**МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**На правах рукописи**

**Баркалова Оксана Сергеевна**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО МИНИМУМУ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ НОРМ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРОЦЕССАХ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

Специальность 05.13.17 – теоретические основы информатики

Диссертацияна соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук,

профессор ГОРЕЛИК В.А.

**Москва 2013**

**Содержание**

**Введение** ……………………………………………………………………...... 4

**Глава 1. Коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств по минимуму полиэдральных норм** .................. 16

1.1. Понятие полиэдральной нормы и постановка задачи коррекции несовместных линейных систем …………………………………………… 16

1.2. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи коррекции …………………………………………………………………… 24

1.3. Методы решения задач коррекции несовместных линейных систем по минимуму полиэдральных норм …………………………………………… 36

1.4. Коррекция линейных систем с ограничениями на матрицу коррекции……………………………………………………………………. 41

1.5. Вычислительные эксперименты ……………………………………… 53

Выводы к первой главе ……………………………………………………. 54

**Глава 2. Коррекция несобственных задач линейного программирования с одним и многими критериями по минимуму полиэдральных норм** … 56

2.1. Коррекция несобственной задачи линейного программирования по минимуму полиэдральных норм …………………………………………… 56

2.2. Коррекция несобственной задачи линейного программирования с использованием теории двойственности …………………………………. 60

2.3. Коррекция многокритериальной несобственной задачи линейного программирования с заданными пороговыми значениями по минимуму полиэдральных норм ……………………………………………………… 66

2.4. Коррекция системы ограничений и пороговых значений многокритериальной несобственной задачи линейного программирования…………………………………………………………. 74

2.5. Вычислительные эксперименты ……………………………………… 83

Выводы ко второй главе …………………………………………………… 87

**Глава 3. Применение методов коррекции по минимуму полиэдральных норм к задачам регрессии и классификации** …………………………… 89

3.1. Применение методов коррекции по минимуму полиэдральных норм к задачам регрессии …………………………………………………………… 89

3.2. Коррекция систем линейных алгебраических неравенств по минимуму полиэдральных норм с помощью метода ветвей и границ ……………… 92

3.3. Применение методов коррекции по минимуму полиэдральных норм к несобственным задачам классификации …………………………………. 100

3.4. Вычислительные эксперименты ………………………………………106

Выводы к третьей главе …………………………………………………… 112

**Заключение** ……………………………………………………………………114

**Литература** ……………………………………………………………………116

**Приложение** ………………………………………………………………….. 128

**Введение**

**Актуальность темы**. В настоящее время одной из наиболее развивающихся областей теоретической информатики является изучение несобственных оптимизационных задач. Несобственными принято называть те задачи, которые в силу тех или иных причин не имеют решения . В течение долгого времени им не уделялось должного внимания: в классическом смысле подобные модели лишены интереса, так как с их помощью невозможно напрямую (непосредственно) получить содержательную информацию об исследуемом объекте. В то же время в современной математике уже не ставится под сомнение содержательность проблемы коррекции несовместных моделей. Необходимость разработки теории и методов анализа (в частности, численного) таких задач во многом определялась и стимулировалась практикой решения прикладных задач (экономических, технических, в области медицины и др.). Так, причинами несобственности моделей, описывающих экономические задачи, могут стать: ресурсный дефицит, напряжённость плана, неточность экономической информации.

Исследование большинства технических, социальных, биологических, экономических процессов происходит посредством построения его математической модели. В зависимости от специфики области и конкретной исследуемой проблемы, возникают различные классы задач, которые могут представлять собой как системы уравнений и неравенств, так и более сложные задачи.

Несобственность любой модели, в том числе и линейной, может быть обусловлена [35]:

* неопределённостью или неточностью исходных данных. Например, в различных областях физики такие ситуации возникают при обработке результатов эксперимента в связи с неточностью шкалы измерения, несовершенством метода измерений, особенностями приборов, округлением, случайным характером измеряемой величины и т.д.;
* идеализацией или искажением некоторых соотношений;
* некорректностью требований, предъявляемых к модели (или объекту);
* избыточность получаемой об объекте информации (например, при многократном повторении эксперимента, изучаемого процесса. Построение аппроксимирующей зависимости по такой избыточной информации (что эквивалентно минимальной коррекции исходных данных) зачастую более адекватно, чем обнаружение зависимости, основанное на минимальной информации об объекте.

Понятие корректности математической задачи было введено в начале ХХ века при выяснении вопроса о соответствии математических и физических моделей задач естествознания. Французским математиком Жаком Соломоном Адамаром были сформулированы условия корректно поставленной задачи (корректной по Адамару). При нарушении любого из них задача считается некорректной. До середины ХХ века математики не занимались теорией некорректных по Адамару задач, поскольку считалось, что эти задачи не имеют физического смысла. Однако содержательных некорректных задач, требующих математического обоснования и создания устойчивых методов их решения, в прикладных областях накопилось значительное множество. В большинстве своём это задачи, связанные с созданием систем автоматической математической обработки результатов наблюдений и физических экспериментов, о которых упоминалось выше.

Тем не менее, исследование некорректных задач, началось ещё в начале XIX века. Гаусс и Лежандр независимо друг от друга предложили решать переопределённые, как правило, несовместные системы линейных уравнений методом наименьших квадратов (МНК). Он заключается в поиске вектора поправок правой части системы, имеющую минимальную норму и гарантирующего совместность полученной системы.

При таком подходе, однако, не учитывается тот факт, что в матрице коэффициентов левой части системы могут содержаться ошибки. Поэтому дальнейшим его развитием стало возникновение обобщённого метода наименьших квадратов, получившего в иностранной литературе название TLS (Total Least Squares). Он заключается в том, что необходимо найти такую минимальную по норме матрицу коррекции, что при добавлении её к матрице левых частей исследуемая система уравнений становится совместной.

Несовместные системы линейных алгебраических неравенств применительно к задачам проектирования механических систем рассматривал П.Л. Чебышёв. Позднее системы линейных неравенств, не обязательно совместные, рассматривались и другими авторами [53, 66, 75, 96].

С развитием науки и техники (в частности, цифровой) необходимость в умении решать некорректные задачи всё возрастает. Следует отметить ведущие позиции российских учёных в данной проблематике. Начало бурному развитию теории и практики методов решения некорректных задач положил академик А. Н. Тихонов (1943 г.) [88-91]. Во многом благодаря его трудам разработана общая стратегия построения устойчивых методов решения некорректных (неустойчивых) задач. Термин «корректность по Тихонову» принадлежит другому крупному специалисту по некорректным задачам – академику РАН Лаврентьеву М.М.

Частным случаем модели с несовместной системой ограничений являются несобственные задачи линейного программирования как задачи, имеющие множества допустимых решений, определяемые несовместными системами линейных алгебраических уравнений или неравенств. Решение задачи коррекции позволяет выявить «узкие места», а также исключить неточности измерений, внешнее воздействие [35] и т. п.

Исследования матричной коррекции несовместных линейных систем и соответствующих задач линейного программирования проводились параллельно и отечественными математиками, и зарубежными [99-113]. Решения с точки зрения сингулярных разложений опубликовали в 1980 г. американские математики-вычислители Gene H. Golub и Charles F. Van Loan в виде статьи «An analysis of the total least squares problem» («Анализ обобщённого метода наименьших квадратов») [104]. Монография начала 90-х годов Бельгийских математиков S.Van Huffel и J. Vandewalle «The total least squares problems» [112] описывает дальнейшие расширения и приложения. Начались исследования и структурной коррекции. В статье Gene H. Golub, Alan Hoffmann и G. W. Stewart «A Generalization of the Eckart-Young-Mirsky Matrix Approximation Theorem» были исследованы случаи, когда некоторые столбцы матрицы коэффициентов могут быть фиксированы. Вопросы коррекции обеих частей матрицы системы с ограничениями описал Amir Back [99].

Среди отечественных математиков матричной коррекцией впервые занялся в середине 80-х годов XX в А.А.Ватолин [20, 21]. Работы в этом направлении, но с упором на несобственные задачи математического программирования, проводились под руководством академика РАН И.И.Ерёмина научной школой Института математики и механики УрОРАН [49-53].

В конце 90-х годов XX в. исследования уральской школы были продолжены в ВЦ РАН и МПГУ В.А.Гореликом и его учениками: В.И. Ерохиным, И.А. Золтоевой, О.В. Муравьёвой, Р.Р. Ибатуллиным, В.А. Кондратьевой, Р.В. Печёнкиным, О.А. Клименко, Н.З. Ле и другими [63, 64, 68, 69, 72, 79, 82]. В основном в качестве критерия оптимальности решения задачи коррекции использовался минимум евклидовой нормы матрицы коррекции. Исследованы вопросы существования решения, вид решения скорректированной системы, структурной коррекции (когда матрица коррекции имеет фиксированные строки и/или столбцы, отдельные элементы, является разреженной, матрицей Теплица, комбинаторного типа, имеет блочную структуру).

Р.Р.Ибатуллиным был рассмотрен минимаксный критерий оптимальности для коррекции систем линейных уравнений; описана коррекция линейных управляемых систем при ограничениях на управляющие переменные, значения входа и выхода системы. Предложены методы минимаксной коррекции, сводящие их к решению задач линейного программирования [64]. И.А. Золтоевой исследованы вопросы многокритериальной коррекции, в том числе с использованием минимаксного критерия, коррекция несовместных линейных систем с разреженными матрицами коэффициентов [63]. Также В.А. Гореликом и О.В. Муравьёвой задачи коррекции по минимуму евклидовой нормы применены к проблемам оптимизации и распознавания [41, 42, 44].

В настоящее время при моделировании реальных систем возникают новые некорректные задачи. В связи с этим необходимо разрабатывать новые численные методы решения таких задач и реализовывать их с использованием современных математических пакетов, таких как *MathCad* и *MatLab*. В частности, не полностью исследованными остаются вопросы коррекции линейных систем и соответствующих задач линейного программирования, для которых в качестве критерия оптимальности рассматривается минимум какой-либо полиэдральной нормы матрицы коррекции. Частным его случаем является минимаксный критерий. Всё вышесказанное и обуславливает **актуальность** выбора темы для данной исследовательской работы.

Таким образом, **проблема исследования** состоит в развитии методов и алгоритмов решения задач оптимальной матричной коррекции линейных систем и соответствующих задач линейного программирования по минимуму полиэдральных норм, а также их программной реализации и применения к практическим процессам обработки информации.

**Объектом** исследования является теория коррекции несовместных линейных систем и несобственных задач линейного программирования.

**Предмет** исследования составляют задачи матричной коррекции, в том числе структурной, с минимумом полиэдральной нормы матрицы коррекции в роли критерия качества коррекции.

**Цель** работы состоит в построении математического аппарата оптимальной по минимуму полиэдральной нормы коррекции линейных систем и несобственных задач линейного программирования, а также разработке соответствующих вычислительных алгоритмов.

В основе работы положена **гипотеза** о том, что приближенная линейная модель, формализованная в виде несовместной системы линейных уравнений или неравенств, является результатом неточно заданных или противоречивых исходных данных, а потому ей можно поставить в соответствие некоторую гипотетически точную линейную модель, формализованную в виде совместной системы линейных уравнений или неравенств. При этом существуют математические методы и вычислительные алгоритмы, позволяющие на основе исходной информации о модели получать восстановленные линейные зависимости.

Для достижения поставленной цели и проверки правильности гипотезы были поставлены следующие **задачи**:

1. Сформулировать задачи восстановления линейной зависимости по исходным данным с полиэдральной нормой матрицы коррекции в качестве критерия оптимальности.
2. Получить необходимые и достаточные условия существования решения задач коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений для различных видов полиэдральной нормы.
3. Формализовать проблемы коррекции несобственных однокритериальных и многокритериальных задач линейного программирования по минимуму полиэдральной нормы и разработать методы их решения.
4. Построить вычислительные алгоритмы для разработанных методов коррекции и реализовать их в прикладных пакетах программ.
5. Применить разработанные методы коррекции к несобственным задачам классификации и регрессии (как несобственным задачам интерполяции).

**Методологическую основу** исследования составляют методы классической и вычислительной линейной алгебры, матричного анализа, математического программирования.

**Научная новизна:**

* Получены и теоретически обоснованы необходимые и достаточные условия существования решения задачи коррекции систем линейных уравнений по минимуму различных видов полиэдральных норм.
* Разработаны методы решения задач коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств по минимуму полиэдральных норм, в том числе с различными ограничениями на структуру матриц коэффициентов.
* Разработаны методы коррекции задач линейного программирования по минимуму полиэдральных норм, а также совместной коррекции пары двойственных задач линейного программирования.
* Для многокритериальных задач рассмотрены методы коррекции по минимуму полиэдральных норм с использованием фиксированных пороговых значений, а также одновременной коррекции системы ограничений и пороговых значений.

**Практическая значимость результатов.** Предложенные методы и алгоритмы построения и анализа решений задач коррекции несовместных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств могут быть использованы в задачах обработки зашумленных данных, относящихся к области исследования специальности 05.13.17 – теоретические основы информатики. Они позволяют эффективно строить аппроксимирующие зависимости для противоречивых моделей. В частности, в работе они применены к задачам регрессии и несобственным задачам классификации. Проведенные вычислительные эксперименты показывают работоспособность предлагаемых методов и алгоритмов.

**Основные положения, выносимые на защиту**:

* необходимые и достаточные условия существования решения задачи коррекции системы линейных уравнений по минимуму полиэдральных норм;
* структурная коррекция линейных систем по минимуму полиэдральных норм матрицы коррекции;
* совместная матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования по минимуму полиэдральных норм;
* одновременная коррекция системы ограничений и пороговых значений многокритериальной задачи линейного программирования по минимуму полиэдральных норм;
* применение методов коррекции линейных систем по минимуму полиэдральных норм к задачам регрессии и классификации.

**Апробация результатов исследования**. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на следующих конференциях:

1. на региональной научно-методической конференции «Актуальные проблемы модернизации математического и естественно-научного образования», БИСГУ, 8 апреля 2010 г.;
2. на итоговой научной студенческой конференции Саратовского государственного университета, 12 мая 2010 г;
3. на научной конференции «Математика, информатика и методика их преподавания», МПГУ, март 2011 г;
4. на научной сессии математического факультета МПГУ 14 марта 2013 г.;
5. на VI Международной научно-практической конференции «Молодёжь и наука: реальность и будущее», г. Невинномысск, 2013 г.
6. на научном семинаре отдела «Имитационные системы и исследование операций» в Вычислительном центре им. Дородницына РАН, 12 ноября 2013 г.

**Публикации**. Основное содержание диссертационной работы отражено в 9 печатных работах, в том числе в трёх журналах, включённых в перечень ВАК РФ ([7], [8], [10]), четырёх статьях в сборниках конференций ([6], [9], [80], [81]).

**Содержание и структура работы**. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы, включающего 113 источников, и приложения.

***Первая глава*** посвящена коррекции несовместных линейных систем по минимуму полиэдральных норм. Сначала даётся общая постановка задачи коррекции, приводятся необходимые сведения о матричных и векторных нормах, определение полиэдральной нормы и некоторые её свойства, теоремы, относящиеся к решению матричных уравнений. Приведённые сведения составляют основу математического аппарата, используемого в диссертации.

Формулируются и доказываются необходимые и достаточные условия существования решения задачи коррекции несовместной системы линейных уравнений, дополненной условием неотрицательности решения.

Здесь и далее в работе рассматриваются два случая: когда коррекции подвергается только матрица коэффициентов, и когда может корректироваться ещё и вектор правых частей. Для этого вводится дополнительный параметр *l*, который принимает значение 1, если корректируются обе части системы, и 0 – при коррекции только матрицы коэффициентов.

Рассмотрен метод решения задачи коррекции путём сведения её, в зависимости от вида полиэдральной нормы, в двух случаях – к задаче линейного программирования, и в двух других – к последовательности конечного числа таких задач. Для каждого из случаев приведены и доказаны соответствующие теоремы. При решении получившихся задач могут применяться стандартные методы, например, симплекс-метод. В данной работе решение задач осуществляется численно, посредством составления вычислительных алгоритмов в среде *MatLab*.

Важным является пункт, посвящённый так называемой структурной коррекции линейных систем. Под структурной понимается коррекция, при которой на некоторые элементы матрицы (расширенной матрицы) наложен запрет на их коррекцию. Таким образом, в матрице могут присутствовать фиксированные столбцы, строки, отдельные элементы, или всевозможные их сочетания, с учётом того, что правая часть также может быть как фиксированной, так и свободной от коррекции. Данные задачи сводятся либо к задачам линейного программирования (или их совокупности), либо задачам билинейного программирования (или их совокупности), либо методом векторизации к дискретным минимаксным задачам, либо к задаче минимизации функции нескольких переменных на неотрицательном ортанте.

В частности, методы структурной коррекции применимы к системам неравенств, которые сводятся к равенствам путем введения дополнительных (искусственных) переменных (соответствующие столбцы, образующие единичную матрицу, фиксированы).

***Вторая глава*** посвящена коррекции однокритериальных и многокритериальных задач линейного программирования. Однокритериальная задача формализуется путём введения для целевой функции порогового значения. Коррекции подвергается система ограничений, которая представляет собой несовместную линейную систему.

