На правах рукописи

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Факультет Вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Гималтдинов Ильгиз Фадисович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕСОВЕРШЕННОГО РЫНКА КРЕДИТОВ И ДЕПОЗИТОВ

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Шананин Александр Алексеевич

Москва – 2013

Оглавление

1 Введение

1.1 Актуальность темы исследования

В развитых странах существует три основных источника инвестиций: нераспределенная прибыль компаний, выпуск акций и сбережения домашних хозяйств, аккумулированные коммерческими банками. Последний источник важен для ускоренного финансирования прорывных проектов, поскольку способствует диверсификации экономики. Основной объем сбережений домашних хозяйств в развитых странах приходится на средний слой. Наличие и большой удельный вес среднего класса в системе социальной стратификации является одним из существенных признаков развитого общества.

В России проблемы экономического и социального неравенства весьма актуальны. Процесс перехода от плановой к рыночной экономике в нашей стране затянулся и оказался гораздо более драматичным и противоречивым, чем ожидали многие экономисты. Одной из наиболее характерных черт этого процесса является изменение механизмов и характера распределения национального продукта и национального богатства. В начале экономических реформ 90-х гг. в России предполагалось, что они (реформы) приведут к рождению масштабного среднего класса - экономически самостоятельного социального субъекта, способного эффективно выполнять традиционные для него функции. Однако результат реформ оказался полностью противоположным: высокий уровень инфляции привел к обесцениванию сбережений населения, падению их доходов, подорвал доверие населения к банковскому сектору. В связи с этим в начале 2000-х годов правительство Российской Федерации объявило о том, что уменьшение количества бедного населения и формирование среднего слоя является одной из приоритетных задач. Несмотря на это расслоение домашних хозяйств в России на протяжении 2000-х годов не только не остановилось, но даже наоборот – увеличилось.

В последние 10-15 лет уровень жизни населения значительно вырос. Это не могло не сказаться и на кредитно-сберегательном поведении домашних хозяйств России. С одной стороны, рост доходов населения привел к существенному росту объема срочных депозитов. С другой стороны, банковский сектор увидел большой потенциал в кредитовании домашних хозяйств: оценка кредитоспособности юридических лиц часто для банков становится задачей достаточно сложной, в то время как для физических лиц эта задача проще решается и несет меньшие риски для банков. Последнее привело к буму потребительского кредитования (рис. 1).

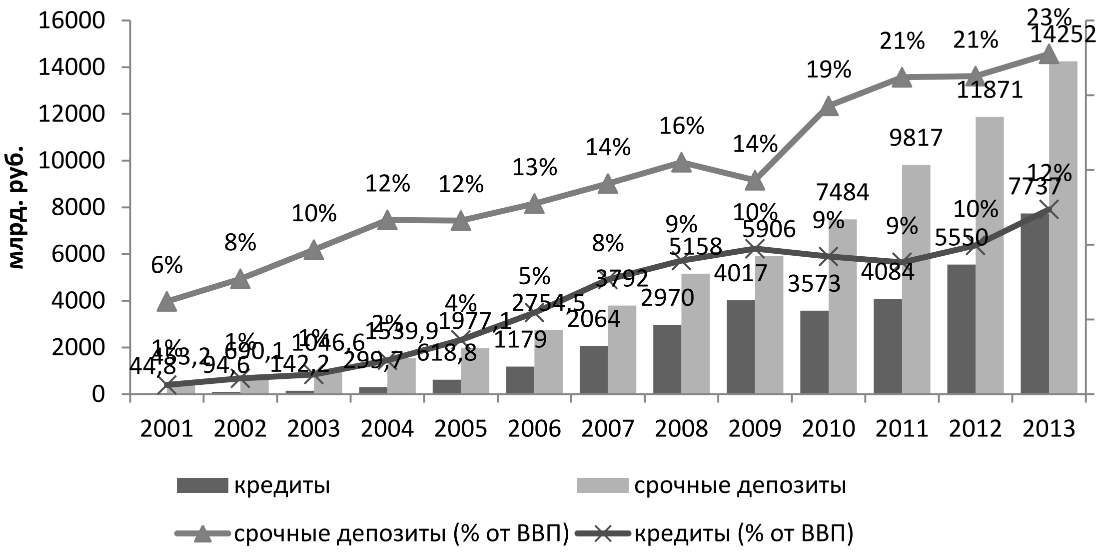

Рис. 1. Объемы кредитов и сбережений домашних хозяйств 2001-2013 гг..

Ситуация в других странах постсоветского пространства аналогичная: растет доля сбережений домашних хозяйств, увеличиваются объемы потребительского кредитования. Это свидетельствует о том, что процессы изменения кредитно-сберегательного поведения в странах постсоветского пространства во многом идентичны.

Все вышесказанное свидетельствуют о важности серьезного методичного анализа процессов накопления и потребления домашних хозяйств. Для всестороннего анализа и понимания происходящих процессов необходим переход от идеологических дискуссий, происходящих на концептуальном уровне, к систематическим исследованиям на языке математических моделей. Решение этого вопроса является достаточно сложной задачей, которая требует научно обоснованных концепций.

При этом для системного анализа вопросов накопления и потребления домашних хозяйств невозможно изучать только поведение домашних хозяйств, т.к. оно (поведение) безусловно связано как с общей экономической ситуацией в стране, так и с макроэкономической политикой государства. В связи с этим необходимо создание математического и программного инструментария, который, с одной стороны, позволял бы рассмотреть поведение домашних хозяйств как отдельного самостоятельного и независимого экономического агента, а, с другой стороны, мог бы применяться как часть более общих математических моделей системного анализа экономики, разрабатываемых школой академика А.А. Петрова. В моделях системного анализа экономики домашнее хозяйство описывается как экономический агент, принимающий решение каким образом ему распределять средства, получаемые в качестве дивидендов или в качестве вознаграждения за предоставление собственных трудовых ресурсов другим экономическим агентам (торговле, промышленности, транспорте). Это решение домашнего хозяйства определяется как решение экстремальной задачи, учитывающей структурные особенности экономики России. Важным моментом для применимости решения задачи в моделях системного анализа экономики является нахождения решения задачи в форме синтеза.

Основополагающей работой в математическом описании процессов сбережения домашних хозяйств является модель Рамсея. Ее недостатком является предположение о том, что экономический агент действует в условиях совершенного кредитно-депозитного рынка (другими словами, в этих моделях рассматривается случай, когда процентные ставки по кредитам и депозитам совпадают). В России эти рынки находятся на стадии становления, в связи с чем различия между процентными ставками существенны.

В середине 50-х годов 20-го века ученые-экономисты обратили внимание на особую роль денег в экономических процессах. Изучение этого вопроса привело к появлению теории монетаризма (см., например, работы М. Фридмана) и анализу роли денег в экономических процессах. При этом в классической модели Рамсея отсутствует какой-либо учет роли денег при описании кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств, что значительно сужает область ее применимости.

В связи с вышесказанным актуальной задачей остается создание набора достаточно полно и строго исследованных моделей, описывающих эволюцию формирования благосостояния домашних хозяйств и учитывающих отличительные черты экономического устройства стран постсоветского пространства, а именно несовершенство рынка капитала и быстрый рост потребительского кредитования. При этом требуется учесть, что для применения моделей формирования благосостояния домашних хозяйств в моделях системного анализа экономики необходимо найти решение в аналитической форме. Также необходимо проанализировать применимость моделей для исследования поведения домашних хозяйств в целом. Здесь встает вопрос, прежде всего, существования репрезентативного домашнего хозяйства. Интерес к задачам агрегирования домашних хозяйств, обладающих различными значениями дохода, начального капитала и параметров межвременного предпочтения, в последние годы сильно возрос (Экланд, Лазрак, Каселли, Вентура). Связано это с необходимостью объяснения причин возникновения социального неравенства и анализа распределения национального богатства в условиях кризисных явлений в мировой экономике.

1.2 Степень разработанности проблемы в литературе.

