферат правильно отражает содержание диссертационной работы. Принципиальные результаты, которые содержит диссертация, являются новыми и переставляющими несомненный интерес для разработки принципиально новых методов анализа и обработки статистических данных.

Таким образом, диссертационная работа Толстихина Ильи Олеговича является научно-квалификационной работой, содержащей решение актуальных математических задач теории статистического обучения и имеющей важное значение для разработки новых методов обработки статистической информации. Диссертация удовлетворяет всем требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842 по специальности 05.13.17 – «Теоретические основы информатики», а ее автор заслуживает присуждения искомой ученой степени.

Официальный оппонент
д. ф.-м. н., г.н.с. ИППИ РАН

Голубев Георгий Ксенофонтович

10 сентября 2014 г.

Голубев

*Подпись Г.К. Голубева
госповерью
вз. см. в/к
Мед / Шорохова*