Так как после коррекции возможно, что скорректированная задача будет неограниченной, то наряду с коррекцией только прямой задачи в данной главе рассматривается совместная коррекция пары взаимно двойственных задач, обозначенных и . Вновь принимаются во внимание два случая – коррекции обеих частей системы, и только левой её части. Формулируются соответственно задачи и [70]:

Задача получается из при .

Для многокритериальных задач рассмотрены два подхода. При первом для целевых функций вводится, по аналогии с однокритериальным случаем, вектор пороговых значений, и, таким образом, они переводятся в ограничения-неравенства. При втором подходе пороговые значения не фиксированы и, наряду с элементами матрицы коэффициентов ограничений, могут корректироваться. При решении последней задачи используется сведение к задаче билинейного программирования, к которой применяются численные методы нахождения минимума функции одной переменной. Проведён сравнительный анализ метода дихотомического поиска и метода золотого сечения, их точности и сходимости.

В ***третьей главе*** методы, разработанные в первых двух главах, применяются к задачам регрессии и классификации. Сначала даётся общая постановка задачи регрессии, которая рассматривается как коррекция несобственной задачи интерполяции:

В зависимости от конкретного вида полиэдральной нормы получаем различные частные постановки данной задачи.

Формулируется теорема, в которой говорится об эквивалентности задачи коррекции задаче математического программирования, к которой применимы методы из первой главы.

В задаче классификации ставится задача разбиения точек *n*-мерного пространства на два класса и аффинной разделяющей функцией вида

При этом, если объект *x* принадлежит классу , то должно выполняется неравенство , а если , то . Задача коррекции для случая неразделимости классов принимает вид

Формулируется соответствующая теорема, в которой данная задача эквивалентна задаче математического программирования, к которой применимы методы главы 1.

Кроме того, в данной главе рассмотрен ещё один подход к решению задачи коррекции несовместной системы линейных алгебраических неравенств, не использующий сведение её к системе линейных уравнений путём введения вектора искусственных переменных. Он основан на переборе подсистем неравенств, которые должны выполняться как равенства, методом ветвей и границ. Необходимые для обоснования этого метода леммы сформулированы и доказаны.

Основные результаты работы приведены в ***заключении***.

***Приложение*** содержит листинги некоторых программ, составленных на основе разработанных методов, и используемых для приведённых в работе вычислительных экспериментов.

**Глава 1. Коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и неравенств по минимуму полиэдральных норм**

**1.1. Понятие полиэдральной нормы и постановка задачи коррекции несовместных линейных систем**

Несовместные линейные системы являются важным классом несобственных (некорректных) задач. Некорректно поставленная задача по А.Н. Тихонову – та, которая не удовлетворяет следующим условиям [23]:

1) для любых исходных данных решение задачи существует;

2) решение определяется однозначно;

3) задача является устойчивой.

Данные требования были сформулированы Ж. Адамаром для корректно поставленной задачи. Не смотря на то что долгое время целесообразность изучения некорректно поставленных задач ставилась под сомнение, поскольку с их помощью невозможно напрямую (непосредственно) получить содержательную информацию об исследуемом объекте, оказалось, что большое их количество обладает практической и теоретической значимостью.

Таким образом, возникает необходимость решения задачи оптимальной коррекции исходной несобственной задачи. То есть нахождения таких поправок исходных данных, которые являются минимальными в некотором смысле, и таких, что скорректированная задача становится собственной. Требование минимальности формализуется в виде отдельной задачи. Так, критерием оптимальности для матричной коррекции несовместных линейных систем может служить какой-либо из видов норм матрицы коррекции, наиболее распространёнными их которых являются упомянутые во введении квадратичный и минимаксный критерии.

Использование в качестве критерия оптимальности *полиэдральных норм*даёт новые возможности с точки зрения формализации постановки и содержательной  интерпретации задач оптимизации, в том числе прикладных [93]. К числу исторически сложившихся первых критериев качества полиэдральной структуры следует отнести известный критерий равномерного приближения Чебышева.

В монографии А.Д. Гвишиани и В.А. Гурвича «Динамические задачи классификации и выпуклое программирование в приложениях» [27] впервые встречается термин «*полиэдральное программирование*». В работах И.И. Ерёмина, Н.А. Кузнецова, А.Б. Куржанского, Б.П. Дербеневой, А.В. Лотова, Г.К. Каменева, Р.В. Ефремова, Е.К. Костоусовой, Л.И. Микулича, А.С. Беленького, Е.В. Гончарова используются выражения полиэдральное оценивание и полиэдральная аппроксимация, полиэдральная оптимизация и оптимизация в полиэдральной норме, полиэдральные множества допустимых стратегий, алгоритмы полиэдральной аппроксимации в задачах фильтрации и др. Н.В. Филимоновым исследована полиэдральная оптимизация дискретных процессов управления [93].

Основными достоинствами полиэдральной оптимизации являются:

* ясный практический смысл полиэдральных критериев качества;
* сводимость к задачам линейного программирования, теория которых хорошо изучена (напр., [2,4,17,96]);
* простота компьютерной реализации с использованием доступных и апробированных вычислительных технологий и стандартного программного обеспечения (напр., [104]).

В настоящем исследовании будем опираться на оптимизацию именно в полиэдральных нормах.

Рассмотрим несовместную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

которая дополняется условием неотрицательности решения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.2) |

где . И пусть - множество её решений.

Задачу матричной коррекции СЛАУ (1.1) в общем виде сформулируем следующим образом: требуется найти такую матрицу (расширенную матрицу ), что система

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.3) |

дополненная условием (1.2), становится совместной, а элементы матрицы коррекции удовлетворяют требованию «малости», которое формализуется в виде самостоятельной задачи.

Приведём некоторые сведения о векторных и матричных нормах, которые потребуются в дальнейшем [22, 36, 37, 93].

**Определение** [22]**.** Гёльдеровой нормой с показателем вектора называется

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Определение** [93]**.** Гёльдеровой нормой с показателем для матрицы будем называть величину

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.4) |

При выборе или получаем соответственно

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.5) |

**Определение** [37]**.** – нормой матрицы будем называть величину

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.6) |

где  *-* некоторые векторные нормы.

**Определение** [93]**.** Векторную норму называют полиэдральной, если её единичный шар

является многогранником, т.е. выпуклой оболочкой конечного множества точек.

**Определение.** Матричную - норму будем называть полиэдральной, если соответствующие векторные нормы и являются полиэдральными.

Приведём некоторые частные виды матричных полиэдральных норм в зависимости от выбора и .

1. При и

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. При и

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. При и

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. При и

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Таким образом, коррекция системы по минимуму одной из этих норм является частным случаем её коррекции по минимуму – нормы матрицы с соответствующим выбором векторных норм. А в случае минимизации величин и – частными случаями ещё и гёльдеровой нормы.

**Определение** [37]. Векторную норму будем называть двойственной к векторной норме Гёльдера с показателем *p*, если

где *q* такое, что

**Определение** [37]. Вектор , удовлетворяющий условию

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.7) |

для некоторого вектора , называется двойственным к вектору относительно нормы . Здесь - норма, двойственная к .

Нормы и являются двойственными друг к другу. Соотношение (1.7) принимает вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Тогда вектор, двойственный к относительно нормы , можно найти следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.8) |

где – число компонент вектора , для которых выполняется условие (то есть максимальных компонент). А вектор, двойственный относительно нормы можно найти по формуле

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.9) |

то есть вектор , определяемый (1.9), в общем случае не является единственным.

**Задача 1.** Найти матрицу , являющуюся решением системы (1.1)-(1.2) при фиксированном векторе , и имеющую минимальную - норму.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.1** [37]**.** Задача 1 разрешима, и, в частности, имеет решение из класса одноранговых матриц, задаваемое формулой

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где – вектор, двойственный к вектору относительно нормы. При этом

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Доказательство. В силу (1.7), получаем

Следовательно, матрица является решением системы (1.1).

В силу (1.7), а также свойства норм

имеем

Покажем, что для любой матрицы , являющейся решением системы (1.1), выполняется условие

Действительно, по свойству согласования векторных и матричных норм,

Таким образом, доказательство теоремы завершено.

Теорема 1.1 может быть применена для решения задач коррекции несовместных СЛАУ. Ниже приведены формулировки таких задач для коррекции только левой части СЛАУ и обеих её частей соответственно. Для удобства записи введём параметр :

**Задача 2.** Для заданного вектора найти матрицу, обладающую минимальной - нормой и такую, что система

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.10) |

дополненная условием (1.2), становится совместной, причём .

**Задача 3.** Для заданного вектора найти матрицу, где , , обладающую минимальной - нормой, такую, что система

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.11) |

дополненная условием (1.2), становится совместной, причём .

Действительно, системы (1.10) и (1.11) при фиксированном векторе можно переписать, как . Тогда к полученной системе применима теорема 1.1. Решение задается формулой

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где – вектор, двойственный к вектору относительно нормы . При этом

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.12) |

Запишем равенство (1.12) для частных случаев полиэдральных норм, учитывая также условие неотрицательности (1.2). Через обозначим строку матрицы с номером .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Для -нормы: |  | (1.12) |
| Для -нормы: |  |
| Для -нормы: |  |
| Для -нормы: |  |

Рассмотрим следующие задачи коррекции:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.13) |

В (1.13) требуется найти матрицу коррекции для задачи и расширенную матрицу коррекции для задачи , имеющие минимальные - нормы.

Пусть теперь дана несовместная система линейных алгебраических *неравенств* (СЛАН) с условием неотрицательности решения

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.14) |

где . И пусть - множество её решений.

Будет изложено два подхода к решению задачи коррекции СЛАН. Очевидный способ заключается в том, что исходную систему можно свести к системе уравнений, введя дополнительные переменные, количество которых равно количеству ограничений. Пусть - вектор дополнительных переменных, , , где *E* - единичная матрица порядка *m*. Тогда система (1.14) преобразуется к виду

|  |  |
| --- | --- |
| . | (1.15) |

Таким образом, исходная задача сводится к коррекции системы (1.15), причём коррекции может подвергаться только часть матрицы , а именно матрица *А*, то есть в имеются фиксированные столбцы (матрица *Е*). В этом заключается её принципиальное отличие от рассмотренного ранее класса задач. Задача является частным случаем структурной коррекции, рассмотренной далее в пункте 1.4.

Необходимо найти такую матрицу (расширенную матрицу ), что система

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.16) |

дополненная условием неотрицательности (1.2), становится совместной, а элементы матрицы коррекции удовлетворяют требованию, формализованному в задаче (1.13).

В главе 3 изложен другой способ решения задачи коррекции СЛАН, использующий сведение к коррекции её подсистемы, условия которой должны выполняться как равенства. Дальнейшие выкладки, теоремы и утверждения будут приводиться для задачи коррекции СЛАУ.

**1.2. Необходимые и достаточные условия существования решения задачи коррекции**

В данном параграфе рассмотрим условия существования решения задач и .

При выборе в качестве критерия -нормы задачи принимают следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.17) |
|  | (1.18) |

**Теорема 1.2.**

Решением задачи коррекции по минимуму -нормы является

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.19) |

Достижимость является необходимым и достаточным условием существования решения задачи .

Если решение задачи коррекции существует, то

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.20) |
|  | (1.21) |
|  | (1.22) |

где

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.23) |

– вектор, двойственный к вектору относительно нормы .

**Доказательство.** Формула (1.19) следует из (1.12) для случая соответствующих векторных норм.

Доказательство ***достаточности*** проведём методом «от противного». Пусть достигается, то есть . Так как исходная система (1.1) система несовместна, то в сочетании со сделанным предложением, можно заключить, что . Тогда в силу Теоремы 1.1 и (1.12') существует одноранговая матрица коррекции , такая что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.24) |

Предположим теперь, что существует такая матрица коррекции , что и рассмотрим функцию , где - строка матрицы с номером . , так как в противном случае . Тогда исходная система была бы совместна, поскольку . Следовательно, функция определена для любого .

Используя определение нормы при и , имеем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.25) |

откуда получаем, что существует вектор такой, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.26) |

Для произвольной матрицы коррекции , такой что скорректированная система совместной, справедливо

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.27) |

Тогда, используя соотношения (1.25)-(1.27), получаем, что

Получили противоречие.

Доказательство ***необходимости*** также проведём методом «от противного». Предположим, что задача разрешима, то есть существует матрица такая, что и

В то же время предположим, что не достигается, то есть

Тогда для произвольной матрицы имеем

Неравенство должно выполняться в том числе и для матрицы . Получили противоречие.

Справедливость (1.20) следует из того, что в случае исходную систему можно было бы скорректировать с помощью матрицы, максимальный элемент которой был бы равен нулю, а значит и все элементы которой равны нулю, что противоречит тому факту, что исходная система несовместна.

Убедимся в справедливости формулы (1.22). В силу (1.18) имеем

Наконец, действительно является оптимальной матрицей коррекции в силу (1.21)-(1.23), теоремы 1.1 и (1.12').

**Теорема 1.3.**

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.28) |

где . Для того чтобы задача имела решение, достаточно, чтобы выполнялось условие

Если решение задачи существует, то

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.29) |

где - вектор, двойственный к вектору относительно нормы . При этом

**Доказательство**. В силу (1.12') для соответствующих векторных норм

где - некоторый вектор. В силу теоремы Вейерштрасса нижняя грань в задаче всегда достигается, так как - непрерывная функция, а множество является компактом. Таким образом, (1.28) доказано.

Для доказательства достаточности рассмотрим вспомогательное тождество.

Пусть – некоторая матрица, такая что . Пусть

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.30) |

где – некоторый вектор, такой что - некоторый параметр. Тогда для любого выполняется

и, как следствие,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.31) |

Проведём доказательство достаточности «от противного». Пусть

Тогда существует задаваемая формулой (1.21) одноранговая матрица такая что . Предположим теперь, что существует такая матрица что . Пусть и – вектор, определяемый соотношением (1.30) при условии . Тогда, по определению нормы

Тогда в силу (1.31)

Получили противоречие.

Докажем (1.29). Предположим, что , тогда оказывается, что несовместная система может быть скорректирована с помощью некоторой матрицы, имеющей нулевую норму. Тогда сама матрица коррекции является нулевой, что противоречит несовместности системы. Таким образом, .

Правая часть (1.29) справедлива в силу , а также условия .

Сформулируем и докажем теоремы о виде допустимых множеств скорректированной системы.

**Теорема 1.4.** Если задача имеет решение, то для любой матрицы такой, что множество состоит только из одного элемента.

**Доказательство.** Пусть выполняется условие теоремы, тогда

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.32) |

Предположим теперь, что скорректированная система имеет не единственное решение и существует вектор такой, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.33) |

Вычитая из равенства (1.33) равенство (1.32) получаем

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.34) |

Так как матрица одноранговая, то её можно записать в виде , где – некоторые векторы. С помощью (1.32) определим *с*:

откуда

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.35) |

Рассмотрим 2 случая:

1) если , то из (1.34) и (1.35) получаем

то есть вектор является решением исходной несовместной системы. Пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно и в этом случае заключение теоремы справедливо.

2) .

Для произвольного вектор Рассмотрим теперь вектор .

Тогда что противоречит предположению о существовании решения задачи

**Теорема 1.5.** Если задача имеет решение, то для любой матрицы такой, что множество состоит только из одного элемента.

**Доказательство.** Пусть выполняется условие теоремы, тогда

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.36) |

Предположим теперь, что скорректированная система имеет не единственное решение и существует вектор такой, что

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.37) |

Вычитая из равенства (1.37) равенство (1.36) получаем уже имевшее место равенство (1.34):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Так как матрица одноранговая, то её компоненты можно записать в виде , где – некоторые векторы, – некоторое число. С помощью (1.36) определим *с*:

откуда

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.38) |

Рассмотрим 2 случая:

1) если , то из (1.34) и (1.38) получаем

то есть вектор является решением исходной несовместной системы. Пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно и в этом случае заключение теоремы справедливо.

2) .

Для произвольного вектор Рассмотрим теперь вектор .

Тогда что противоречит предположению о существовании решения задачи .

**Теорема 1.6.** Если несовместная система вида (1.1) такова, что , то задача не имеет решения.

**Доказательство.** Предположим, что но . Из последнего условия следует, что система имеет нетривиальные решения. Пусть – такое решение, а именно . В силу теоремы 1.2

Получили противоречие. Таким образом, если , то что противоречит предположению о существовании решения задачи .

**Теорема 1.7.** Если несовместная система вида (1.1) такова, что , то задача не имеет решения.

**Доказательство.** Предположим, что но . Из последнего условия следует, что система имеет нетривиальные решения. Пусть – такое решение, а именно . В силу теоремы 1.2

Получили противоречие. Таким образом, если , то что противоречит предположению о существовании решения задачи .

Для остальных видов полиэдральных норм матрицы коррекции условия существования решения задач и формулируются аналогично теоремам 1.2-1.7. Кроме того, для норм и условие существования решения, рассмотренное в теореме 1.3, является не только достаточным, но и необходимым. Доказательства теорем производятся аналогичным образом.

**Теорема 1.8.** Решением задачи коррекции по минимуму -нормы является

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Достижимость является необходимым и достаточным условием существования решения задачи .

Если решение задачи коррекции существует, то

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

где

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

– вектор, двойственный к вектору относительно нормы .