Каким образом семьи решают, какую часть дохода потратить сегодня, а какую отложить на будущее? С одной стороны это относится к поведению отдельных домашних хозяйств и потому этот вопрос относится к области микроэкономики. С другой стороны, ответ на этот вопрос имеет большое значение для макроэкономики, так как потребительское поведение населения оказывает сильное влияние на состояние экономики как в краткосрочном периоде, так и в долгосрочном.

Теория неоклассического экономического роста показывает([1], [2]), что размер сбережений является ключевым параметром, определяющим устойчивый уровень капиталовооруженности, и, таким образом, общее экономическое благосостояние. С другой стороны, решения о потреблении важны и для краткосрочного анализа экономики. Поскольку потребление составляет значительную долю ВВП, колебания в потреблении являются важнейшими элементами подъемов и спадов в экономики.

За последние 100-200 лет учеными было проанализировано потребительское поведение домашних хозяйств с разных точек зрения, были предложены различные способы объяснений данных о потреблении и доходе.

Первой и фундаментальной работой в области математического описания потребительского поведения стала работа Рамсея [3], опубликованная в 1928 году. Эта модель в дальнейшем исследовалась в работах [4], [5]. Подробно модель Рамсея будет рассмотрена дальше.

Важное значение для развития теории потребительского поведения сыграла работа И. Фишера [6]. В этой работе изучается значение межвременного бюджетного ограничения для потребительского поведения. И. Фишер одним из первых предложил дисконтировать будущее потребление для того, чтобы отразить в моделях то, что полезность от потребления одного и того же объема товаров и услуг сегодня выше, чем в будущем. В дальнейшем подход дисконтирования потребления стал общепринятым. Так, например, Ф. Модильяни, А. Андо, Р. Брумберг [7], [8], [9] использовали модель Фишера для изучения зависимости потребительского поведения от возраста человека. Результатом этого анализа стала теория жизненного цикла. Согласно этой теории доходы домашних хозяйств колеблются на протяжении жизни человека и что сбережения позволяют потребителям перераспределять доход с периодов, когда его уровень высок, на периоды, когда он низок. Такой подход интересен с точки зрения изучения индивидуального потребительского поведения, однако для применения такого подхода к анализу населения в целом необходимо обладать большим объемом статистических данных (например, чтобы разделить домашнее хозяйство на разные возрастные группы). На текущий момент данные, публикуемые Росстатом или другими статистическими институтами, недостаточны для подобного анализа.

Долгое время максимизируемый функционал домашних хозяйств ограничивался только экономической составляющей. Однако начиная с середины 20-го века многие экономисты стали рассматривать этот термин как совокупный, то есть включающий не только экономические характеристики благосостояния, но и человеческое и социальное развитие. Амартья Сен подчеркивал [10] возможности индивидуумов выбирать и реализовывать жизненные цели, которые их в наибольшей степени устраивают. При таком подходе рост экономического производства увеличивает возможности человеческого выбора (то есть, работы, досуга, политической или культурной деятельности) в большей степени, чем служит сам по себе конечной целью. Другими словами, для людей имеет огромное значение «возможности», позволяющие им вести образ жизни, который они выбрали и который их устраивает.

Экономическая теория, учитывающая влияние не только экономических, но и социальных факторов на процессы потребления и накопления богатства получила название теории человеческого капитала.

Современная неоклассическая теория человеческого капитала зародилась и получила развитие в работах Г. Беккера, Дж. Минцера, Т. Шульца, Б. Вейсброда, Б. Хансена и многих других экономистов в 1950-1980-е годы ([11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]).

Модели человеческого капитала используются для понимания природы возникновения экономического неравенства. Для этого часто используют модели с неоднородными потребителями, различающимися своими межвременными предпочтениями. Разработка таких моделей была начата Х. Удзавой [19], Р. Беккером [20], [21], [22], [23] и Т. Бьюли [24]. С помощью таких моделей можно отвечать на вопросы о том, какое воздействие могут оказать те или иные меры макроэкономической политики на благосостояние различных групп или классов экономических агентов. В дальнейшем эти вопросы исследовали Ф. Мишель и П. Пестио [25], [26], Н. Г. Мэнкью [27], Л. Сметтерс [28], Борисов К.Ю. [29], [30], И. Экланд, А. Лазрак [31].

Попытка описать потребительское поведения в условиях современной России была предпринята в работе [32]. В ней предполагалось, что домашние хозяйства максимизируют минимальный уровень потребления по отношению к доходам и свободному времени (т.е. домашние хозяйства могли выбирать количество рабочего времени). При этом потребление делилось на текущее потребление и покупку товаров длительного пользования. Было показано, что в некоторых случаях повышение заработной платы ведет к уменьшению предложения на рынке труда.

Важное место в диссертации занимает вопрос моделирования спроса на наличные деньги. Во многих моделях, в которых изучается спрос на наличные деньги, центральную роль играют описание ожиданий инвесторов. Так, в модели Кагана спрос на деньги моделируется как функция инфляционных ожиданий [33].

Подход, предложенный М. Сидравским [34] моделирует в непрерывном времени поведение некоторого числа экономических агентов. В ней каждый агент максимизирует дисконтированную ожидаемую полезность, зависящую от количества имеющихся у него активов (в модели называемых деньгами), при балансовом ограничении на потребление и сбережения. При этом агенты планируют свои расходы, точно предсказывая будущий темп инфляции. В этой модели, в отличие от предыдущей, активы являются не только способом сбережений, но и приносят полезность владельцу (например, приносят пользу от транзакций).

Вообще говоря, экономическая теория выделяет два основных фактора, определяющих спрос экономических агентов на деньги: операционный спрос на деньги и спекулятивный спрос.

Операционный спрос на деньги возникает, поскольку деньги служат средством платежа. Впервые операционный спрос на деньги был проанализирован И. Фишером [6]. Случай, когда домашние хозяйства выбирают между ликвидными деньгами и сбережениями и возникает транзакционный спрос на наличные средства, рассматривается в модели Баумоля-Тобина [35].

Спекулятивный спрос на деньги возникает в связи с изменением курса ценных бумаг. Краткосрочный аспект спекулятивного спроса на деньги был впервые исследован Кейнсом [36]. В долгосрочном плане модель выбора между ликвидными деньгами и доходными, но рискованными ценными бумагами была предложена Тобином [37]. Отметим, что, в отличие от других моделей, в модели Тобина спрос на деньги мог как убывать, так и возрастать с ростом ставки процента по ценным бумагам. Для того, чтобы применить к проблеме спроса на деньги стандартный аппарат математической экономики, часто считают ([34], [38], [39]) деньги еще одним потребляемым экономическими агентами продуктом (пусть и обладающим некоторыми особыми свойствами) и включают его в качестве дополнительного аргумента в функцию полезности потребителей наряду с традиционным аргументом - набором потребительских благ. Такой подход, с одной стороны, упрощает модель, но, в то же время, ставит вопрос, каким образом деньги входят в функцию полезности.

Особый интерес вызывают математические модели, в которых может быть получено явное аналитическое решение. Обуславливается это необходимостью использования полученного решения в качестве отдельного блока для математического моделирования экономик стран постсоветского пространства методами системного анализа. Это направление математического моделирования активно развивается в последние 30 лет научной школой академика А.А. Петрова. В рамках данного подхода экономика рассматривается как взаимодействие набора экономических агентов. При этом для возможности осуществления расчетов необходимо наложить строгие требования к вычислительной сложности каждого блока, отвечающего за отдельного экономического агента. В случае описания поведения домашних хозяйств данное требование говорит о необходимости получения аналитического решения в моделях распределения доходов домашних хозяйств.