**Теорема 1.9.** Решением задачи коррекции по минимуму -нормы является

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где . Для того чтобы задача имела решение, достаточно, чтобы выполнялось условие

Если решение задачи существует, то

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где - вектор, двойственный к вектору относительно нормы . При этом

**Теорема 1.10.** Решением задачи коррекции по минимуму -нормы является

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Достижимость является необходимым и достаточным условием существования решения задачи

Если решение задачи коррекции существует, то

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

где

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

– вектор, двойственный к вектору относительно нормы .

**Теорема 1.11**. Решением задачи коррекции по минимуму -нормы является

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где . Для того чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

Если решение задачи существует, то

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где - вектор, двойственный к вектору относительно нормы . При этом

**Теорема 1.12.** Решением задачи коррекции по минимуму -нормы является

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Достижимость является необходимым и достаточным условием существования решения задачи .

Если решение задачи коррекции существует, то

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

где

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

– вектор, двойственный к вектору относительно нормы .

**Теорема 1.13**. Решением задачи коррекции по минимуму -нормы является

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где . Для того чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

Если решение задачи существует, то

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где - вектор, двойственный к вектору относительно нормы . При этом

Формулировки теорем 1.4-1.5 о виде решения скорректированных систем и 1.6-1.7 о необходимых условиях существования решений задач коррекции для , и -норм остаются без изменений. В условиях этих теорем переменные могут быть произвольного знака, в то время как в теоремах 1.2, 1.3 и 1.8-1.13 учитывается условие неотрицательности решения (1.2).

**1.3. Методы решения задач коррекции несовместных систем по минимуму полиэдральных норм**

Рассмотрим способы решения задач коррекции для случаев различных видов полиэдральных норм. Далее под задачей будем понимать задачи и (при и соответственно). Пусть в качестве критерия оптимальности выступают сначала и - нормы. Методы коррекции для минимаксного критерия были исследованы в [64].

**Теорема 1.14.** Задача коррекции по минимаксному критерию (по минимуму -нормы) эквивалентна следующей задаче линейного программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.41) |

**Доказательство.**

Введём в рассмотрение скалярную величину и вектор . Так как выполняются условия неотрицательности (1.2), то и . В соответствии с формулой (1.12') нормы необходимо минимизировать величину для всех *i*. Значит, и , что приводит к первым ограничениям задачи (1.41). Кроме того,

Пусть – решение ЗЛП (1.41). Если указанное решение существует, то задача имеет решение, которое, в частности, может быть построено по следующим формулам

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.42) |

Сформулируем соответствующую теорему для – нормы.

**Теорема 1.15**. Задача коррекции по минимуму – нормы эквивалентна задаче линейного программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.43) |

**Доказательство.** Используя формулу (1.12') для случая -нормы, получаем, что необходимо минимизировать величину

Введём в рассмотрение скалярную величину и вектор . Так как выполняются условия неотрицательности (1.2), то и . Тогда для всех *i*. Ограничим значения модулей для каждого *i* числами , из которых составим вектор : и , что приводит к первым ограничениям задачи (1.43). Кроме того,

Пусть – решение ЗЛП (1.43). Если указанное решение существует, то задача имеет решение, которое, в частности, может быть построено по следующим формулам

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.44) |

Рассмотренная пара задач коррекции по минимуму - нормы при отличается от второй пары задач с тем, что требуют решения только одной задачи линейного программирования. Как будет показано далее, для решения по минимуму и - норм необходимо решить или задачу линейного программирования.

**Теорема 1.16**. Задача коррекции по минимуму – нормы эквивалентна задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.45) |

**Доказательство.** Используем формулу (1.12') для -нормы. Получаем, что необходимо минимизировать величину

Последнее равенство справедливо в силу условия неотрицательности (1.2). Введём в рассмотрение скалярную величину и вектор . Заметим, что . Тогда для всех *i*. Ограничим значения модулей для каждого *i* числами , из которых составим вектор : и , что приводит к первым ограничениям задачи (1.45).

Пусть – решение ЗМП (1.45). Если указанное решение существует, то задача имеет решение, которое, в частности, может быть построено по следующим формулам

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.46) |

где – вектор, двойственный к вектору относительно нормы . Учитывая условие (1.2), по формуле (1.8) получаем

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Так как заранее неизвестно, какая из компонент вектора в оптимальном решении будет максимальной, то скаляр может принимать значение одной из дробей при коррекции только левой части системы (1.1) () и одно из значений или 1 – при коррекции обеих частей системы (). При каждом задача (1.45) является задачей линейного программирования. Поэтому для решения задачи необходимо решить последовательность или задач линейного программирования.

**Теорема 1.17.** Задача коррекции по минимуму – нормы эквивалентна задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.47) |

**Доказательство.** Используем формулу (1.12') для -нормы. Получаем, что необходимо минимизировать величину

Последнее равенство справедливо в силу условия неотрицательности (1.2). Введём скаляр и вектор (см. предыдущее доказательство). Тогда для всех *i*. Ограничим значения модулей числом : и , что приводит к первым ограничениям задачи (1.47).

Пусть – решение ЗМП (1.44). Если указанное решение существует, то задача имеет решение, которое, в частности, может быть построено по следующим формулам

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.48) |

**1.4. Коррекция линейных систем с ограничениями на матрицу коррекции**

В практических задачах часто возникают случаи, когда некоторые условия обязательны, и, соответственно, некоторые величины не могут подвергаться коррекции.

Пусть – матрица, содержащая информацию о корректируемых элементах. При этом , если соответствующий элемент матрицы фиксированный, и , если соответствующий элемент матрицы может корректироваться.

В зависимости от вида матрицы коррекции методы, применяемые для решения задачи, будут различны. Рассмотрим возможные случаи.

***Задачи, сводящиеся к задачам линейного программирования***

**Теорема 1.18.** Если для элементов матрицы выполняются условия

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.49) |

то задача коррекции по минимуму -нормы эквивалентна следующей задаче линейного программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.50) |

**Доказательство.**

Не умаляя общности, считается, что коррекции могут подвергаться первые строк и столбцов. В остальных случаях сначала производится перестановка столбцов (что соответствует изменению нумерации переменных) и/или строк (что соответствует смене порядка следования уравнений системы).

Элементы матрицы коррекции, соответствующие последним строкам и столбцам, будем считать нулевыми.

Представим корректируемую подматрицу из первых строк матрицы и вектор в виде:

где

Обозначим ненулевую подматрицу матрицы коррекции через , а через и первые элементов векторов и соответственно. Тогда

В соответствии с (1.12) необходимо минимизировать

Введём в рассмотрение переменную и вектор . Так как выполняются условия неотрицательности (1.2), то и . Тогда для . Следовательно, и , что приводит к первым ограничениям задачи (1.50). Кроме того,

Если существует – решение ЗЛП (1.50), то задача имеет решение, которое может быть построено по следующим формулам

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | (1.51) |

Таким образом, к задачам линейного программирования сводятся задачи коррекции, в которых матрица ограничений (расширенная) содержит фиксированные столбцы и/или строки. Аналогичным образом доказывается теорема для случая -нормы.

**Теорема 1.19.** Если для элементов матрицы выполняются условия (1.49), то задача коррекции по минимуму -нормы эквивалентна следующей задаче линейного программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.52) |

Если существует – решение ЗЛП (1.51), то задача имеет решение, которое может быть построено по следующим формулам

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | (1.53) |

***Задачи, сводящиеся к совокупности задач линейного программирования***

Для задач коррекции по минимуму и -норм, в которых матрица коррекции содержит фиксированные строки и/или столбцы, проведём ту же последовательность действий, что и при доказательстве теорем 1.18 и 1.19.

Исходя из теорем 1.16 и 1.17, справедливы следующие теоремы об эквивалентности задач коррекции задачам математического программирования.

**Теорема 1.20.** Если для элементов матрицы выполняются условия (1.49), то задача коррекции по минимуму -нормы эквивалентна следующей задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.54) |

Если существует – решение задачи (1.54), то задача имеет решение, которое может быть построено по следующим формулам

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | (1.55) |

**Теорема 1.21.** Если для элементов матрицы выполняются условия (1.49), то задача коррекции по минимуму -нормы эквивалентна следующей задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.56) |

Если существует – решение ЗЛП (1.56), то задача имеет решение, которое может быть построено по следующим формулам

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | (1.57) |

Здесь находится, исходя из определения вектора, двойственного относительно нормы по формуле (1.8). Так как заранее неизвестно, какая из компонент вектора в оптимальном решении будет максимальной, то скаляр может принимать одно из *n* (или *n*+1) значений. Таким образом, получаем совокупность *n* или *n*+1 задач ЛП.

***Задачи, сводящиеся к задачам билинейного программирования***

Рассмотрим теперь случай, когда в системе присутствует некоторая подсистема, в которой матрица левых частей зафиксирована, а правая часть может корректироваться. Множество номеров таких уравнений обозначим , тогда их количество – . При этом в оставшейся части матрицы могут присутствовать как фиксированные строки, так и фиксированные столбцы. Перестановкой строк и столбцов исходную матрицу можно всегда привести к виду, где коррекции будут подвергаться первые строк и столбцов, а уравнения с номерами из будут являться последними условиями.

К подсистеме, составленной из первых уравнений, применимы теоремы 1.18-1.21. Рассмотрим последние уравнений (далее выкладки приведены для ):

Для критериев, заключающихся в минимизации и -норм матрицы коррекции имеем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.58) |

Для коррекции по минимуму и -норм:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.59) |

Добавляя условия (1.58) к ограничениям задач (1.50) и (1.52), а условия (1.59) – задач (1.54) и (1.56), а также с учётом введённых переменных и , получаем следующие теоремы.

**Теорема 1.22.** Если для элементов матрицы выполняются условия

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.60) |

то задача коррекции по минимуму - нормы эквивалентна следующей задаче билинейного программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.61) |

Если – решение задачи (1.61), то решение задачи может быть найдено по формулам:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | (1.62) |

**Теорема 1.23.** Если для элементов матрицы выполняются условия (1.60), то задача коррекции по минимуму - нормы эквивалентна следующей задаче билинейного программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.63) |

Если – решение задачи (1.63), то решение задачи может быть найдено по формулам:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | (1.64) |

В (1.61) и (1.63), фиксируя различные значения *y*, получаем последовательность ЗЛП. Таким образом, получаем функцию одной переменной для (1.61) и для (1.63). Для отыскания такого *y*, при котором будет достигаться наименьшее значение функции , можно использовать численные методы минимизации функции одной переменной, например, метод дихотомического поиска или метод золотого сечения (см. напр. [15]) (подробнее эти вопросы исследованы в п. 2.4).

**Теорема 1.24.** Если для элементов матрицы выполняются условия (1.60), то задача коррекции по минимуму - нормы эквивалентна следующей задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.65) |

Будем считать элементы вектора , соответствующие фиксированным строкам, нулевыми, то есть .

Если – решение задачи (1.65), то решение задачи может быть найдено по формулам:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | (1.66) |

где – вектор, двойственный к вектору относительно нормы .

**Теорема 1.25.** Если для элементов матрицы выполняются условия (1.57), то задача коррекции по минимуму - нормы эквивалентна следующей задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.67) |

Если – решение задачи (1.67), то решение задачи может быть найдено по формулам:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | (1.68) |

где – вектор, двойственный к вектору относительно нормы .

В задачах (1.65) и (1.67) для каждого получаем задачу билинейного программирования, общее количество которых равно или , в зависимости от того, корректируется правая часть системы, или нет соответственно. Фиксируя после этого , , каждая из них становится ЗЛП.

Таким образом, в двух случаях (при и -нормах) получаем задачу билинейного программирования, а в двух других (при и -нормах) – конечное число задач билинейного программирования.

***Задачи, сводящиеся к дискретной минимаксной задаче и задачи минимизации функции на неотрицательном ортанте***

Пусть теперь в матрице исходной системы присутствуют отдельные фиксированные элементы, то есть те, которые не входят ни в фиксированный столбец, ни в фиксированную строку.

Перепишем систему (1.1) в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.69) |

где символ «» означает умножение матриц по Адамару (то есть поэлементное умножение матриц).

Используем векторизацию:

Обозначим через квадратную матрицу, в которой по диагонали расположены элементы вектора , а остальные элементы – нулевые. Представим её следующим образом: , где – матрица, полученная из единичной размера удалением столбцов с номерами .

Таким образом, система (1.59) принимает вид

откуда

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.70) |

В итоге получаем, что если для элементов матрицы выполняются условия

то решением задачи коррекции будет являться величина , которая является, в зависимости от выбора нормы, в трёх случаях – решением одной из ниже приведённых дискретных минимаксных задач на неотрицательном ортанте:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.71) |

или решением нелинейной оптимизационной задачи нахождения минимума функции многих переменных (так же при ):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.72) |

Если найдено решение на векторе , то матрицу и скорректированную матрицу коэффициентов можно найти по следующим формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.73) |

где определяется формулой (1.70) при .

Для решения задач (1.71) могут применяться численные методы решения дискретных минимаксных задач, например покоординатного спуска или методы последовательных приближений [47].

Для задачи (1.72), используя правила нахождения псевдообратной матрицы, а также специфический вид матриц и , можно получить более конкретный вид элементов вектора коррекции и оптимизируемой функции.

, где . То есть по диагонали полученной матрицы расположены векторы, составленные из тех компонент вектора , которые соответствуют корректируемым элементам матрицы исходной системы. Множество индексов таких элементов для *i*-той строки обозначено .

Если действительная матрица размерности имеет полный ранг, то псевдообратную матрицу можно найти по формуле [22]:

Так как – блочно-диагональная матрица размерности , в которой блоки представляют собой вектор-строки, то она является матрицей полного ранга, равного . Причём количество строк в ней меньше количества столбцов, следовательно, псевдообратная матрица имеет вид

Тогда элементы вектора коррекции будут иметь вид:

При решении данной задачи могут применяться такие численные методы минимизации функции нескольких переменных как покоординатного или градиентного спуска [5, 16].

Если найдено решение на векторе , то матрицу и скорректированную матрицу коэффициентов можно найти по формулам (1.70), где определяется формулой (1.70) при .

**1.5. Вычислительные эксперименты**

Численное решение всех задач проводилось в программе MatLab. Примеры программ для рассмотренного ниже примера приведены на Листинге 1 в Приложении.

**Пример 1.** Скорректировать СЛАУ с условием неотрицательности , определяемую следующими параметрами:

.

В качестве критерия использовать -норму матрицы коррекции.

Получаем

**Пример 2.** Скорректировать СЛАУ по минимуму -нормы матрицы коррекции, определяемую следующими параметрами:

.

Так как , то в соответствии с теоремой, аналогичной 1.5 для нормы , задача коррекции не имеет решения.

**Пример 3.** Скорректировать обе части следующей СЛАУ:

Заметим, что , но теорема 1.5 неприменима, так как присутствует условие неотрицательности. Задача коррекции по минимаксному критерию имеет решение

По той же причине решение скорректированной системы может быть не единственным. Оно имеет вид , где

При коррекции по минимуму -нормы получаем

Скорректированная система имеет единственное решение .

Задачи коррекции по минимуму и -норм не имеют решений.

**Выводы к первой главе**

В первой главе была рассмотрена коррекция несовместных линейных систем по минимуму полиэдральных норм. Даётся общая постановка задачи коррекции, приводятся необходимые сведения о матричных и векторных нормах, определение полиэдральной нормы и некоторые её свойства, теоремы, относящиеся к решению матричных уравнений.

Формулируются и доказываются необходимые и достаточные условия существования решения задачи коррекции несовместной системы линейных уравнений, дополненной условием неотрицательности решения.

Принимаются во внимание два случая, что отражается в дополнительном параметре *l*. Если коррекции подвергается только матрица коэффициентов, то , а когда может корректироваться ещё и вектор правых частей, то .

Задачи коррекции были решены путём сведения их, в зависимости от вида полиэдральной нормы, в двух случаях – к задаче линейного программирования, и в двух других – к последовательности конечного числа таких задач. Для каждого из случаев приведены и доказаны соответствующие теоремы. В данной работе решение задач осуществляется численно, посредством составления вычислительных алгоритмов в среде MatLab.

Один из пунктов посвящён структурной коррекции линейных систем, при которой на некоторые элементы матрицы (расширенной матрицы) наложен запрет на их коррекцию. Таким образом, в матрице могут присутствовать фиксированные столбцы, строки, отдельные элементы, или всевозможные их сочетания, с учётом того, что правая часть также может быть как фиксированной, так и свободной от коррекции. Данные задачи сводятся либо к задачам линейного программирования (или их совокупности), либо задачам билинейного программирования (или их совокупности), либо методом векторизации к дискретным минимаксным задачам, либо к задаче минимизации функции нескольких переменных на неотрицательном ортанте.

Изложенная теория сопровождается вычислительными экспериментами. В приложении находятся примеры листингов с текстами соответствующих программ.

**Глава 2. Коррекция несобственных задач линейного программирования с одним и многими критериями по минимуму полиэдральных норм**

**2.1. Коррекция несобственной задачи линейного программирования по минимуму полиэдральных норм**

Рассмотрим ЗЛП в канонической форме, допустимая область которой является пустой и формально задаётся несовместной системой (1.1) с условием (1.2). Для полноты описания указанной задачи необходимо ввести в рассмотрение вектор и записать условие

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.1) |

Рассмотрим подход к коррекции исследуемой ЗЛП, заключающийся в коррекции её допустимой области.