Одним из возможных способов получения аналитического решения является переход к задаче с бесконечным горизонтом планирования. Однако неограниченность временного интервала, на котором рассматривается задача оптимизации, приводит к появлению специальных условий в принципе максимума Понтрягина. Связано появление этих специальных условий с тем, что в общем случае невозможно гарантировать выполнения условий трансверсальности:

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$$

или

$$\lim_{t\to\infty}\left(\varphi(t),x(t)\right)=0.$$

Здесь $\varphi(t)$, $x(t)$ сопряженная и фазовая переменная соответственно. Примеры, демонстрирующие патологии, возникающие в задачах с бесконечным горизонтом планирования, достаточно подробно рассматривались в литературе [40], [41], [42].

В литературе с 60-х годов прошлого века предприняты различные варианты постановки задач оптимального управления на бесконечном временном интервале и их решения. Так, в работе [43] вводится определение слабо-обгоняющей оптимальности (locally weakly overtaking control) и доказывается принцип максимума для задач на бесконечном горизонте планирования.

В данной работе «патологичность» постановки задачи на бесконечном временном интервале заключается в том, что задача на конечном временном интервале имеет краевое условие в терминальный момент времени: условие возврата домашним хозяйством заемных средств. Очевидно, что наличие этого терминального условия критично для построения решения, в связи с чем возникает вопрос, каким образом «переформулировать» данное условие для задачи на бесконечном временном интервале. Для преодоления этой трудности в работе вводится важное понятие – «ликвидное состояние». Это состояние, оказавшись в котором домашнее хозяйство может расплатиться со всеми своими кредитными обязательствами. В задаче на бесконечном временном горизонте вместо условия на правом конце появляется условие нахождения фазовой переменной во множестве ликвидных состояний. Такой подход позволяет корректно сформулировать задачу на бесконечном временном интервале и осуществить предельный переход.

1.3 Цель и задачи работы

Целью настоящего исследования является разработка теоретического подхода, позволяющего проводить взаимосвязанный среднесрочный и долгосрочный анализ спроса на потребительские кредиты, наличные деньги, предложения сбережений.

Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие *основные задачи:*

1. Построение в форме синтеза решения задачи оптимального управления в модифицированной модели Рамсея, учитывающей несовершенство рынка капитала. При этом необходимо учесть роль потребительского кредитования в формировании поведения домашних хозяйств.
2. Исследование концепции репрезентативного домашнего хозяйства на основе анализа условий агрегируемости оптимальных стратегий распределения доходов в модифицированной модели Рамсея.
3. Разработка численного метода и программного модуля для идентификации модели распределения доходов домашних хозяйств по статистическим данным стран постсоветского пространства.

1.4 Методологическая основа исследования

Методологической основой исследования явилась теория оптимального управления для задач с ограничениями на фазовые переменные и смешанными ограничениями, метод динамического программирования, качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений, методы статистического анализа данных.

Для решения задач, возникающих при описании кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств, использовалась следующая схема:

1. Формулировка задачи оптимального управления на конечном временном интервале и доказательство существования решения для нее.

2. Применение принципа максимума Понтрягина и построение с его помощью синтеза оптимального управления.
3. Исследование магистрального эффекта в задаче оптимального управления при увеличении горизонта планирования.
4. Формулировка задачи оптимального управления на бесконечном временном интервале.
5. Применение теоремы верификации для доказательства, что магистраль задачи на конечном временном интервале является решением задачи на бесконечном временном интервале.

1.5 Теоретическая значимость

Теоретическая значимость результатов исследования состоит в построении моделей, описывающих кредитно-сберегательное поведение домашних хозяйств, в построении синтеза оптимального управления в моделях рамсеевского типа, в анализе условий агрегируемости оптимальных стратегий в модифицированной модели Рамсея.

1.6 Практическая значимость

Практическая значимость работы заключается в создании инструмента для анализа спроса на наличные деньги, потребительские кредиты и предложения депозитов в условиях, характерных для стран постсоветского пространства. Созданный в рамках работы инструмент исследования поведения домашних хозяйств может применяться для качественного анализа проводимой кредитно-денежной и социальной политики и выработке рекомендаций, направленных на ее совершенствование. Также созданный инструмент может использоваться в моделях среднесрочного и долгосрочного анализа экономики стран постсоветского пространства, в которых происходит формирование среднего слоя и рынка кредитов-депозитов.

1.7 Апробация результатов исследования.

Результаты диссертационного исследования были апробированы на следующих конференциях и научных семинарах:

- Научная конференция «Тихоновские чтения», г. Москва, октябрь 2010 года. Тема доклада: «Синтез управления в модифицированной модели Рамсея».
- 53-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2010 года. Тема доклада: «Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности и потребительского кредитования».
- Научная конференция «Тихоновские чтения», г. Москва, июнь 2011 года. Тема доклада: «Промежуточная магистраль в обосновании синтеза оптимального управления в моделях экономического роста».
- 54-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2011 года. Тема доклада: «Идентификация модели рамсеевского типа по данным о сберегательном и потребительском поведении домашних хозяйств в России».
- VI-я международная школа-симпозиум «Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем» (АМУР-2012), Украина, Севастополь, сентябрь 2012 года. Тема доклада: «Достаточные условия существования репрезентативного потребителя в модели рамсеевского типа».
- 55-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2012 года. Тема доклада: «Необходимые и достаточные условия существования репрезентативного потребителя в модели рамсеевского типа».

- Второй Российский экономический конгресс, г. Суздаль, 18-23 февраля 2013года. Тема доклада: «Модификация модели Рамсея для анализа сберегательного поведения в современной России».
- 56-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2013 года. Тема доклада: «Применение модифицированной модели Рамсея для анализа кредитно-сберегательного поведения России и Казахстана».
- Научные семинары ВЦ РАН, ВМК МГУ, ЦЭМИ РАН, ЕУСПб.

Полученные результаты использовались в работах, проводимых в рамках проектов РГНФ (грант 12-02-00127), РФФИ (гранты 11-07-00162-а, 11-01-12084-офи-м-2011), программы ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (мероприятие 1.2.1 НК-15П).

1.8 Публикации.

По теме диссертации опубликовано 10 печатных работ, в том числе 2 работы из списка журналов, рекомендованных ВАК, свидетельство о регистрации в Реестре программ для ЭВМ.

1.9 Структура диссертации.

Диссертационная работа состоит из 5 глав, первая из которых - введение, заключения, и списка литературы из 75 наименований. Общий объем работы – 146 страниц, включая 18 рисунков.

В Главе 2 рассматривается модель Рамсея и ее модификации. Вводится ограничение ликвидности для анализа спроса на деньги. Рассматриваются случаи, когда домашнее хозяйство функционирует в рамках:

- совершенного рынка кредитов-депозитов (т.е. когда процентные ставки по депозитам и кредитам совпадают)
- отсутствия рынка депозитов
- отсутствия рынка кредитов
- несовершенного рынка кредитов-депозитов

Для каждого случая была рассмотрена задача оптимального управления на конечном временном интервале, изучены свойства фазовых траекторий и построен синтез оптимального управления. Однако управление в случае конечного временного интервала не выражается в явной аналитической форме. Это затрудняет применение задачи в более общих моделях экономики России и дальнейший анализ решения. Для получения явной аналитической зависимости оптимального управления от параметров был осуществлен предельный переход к задаче с бесконечным горизонтом планирования. При этом в задаче с бесконечным горизонтом планирования возникает особенность, связанная с наличием у задачи на конечном временном интервале ограничения в терминальный момент времени: ограничение в терминальный момент времени переходит в фазовое ограничение на переменные. Это фазовое ограничение является множеством «ликвидных состояний», т.е. тех состояний, находясь в котором домашнее хозяйство может расплатиться со своими кредитными обязательствами перед банками. Наличие в задаче с бесконечным временным горизонтом требования нахождения домашних хозяйств во множестве «ликвидных состояний» отсекает возможность финансовых пузырей (т.е. массового невозвращения кредитов).