Формализуем задачу коррекции путём введения для целевой функции порогового значения , которое не подлежит коррекции: . При его недостижимости корректируется система ограничений [37]. Таким образом, мы останемся в классе ЗЛП.

Следует заметить, что данный метод применим не только к задачам с пустой допустимой областью. Если система ограничений (1.1) совместна, но значение целевой функции мало, то более адекватным будет введение порогового значения, которое его превышает. После этого задача становится несобственной.

В случае коррекции только матрицы коэффициентов или обеих частей системы получаем задачу или задачу соответственно, дополненные условием . С учётом введённых в теоремах 1.14 и 1.16 величин , и , , данное условие преобразуется соответственно в (2.2) или (2.3):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.2) |
|  | (2.3) |

В зависимости от вида полиэдральной нормы, исходная задача будет эквивалентна одной из задач математического программирования (1.41), (1.43), (1.45), (1.47), но с добавленным в систему её ограничений условием (2.2) или (2.3). Решение полученной задачи можно будет найти по формулам (1.42), (1.44), (1.46) или (1.48) соответственно.

В качестве примера приведём одну из теорем, в которой в качестве критерия оптимальности используется – норма. Принимая во внимание введённый в первой главе параметр , под задачей далее будем понимать задачу при и при .

**Теорема 2.1.** Задача коррекции по минимуму – нормы задачи линейного программирования, определяемой условиями (2.1), (1.1) и (1.2), эквивалентна следующей задаче математического программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.4) |

Пусть – решение ЗМП (1.45). Если указанное решение существует, то задача имеет решение, которое, в частности, может быть построено по следующим формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Если задача коррекции имеет решение, то найденное принимается в качестве решения скорректированной задачи, рассматриваемой с ограничением . При этом вопрос существования решения задачи линейного программирования с той же системой ограничений (1.1)-(1.2) не является столь существенным. Таким образом, скорректированная задача может оказаться неограниченной.

Если задача коррекции не имеет решения, то для и -норм возможна её регуляризация вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.5) |

Действительно, тогда для рассматриваемых норм из (1.12) имеем:

То есть значение нормы матрицы коррекции ограничено снизу, является непрерывной функцией на компакте, а следовательно, достигает на нём минимума. Тогда по теореме 1.2 для случая -нормы и аналогичной теореме для -нормы, задача коррекции имеет решение.

Кроме того, регуляризация (2.5) обеспечивает существование решения скорректированной задачи линейного программирования (2.1), (1.1)-(1.2), так как функция будет ограниченной на допустимом множестве, и, значит, достигать на нём наибольшего значения.

Преобразуем условие (2.5), используя переменную :

Тогда задача коррекции по минимуму – нормы задачи линейного программирования, определяемой условиями (2.1), (1.1) и (1.2), эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.6) |

Решение исходной задачи можно найти по формулам (1.42).

Задача коррекции по минимуму -нормы задачи линейного программирования, определяемой условиями (2.1), (1.1) и (1.2), эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.7) |

Решение исходной задачи в этом случае можно найти по формулам (1.44).

Для случаев и -норм применим регуляризацию вида

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.8) |

Из (1.12), имеем:

Аналогично предыдущим двум случаям, норма матрицы коррекции ограничена снизу и достигает наименьшего значения. По теоремам о необходимых и достаточных условиях существования решения для и -норм, соответствующие задачи коррекции имеют решения.

Используя введённую ранее переменную , преобразуем условие (2.8):

Тогда задача коррекции по минимуму – нормы задачи линейного программирования, определяемой условиями (2.1), (1.1) и (1.2), эквивалентна следующей задаче математического программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.9) |

Решение исходной задачи можно найти по формулам (1.46).

Задача коррекции по минимуму -нормы задачи линейного программирования, определяемой условиями (2.1), (1.1) и (1.2), эквивалентна следующей задаче математического программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.10) |

Решение исходной задачи в этом случае можно найти по формулам (1.48).

**2. 2. Коррекция несобственной задачи линейного программирования с использованием теории двойственности**

Рассмотренные методы коррекции системы ограничений задачи линейного программирования гарантируют, что допустимая область скорректированной задачи станет непустой. Но, как упоминалось выше, это еще не означает, что задача линейного программирования станет собственной, так как множество её решений может быть неограниченным.

Тем не менее, привлекая теорию двойственности [2, 4, 17, 86], можно получить методы коррекции несобственных задач линейного программирования, гарантирующие собственность прямой и двойственной скорректированных задач.

Справедлива следующая теорема существования решения [12]:

**Теорема 2.2**. Двойственные задачи линейного программирования разрешимы тогда и только тогда, когда их допустимые множества одновременно непусты.

Поэтому будем рассматривать далее совместную коррекцию прямой и двойственной задач линейного программирования.

Для определенности будем считать, что прямая задача и двойственная задачи записаны в канонической форме. Такой выбор форм записей задач линейного программирования упрощает некоторые обозначения и выкладки, но не умаляет общности рассуждений, так как задачи, записанные в другом виде, можно привести к данным формам записи.

Пусть прямая задача имеет вид

где , и – её допустимое множество.

– двойственная к ней задача, и - её допустимое множество.

Если пара задач и неразрешима, то их называют несобственными. Таким образом, возможны три случая [37]:

При этом в первом случае считают, что – несобственная задача 1-го рода, а – несобственная задача 2-го рода, во втором случае – несобственная задача 2-го рода, а – несобственная задача 1-го рода, и в третьем случае и – несобственные задачи 3-го рода.

Согласно этой классификации, задача линейного программирования, рассмотренная в предыдущем пункте, может быть несобственной 1-го либо 3-го рода. После коррекции её допустимая область становится непустой, следовательно, она может оказаться несобственной задачей 2-го рода [70]. Таким образом, после коррекции прямой задачи необходимо проверить, не является ли область допустимых значений двойственной задачи пустой. Если то скорректированная задача собственная. Если , то двойственную задачу также необходимо подвергнуть коррекции по соответствующему критерию, причём, во избежание того, что теперь прямая задача не будет иметь допустимых планов, проведём одновременную коррекцию прямой и двойственной задач. Будем считать, что хотя бы одно из допустимых множеств или пустое.

Задача матричной коррекции двойственной пары задач линейного программирования, записанных в стандартном виде, принимает вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.11) |

Необходимо найти такую матрицу , что скорректированная с помощью неё пара двойственных задач становится собственной, и которая имеет минимальную -норму . Как и ранее, будем далее полагать, что данная матричная -норма является полиэдральной. В работе [54-56, 70] рассматривалась коррекция двойственных ЗЛП по минимуму евклидовой нормы, при этом прямая задача записывалась в канонической форме, а двойственная – в стандартной.

Если в прямой задаче вектор правых частей свободен от коррекции, то получаем частный случай задачи при .

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.12) |

Рассмотрим сначала задачу . Пусть – значение максимизируемой функции прямой задачи: , тогда по первой теореме двойственности для оптимального решения значение целевой функции двойственной задачи также равно : . Система примет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.13) |

Рассмотрим подробнее задачи коррекции и по минимаксному критерию.

В соответствии с теоремой 1.1, решением матричной системы является одноранговая матрица, в которой для по определению двойственной нормы, можно положить элементы в каждой строке равными между собой. Применяя этот факт к первым двум неравенствам системы (2.13), получаем, что, с одной стороны, для прямой задачи

а для двойственной, поскольку матрицей коэффициентов второго неравенства системы является транспонированная матрица :

Таким образом, можно считать

Учитывая вид критерия и систему (2.13), задача коррекции сводится к следующей задаче математического программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.14) |

где через обозначена *i*-я строка матрицы , а – её *j*-й столбец.

Введём , , а также новые переменные , . Избавимся в последних двух равенствах от переменных и , умножив обе их части на скаляры и . Тогда условия, связанные со значениями целевых функций, примут вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.15) |

Также, исходя из введённых обозначений, получаем условия

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.16) |

Таким образом, с учётом (2.14)-(2.16), получаем следующую теорему.

**Теорема 2.3.** Задача коррекции пары двойственных задач линейного программирования эквивалентна следующей задаче математического программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.17) |

Если – решение задачи (2.17), то решение задачи , а также скорректированной пары задач линейного программирования можно будет найти по следующим формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.18) |

Рассмотрим теперь задачу . Отличие будет заключаться в том, что в прямой задаче может корректироваться вектор правых частей, а следовательно, в двойственной задаче – вектор коэффициентов целевой функции. Запишем для задачи систему, аналогичную (2.13)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.19) |

Проведя рассуждения аналогичные для задачи , сведём также к задаче математического программирования. Следует учесть, что переменная будет иметь вид . Из последнего равенства получаем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.20) |

Так как в задаче коррекции требуется найти матрицу с наименьшим значением нормы, то ограничим значение также переменной : . Таким образом, учитывая (2.15), (2.16), (2.19) и (2.20), получаем следующую теорему.

**Теорема 2.4.** Задача коррекции пары двойственных задач линейного программирования эквивалентна следующей задаче математического программирования:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| |  |  | | --- | --- | |  | (2.21) | |  |

Если – решение задачи (2.21), то решение задачи , а также скорректированной пары задач линейного программирования можно будет найти по следующим формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.22) |

Заметим, что если к коррекции пары двойственных задач предъявляется только требование существование решения, то в задачах (2.17) и (2.21) можно зафиксировать значение , при этом каждая из них станет задачей линейного программирования. Соответствующие скорректированные задачи будут собственными. При нахождении наименьшего , при котором задача коррекции и скорректированная пара двойственных задач имеют решения, получаем задачу одномерной минимизации по . Если возможно получить нижнюю и верхнюю оценки для значений целевой функции исходной задачи, то осуществляем минимизацию по .

Но если, кроме того, существенным является достижение наибольшего значения целевой функции: , что более адекватно постановке исходной задачи – следует осуществить перебор значений , где  – пороговое значение целевой функции, которое удовлетворяет требованиям ЛПР.

Для каждого их этих случаев задачи (2.17) и (2.21) сводятся к последовательности задач линейного программирования. То есть необходимо осуществить одномерную минимизацию функции .

**2.3. Коррекция многокритериальной несобственной задачи линейного программирования с заданными пороговыми значениями по минимуму полиэдральных норм**

Рассмотрим задачу многокритериальной (векторной) оптимизации. В исходной постановке она задаётся объектом , где *X* – множество стратегий или альтернатив (подмножество произвольного пространства), *W(x)* – векторная функция (векторный критерий), заданная на *X* и задающая частичный порядок на *X* .

Общий подход к формализации заключается в следующем. Выбирается один из методов, основанный на введении некоторой строгой математической процедуры выбора, связанной с вектором критериев *W*. Лицу, принимающему решения (ЛПР), предлагается дать необходимую информацию о параметрах метода, руководствуясь при этом тенденцией к максимальной полноте информации без требования к её непротиворечивости, а затем противоречивость устраняется путём минимальной коррекции оценок ЛПР. Если найденное решение, и, следовательно, скорректированные оценки ЛПР не устраивают, то на их основе оно может дать новые оценки и процедура повторяется.

Формально противоречивость информации ЛПР может быть представлена в виде несовместности соответствующих систем уравнений и неравенств.

Многокритериальную задачу линейного программирования запишем в виде:

|  |  |
| --- | --- |
| при ограничениях . | (2.23) |

Формализуем её путём введения пороговых значений , удовлетворяющих ЛПР и не подлежащих коррекции. Так же, как и при рассмотрении однокритериальной ЗЛП, в случае их недостижимости подвергается коррекции система ограничений. Таким образом, получаем линейную систему, в которой элементы матрицы коэффициентов, соотвтствующие уравнениям, могут корректироваться, а для ограничений-неравенств – фиксированы. Заметим, что исходная система ограничений может быть как несовместной, так и совместной, в случае, если на допустимом множестве не могут быть достигнуты выбранные пороговые значения.

Задача коррекции принимает следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.24) |

Условие запишем в матричном виде: , где *С* – матрица коэффициентов целевых функций. С учётом введённых в теоремах 1.14 и 1.16 величин , и , , преобразуем данное условие, исключив переменную *x*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.25) |
|  | (2.26) |

В зависимости от вида полиэдральной нормы, исходная задача будет эквивалентна одной из задач математического программирования (1.41), (1.43), (1.45), (1.47), но с добавленным в систему её ограничений условием (2.25) или (2.26). Решение полученной задачи можно будет найти по формулам (1.42), (1.44), (1.46) или (1.48) соответственно.

Приведём ниже соответствующие теоремы 2.3-2.6.

**Теорема 2.5**. Задача коррекции по минимуму –нормы многокритериальной ЗЛП вида (2.23) эквивалентна задаче линейного программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Решение исходной многокритериальной задачи при этом можно будет найти по формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Теорема 2.6.** Задача коррекции по минимуму –нормы многокритериальной ЗЛП вида (2.23) эквивалентна задаче линейного программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Решение исходной многокритериальной задачи при этом можно будет найти по формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**Теорема 2.7**. Задача коррекции по минимуму –нормы многокритериальной ЗЛП вида (2.23) эквивалентна задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Решение исходной многокритериальной задачи при этом можно будет найти по формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где – вектор, двойственный к вектору относительно нормы .

**Теорема 2.8**. Задача коррекции по минимуму –нормы многокритериальной ЗЛП вида (2.23) эквивалентна задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.27) |

Решение исходной многокритериальной задачи при этом можно будет найти по формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Значения критериев находим по формуле:

При решении конкретных задач одной из главных проблем становится определение пороговых значений функции. Предложим алгоритм, который

упростит эту задачу для ЛПР. Сначала найдём некоторый «ориентир», начальное значение пороговых значений. Во-первых, следует заметить, что, как и при решении однокритериальных задач, система линейных ограничений может быть как несовместной, так и совместной. Для начала рассмотрим случай, когда в качестве ограничений выступает система линейных алгебраических уравнений.

Для определения совместности системы воспользуемся теоремой Кронекера-Капелли [22]:

**Теорема 2.9.** Для того чтобы система линейных алгебраических уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы равнялся рангу матрицы системы.

Если система совместна, то в случае наличия единственного решения , удовлетворяющего кроме того условию неотрицательности, начальными пороговыми значениями будут значения критериев в этой точке. В случае наличия бесконечного количества решений применим метод «идеальной точки», то есть в качестве начальных пороговых значений возьмем координаты точки допустимого множества в пространстве критериев, ближайшей к точке, координатами которой являются максимальные значения каждого их критериев.

Если же система несовместна, или имеет решение, не удовлетворяющее условию неотрицательности, то проведём коррекцию системы по соответствующему критерию, как описано в главе 1. За начальные пороговые значения целевых функций тогда возьмём их значения в точке, являющейся оптимальным решением задачи коррекции. Весь изложенный алгоритм, который реализован в программе *MatLab*, можно представить в следующем виде:

**Алгоритм 1:**

1. Если система совместна, то

1. если состоит из единственного элемента , то
2. если состоит более, чем из одного элемента, то , где .

Перейти к п.3.

2. Если система несовместна, то , где - решение системы , скорректированной по минимуму соответствующей нормы матрицы коррекции;

3. Если найденные значения устраивают ЛПР, то , иначе оно устанавливает новые пороговые значения , и решается задача коррекции .

4. Повторять п.3, пока на некотором шаге найденные значения не устроят ЛПР. .

Пусть теперь допустимая область исходной многокритериальной ЗЛП задана системой неравенств. Без особых пояснений приведём алгоритм, схожий с предыдущим. При исследовании системы на совместность воспользуемся следующей теоремой [96]:

**Теорема 2.10.** Необходимым и достаточным условием совместности системы линейных неравенств над пространством ранга *r*> 0 является существование в матрице ее коэффициентов такого отличного от нуля минора

*r*-го порядка, что выполняются соотношения

для .

Здесь через обозначено пространство *n*-мерных векторов с координатами из поля *P*. Если *P* – поле действительных чисел, то .

**Алгоритм 2:**

1. Если система совместна, то

1. если состоит из единственного элемента , то
2. если состоит более, чем из одного элемента, то , где .

Перейти к п.3.

2. Если система несовместна, то , где - решение системы , скорректированной по минимуму соответствующей нормы матрицы коррекции;

3. Если найденные значения устраивают ЛПР, то , иначе оно устанавливает новые пороговые значения , и решается задача коррекции .

4. Повторять п.3, пока на некотором шаге найденные значения не устроят ЛПР. .

Пусть исходная многокритериальная задача теперь задана в общем виде. Алгоритм решения будет аналогичным, а в качестве критерия совместности системы ограничений, состоящей как из уравнений, так и неравенств, будем использовать обобщённую теорему Кронекера-Капелли [96]:

**Теорема 2.11**. Пусть — ранг системы (\*) и – ранг содержащейся в ней системы уравнений. Тогда для совместности системы (\*) необходимо и достаточно, чтобы в ее матрице существовал такой отличный от нуля минор *r*-го порядка, содержащий строк, составленных из коэффициентов уравнений системы (\*), чтобы были равны нулю все те сопровождающие его определители этой системы, которые отвечают ее уравнениям, и неотрицательны все те сопровождающие его определители, которые отвечают ее неравенствам.

**2.4. Коррекция системы ограничений и пороговых значений многокритериальной несобственной задачи линейного программирования**

Задачу многокритериальной оптимизации формализуем теперь введением для пороговых значений уступок и решим задачу одновременной матричной коррекции и ограничений многокритериальной задачи, и пороговых значений целевых функций.

Условие достижимости пороговых значений с уступками запишется в следующем виде: (в матричном виде: ).

При аппроксимации исходной задачи по минимуму полиэдральной нормы матрицы коррекции получим следующую задачу:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.28) |

Здесь – расширенная матрица коррекции системы линейных ограничений и пороговых значений:

Запишем из (2.10) для различных случаев полиэдральной нормы.

Для -нормы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.29) |

Для -нормы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.30) |

Для -нормы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.31) |

Для -нормы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.32) |

Учитывая вид матрицы коррекции , получаем случай коррекции СЛАУ, для которого в *m* строках могут корректироваться обе части, в оставшихся же *r* строках матрица коэффициентов фиксирована, а вектор правых частей может корректироваться. Получаем одну из задач, рассмотренных в п. 1.4 предыдущей главы. Для случая коррекции по минимуму -нормы применим к ней теорему 1.20, учитывая, что , и .

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.33) |

Если – решение задачи (2.33), то решение исходной задачи коррекции, матрица коррекции и значения уступок для каждого из критериев находятся по следующим формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.34) |

Для случая коррекции по минимуму -нормы получаем следующую задачу билинейного программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.35) |

Если – решение данной задачи, то решение исходной задачи коррекции, матрица коррекции и значения уступок для каждого из критериев находятся по следующим формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.36) |

Для случая коррекции по минимуму -нормы получаем совокупность задач билинейного программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.37) |

Если – решение данной задачи, то решение исходной задачи коррекции, матрица коррекции и значения уступок для каждого из критериев находятся по формулам (2.36).

Для случая коррекции по минимуму -нормы получаем совокупность задач билинейного программирования:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.38) |

Если – решение задачи (2.15), то решение исходной задачи коррекции, матрица коррекции и значения уступок для каждого из критериев находятся по формулам (2.34)

Как было сказано, задачи (2.33), (2.35), (2.37) и (2.39) не является ЗЛП, но, фиксируя разные значения *y* в задачах (2.33) и (2.35), или для задач (2.33) и (2.35), получаем последовательность задач линейного или билинейного программирования, которые, в конечном счёте, сводятся к конечному или бесконечному числу задач линейного программирования соответственно. Для отыскания такого *y* (или ), при котором будет достигаться наименьшее значение целевой функции, могут быть использованы различные методы.

Самый простой путь заключается в равномерном разбиении отрезка, на котором определена функция, с некоторым шагом, величина которого зависит от требуемой точности.

Найдём область определения функции для минимаксного критерия. Так как , то .

Метод равномерного разбиения отрезка ведёт к большому количеству вычислений. Поэтому большую ценность приобретают экономичные (или так называемые *оптимальные*) методы, позволяющие решить задачу минимизации с требуемой точностью на основе вычислений значений функции как можно в меньшем количестве точек, а также тесно связанные с ними методы, гарантирующие наилучшую точность при жёстко заданном количестве вычислений значений минимизируемой функции.

Рассмотрим методы дихотомического поиска и «золотого сечения», которые относятся к классу *симметричных* методов [5, 16, 23].

1) *Метод дихотомического поиска (метод деления пополам)*. Прежде, чем описать сам метод, введём в рассмотрение понятие унимодальной функции и докажем необходимую в дальнейшем лемму.

**Определение**. Функция называется унимодальной на отрезке , если она непрерывна на и найдётся такое, что для всех и для чисел таких, что , и выполнено:

1) при ; 2) при .

**Лемма 2.12**. Пусть  унимодальна на отрезке . Пусть такие, что . Если , то  для . Если , то  для .

**Доказательство**. Пусть  и . Предположим, что утверждение леммы неверно, то есть пусть  (по пункту 2 определения унимодальности). А из унимодальности *f* и  следует . Так что , что противоречит с . Следовательно, .

Аналогично доказывается второе утверждение леммы.

Из леммы следует, что новым отрезком неопределённости является , если  и , если . Суть метода дихотомического поиска заключается в итеративном сокращении отрезка неопределённости. В зависимости от функции *f* длина нового отрезка равна  или . Оптимальная стратегия выбора точек  и  заключается в стремлении минимизировать максимум из  и :

.

Это может быть достигнуто выбором в качестве  и  середины отрезка . Так как нам нужно две точки, то они выбираются симметрично на расстоянии  от середины отрезка каждая: . Определяется новый отрезок неопределённости , затем процесс повторяется. Величина , являющаяся параметром метода, выбирается вычислителем и может определяться целесообразным количеством верных десятичных знаков при задании аргумента *x*. В частности, ясно, что не может быть меньше точности, предусмотренной в используемой программе. При малых точки и делят отрезок почти пополам – этим объясняется название метода.

Для того чтобы вычислить точку минимума с точностью , необходимо, чтобы на некотором *k*-том шаге длина отрезка  не превосходила , то есть . Вычислим длину отрезка .



Если количество вычислений значений минимизируемой функции ничем не ограничено, то описанный процесс деления отрезка пополам можно продолжать до тех пор, пока не получится отрезок длины . Теперь вычислим, на каком шаге будет достигнута необходимая точность.



Кроме того, исходя из области определения логарифма . Если же величина не будет удовлетворять этому условию, то произойдёт зацикливание, так как на некотором шаге получим отрезок неопределённости, длина которого больше предыдущего. Поскольку каждое деление пополам требует двух вычислений значений функций, то для достижения точности требуется всего таких вычислений.

После определения отрезка в качестве приближения ко множеству (где - множество точек минимума) можно взять точку при и при . При таком выборе приближения для будет допущена погрешность . Если не требовать того, чтобы значение функции, принимаемое за приближение к (где - нижняя грань функции *f*), было вычислено непременно в той же точке, которая служит приближением к , то вместо можно взять точку, являющуюся серединой последнего отрезка неопределённости, то есть , с меньшей погрешностью (при достаточно малом ).

В этом случае можно произвести ещё одно дополнительное вычисление значения функции в средней точке и принять его за приближение к , при условии, что стоимость вычисления невысока и что заранее не задано количество вычислений значений функции.

Таким образом, методом деления отрезка пополам с помощью вычислений значений функции можно определить точку минимума унимодальной функции на отрезке в лучшем случае с точностью . В пункте 2) будет описан метод, позволяющий с помощью того же числа вычислений значений функции решить задачу точнее.

Следует отметить, что метод деления отрезка пополам без изменений можно применять для минимизации функций, не являющихся унимодальными. Однако в этом случае нельзя гарантировать, что найденное решение будет достаточно хорошим приближением к глобальному минимуму.

2) *Метод «золотого сечения»*. В отличие от предыдущего случая, где точки  и  выбирались всегда на одном и том же расстоянии от середины отрезка, на этот раз будем уменьшать расстояние с уменьшением самого отрезка неопределённости. В качестве и возьмём точки, делящие очередной отрезок по «золотому сечению».

Как известно, золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение меньшей части к длине большей части отрезка равнялось отношению длины большей части к длине всего отрезка. Обозначим это отношение через *t*, тогда получаем уравнение Нетрудно проверить, что золотое сечение отрезка производится двумя точками и , расположенными симметрично относительно середины отрезка. Замечательно здесь то, что точка в свою очередь производит золотое сечение отрезка . Аналогично точка производит золотое сечение отрезка . Опираясь на это свойство золотого сечения, можно предложить следующий метод минимизации унимодальной функции *f*(*x*) на отрезке .

Как и в пункте 1), сравним значения функции в точках и . Если , то примем , если же , то примем . На втором шаге вычисляем уже только одну точку, делящую новый отрезок неопределённости по золотому сечению и повторяем процедуру. Каждый раз в качестве точки выбираем ту из двух точек деления, в которой значение функции меньше. На *n*-м шаге очередную точку деления можно получить следующим образом: . При этом

Если число вычислений значений функции заранее не ограничено, то описанный процесс можно продолжать, пока не выполнится неравенство , где - заданная точность.

Теперь вычислим, на каком шаге будет достигнута необходимая точность.

Сравним количество итераций, которые необходимо совершить для достижения точности , при использовании двух указанных выше методов.

Так как , то . Тогда для дихотомического поиска при фиксированном . При использовании «золотого сечения»: .

Так как кроме точности количество итераций может зависеть только от длины промежутка , а для всех задач рассматриваемого типа , то возможно сравнить скорость сходимости в общем случае, не зависимо от параметров задачи. На Рисунке 1 изображены графики, отражающие количество итераций для методов дихотомического поиска и «золотого сечения» в зависимости от точности . Это ещё раз подтверждает более быструю сходимость по методу золотого сечения.

Рис. 1. Сравнение скорости сходимости методов золотого сечения и дихотомического поиска

**2.5. Вычислительные эксперименты**

**Пример 4.** Скорректировать ЗЛП по минимуму -нормы, определяемую условиями

При коррекции обеих частей системы ограничений получаем

Решение скорректированной системы имеет вид , где . Тогда значения целевой функции неограниченно возрастают на допустимой области скорректированной задачи.

Применим регуляризацию вида . Решение задачи коррекции останется прежним, решением скорректированной ЗЛП является вектор . Значение целевой функции .

Задача коррекции по минимуму -нормы только левой части не имеет решения, так как не достигается . При этом . После введения условия получаем следующие результаты:

**Пример 5**. Скорректировать ЗЛП, для которой коэффициенты целевых функций и пороговые значения определяются матрицей и вектором , а ограничения – матрицей коэффициентов и вектором . В качестве использовать минимаксный критерий.

С помощью программы *MatLab* получены следующие результаты (текст программы приведён на Листинге 2 в приложении):

На следующем рисунке изображён график функции, соответствующей данным примера.

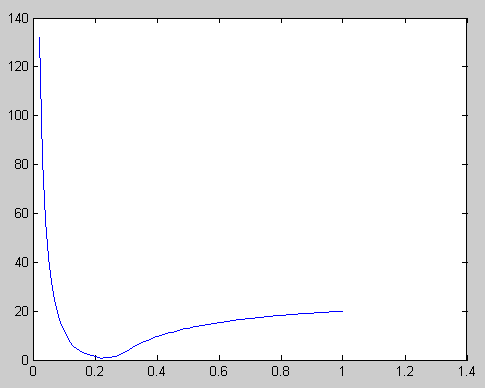


Рис. 2. График зависимости значения критерия от значения переменной .

Сравним методы дихотомического поиска и золотого сечения. Посмотрим на скорость сходимости для каждого из этих алгоритмов по аргументу и по значению функции. На Рисунке 3 изображен график сходимости для метода половинного деления (дихотомического поиска) с логарифмическими шкалами. При этом выбрана точность .

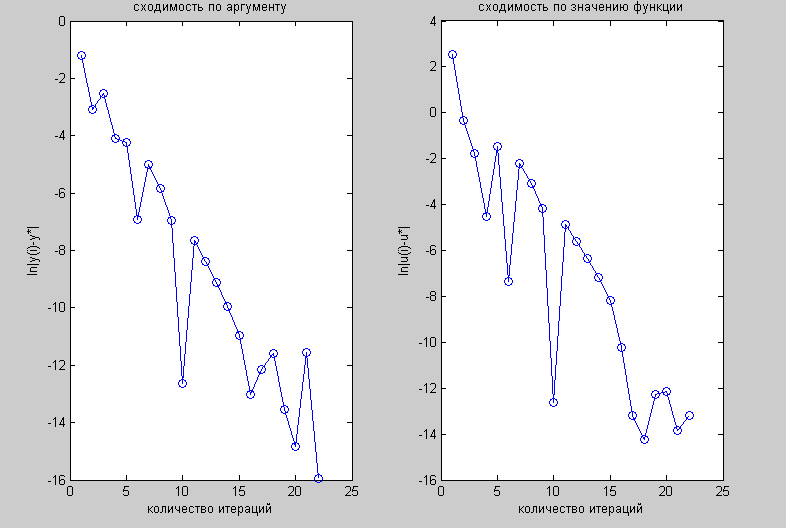


Рис. 3. Графики сходимости по значениям функции и по аргументу для метода дихотомического поиска.

На Рисунке 4 показаны аналогичные графики, соответствующие сходимости по аргументу и по значению функции, но при использовании метода золотого сечения.

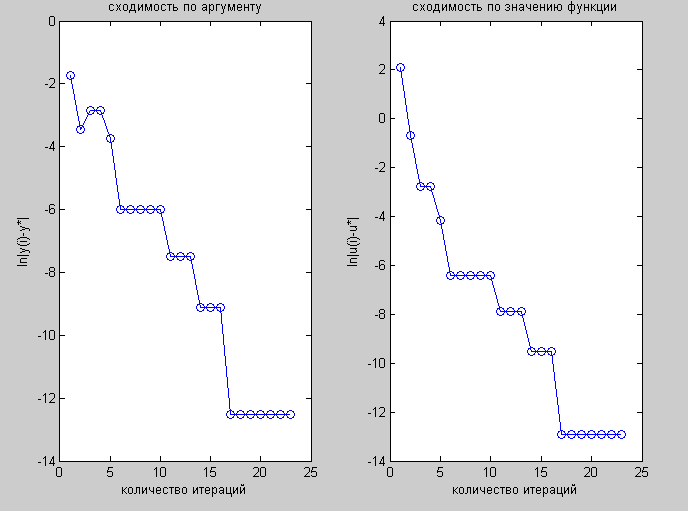


Рис. 4. Графики сходимости по значениям функции и по аргументу для метода «золотого сечения»

Как видно, для первого метода сходимость происходит скачкообразно, а для второго – ступенчатая.

**Выводы ко второй главе**

Во второй главе была рассмотрена коррекция однокритериальных и многокритериальных задач линейного программирования. Однокритериальная задача была формализована путём введения для целевой функции порогового значения. Коррекции подвергается система ограничений, которая представляет собой несовместную линейную систему.

Наряду с коррекцией только прямой задачи в данной главе рассматривается совместная коррекция пары взаимно двойственных задач и , так как после коррекции возможно, что скорректированная задача будет неограниченной. Принимаются во внимание два случая – коррекции обеих частей системы, и только левой её части. Формулируются соответственно задачи коррекции и :

Данные задачи сведены к задачам математического программирования, которые при фиксированном пороговом значении целевой функции исходной задачи становятся задачами линейного программирования. Таким образом, получена последовательность задач линейного программирования.

Для многокритериальных задач рассмотрены два подхода. При первом для целевых функций вводится, по аналогии с однокритериальным случаем, вектор пороговых значений, и, таким образом, они переводятся в ограничения-неравенства. При втором подходе пороговые значения не фиксированы и, наряду с элементами матрицы коэффициентов ограничений, могут корректироваться. При решении последней задачи используется сведение к задаче билинейного программирования, к которой применяются численные методы нахождения минимума функции одной переменной. Исследована скорость сходимости метода дихотомического поиска и метода золотого сечения в зависимости от требуемой точности.

Теоретические выкладки подтверждены вычислительными экспериментами, проведёнными в математической среде *MatLab*.

**Глава 3. Применение методов коррекции по минимуму полиэдральных норм к задачам регрессии и классификации**

**3.1. Применение методов коррекции по минимуму полиэдральных норм к задачам регрессии**

Задачи регрессии обычно возникают при обработке экспериментальных данных, полученных в результате измерений процессов или физических явлений, статистических по своей природе, или при высоком уровне помех (шумов). Задачей регрессионного анализа является подбор математических формул, наилучшим образом описывающих экспериментальные данные [44]. Рассмотрим математическую постановку задачи, а также понятия, необходимые для дальнейшего изложения [13, 14, 29, 44, 60-62, 77, 92].

Одной из основных задач вычислительной математики является задача интерполяции. Она заключается в построении функции из некоторого фиксированного класса функций Ф, такой, что поверхность, ею описываемая, точно проходит через имеющиеся точки данных , то есть

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.1) |

Но в связи с тем, что данные зачастую получены экспериментальным путём, задача становится несобственной. В этом случае рассматривается задача оптимальной коррекции (аппроксимации). Необходимо найти функцию, которая вместе с некоторым набором параметров удовлетворяет условию (3.1), и данный набор параметров является «ближайшим» к среди всех допустимых параметров. Под допустимыми понимаются параметры, при которых задача (3.1) является собственной. В качестве критерия «близости» будем рассматривать какую-либо полиэдральную матричную норму.

Получаем следующую задачу коррекции (аппроксимации):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2) |

Таким образом, в зависимости от , а также конкретного вида полиэдральной нормы получаем различные частные постановки задачи (3.2). Для рассматриваемой задачи регрессии и пространство ответов *Y*, и пространство признаков *X* являются числовыми (), Φ – скалярные аффинные функции нескольких переменных.

Математическая постановка задачи регрессии заключается в следующем. Зависимость величины (числового значения) определённого свойства некоторого процесса или явления от другого свойства зарегистрирована на множестве точек множеством значений . Рассмотрим задачу построения аффинной функции от *n* переменных вида

по заданным *m* точкам (*x*11, …, *xn*1,*y*1),…, (*x*1*m*, …, *xnm*,*ym*), для которой выполняется одно из следующих требований:

1) максимальное отклонение по всем координатам всех точек минимально;

2) максимальная сумма отклонений по каждой координате точек минимальна;

3) сумма отклонений по всем координатам всех точек минимальна;

4) максимальная сумма отклонений координат каждой точки минимальна.