Для сформулированной задачи на бесконечном временном интервале был построен синтез оптимального управления, причем в явной аналитической форме. Построенный синтез оптимального управления допускает содержательную интерпретацию. В зависимости от коэффициента дисконтирования домашние хозяйства распадаются на три класса, обладающих разными типами поведения. Первый тип домашних хозяйств не сберегает. Такое поведение соответствует бедному слою. Второй тип домашних хозяйств рассматривает депозиты как средство межвременного перераспределения активов, который приводит к увеличению будущего потребления. Такое поведение соответствует поведению среднего слоя. Последняя группа рассматривает депозиты как долгосрочное вложение в активы, приносящие доход (богатый слой). Эти домашние хозяйства являются рантье: основным источником дохода у них являются дивиденды, а отношение потребительских расходов к заработной плате стремится к нулю. Вообще говоря, в таком случае домашние хозяйства должны описываться не моделью рамсеевского типа, а моделью стратегического инвестирования.

В третьей главе исследуются вопросы агрегированного описания домашних хозяйств, поведение которых описывается модифицированной моделью Рамсея.

В моделях рамсеевского типа, описанных в предыдущей главе, исследуется поведение репрезентативного домашнего хозяйства, а также зависимость этого поведения от различных экономических факторов. Однако поведение домашних хозяйств по отдельности не отвечает требованию рациональности, и потому описывать каждое домашнее хозяйство как отдельного экономического агента не представляется разумным. Причиной этого является наличие у каждого домашнего хозяйства множества факторов, являющихся случайными и имеющих не только экономический характер (в качестве примеров таких факторов могут быть увеличение заработной платы, задержки и дискретность выдачи заработной платы, непредвиденные обстоятельства: болезни, поломки бытовой техники). Нивелировать влияние случайных факторов можно на макроэкономическом уровне, когда в качестве экономического агента рассматривается группа домашних хозяйств. В связи с этим становится актуальной задача агрегирования поведения домашних хозяйств, а также задача нахождения условий существования репрезентативного потребителя. Под репрезентативным потребителем здесь понимается такое домашнее хозяйство, которое обладает потребительским поведением, эквивалентным сумме потребительских поведений всех домашних хозяйств. На этот вопрос был получен ответ в третьей главе. Необходимым и достаточным условием существования репрезентативного потребителя является наличие связи между коэффициентом дисконтирования и коэффициентом отвращения к риску. Это позволяет предположить, что для агрегируемости домашних хозяйств краткосрочные риски (характеризуются коэффициентом отвращения к риску) и долгосрочные риски (характеризуются коэффициентом дисконтирования) должны быть согласованы.

В четвертой главе описываются инструментальные средства, которые необходимы для проведения расчетов. Описывается методика идентификации параметров. При определении параметров модели было необходимо разобраться с основными экономическими факторами, влияющими на параметры модели и на основе этого анализа предложить способ определения параметров. Так, для описания коэффициента ограничения ликвидности была предложена модель распределения сбережений домашних хозяйств между валютными и рублевыми депозитами, с помощью которой удается смоделировать изменение коэффициента ограничения ликвидности.

В Главе 5 описывается программная реализация и ее применение для анализа потребительского поведения России, Украины и Казахстана.

Параграф 5.1 посвящен обсуждению требований, налагаемых на программную реализацию программного модуля. Программный комплекс прежде всего должен обладать понятной легко расширяемой структурой и иметь возможность использоваться в моделях системного анализа экономики, разрабатываемых школой академика РАН А.А. Петрова. Также важным требованием к программному модулю является наличие блока по предварительной подготовке данных. Дело в том, что большинство экономических характеристик домашних хозяйств обладает сезонностью. При этом сезонность будет искажать работу блока идентификации параметров. Поэтому для правильной идентификации параметров необходимо учесть сезонные факторы из статистики. Для этого программный комплекс должен включать в себя методы сглаживания, исключения сезонных факторов и другие методы корректировки статистики.

В параграфе 5.2 описываются основные блоки, из которых состоит программный модуль:

- Блок загрузки данных.
- Блок визуализации расчетов
- Блок моделирования сберегательного поведения
- Блок моделирования кредитного поведения
- Блок сохранения результатов

В качестве платформы, на которой разрабатывался программный комплекс, была взята платформа Matlab. Большим преимуществом Matlab является большое количество функций, реализующих численные алгоритмы, операции над многочленами, поиск корней многочленов, интерполяцию и экстраполяцию кривых. Эта возможность позволила существенно сократить объем программы, сделать программу более понятной с точки зрения читаемости кода и снизить требования к требуемым вычислительным мощностям.

Параграф 5.3 содержит описание функциональности программы и численных методов, использовавшихся при ее реализации. Для вычисления синтеза оптимального управления, получаемого в модифицированной модели Рамсея, использовались численные методы по вычислению значений интегралов, поиска решения уравнений, заданных неявными функциями. Для исключения сезонности программа предлагает средства работы с входными данными. Сглаживание данных достигается с помощью алгоритма скользящего среднего. Также в этом параграфе описываются требования к входным данным для расчетов и описываются форматы сохранения расчетов.

В заключении сформулированы основные результаты работы, полученные в диссертации.

2 Модели рамсеевского типа с однородными межвременными предпочтениями потребителей

2.1 Модель Рамсея

Основы микрообоснования современной теории формирования сбережений и экономического роста были заложены Фрэнком Рамсеем в 1928 году в работе «Математическая теория сбережений» [3]. В этой работе Рамсея интересовал вопрос: какую часть своего дохода будут сберегать домашние хозяйства. Этот вопрос требует микроэкономического обоснования в связи с тем, что накопление имущества в форме реального капитала является результатом того, что домашние хозяйства максимизируя свое благосостояние решают как распределить текущее и будущее потребление между различными периодами времени. Представляется, что доходы с течением времени не имеют постоянной величины, также варьируется и потребление. Однако домохозяйства предпочитают равномерный поток потребления, тем самым смещая некоторую часть своего имущественного накопления на определенное время. В итоге отказ от текущего потребления в пользу будущего ведет к образованию сбережений.

Рассмотрим домашнее хозяйство - потребителя обладающего активами, которые приносят доход. Пусть $C(t)$ - потребление домохозяйств, а $D(t)$ - их сбережения к моменту времени t. Рассмотрим простейший случай, предположив, что домашние хозяйства получают доход только за счет процентов по вкладам. Тогда объем сбережений будет меняться по следующему закону

$$\frac{dD}{dt} = rD - C, \tag{2.1.1}$$

где r - банковская депозитная ставка.

Замечание. В наиболее общей постановке, приведенной в работе Рамсея, предполагается, что домохозяйства имеют доход S, зависящий от количества рабочего времени $a(t)$ и сбережений $D(t)$, то есть

$S = f(D,a)$, где $f(\cdot,\cdot)$ - некоторая функция двух переменных. Тогда изменение количества сбережений и потребление в сумме равны доходу:

$$\frac{dD}{dt} = f(D,a) - C.$$

В качестве функции $f(D,a)$ может быть взята линейная функция

$$f(D,a) = pa + rD$$

где ставка заработной платы p и банковская депозитная ставка r являются константами. Количество рабочего времени $a(t)$ считается экзогенно заданной функцией.

Каждое домохозяйство стремится максимизировать свою совокупную полезность U:

$$U = \int_0^T u[C(t)]e^{-\Delta t}dt, \tag{2.1.2}$$

то есть взвешенную сумму будущих «потоков полезности». Здесь $u(\cdot)$ - непрерывная, возрастающая и вогнутая функция, называемая функцией полезности потребления.

Замечание. В качестве функции полезности $u(\cdot)$ может быть взята функция $u(C) = \frac{C^\alpha}{\alpha}, \alpha \in (0,1)$. Эта функция полезности обладает постоянным относительным отвращением к риску по Эрроу-Пратту: $-u''C/u' = \alpha - 1 = const$.

Множитель $e^{-\Delta t}$ отражает норму межвременных предпочтений, то есть полезность, получаемая от немедленного потребления представляется потребителю в $e^{\Delta t}$ раз больше, чем полезность от потребления того же объема потребительских продуктов, но через время t. Коэффициент Δ называется коэффициентом дисконтирования, причем $\Delta \geq 0$.