То есть, геометрически интерпретируя, в пространстве **R***n*+1 требуется найти гиперплоскость вида *L*: *f*(*x*) = (*a*,*x*) + *a*0 такую, что для неё выполняется одно из четырёх условий, указанных выше.

Сформулируем соответствующую задачу коррекции системы линейных уравнений. Условие принадлежности точек (*x1*,*y1*), ..., (*xm*,*ym*) гиперплоскости *L* можно записать как

(*a*,*xi*) + *a*0 = *yi*, 

или в матричной форме

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3.3) |

где , , , *X* – матрица размера *m* × *n* , строками которой являются векторы .

Если через заданные точки нельзя провести гиперплоскость, то полученная система линейных уравнений (3.3) несовместна. Задача коррекции данной системы будет иметь следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.4) |

Задача (3.4) представляет собой задачу коррекции несовместной системы линейных уравнений с фиксированным последним столбцом по критерию минимума полиэдральной нормы матрицы коррекции. Причём коррекции подвергается как левая, так и правая части системы. Решение такой задачи описано в пункте 1.4 первой главы (теоремы 1.18-1.21).

В качестве примера возьмём случай 3) минимизации суммы отклонений по всем координатам всех точек. Ему будет соответствовать задача коррекции по минимуму - нормы. Сформулируем теорему, позволяющую получить решение задачи регрессии такого типа, руководствуясь соответствующей теоремой, учитывая, что количество корректируемых столбцов (при количестве переменных ) и .

Также примем во внимание то, что коэффициенты функции *f*(*x*) могут быть произвольного знака. Это ведёт к преобразованию одного из ограничений к причём для одного из значений должно выполняться одно из равенств или . Таким образом, необходимо рассмотреть ЗЛП. Если же по исходным данным можно судить о знаках коэффициентов, например, в связи с монотонностью функции, то теорема 1.20 применима без изменений.

**Теорема 3.1.** Пусть в пространстве признаков даны *m* точек , а в пространстве множество ответов , и не существует аффинной функции такой, что   
 Тогда задача нахождения минимального изменения матрицы параметров в смысле минимума - нормы, в результате которого интерполяционная аффинная функция существует, эквивалентна задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.5) |

Если существует – решение задачи (3.3), то коэффициенты аффинной функции

*f*(*x*) = *a*1*x*1+ *a*2*x*2+ ... + *anxn* + *a*0 = (*a*,*x*) + *a*0

и скорректированные значения параметров находим по формулам

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.6) |

где – вектор, двойственный к вектору относительно нормы .

Теоремы, соответствующие случаям коррекции по минимуму , и -норм формулируются аналогичным образом, опираясь соответственно на теоремы 1.18, 1.19 и 1.21, и учитывая запрет на коррекцию последнего столбца матрицы параметров.

**3.2. Коррекция систем линейных алгебраических неравенств по минимуму полиэдральных норм с помощью метода ветвей и границ**

Для решения задачи классификации, которая будет рассмотрена в следующем пункте, в качестве вспомогательной задачи потребуется решение задачи коррекции системы линейных неравенств.

Пусть дана следующая несовместная система линейных алгебраических неравенств

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.7) |

где . И пусть – множество её решений. Заметим, что если раньше, кроме того, вводилось условие неотрицательности переменных, то здесь оно не является обязательным, так как метод коррекции будем применять далее к задачам классификации, где переменные могут принимать значения произвольного знака. Задача матричной коррекции системы (3.7) будет иметь следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.8) |

В ней требуется найти такую расширенную матрицу с минимальной полиэдральной -нормой, что система

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

становится совместной. В случае коррекции только левой части будем считать .

Ранее в пункте 1.1 был рассмотрен подход, в котором исходная система сводилась к системе линейных алгебраических уравнений введением дополнительных переменных. После такого перехода от ограничений-неравенств к равенствам с вектором дополнительных переменных задача (3.8) принимает вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.9) |

Временно используем данную формулировку, и далее рассмотрим подход, в котором удастся уйти от использования дополнительных переменных. Такой подход был использован для коррекции по квадратичному критерию в [67, 68].

Норма минимальной матрицы, удовлетворяющей матричному уравнению , находится по формуле   
 Следовательно,

Так как – полиэдральная норма, то и - гёльдеровы векторные нормы с показателями или 1. Таким образом, в зависимости от нормы, получает одну из следующих задач:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.10) |
|  | (3.11) |
|  | (3.12) |
|  | (3.13) |

При фиксированном векторе задачи (3.10) и (3.13) сводятся к задаче нахождения

а задачи (3.11) и (3.12) – к задаче нахождения

где . Для их решения сформулируем следующие леммы.

**Лемма 3.2**. При фиксированном векторе

и достигается на векторе , определяемом формулами

**Доказательство.**

Рассмотрим . В случае наименьшее значение достигается при .

В случае , учитывая, что , . Наименьшее значение достигается при . Введём обозначения для подмножеств индексов: и .

**Лемма 3.3**. При фиксированном векторе

и достигается на параллелепипеде *V*, определяемом формулами

**Доказательство.**

Как было показано выше, при наименьшее значение . Тогда . При , учитывая, что , .

причём наименьшее значение достигается при . Тогда для остальных компонент вектора должны выполняться неравенства . Таким образом, решения задачи образуют параллелепипед в подпространстве .

Таким образом, на основании лемм 3.2 и 3.3, задачи (3.10) – (3.13)можно рассматривать как задачи проектирования на неотрицательный ортант. Ее решением является соответственно или -норма вектора, составленного из отрицательных компонент вектора . Пусть множество номеров отрицательных координат по-прежнему , – подматрица матрицы , состоящая из строк с номерами из , – вектор, образованный из соответствующих компонент вектора . Через и обозначим матрицу и вектор, составленные из остальных строк матрицы и вектора . Тогда

В результате получаем следующий метод нахождения решения задачи коррекции несовместной СЛАУ. Необходимо рассмотреть все подсистемы системы , которые будем обозначать . Среди них выбрать такую, что матрица коррекции имеет наименьшую норму, а решение скорректированной подсистемы является также решением системы, составленной из оставшихся неравенств, которую обозначим . Так как в исходной системе неравенств, то общее количество подсистем, включая исходную, равно . Большое количество неравенств ведёт к значительному объёму вычислений. Поэтому алгоритмизируем перебор подсистем с помощью метода ветвей и границ. Опишем суть этого метода [78, 86].

Метод ветвей и границ впервые был предложен в 1960 году Лендом и Дойгом. Для него необходимы две процедуры: ветвление и нахождение оценок. Применяется к задачам, в которых переменные двузначные (то есть принимают значения 0 или 1), или же могут быть сведены к таковым представлением переменных линейной комбинацией двузначных переменных.

Пусть – минимизируемая функция, – множество векторов с компонентами 0 или 1 длины . Вершины разветвления соответствуют подмножествам и следующим образом разбиваются на уровни. Существует единственная вершина уровня 0 (называемая корнем разветвления), которой соответствует все множество целиком. Для построения уровня 1 разветвления нужно сначала выбрать некоторую переменную, например . Тогда уровень 1 содержит две вершины, обозначаемые и , которые соответствуют следующим подмножествам: первое – подмножеству векторов с элементами 0 и 1, для которых переменная имеет значение 0, и второе – подмножеству векторов с элементами 0 и 1, для которых переменная имеет значение 1. Очевидно, что и . Кроме того, и образуют разбиение .

Аналогично, для построения уровня 2, нужно выбрать произвольную переменную, например, . Получаем четыре вершины: (для которой , ), (, ), (, ), ( ). Продолжаем таким образом до уровня .

Предположим, что для каждой вершины предыдущего разветвления можно с помощью вычисления определить оценку снизу – иначе говоря, миноранту минимизируемой функции. Тогда будет называться функцией оценки.

Если на некотором шаге ветвления получено текущее наименьшее значение , и для некоторой вершины , то по определению функции никакое содержащееся в решение не может быть лучше, чем , а потому не содержит оптимального решения. Поэтому нет необходимости исследовать следующие за ветвления. Ограничиваясь на каждом шаге только теми вершинами , что , можно достичь подходящей редукции эффективно исследуемых вершин.

Применим метод ветвей и границ к коррекции несовместной СЛАН. Пусть каждая из булевых переменных принимает значение 1, если -е неравенство входит в рассматриваемую корректируемую подсистему, и 0 – в противном случае. Ветвление заключается в разбиении множества подсистем на два: в которых будет содержаться -е неравенство и подсистемы, в которые оно входить не будет. В качестве функции оценки будет выступать функция минимума какой-либо полиэдральной нормы матрицы коррекции подсистемы . Тогда, если на некотором шаге получена оценка , и для некоторой вершины , то не будем исследовать системы, содержащие в себе подсистему, соответствующую (так как в них значение функции оценки будет заведомо больше ).

При выборе на каждом шаге вершины, которая будет подвергаться ветвлению, будем использовать «поиск в ширину». При этом методе систематически выбирается вершина, имеющая наиболее низкую оценку, в отличие от «поиска в глубину», где выбирается вершина наиболее высокого уровня среди вершин, ещё не подвергнутых разделению.

Порядок следования переменных, по значениям которых производится ветвление, будем считать соответствующим их нумерации.

Получаем следующий алгоритм.

|  |
| --- |
| **Алгоритм 3**  1. Вершины уровня 1.  1.1. . Положим  1.2. . Если система несовместна, то корректируем систему по минимуму соответствующей нормы, – решение задачи коррекции, – решение скорректированной подсистемы; иначе перейти к п.1.4.  *.*3. Если выполняются неравенства , то ; иначе примем .  1.4. Если система совместна, то .  2. Вершины уровня 2. Осуществляем ветвление по переменной .  Так как , то разветвлять будем вершину .  2.1. Для если система несовместна, то корректируем систему , – решение задачи коррекции; иначе .  2.2. Если выполняются неравенства , то ; иначе примем .  2.3. Для если система несовместна, то корректируем её, – решение задачи коррекции; иначе .  2.4. Если выполняются неравенства , то ; иначе примем .  3. Вершины уровня . Осуществляем ветвление по переменной .  Разветвляем каждый раз вершину , для которой оценка наименьшая. Для оценку принимаем равной . Для выполняем оценку аналогично 2.3-2.4. |

Таким образом, рассматриваются все подсистемы неравенств системы , в порядке возрастания мощности. Для рассматриваемой подсистемы определяется минимальная матрица коррекции такая, что совместна система уравнений . Если, кроме того, выполняются остальные неравенства, полученное значение сравнивается с текущим наилучшим значением задачи коррекции, все подмножества, содержащие данное, можно исключить из рассмотрения.

Если в исходной задаче отсутствует условие неотрицательности, то общее количество рассматриваемых подсистем уменьшится до , так как любое неравенство будет иметь решение в . Тогда исследование необходимо начать сразу с вершин уровня 2.

**3.3. Применение методов коррекции по минимуму полиэдральных норм к несобственным задачам классификации**

Дадим общую постановку задачи классификации [38,55,70,73]. Пусть дано множество объектов *M*, относительно которых проводится классификация. Известно, что множество *M* представимо в виде суммы подмножеств , , …, , называемых классами. Задана информация *I* о классах, описание множества *M* и описание *I*(*S*) объекта *S*, о котором, вообще говоря, неизвестно, к какому из классов , , …, он принадлежит. Требуется по информации об объектах установить принадлежность их к определённому классу.

Количество классов может быть известно заранее, либо ставится задача определения оптимального их числа с точки зрения того или иного критерия качества. Рассмотрим случай, когда имеется два класса объектов и , которые необходимо разделить в пространстве признаков гиперплоскостью. Но в связи с тем, что данные зачастую получены экспериментальным путём, задача становится несобственной, а потому следует рассматривать задачу её оптимальной коррекции.

Пусть нам заданы *m* объектов своими векторами признаков, при этом класс представлен объектами , а класс  – выборкой .

Дадим задаче следующую математическую формулировку:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.14) |

Здесь – аффинная разделяющая функция вида

и - матрицы, составленные из координат точек в пространстве критериев, принадлежащих классам и соответственно, и - матрицы координат скорректированных точек. Если объект *x* принадлежит классу , то должно выполняется неравенство , а если , то .

Таким образом, необходимо найти разделяющую функцию вместе с некоторым набором параметров , который является «ближайшим» к среди всех допустимых параметров. Под допустимыми понимаются параметры, при которых задача классификации является собственной. В качестве критерия «близости» будем рассматривать какую-либо полиэдральную матричную норму.

Исходя из условий принадлежности объектов к классам, имеем систему *m* линейных неравенств относительно *n* + 1 переменной *a*1,*a*2, …, *an*, *b*:

После введения обозначений

получаем следующую систему:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.15) |

Система (3.15) является системой линейных алгебраических неравенств, в случае несовместности которой можно воспользоваться методами коррекции, описанными в предыдущем пункте.

Метод ветвей и границ, отражённый в алгоритме 3, можно интерпретировать следующим образом [68]. Выбор некоторой несовместной подсистемы исходной системы неравенств соответствует выбору некоторых точек пространства, которые нельзя разделить гиперплоскостью. Положение точек корректируется таким образом, что их можно разделить. Решение скорректированной подсистемы является вектором коэффициентов разделяющей гиперплоскости. После этого проверяется, удовлетворяет ли найденное решение остальным неравенствам системы, то есть, расположены ли остальные точки в нужных полупространствах. Если да, то найденная гиперплоскость является претендентом на решение. Если есть точки, расположенные «неправильно» относительно гиперплоскости, то необходимо рассмотреть подмножества, полученные из данного добавлением ещё одной точки и т.д. Когда все подмножества рассмотрены, выбирается решение с наименьшим значением критерия (нормы корректирующей матрицы), которое будет являться оптимальным. Перебор осуществляется от множеств с меньшей мощностью к множествам с большей мощностью. Так как исходная задача не имеет решения, а системы, состоящие из менее чем уравнений, совместны, то система, составленная из оставшихся неравенств, будет несовместной. Таким образом, минимальное подмножество, для которого вспомогательная задача имеет решение, имеет мощность *n*.

Задача коррекции системы (3.15) будет иметь следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.16) |

Коррекции может подвергаться только левая часть, причём последний столбец фиксирован (свободен от коррекции).

Критерии оптимальности, заключающиеся в минимизации какой-либо полиэдральной нормы матрицы коррекции, будут интерпретироваться следующими требованиями «близости» гиперплоскости к исходным точкам:

1) максимальное изменение (по модулю) среди всех координат всех точек минимально;

2) максимальная сумма изменений по каждой координате точек минимальна;

3) сумма изменений всех координат всех точек минимальна;

4) максимальная сумма изменений координат каждой точки минимальна.

Сформулируем теорему для случая 3). Пусть - корректируемая подсистема, ограничения которой должны выполняться как равенства. Применим к ней теорему 1.20, для которой – количество неравенств подсистемы, при общем количестве переменных , . Используя обозначения , , , имеем

Кроме того, по определению переменных и , а также с учётом отсутствия условия неотрицательности,

**Теорема 3.4.** Пусть в пространстве даны *l* точек , принадлежащих классу , и *m-l* точек , принадлежащих классу , и не существует функции, их разделяющей. Тогда задача нахождения минимального изменения матрицы координат *X* в смысле минимума - нормы, в результате которого разделяющая аффинная функция существует, эквивалентна задаче математического программирования

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.17) |

где – подматрица , состоящая из строк с номерами , – соответствующий вектор из элементов вектора , а – подсистема, составленная из остальных неравенств системы

Если существует – решение задачи (3.17), то коэффициенты разделяющей аффинной функции

и скорректированные значения параметров находим по формулам

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.18) |

где – вектор, двойственный к вектору относительно нормы .

Заметим, что решение скорректированной системы будет определяться не однозначно, а с точностью до пропорциональности. Для простоты программной реализации методов решения задачи, для системы (3.15) можно рассмотреть 2 случая:

Затем, в качестве оптимального взять решение задачи с меньшим значением критерия. Первый из этих случаев соответствует в формулах (3.18) выбору , а второй – случаю .

***Коррекция несобственной задачи классификации в подпространстве критериев***

Значение критерия эффективности системы распознавания тем выше, чем больший объем измерительной информации используется при распознавании данного объекта. Но при распознавании конкретных объектов иногда нецелесообразно использовать весь набор признаков рабочего словаря. Связано это с тем, что определение каждого признака требует проведения соответствующего эксперимента и, следовательно, сопряжено с затратами материальных и временных ресурсов. В то же время объекты некоторых классов могут распознаваться и при использовании лишь части признаков рабочего словаря.

Рассмотрим задачу классификации в подпространстве критериев. Пусть, как и в предыдущем пункте, заданы *m* объектов своими векторами признаков, при этом класс представлен объектами , а класс  – выборкой . Если признак с номером не учитывается, то будем считать .

Обозначим через вектор селекции признаков, где , если *j*-й признак не учитывается и в противном случае.

Пусть также – стоимость измерения *j*-го критерия, , а - лимит средств на измерение. Тогда для нахождения вектора селекции, при котором средства будут наиболее эффективно использованы, получаем следующую задачу бинарной оптимизации:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.19) |

Если – решение задачи (3.19), то, используя ранее введённые обозначения, имеем

При этом система (3.1) преобразуется в систему

коррекция которой выполняется методами, описанными выше.

**3.4. Вычислительные эксперименты**

**Пример 6**. Пусть в пространстве заданы девять точек

Множество ответов задано вектором

На Рисунке 1 отображены результаты коррекции исходных данных по минимуму - нормы. Знаком «+» отмечены исходные точки, а «\*» – точки, соответствующие скорректированным данным. Как видно, после коррекции они принадлежат одной плоскости. Уравнение аппроксимирующей плоскости имеет вид

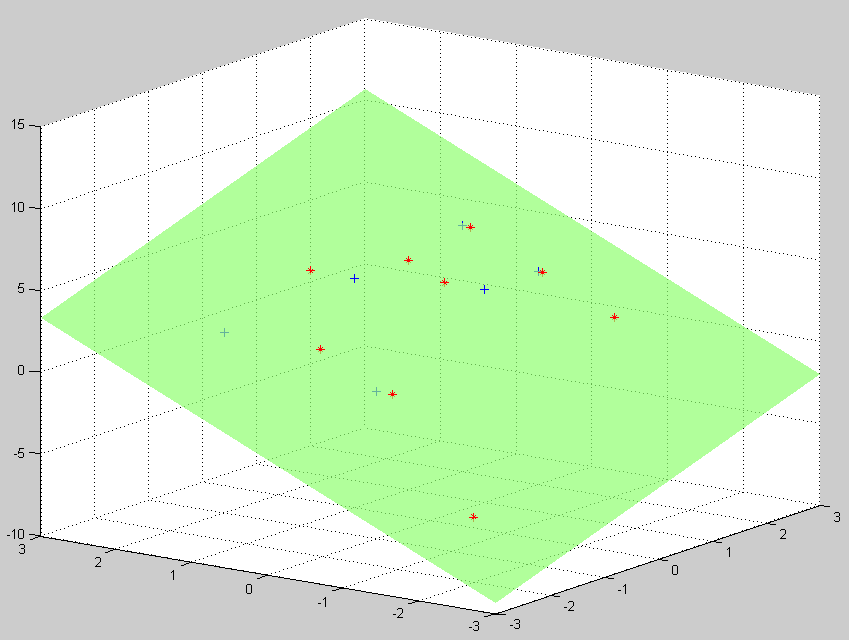
**

Рис. 5. Графическая интерпретация решения задачи регрессии по минимуму - нормы.

В Таблице 1 содержатся сравнительные результаты коррекции данных по всем четырём видам рассматриваемых норм. Выбор нормы зависит от конкретной задачи. Так, если желательно наименьшее значение , то следует выбрать - норму (минимаксный критерий), а если требуется получить как можно больше нулевых компонент в матрице коррекции, то - норму.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| нор-ма |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Таблица 1. Решение задачи регрессии в различных полиэдральных нормах.

**Пример 7**. Пусть в пространстве класс представлен точками

а класс – точками

В Таблице 2 приведены сравнительные результаты после коррекции исходных данных по минимуму -нормы с помощью сведения к СЛАУ введением вектора дополнительных переменных, и с использованием метода ветвей и границ.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Метод | с использованием вектора дополнительных переменных | ветвей и границ |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  | 1 | 1 |
|  |  |  |

Таблица 2. Сравнение методов коррекции по минимуму -нормы.

Графическая интерпретация представлена на Рисунке 6. Знаком «+» отмечены точки, принадлежащие классу , а знаком «о» – классу . На графике слева показано исходное положение точек, на графике справа – положение после коррекции. Плоскость, определяемая коэффициентами *a* и *b*, как видно, является разделяющей.

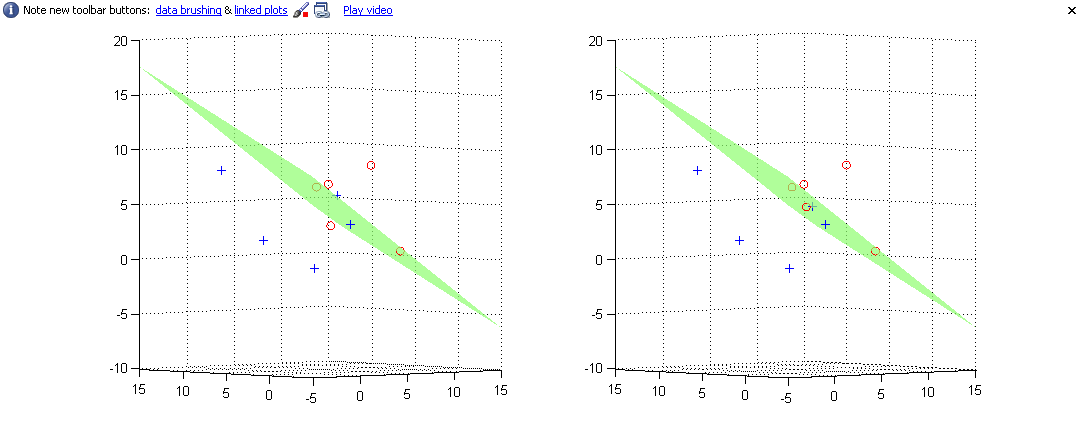
****

Рис. 6. Графическая интерпретация коррекции несобственной задачи классификации по минимуму -нормы.

Решим задачу коррекции по минимуму – нормы матрицы коррекции. Проиллюстрируем использование метода ветвей и границ, изобразив дерево решений (на Рисунке 7 изображена его часть).

Первым претендентом на решение стало при . После этого не рассматривались ветви со значением критерия . Второй претендент на решение: при . Третий: при . После этого не встречается меньших значений критерия, таких, что система их оставшихся неравенств была бы совместной.

После коррекции подсистемы из неравенств, соответствующих вектору , получены следующие результаты:

Рис. 7. Дерево решений несобственной задачи классификации.

6,8053

12,0265

1,5789

0,5294

5,2500

3,2813

0,6991

0,9710

2,6812

2,5313

7,4070

4,2904

6,1062

5,9204

0,3750

5,1212

8,7714

0,1579

5,9048

1,6364

11,3274

11,9333

1,4118

6,7867

0,8182

7,0000

7,4405

0,3214

4,5952

На Рисунке 8 слева показано исходное положение точек, а на графике справа – положение после коррекции. Как и на предыдущем рисунке, знаком «+» отмечены точки, принадлежащие классу , а знаком «о» – классу .

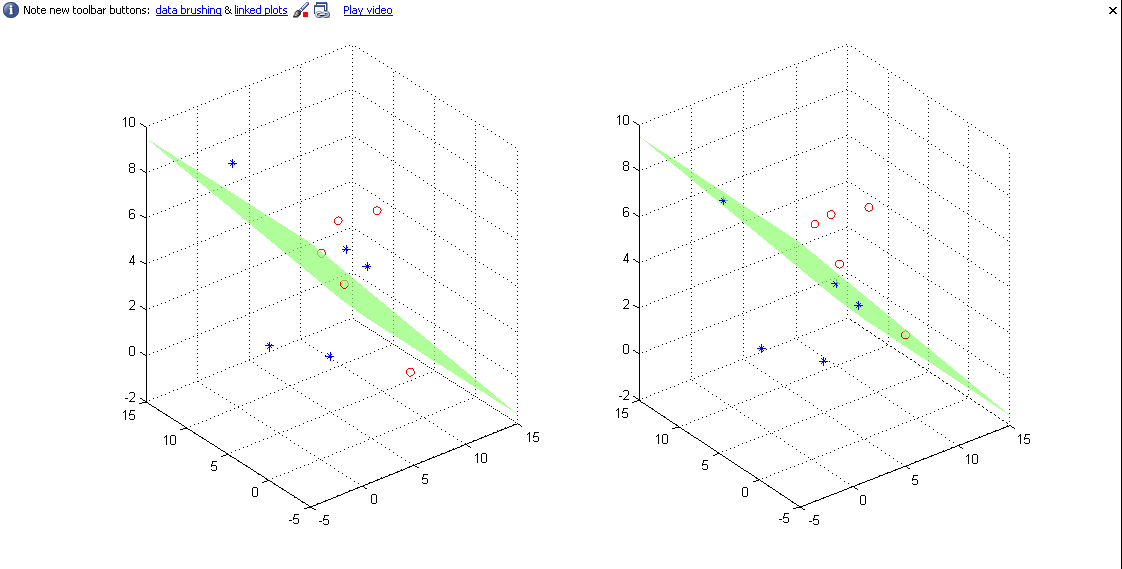
****

Рис. 8. Графическая интерпретация коррекции несобственной задачи классификации по минимуму -нормы.

**Выводы к третьей главе**

В третьей главе методы, разработанные в первых двух главах, были применены к задачам регрессии и классификации. Сначала даётся общая постановка задачи регрессии, которая рассматривается как коррекция несобственной задачи интерполяции. В зависимости от конкретного вида полиэдральной нормы получены различные частные постановки данной задачи.

Сформулирована теорема для одного из видов полиэдральных норм, в которой показана эквивалентность задачи коррекции задаче математического программирования, к которой применимы методы из первой главы.

Также была рассмотрена несобственная задача классификации с двумя классами. Необходимо разбить множество точек *n*-мерного признакового пространства на два класса и аффинной разделяющей функцией вида

При этом, если объект *x* принадлежит классу , то должно выполняется неравенство , а если , то . Была сформулирована теорема, в которой задача коррекции в этом случае эквивалентна задаче математического программирования, к которой применимы методы главы 1.

Также был рассмотрен ещё один подход к решению задачи коррекции несовместной системы линейных алгебраических неравенств, не использующий сведение её к системе линейных уравнений путём введения вектора дополнительных переменных. Основан он на переборе подсистем неравенств, которые должны выполняться как равенства, методом ветвей и границ. Необходимые для этого леммы сформулированы и доказаны.

Работоспособность предложенного метода подтверждена вычислительными примерами, один из которых приведён в данной работе и сопровождается графической интерпретацией процесса коррекции.

**Заключение**

В работе рассмотрены задачи оптимальной матричной коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств, а также соответствующих задач линейного программирования по минимуму различных видов полиэдральных норм матрицы коррекции. Исследована структурная коррекция систем линейных уравнений. При этом все типы задач рассматривались для двух случаев: когда коррекции подвергаются обе части системы ограничений (расширенная матрица коэффициентов), и когда столбец свободных членов системы фиксирован.

Рассмотрены практические приложения изложенных методов. Созданы программы, реализующие указанные методы, с помощью которых проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие полученные результаты.

**Основные результаты:**

* Для задачи матричной коррекции системы линейных алгебраических уравнений по минимуму полиэдральной нормы с условием неотрицательности сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия существования решения, основанные на теореме о решении матричных уравнений в обобщённых матричных нормах, а также свойствах полиэдральных норм.
* Разработаны методы решения задач коррекции несовместных линейных систем, а также несобственных задач линейного программирования, основанные на сведении их к собственным задачам линейного программирования или совокупности таких задач.
* Исследована структурная коррекция систем линейных алгебраических уравнений, а именно:
* задачи с запретом коррекции некоторых строк, столбцов или какой-либо их комбинации сведены к задачам линейного программирования или (в зависимости от вида нормы) конечной последовательности таких задач;
* задачи с запретом коррекции левой части некоторой подсистемы с одновременной коррекции её правой части (допускающие, кроме того фиксированные строки и/или столбцы) сведены к задачам билинейного программирования или их совокупности;
* задачи с запретом коррекции отдельных элементов методом векторизации сведены в трёх случаях нормы к дискретным минимаксным задачам, а в одном – к задаче нахождения минимума функции многих переменных.
* Рассмотрена коррекция несобственных многокритериальных задач линейного программирования по минимуму различных видов полиэдральных норм, основанная на двух подходах:
* задача коррекции формализуется с помощью введения для целевых функций фиксированных пороговых значений и сводится таким образом к задаче линейного программирования (или совокупности таких задач);
* корректироваться может как матрица ограничений, так и пороговые значения целевых функций, при этом задача коррекции сведена к задаче билинейного программирования (или совокупности таких задач);
* Методы коррекции несовместных линейных систем по минимуму полиэдральных норм применены к несобственным задачам классификации и регрессии посредством сведения их к несовместным системам уравнений и неравенств соответственно.
* Созданы вычислительные алгоритмы, соответствующие указанным методам, и реализованные в математической среде *MatLab*.