Задача домашних хозяйств заключается в максимизации полезности (2.1.2) при выполнении ограничения $D(T) \geq 0$ и начальном условии на сбережения $D(0) = D_0 > 0$. Таким образом, получаем, что сберегательное поведение домохозяйств можно описать с помощью задачи оптимального управления в непрерывном времени:

$$\begin{aligned}
&U = \int_0^T u[C(t)]e^{-\Delta t}dt \to \max_{C \ge 0} \\
&\frac{dD}{dt} = rD - C, \\
&D(0) = D_0 > 0, \\
&D(T) \ge 0.
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Заметим, что при такой формулировке доходы домашних хозяйств формируются только из выплат дивидендов по депозитам. Центральным вопросом анализа является, конечно, изучение характера оптимальных траекторий $D(\cdot), C(\cdot)$ в зависимости от входных параметров модели; в рассматриваемой модели таких параметров два - (r_D, Δ) (при задании конкретного вида функции полезности $u(C)$ могут появиться дополнительные параметры).

Подробный анализ решения данной задачи в общем случае можно найти в литературе, описывающей модель Рамсея (например, в [44]), поэтому в данной работе решение задачи приводить не будем, а выпишем лишь основные результаты. Существенно различными оказываются случаи $r < \Delta$ (низкий темп роста капитала) и $r > \Delta$ (высокий темп роста капитала).

Случай $r > \Delta$. Потребление $C(t)$ возрастает, возможно имея вначале период голодания ($C(t) = 0$); фазовая траектория $D(\cdot)$ убывает от D_0 до $D(T) = 0$, либо с самого начала, либо проходя через единственный максимум.

Случай $r < \Delta$. Потребление $C(t)$ убывает, возможно с периодом голодания в конце. Траектория $D(\cdot)$ убывает с самого начала от D_0 до 0. Нулевое значение капитала может достигаться раньше, чем кончится плановый горизонт, и тогда в конце планового периода $D(t) = 0$ («нулевое дно»); это означает, что при больших T весь начальный капитал проедается за конечное время, зависящее от D_0, после чего наступает период голодания.

Иллюстрация обоих типов решения приведена на рис. 1 .

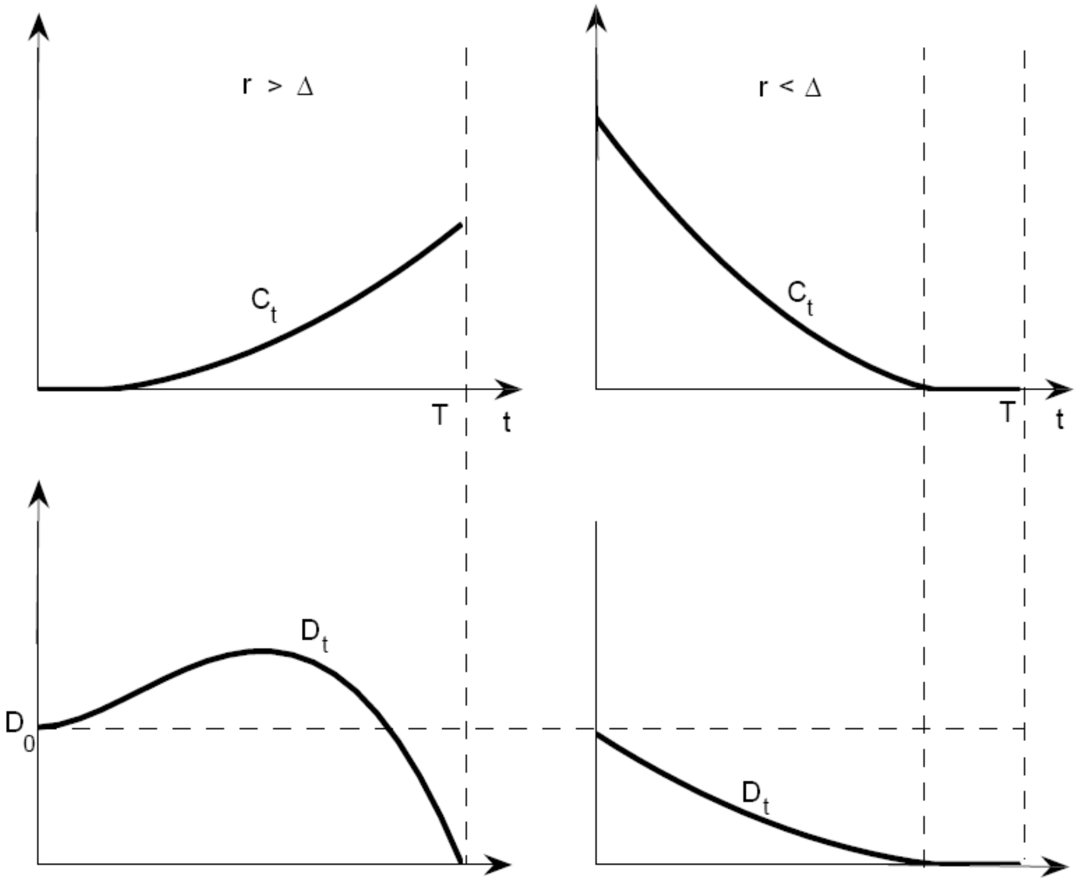

Рис. 2. Оптимальные траектории фазовых переменных в классической модели Рамсея без источника доходов.

Теперь рассмотрим случай, когда домашние хозяйства имеют в качестве источника дохода не только выплаты по депозитам, но и заработную плату. Будем считать, что домашнее хозяйство прогнозирует экспоненциальный рост заработной платы $S(t)$ с темпом γ, то есть $S(t)=Se^{\gamma t}$. Тогда сбережения домашних хозяйств будут меняться по правилу:

$$\frac{dD}{dt}=Se^{\gamma t}+rD-C$$

Для простоты рассмотрим в качестве функции полезности функцию с постоянным коэффициентом отвращения к риску. Тогда с помощью замены $\tilde{D} = De^{-\gamma t}$, $\tilde{C} = Ce^{-\gamma t}$ можно получить задачу оптимального управления, в котором дифференциальное уравнение будет однородно по времени:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \tilde{C}(t)^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \to \max_{\tilde{C}\ge 0} \\
&\frac{d\tilde{D}}{dt} = S - \tilde{C} + (r-\gamma)\tilde{D}, \\
&\tilde{D}(0) = D_0 > 0, \\
&\tilde{D}(T) \ge 0.
\end{aligned}
\qquad (2.1.4)
$$

Далее знак $\tilde{}$ над переменными опустим.

Теорема 2.1.1. *Решение задачи* (2.1.4) *существует.*

Доказательство приводится далее (см.теорему 2.2.1).

Теорема 2.1.2. *Для того, чтобы пара (*C_*, x_**), допустимая для задачи* (2.1.4)*, была ее решением, необходимо, чтобы существовала дифференцируемая функция* $\psi(t)$ *такая, что управление* C_* *доставляет максимум функции Гамильтона*

$$H(C, D, \varphi, t) = C^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} + \varphi(S - C + (r-\gamma)D)$$

при заданных x_*, φ_*, *функция* $\varphi(t)$ *является решением сопряженной системы* $\dot{\varphi} = -\partial H / \partial x$ *и удовлетворяет условию трансверсальности* $\varphi(T)x(T) = 0$.

Сопряженная переменная меняется согласно закону

$$\dot{\varphi} = -\varphi(r-\gamma),$$

максимум гамильтониана достигается при

$$\alpha C^{\alpha-1} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} = \varphi.$$

Сделаем замену переменных $\psi = \varphi e^{(\Delta-\alpha\gamma)t}$. Тогда из условия максимума гамильтониана получим $\alpha C^{\alpha-1} = \psi$. Сопряженное уравнение можно проинтегрировать. Тогда

$$C(t) = \left(\frac{\psi_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{((r-\Delta)/(1-\alpha)-\gamma)t}$$

Подставив $C(t)$ в уравнение для D можно найти, как изменяется фазовая переменная со временем:

$$D(t)=\frac{S}{r-\gamma}(e^{(r-\gamma)t}-1)+D_0e^{(r-\gamma)t}+\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r}\left(\frac{\psi_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(e^{((r-\Delta)/(1-\alpha)-\gamma)t}-e^{(r-\gamma)t}\right)`$$

Оптимальной траекторией будет такая траектория $D(t)$, что $D(T)=0$. Доказательство этого факта достаточно очевидно: если $D(T)>0$, то $\psi(T)=0.$ Отсюда следует, $\psi(t)=0$ на всем временном интервале, что противоречит принципу максимума, т.к. в этом случае $C_*=\infty$. Выразим ψ_0 в уравнении $D(T)=0$ и найдем оптимальную траекторию:

$$D(t)=\frac{S}{r-\gamma}\left(e^{(r-\gamma)t}-1\right)+D_0e^{(r-\gamma)t}-\left(\frac{S}{r-\gamma}\left(e^{(r-\gamma)T}-1\right)+D_0e^{(r-\gamma)T}\right)\frac{e^{\left(\frac{r-\Delta}{1-\alpha}-\gamma\right)t}-e^{(r-\gamma)t}}{e^{\left(\frac{r-\Delta}{1-\alpha}-\gamma\right)T}-e^{(r-\gamma)T}}.$$

Рассмотрим асимптотику решения задачи при переходе $T\to\infty$. Прежде всего заметим, что предел будет существовать только при выполнении условия $r>\gamma$, $\Delta>\alpha\max(r,\gamma)$ (доказательство более общего случая рассматривается в разделе 2.5). Перейдем в условии $D(T)=0$ к пределу $T\to\infty$. Получим, что

$$0=\frac{S}{r-\gamma}+D_0-\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r}\left(\frac{\psi_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Отсюда мы находим начальное значение сопряженной переменной

$$\psi_0=\alpha\left[\frac{\Delta-\alpha r}{1-\alpha}\left(D_0+\frac{S}{r-\gamma}\right)\right]^{\alpha-1}.$$

Далее находим значение управления:

$$C_0=\frac{\Delta-\alpha r}{1-\alpha}\left(D_0+\frac{S}{r-\gamma}\right).$$

Таким образом, получена магистраль решения задачи при стремлении временного горизонта в бесконечность.

Возникает вопрос, является ли полученная магистраль решением задачи с бесконечным горизонтом планирования? Ответ на этот вопрос достаточно нетривиален. Дело в том, что условие $D(T)\geq 0$ критично при построении оптимального решения. Следовательно, в задаче с бесконечным горизонтом планирования необходимо потребовать дополнительное условие. Этот вопрос подробно будет рассмотрен в следующих разделах.

2.2 Моделирование спроса на наличные деньги в модели рамсеевского типа

В середине прошлого века ученые-экономисты обратили внимание на то, что деньги играют большую роль в экономических процессах. Анализ этой роли проводился в рамках экономической теории, получившей название монетаризма [45].

Описанная в предыдущем разделе модель Рамсея не учитывает спрос на наличные деньги. Другими словами, в этой модели подразумевается, что домашние хозяйства каждый раз при совершении покупок снимают деньги со сберегательного счета. Данное предположение имеет мало общего с реальностью. В связи с этим, возникает вопрос – каким образом моделировать спрос на наличные деньги.

Деньги нужны людям для совершения сделок. Чем больше нужно денег для совершения сделок, тем больше средств население хранит в виде наличных денег. Связь между суммой денег и общим объемом сделок отражается в следующем уравнении количественной теории денег:

$$MV = PQ,$$

где M — денежная масса, V – скорость оборота денег, P – цена товаров, Q – количество товаров. Данная формула носит название закон Фишера. Справа в законе Фишера стоит совокупное потребление.

Будем считать, что для обеспечения непрерывности потребительских расходов $C(t)$ необходим запас денежных средств $M(t) \geq \theta C(t)$, то есть должно выполняться ограничение ликвидности. Такой подход для изучения спроса на деньги применяется, например, в работах [46], [47]. Величина θ называется коэффициентом ликвидности. Отсюда следует, что коэффициент ограничения ликвидности θ является обратной величиной к скорости обращения денег.

Будем считать, что домашние хозяйства как и в предыдущем разделе действуют в условиях совершенного рынка кредитов-депозитов, то есть $r_D = r_L = r$. В этом случае задача примет вид

$$\begin{gathered} J = \int_0^T C^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \to \max \\ \dot{x} = S - rM - C + (r-\gamma)x, \\ M \geq \theta C, x(0) = X_0, x(T) \geq 0, \\ M, C \geq 0. \end{gathered} \tag{2.2.1}$$

Здесь $x = D + M$. Интерпретировать данную величину можно как суммарное благосостояние домашнего хозяйства.

Заметим, что в задаче (2.2.1) неравенство ограничения ликвидности на оптимальной траектории обратится в равенство:

Утверждение 2.2.1. *Если решение задачи* (2.2.1) *существует, то на оптимальной траектории* $M_*(t) = \theta C_*(t)\ \ \forall t \in [0,T]$.

Доказательство. Пусть $M_*(t) > \theta C_*(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$. В этом случае можно взять в качестве управления на отрезке $t \in [t_1, t_2]$ функции $\tilde{M} = (rM_* + C_*)/(r + 1/\theta)$, $\tilde{C} = C_* + r(M_* - \tilde{M})$, вне отрезка $[t_1, t_2]$ управление остается тем же самым. Данное управление является допустимым. При управлении $\tilde{M}, \tilde{C}$ траектория $x(t)$ останется прежней. Однако $\tilde{C} \geq C_*$ и $\tilde{C} \neq C_*$. Получили противоречие с оптимальностью управления M_*, C_*.

Тогда задача (2.2.1) будет представляться в виде

$$\begin{aligned} & J = \int_0^T M^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \to \max_{M \geq 0} \\ & \dot{x} = S - (r + 1/\theta)M + (r-\gamma)x, \\ & x(0) = X_0, x(T) \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Теорема 2.2.1. *Решение задачи* (2.2.2) *существует.*

Доказательство: в силу неотрицательности $M(t)$ выполнено:

$$\dot{x} \leq S + (r-\gamma)x.$$

Отсюда следует, что при всех допустимых управлениях $x(t) \le x_{\max}(t) = e^{(r-\gamma)t}(x_0 + S/(r-\gamma)) - S/(r-\gamma)$.

Проинтегрируем уравнение для фазовой переменной

$$x(T) - x_0 = ST + (r-\gamma)\int_0^T x(t)dt - (r+1/\theta)\int_0^T M(t)dt .$$

Тогда

$$0 \le (r+1/\theta)\int_0^T M(t)dt \le ST + x_0 + (r-\gamma)\int_0^T x_{\max}(t)dt$$

Отсюда и из неравенства Гельдера ($p = 1/\alpha, q = 1/(1-\alpha)$) следует ограниченность максимизируемого функционала

$$\int_0^T M^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt \le \left(\int_0^T M(t)dt\right)^\alpha \left(\int_0^T e^{-(\Delta-\alpha\gamma)/(1-\alpha)t}dt\right)^{(1-\alpha)} .$$

Тогда существует точная верхняя грань значений функционала. Рассмотрим максимизирующую последовательность $\{M_i(t)\}_{i=1}^\infty$ допустимых управлений. По теореме Комлоша [48] из этих последовательностей можно извлечь подпоследовательности $\{M_{i_k}(t)\}_{k=1}^\infty$, для которых при почти всех x существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M_{i_1}(t) + \ldots + M_{i_k}(t)}{k} = M_*(t)$$