# Литература

1. Ашманов, С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. – М.: Наука, 1991. – 448 с.
2. Ашманов, С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 304 с.
3. Бакушинский, А.Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 199 с.
4. Банди, Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ. / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
5. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином, 2003. – 636 с.
6. Баркалова, О.С. Численные методы коррекции многокритериальных задач линейного программирования (ЗЛП) / О. С. Баркалова // Математика, информатика и методика их преподавания: Материалы Всероссийской конференции, посвященной 110-летию математического факультета МПГУ (Москва. 14-16 марта 2011 г.) / Ответственный редактор В.Л. Матросов. – М.: МПГУ, 2011. – С. 28-30.
7. Баркалова, О.С. Коррекция несобственных задач линейного программирования в канонической форме по минимаксному критерию / О.С. Баркалова // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012. – т. 52. – №12. – С. 1624-1634.
8. Баркалова, О.С. Коррекция несобственных задач классификации по минимуму различных видов полиэдральных норм / О.С. Баркалова // Качество. Инновации. Образование. – М.: Европейский Центр по Качеству, 2013. – №2. – С. 39-43.
9. Баркалова, О.С. Решение задачи матричной коррекции несобственной задачи линейного программирования по минимуму – нормы / О.С. Баркалова // Математика, информатика, физика в науке и образовании: сборник научных трудов. М.: МПГУ, Прометей, 2012. – С. 33-34
10. Баркалова, О.С. Применение методов коррекции по минимуму полиэдральных норм к задачам регрессии / О. С. Баркалова // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. – М.: МЭСИ, 2013. – №2. – С. 98-102.
11. Баркалова, О.С. Классификация задач коррекции систем линейных алгебраических уравнений по минимаксному критерию / О. С. Баркалова // Молодёжь и наука: реальность и будущее: Материалы VI Международной научно-практической конференции (г. Невинномысск, 2013). – Т. I. – Невинномысск: НИЭУП, 2013. – С. 22-25.
12. Белолипецкий, А.А. Экономико-математические методы: учебник для студ. высш. учеб. заведений / А.А. Белолипецкий, В.А. Горелик. – М.: Академия, 2010. – 368 с.
13. Вапник, В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным / В.Н. Вапник. – М.: Наука, 1979. – 449 с.
14. Вапник, В.Н. Теория распознавания образов. Статистические проблемы обучения / В.Н. Вапник, А.Я. Червоненкис. – М. : Наука, 1974. – 415 с.
15. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
16. Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
17. Васильев, Ф.П., Линейное программирование / Ф.П. Васильев, А.Ю. Иваницкий. М.: Факториал Пресс, 2003. – 352 с.
18. Васильев, Ф.П. Оценка скорости сходимости метода невязки для задач линейного программирования с приближенными данными / Ф.П. Васильев, А.Ю. Иваницкий, В.А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. – Т. 30. – № 8. – С. 1257–1262.
19. Ватолин, А.А. Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы / А.А. Ватолин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984. – Т. 24. – № 12. – С. 1907-1908.
20. Ватолин, А.А. Несобственные задачи математического программирования и методы их коррекции: дисс. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09. / Ватолин Анатолий Анатольевич. − Екатеринбург, 1992.
21. Ватолин, А.А. О коррекции расширенной матрицы несовместной системы линейных неравенств и уравнений / А.А. Ватолин // Комбинаторные, алгебраические и вероятностные методы дискретного анализа. Горький, 1989. – С. 40–54.
22. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
23. Вержбицкий, В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): учеб. пособие для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»», 2005. – 432 с.
24. Волков, В.В. Восстановление линейных зависимостей по неточной информации: Дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. / Владимир Викторович Волков. − М., 2011. – 136 с.
25. Волков, В.В. О тихоновских решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений при конечных возмущениях их матриц / В.В. Волков, В.И. Ерохин // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. – Т. 50. – № 4. – С. 618–635.
26. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. − Издание 5-е. − М.: Физматлит, 2006. – 560 с.
27. Гвишиани, А.Д. Динамические задачи классификации и выпуклое программирование в приложениях / А.Д. Гвишиани, В.А. Гурвич. – М.: Наука, 1992. – 360 c.
28. Голуб, Дж. Матричные вычисления: Пер. с англ / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М.: Мир, 1999. − 548 с.
29. Горелик, А.Л. Методы распознавания / А.Л. Горелик, В.А. Скрипкин. – М.: Высш. шк., 2004. – 261 с.
30. Горелик, В.А. Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений / В.А. Горелик // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. − 2001. − Т. 41. − № 11. − C. 1697–1705.
31. Горелик, В.А. Формализация и решение задач многокритериальной оптимизации на основе методов минимальной коррекции исходных данных / В.А. Горелик // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов / ВЦ РАН. М., 2008. – С. 69–82.
32. Горелик, В.А. Численные методы коррекции несовместных систем линейных уравнений и несобственных задач линейного программирования / В.А. Горелик // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов / ВЦ РАН. М., 2009. – С. 34–52.
33. Горелик, В.А., Ерохин В. И., Печёнкин Р. В. Матричная коррекция несовместных линейных систем с матрицами Теплица (Ганкеля) / В.А. Горелик // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов / ВЦ РАН. М., 2003. – С. 41–73.
34. Горелик, В.А. Некоторые задачи аппроксимации матриц коэффициентов несовместных систем линейных уравнений и несобственных задач линейного программирования / В.А. Горелик, В.И. Ерохин, О.В. Муравьёва // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН., 2001. – С. 57–88.
35. Горелик, В.А. Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы / В.А. Горелик, В.И. Ерохин. − М.: ВЦ РАН, 2004. − 196 с.
36. Горелик, В.А., Ерохин В. И., Печёнкин Р. В. Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов / В.А. Горелик, В.И. Ерохин, Р.В. Печёнкин // Дискрет. анализ и исслед. операций. Серия 2, 2005. − Т. 12, − № 2. − С. 3–22.
37. Горелик, В.А. Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений / В.А. Горелик, В.И. Ерохин, Р.В. Печёнкин. − М.: ВЦ РАН, 2006. − 152 с.
38. Горелик, В.А. Методы коррекции несовместных линейных систем с разреженными матрицами / В.А. Горелик, И.А. Золтоева, Р.В. Печёнкин // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. − 2007. − Т. 14. − № 2. − С. 62-75.
39. Горелик, В.А. Методы коррекции несовместных линейных систем уравнений и неравенств комбинаторного типа и их применение к задачам классификации / В.А. Горелик, О.А. Клименко // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – 2010. – № 7.
40. Горелик, В.А Задача аппроксимации с коррекцией всех данных / В.А. Горелик, О.В. Муравьёва // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. – М.: ВЦ РАН, 2000. – С. 21–32.
41. Горелик, В.А. Матричная коррекция данных в задачах оптимизации и классификации / В.А. Горелик, О.В. Муравьёва // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. − М.: ВЦ РАН, 2004. − С. 94 − 120.
42. Горелик, В.А. Методы коррекции данных в задаче распознавания образов / В.А. Горелик, О.В. Муравьёва // Тезисы докладов 2-й Московской конференции «Декомпозиционные методы в математическом моделировании и информатике». – М.: ВЦ РАН, 2004. – С. 39.
43. Горелик, В.А. Необходимые и достаточные условия существования минимальной матрицы в задаче коррекции несовместной системы линейных уравнений / В.А. Горелик, О.В. Муравьёва // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов –М.: ВЦ РАН, 2000. –С. 14 –20.
44. Горелик, В.А. Методы коррекции несобственных задач и их применение к проблемам оптимизации и классификации / В.А. Горелик, О.В. Муравьёва. – М.: ВЦ РАН, 2012. – 148 с.
45. Горелик, В.А. Программная реализация коррекции несобственных задач линейного программирования по минимаксному критерию / В.А. Горелик, О.С. Павлова (Баркалова) // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. – М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук, 2010. – C. 66-80.
46. Гренандер, У. Лекции по теории образов. Синтез образов: Пер. с англ / У. Гренандер. – Т.1. – М.: Мир, 1979. – 384 с.
47. Демьянов, В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
48. Дородницын, А.А. Проблемы математического моделирования в описательных науках / А.А. Дородницын // Кибернетика. – 1983. – № 4. – С. 6-10.
49. Ерёмин, И.И. Противоречивые модели оптимального планирования / И.И. Ерёмин. – М.: Наука, 1988. – 160 с.
50. Ерёмин, И.И. Двойственность в линейной оптимизации / И.И. Ерёмин. – Екатеринбург: УрО РАН, 2001.
51. Ерёмин, И.И. Двойственность для несобственных бесконечномерных задач линейного и выпуклого программирования / И.И. Ерёмин А.А. Ватолин // Методы аппроксимации несобственной задачи линейного программирования. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 3–20.
52. Ерёмин, И.И. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования / И.И. Ерёмин, В.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев. − М.: Наука. Физматлит, 1983. − 336 с.
53. Ерёмин, И.И. О несовместных системах линейных неравенств / И.И. Ерёмин // ДАН СССР. – М.: Наука, 1961. – №6. – С. 1280-1283.
54. Ерохин, В.И. Квазиньютоновские алгоритмы матричной коррекции несобственных задач линейного программирования со структурными ограничениями / В.И. Ерохин, А.С. Красников, М.Н. Хвостов // Материалы Международной конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций» 24 – 28 июня 2013 г., Новосибирск: Издательство Института математики. 2013. – С. 49.
55. Ерохин, В.И. Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования / В.И. Ерохин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47. – № 4. – С. 587-601.
56. Ерохин, В.И. О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений / В.И. Ерохин, А.С. Красников, М.Н. Хвостов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19. – №2. – С. 144-156.
57. Ерохин, В.И. Свойства оптимальной одноранговой коррекции матриц коэффициентов несовместных неоднородных линейных моделей / В.И. Ерохин // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. − 2002. − Т. 9. − № 1. − С. 33-60.
58. Ерохин, В. И. Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 05.13.17 / Ерохин Владимир Иванович. – М., 2005. – 346 с.
59. Ерохин, В. И. Матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы, взвешенной с произвольными положительными весами / В.И. Ерохин, В.В. Волков, А.С. Красников // Информационные и коммуникационные технологии в образовании. Сборник материалов VI Всероссийской научно-практической конференции. Борисоглебск: ГОУ ВПО БГПИ, 2005. – С. 90–95.
60. Журавлев, Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации / Ю.И. Журавлев // Проблемы кибернетики. − М.: Наука, 1978. − Вып. 33. – С. 5-68.
61. Журавлев, Ю.И. Об алгебраической коррекции процедур обработки (преобразования) информации / Ю.И. Журавлев, К.В. Рудаков // Проблемы прикладной математики и информатики. 1987. С. 187–198.
62. Журавлев, Ю.И. Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения / Ю.И. Журавлев, В.В. Рязанов, О.В. Сенько. – М.: Фазис, 2005. – 159 с.
63. Золтоева, И.А. Методы коррекции данных для формализации и решения задач многокритериальной оптимизации: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. / Золтоева Ирина Александровна. − М., 2007. – 97 с.
64. Ибатуллин, P.P. Методы коррекции и аппроксимации несобственных задач оптимизации и управления с минимаксным критерием: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. / Ибатуллин Ринат Ривкатович. − М., 2002. – 98 с.
65. Карлин, С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964. – 834 с.
66. Карманов, В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1980. – 258 с.
67. Клименко, О.А. Использование матриц комбинаторного типа для построения разделяющей гиперплоскости в задачах кластеризации / О.А. Клименко // Молодой ученый. – 2010. − № 9. – С. 63 – 68.
68. Клименко, О.А. Методы коррекции данных несовместных линейных систем комбинаторного типа: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.17 / Клименко Оксана Александровна. − М., 2010. – 112 с.
69. Кондратьева, В.А. Несобственные задачи линейной оптимизации и параметрическое программирование: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. – М., 2000. – 106 с.
70. Красников, А.С. Матричная коррекция противоречивых данных в линейных оптимизационных моделях: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. / Красников Александр Сергеевич. – М., 2010. – 180 с.
71. Краснощёков, П.С. Принципы построения моделей / П.С. Краснощёков, Петров А.А. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 264 с.
72. Ле, Н.З. Методы коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств с блочной структурой и их применение к задачам обработки информации: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. / Ле Ньят Зюи. – М., 2012. – 72 с.
73. Лопатинский, А.Б. Основы линейной алгебры / А.Б. Лопатинский. –Львов: изд. Львовского гос. университета, 1954. – 96 с.
74. Лоусон Е. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Чарльз Лоусон, Ричард Хенсон: пер с англ. − М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. − 232 с.
75. Маркус, М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М.Маркус, Х.Минк. − М.: Едиториал УРСС, 2004. − 232 с.
76. Матросов, В.Л., Горелик В.А., Жданов С.А., Муравьёва О.В. Применение методы коррекции несобственных задач линейного программирования к задаче классификации / В.Л. Матросов, В.А. Горелик, С.А. Жданов, О.В. Муравьёва // Научные труды Московского педагогического государственного университета. Серия: естественные науки. – М.: Прометей, 2005. − С. 55-60.
77. Местецкий, Л.М. Математические методы распознавания образов: курс лекций [Электронный ресурс] / Л.М. Местецкий. – Режим доступа: <http://www.ccas.ru/frc/papers/mestetskii04course.pdf> (дата обращения 22.10.2012).
78. Мину, М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
79. Муравьёва, О.В. Матричная коррекция данных для несовместных систем линейных уравнений и ее применение в задачах оптимизации и классификации: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.17 / Муравьёва Ольга Викторовна. – М., 2002.
80. Павлова, О. С. (Баркалова) Применение информационных технологий к коррекции несобственных задач линейного программирования / О. С. Павлова (Баркалова) // Актуальные проблемы модернизации математического и естественно-научного образования: матер. Регион. науч.-методич. конф., г. Балашов, 8 апреля 2010 г. - Балашов: Николаев, 2010. – С. 78-80.
81. Павлова, О.С. (Баркалова) Коррекция несобственной задачи линейного программирования (ЗЛП) с матрицей ограничений, имеющей фиксированные столбцы / О. С. Павлова (Баркалова) // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: Материалы итог. студ. науч. конф. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 2010. – С. 65-68.
82. Печёнкин, Р.В. Методы коррекции несовместных систем со структурными ограничениями: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.17 / Печёнкин Руслан Викторович. − М., 2006. – 161 с.
83. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 470 с.
84. Рудаков, К.В. О методах оптимизации и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания / К.В. Рудаков, К.В. Воронцов // Доклады РАН, 1999. – Т. 367, № 3. – С. 314–317.
85. Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации: учеб. пособие / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.
86. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е изд.: Пер. с англ. / Хемди А. Таха. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.
87. Теоретические основы информатики: учеб. пособие / В.Л. Матросов   
    [и др.]. – М.: Академия, 2009. – 352 с.
88. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
89. Тихонов, А. Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений / А.Н. Тихонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. – Т. 20. – № 6. – С. 1373–1383.
90. Тихонов, А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов // Доклады АН СССР. 1963. – Т. 153. – № 1. – С. 499-52.
91. Тихонов, А.Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов. А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 229 с.
92. Ту Дж. Гонсалес Р. Принципы распознавания образов: пер. с англ. / Р. Ту Дж. Гонсалес М.: Мир, 1978. – 412 с.
93. Филимонов, Н.Б. Полиэдральная оптимизация дискретных процессов управления: теория и применения: дисс. … д-ра. технич. наук: 05.13.01 / Филимонов Николай Борисович. – М., 2009. – 43 с.
94. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
95. Цехан, О.Б. Матричный анализ: учебное пособие / О.Б. Цехан. – Гродно: изд. Гродненского гос. университета, 2010. – 372 с.
96. Черников, С.Н. Линейные неравенства / С.Н. Черников. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
97. Юдин, Д.В. Линейное программирование / Д.В. Юдин, Е.Г. Гольштейн. – М.: Физматгиз, 1963.
98. Amaral, P. On optimal zero-preserving corrections for inconsistent linear systems / P. Amaral, Luis M. Fernandes, Joaquim Judice, Ganif D. Sherali // Journal of Global Optimization. – Berlin: Springer, 11 February 2009.
99. Back, A. The Matrix-Restricted Total Least Squares Problem / A. Back // Signal Process, 87 (10), 2007. – pp. 2303-2312.
100. Christos, H.P. Сombinatorial optimization: algorithms and complexity / H. Papadimitriou Christos, Kenneth Steiglitz. − Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1982.
101. Golub, G.H. A generalization of the eckart-young-mirsky matrix approximation theorem / Gene H. Golub, Alan Hoffmann, G. W. Stewart // Linear Algebra and its Applications, 88/89, 1987. – pp. 317–327.
102. Golub, G.H. Tikhonov regularization and total least squares / / Gene H. Golub, P.C. Hansen, D.P. O’Leary // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1999. Vol. 21. – №1. – pp. 185–194.
103. Golub, G. H. Tikhonov regularization and total least squares / Gene H. Golub, Per Christian Hansen Dianne P. O’Leary // Numerical Linear Algebra with Applications. ­– 1999. ­– no. 1. ­– pp. 185–194.
104. Golub, G.H. An analysis of the total least squares problem / Gene H. Golub, C.F. Van Loan // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980. – Vol. 17. – No 3. – pp. 883-893.
105. Hansen, C. Regularization Tools. A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems / C. Hansen // Numerical Algorithms, 2007. – Vol. 46. – pp. 189–194.
106. Lemmerling, P. Fast structured total least squares algorithm for solving the basic deconvolution problem / Lemmerling P., Mastronardi N., S. Van Huffel // SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2000.
107. Nievergelt, Y.A. Tutorial history of least squares with applications to astronomy and geodesy / Y.A. Nievergelt // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000. – Vol. 121. – №1–2. – pp. 37–72.
108. Rosen, J.B. Structured nonlinear total least norm problems / J.B. Rosen, H. Park, J. Glick // UMSI reserch report. – Minniapolis (Mn): Univ. of Minnesota. Supercomput. inst., 1995, 95/152. – 11 p.
109. Rosen, J.B. Total least norm problems: formulation and solution / J.B. Rosen, H. Park, J. Glick // illUMSI reserch report. Minniapolis (Mn): Univ. of Minnesota. Supercomput. inst.,1993, 93/223. – 18p.
110. Rosen J. B. Total least norm formulation and solution for strucured problems / / J.B. Rosen, H. Park, J. Glick // SIAM Journal on Matrix Anal. Appl, 1996. – Vol. 17. – no. 1. – pp. 110–128.
111. Van Huffel, S. Analysis of the total least squares problem and its use in parameter estimation / S. Van Huffel // PhD thesis, Dept. of electr. eng., K.U.Leuven. – Belgium, June 1987.
112. Van Huffel, S. The Total Least Squares problems / S. Van Huffel, J. Vandewale // Computational Aspects and Analysis. – Philadelphia PA: SIAM Publishing, – Vol. 35. – №4, 1993. – pp. 660-662.
113. Varah, J.M. Pitfalls in the numerical solution of linear ill-posted problems / J.M. Varah // SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1983. – Vol. 4. – pp. 164–176.

**Приложение**

Листинг 1

% Коррекция СЛАУ по минимуму ,-нормы

function [Hr,x,u,An,bn,d]=correct88(A,b,l)

[m n]=size(A);

for k=1:n [Hr,x,u,An,bn]=corr88(A,b,l,k);

d(k)=u; end;

u=min(d);

for i=1:n if d(i)==u; k0=i; end;

end;

[Hr,x,u,An,bn]=corr88(A,b,l,k0);

% Коррекция СЛАУ по минимуму ,-нормы(fix r)

function [Hr,x,u,An,bn]=corr88(A,b,l,k)

[m n]=size(A);

% Ограничение вида A1\*x<=b1

A1=[-A b -ones(m,1)

A -b -ones(m,1)

eye(n) zeros(n,2)];

b1=zeros(2\*m,1); b1(2\*m+1:2\*m+n)=ones(n,1);

% Ограничение вида A2\*x=b2

A2(1:n,1:n+2)=0; A2(k,k)=1;

b2(1:n)=0; b2(k)=1;

% Целевая функция

f=zeros(1,n+1); f(n+2)=1;

% Ограничения вида x>=0

xl=zeros(n+2,1);

q=linprog(f,A1,b1,A2,b2,xl);

r=q(n+1);

u=q(n+2);

x(1:n)=q(1:n)/r;

Hr=(b-A\*x')\*dv([l,x],1);

h=Hr(1:m,1);

for j=1:n H(1:m,j)=Hr(1:m,j+1); end;

bn=b-l\*h;

An=A+H;

Листинг 2

% Коррекция многокрит. ЗЛП с кор. порог. значений

function [z]=correct\_w(A,b,C,c0,y)

[m n]=size(A); [r n]=size(C);

l=ones(m,1);

l1=ones(r,1);

Ay=A\*y;

by=b\*y;

% Ограничение вида A1\*x<=b1

A1=[-Ay -l

Ay -l

-C -l1];

b1=[-by

by

-c0];

% Ограничение вида A2\*x=b2

A2=ones(1,n); A2(n+1)=0;

b2=(1/y)-1;

% Целевая функция

f=zeros(1,n);f(n+1)=1;

% Ограничения вида x>=0

xl=zeros(n+1,1);

z=linprog(f,A1,b1,A2,b2,xl);

for i=1:n x(i)=z(i); end

H=y\*(b-A\*x');

bn=b-H;

for i=2:n for j=1:m H(j,i)=H(j,1); end; end;

An=A+H;

w=c0-C\*x';

% Построение графика

function [w]=min\_u\_plot(A,b,C,c0)

[m n]=size(A);

y1=0.01;

y2=1;

hy=0.01;

y=y1;

z=correct\_w(A,b,C,c0,y1);

i=1

while y1<y2

y1=y1+hy;

z1=correct\_w(A,b,C,c0,y1);

plotx(i)=y1;

ploty(i)=z1(n+1);

i=i+1;

end

plot(plotx,ploty)