Покажем, что полученное управление $M_*(t)$ также является допустимым. Траектория $x(t)$ меняется согласно уравнению

$$x(t) = \frac{S}{r-\gamma}\left(e^{(r-\gamma)t} - 1\right) + x_0 e^{(r-\gamma)t} - \left(r + \frac{1}{\theta}\right)\int_0^t e^{(r-\gamma)(t-\tau)}M(\tau)dt .$$

Тогда условие $x(T) \ge 0$ выглядит как

$$\left(r + \frac{1}{\theta}\right)\int_0^T e^{(r-\gamma)(T-\tau)}M(\tau)dt \le \frac{S}{r-\gamma}\left(e^{(r-\gamma)T} - 1\right) + x_0 e^{(r-\gamma)T}$$

В силу того, что управления $\{M_i(t)\}_{i=1}^\infty$ допустимые для них выполнено

$$\left(r + \frac{1}{\theta}\right)\int_0^T e^{(r-\gamma)(T-\tau)} \frac{M_{i_1}(t) + \ldots + M_{i_k}(t)}{k} dt \le \frac{S}{r-\gamma}\left(e^{(r-\gamma)T} - 1\right) + x_0 e^{(r-\gamma)T}$$

Тогда по теореме Фату [49] для $M_*(t)$ также выполнено

$$\left(r+\frac{1}{\theta}\right)\int_0^T e^{(r-\gamma)(T-\tau)}M_*(\tau)dt \le \frac{S}{r-\gamma}\left(e^{(r-\gamma)T}-1\right)+x_0e^{(r-\gamma)T}.$$

В силу непрерывности максимизируемого функционала имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{M_{i_1}(t)+...+M_{i_k}(t)}{k}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}=M_*(t)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}.$$

Отсюда по теореме Лебега [49] имеем, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T\left(\frac{M_{i_1}(t)+...+M_{i_k}(t)}{k}\right)^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt=\int_0^T M_*(t)^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt.$$

Учитывая, что $\{M_i(t)\}_{i=1}^\infty$ является максимизирующей последовательностью, получаем, что $M_*(t)$ является решением задачи (2.2.2). ■

Для поиска решения воспользуемся принципом максимума Понтрягина:

Теорема 2.2.2. *Для того, чтобы пара (*M_*, x_**), допустимая для задачи* (2.2.2)*, была ее решением, необходимо, чтобы существовала дифференцируемая функция* $\psi(t)$ *такая, что управление* M_* *доставляет максимум функции Гамильтона*

$$H(x,M,\psi,t)=M^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}+\psi(S-(r+1/\theta)M+(r-\gamma)x) \qquad (2.2.3)$$

при заданных x_*,ψ_**, функция* $\psi(t)$ *является решением сопряженной системы* $\dot\psi=-\partial H/\partial x$ *и удовлетворяет условию трансверсальности* $\psi(T)x(T)=0$.

Выпишем гамильтониан задачи:

$$H=M^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}+\psi(S-(r+\frac{1}{\theta})M+(r-\gamma)x).$$

Из условия максимума гамильтониана получим $\alpha M^{\alpha-1}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}=(r+\frac{1}{\theta})\psi$.

Сопряженное уравнение можно проинтегрировать. Тогда

$$M(t)=\left(\frac{r\theta+1}{\alpha\theta}\psi_0\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}e^{\left(\frac{r-\Delta}{1-\alpha}-\gamma\right)t}.$$

Подставив $M(t)$ в уравнение для x можно найти, как изменяется $x(t)$ со временем:

$$x(t)=\frac{S}{r-\gamma}\left(e^{(r-\gamma)t}-1\right)+X_0e^{(r-\gamma)t}+\frac{(1-\alpha)(r\theta+1)}{(\Delta-\alpha r)\theta}\left(\frac{r\theta+1}{\alpha\theta}\psi_0\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(e^{\left(\frac{r-\Delta}{1-\alpha}-\gamma\right)t}-e^{(r-\gamma)t}\right)$$

Оптимальной траекторией будет такая траектория $x(t)$, что $x(T)=0$. Доказательство этого факта достаточно очевидно: если $x(T)>0$, то мы можем в некоторой окрестности $[T-\varepsilon,T]$ увеличить $M(t)$ и тем самым значение функционала.

Аналогично случаю с классической моделью Рамсея рассмотрим асимптотику решения задачи при переходе $T\to\infty$. Аналогично случаю с классической моделью Рамсея предельный переход возможен только при выполнении условий $r>\gamma$, $\Delta>\alpha\max(r,\gamma)$. Перейдем в условии $x(T)=0$ к пределу $T\to\infty$. Получим, что

$$X_0+\frac{S}{r-\gamma}=\frac{(1-\alpha)(r\theta+1)}{(\Delta-\alpha r)\theta}\left(\frac{r\theta+1}{\alpha\theta}\psi_0\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Подставляя полученное значение ψ_0 в уравнение для $M(t)$ найдем управление в виде синтеза:

$$M(x)=\frac{\theta(\Delta-\alpha r)}{(r\theta+1)(1-\alpha)}\left(x+\frac{S}{r-\gamma}\right)$$

Таким образом, при $x<\dfrac{S\theta(\Delta-\alpha r)}{(r-\gamma)(1-\alpha+(r-\Delta)\theta)}$ домашние хозяйства будут брать кредит в размере $(M(x)-x)_+$, в противном случае - будут вкладывать денежные средства в депозиты в размере $(x-M(x))_+$. Потребление будет равно

$$C(x)=\frac{(\Delta-\alpha r)}{(r\theta+1)(1-\alpha)}\left(x+\frac{S}{r-\gamma}\right).$$

Данная модель разбивает домашние хозяйства на две группы. Первую группу, для которой выполнено $r<\Delta+\gamma(1-\alpha)$, условно можно назвать "бедным слоем". Потребление этой группы будет убывать с течением времени и в пределе при $t,T\to\infty$ отношение потребительских расходов к заработной плате будет бесконечно мало. Это связано с тем, что бедный слой в рамках данной модели для поддержания относительно высокого уровня потребления берет кредиты в начале жизненного цикла и в итоге все большая и большая часть доходов домашних хозяйств уходит на обслуживание долгов. Для богатого слоя населения, коэффициент дисконтирования которого удовлетворяет соотношению $\Delta < r - \gamma(1-\alpha)$, ситуация выглядит абсолютно противоположно: потребление с течением времени возрастает и в пределе отношение потребительских расходов к заработной плате будет бесконечно большой величиной.

2.3 Моделирование спроса на потребительские кредиты в условиях отсутствия рынка сбережений

В последние 10-15 лет уровень жизни домашних хозяйств России значительно вырос. В связи с этим одни домашние хозяйства стали активно сберегать свои средства, другие – привлекать заемные средства, прежде всего, на покупку товаров длительного пользования. В связи с этим банковский сектор увидел большой потенциал в кредитовании домашних хозяйств: оценка кредитоспособности юридических лиц часто для банков становилось задачей достаточно сложной, в то время как для физических лиц эта задача проще решается и несет меньшие риски для банков. Последнее привело к буму потребительского кредитования в России и других странах постсоветского пространства. При этом сами рынки кредитования и сбережения в странах постсоветского пространства находились в зачаточном состоянии. Так, например, для кредитования физических лиц у банков часто не было достаточной информации о заемщиках (т.к. рынок кредитования только формировался, то не было накопленной кредитной истории), поэтому банки закладывали риски, связанные с оценкой заемщиков, в процентную ставку. Это приводило к тому, что разница между процентными ставками по кредитам и депозитам в странах постсоветского пространства существенно отличалась, т.е. рынок кредитов и депозитов является несовершенным. Эта особенность устройства рынка кредитов и депозитов не позволяет применять классическую модель Рамсея для анализа поведения домашних хозяйств. Модели, учитывающие несовершенство рынка кредитов и депозитов, приводятся в этой и последующих параграфах.

В данной модели будем считать, что домашние хозяйства могут привлекать заемные средства, но у них отсутствует возможность получения дополнительного дохода за счет сбережений. Это позволяет исследовать спрос на потребительские кредиты в условиях отсутствия рынка депозитов [50], [51], [52].

Домашнее хозяйство обладает активом в форме наличных денег $M(t)$. Имеющиеся средства домашнее хозяйство направляет на текущее потребление $C(t)$, выплаты процентов $r_L L(t)$ по имеющимся кредитам $L(t)$. Кроме того, домашнее хозяйство может привлекать заемные средства $H_L(t)$ в кредитных организациях. Тогда количество наличных денег и кредитов населения изменяется со временем следующим образом:

$$\dot{M} = S(t) - C(t) + H_L(t)$$
$$\dot{L} = r_L L(t) + H_L(t)$$

Здесь $S(t)$ - доходы домашнего хозяйства.

Так же, как и в предыдущей задаче, будем считать, что для обеспечения непрерывности потребительских расходов $C(t)$ необходим запас денежных средств: $C(t) \le M(t)/\theta$. Также будем считать, что домашние хозяйства кредитуются таким образом, чтобы в терминальный момент времени они были в состоянии расплатиться за кредит, то есть $L(T) = 0$.

Объем потребления зависит от динамики цен. Предположим, что население прогнозирует величину инфляции цен равной i. Тогда потребление домашних хозяйств в товарном эквиваленте равно $C(t)/(p_0 e^{it})$, где p_0 - базовые цены. Обозначим $\Delta = \delta + \alpha i$. Коэффициент Δ является суммарным коэффициентом дисконтирования, учитывающим влияние инфляции. Также будем считать, что домашнее хозяйство прогнозирует экспоненциальный рост заработной платы $S(t)$ с темпом γ, то есть $S(t)=Se^{\gamma t}$. Тогда распределение средств домашних хозяйств будет описываться решением следующей задачи оптимального управления в непрерывном времени:

$$\begin{gathered}J=\int_0^T C(t)^{\alpha}e^{-\Delta t}dt\to\max\\ \dot{L}=r_L L+H_L,\dot{M}=Se^{\gamma t}-C+H_L,\\ M\geq\theta C,L(T)=0,L\geq0,M\geq0,M(0)-L(0)=X_0,\end{gathered}\tag{2.3.1}$$

с фазовыми переменными M, L и управлениями H_L и $C\geq0$.

Для анализа задачи с учетом постоянства внешних параметров сделаем замену переменных $x=(M-L)e^{-\gamma t}$, $\hat{M}=Me^{-\gamma t}$, $\hat{L}=Le^{-\gamma t}$, $\hat{C}=Ce^{-\gamma t}$. Для полученной задачи оптимального управления будет справедливо утверждение

Утверждение 2.3.1. *Если решение задачи* (2.3.1) *существует, то на оптимальной траектории* $M_*(t)=\theta C_*(t)\ \ \forall t\in[0,T]$.

Доказательство. Пусть $M_*(t)>\theta C_*(t)$ при $t\in[t_1,t_2]$. Возможны два случая: $M_*(t)>x_*(t)$, $M_*(t)=x_*(t)$ при $t\in[t_1,t_2]$ (если ни одно из этих утверждений не выполнено, мы всегда можем выбрать отрезок $[t_3,t_4]$, являющийся подмножеством $[t_1,t_2]$, для которого будет выполнено одно из утверждений).

Рассмотрим случай $M_*(t)>x_*(t)$. В этом случае можно взять в качестве управления на отрезке $t\in[t_1,t_2]$ функции $\tilde{M}=\max\{x_*,(r_LM_*+C_*)/(r_L+1/\theta)\}$, $\tilde{C}=C_*+r_L(M_*-\tilde{M})$, вне отрезка $[t_1,t_2]$ управление остается тем же самым. При управлении $\tilde{M},\tilde{C},L_*$ траектория $x(t)$ останется прежней, будет выполнено $\tilde{M}\geq x,\tilde{M}\geq\theta\tilde{C}\ \forall t\in[0,T]$, то есть данное управление будет допустимым. Однако $\tilde{C}\geq C_*$ и $\tilde{C}\neq C_*$. Следовательно, управление M_*,C_*,L_* не является оптимальным.

Пусть $M_*(t) = x_*(t)$. Рассмотрим задачу (2.3.1). Тогда $M_*(t) = x_*(t)$ соответствует для этой задачи случаю $L_*(t) = 0$. Рассмотрим внутреннюю точку $t_3 \in (t_1, t_2)$. Обозначим $C_*(t_3)$ как C_3. Рассмотрим управление $\tilde{C}$ такое, что $\tilde{C} = C_*$ вне отрезков $[t_3 - \varepsilon; t_3 + \varepsilon]$, $\tilde{C} = C_3 - \sigma$ на $[t_3 - \varepsilon; t_3]$ и $\tilde{C} = C_3 + \sigma$ на $[t_3; t_3 + \varepsilon]$. Здесь σ, ε - малые неотрицательные величины. В силу выполнения предположения $C_*(t_3)\theta < M_*(t_3)$ данное управление будет допустимым и $M(t_2)$ при управлениях C_* и $\tilde{C}$ совпадает. Покажем, что при этом значение функционала при управлении $\tilde{C}$ будет больше. Рассмотрим разницу

$$\int_{t_3-\varepsilon}^{t_3} (C_3 + \sigma)^{\alpha} e^{-\Delta t} dt + \int_{t_3}^{t_3+\varepsilon} (C_3 - \sigma)^{\alpha} e^{-\Delta t} dt - \int_{t_3-\varepsilon}^{t_3+\varepsilon} C_3^{\alpha} e^{-\Delta t} dt$$

Проинтегрируем по времени:

$$\left[\left(C_3 + \sigma \right)^{\alpha} - C_3^{\alpha} \right] (e^{\Delta\varepsilon} - 1) + \left[\left(C_3 - \sigma \right)^{\alpha} - C_3^{\alpha} \right] (1 - e^{-\Delta\varepsilon})$$

Разложим данное выражение по σ в ряд Маклорена:

$$\alpha\sigma C_3^{\alpha-1}(e^{\Delta\varepsilon} - 1) - \alpha\sigma C_3^{\alpha-1}(1 - e^{-\Delta\varepsilon})$$

Теперь разложим данное выражение по α в ряд Маклорена:

$$\alpha\sigma C_3^{\alpha-1}(e^{\Delta\varepsilon} + e^{-\Delta\varepsilon} - 2) = 2\alpha\sigma C_3^{\alpha-1} \frac{\left(\Delta\varepsilon\right)^2}{2} > 0$$

Таким образом, значение максимизируемого функционала увеличилось. Получили противоречие с оптимальностью C_*. Следовательно, для оптимального управления будет выполнено равенство $M_* = \theta C_*$. ■

Таким образом, (2.3.1) сводится к задаче

$$\begin{gathered} J = \int_0^T M^{\alpha} e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} dt \to \max \\ \dot{x} = S - (r_L + 1/\theta)M + (r_L - \gamma)x, \\ x(0) = X_0, x(T) \geq 0, M \geq \max(0, x), \end{gathered} \qquad (2.3.2)$$

где управлением является M. Количество потребительских кредитов и потребительских расходов находятся как $L = M - x$ и $C = M/\theta$ соответственно.

Теорема 2.3.1. *Решение задачи* (2.3.2) *существует.*

Доказательство: в силу неотрицательности $M(t)$ выполнено:

$$\dot{x} \le S + (r_L - \gamma)x .$$

Отсюда следует, что при всех допустимых управлениях $x(t) \le x_{\max}(t) = e^{(r_L-\gamma)t}(x_0 + S/(r_L-\gamma)) - S/(r_L-\gamma)$.

Проинтегрируем уравнение для фазовой переменной

$$x(T) - x_0 = ST + \left(r_L - \gamma\right)\int\limits_0^T x(t)dt - (r_L + 1/\theta)\int\limits_0^T M(t)dt .$$

Тогда

$$0 \le (r_L + 1/\theta)\int\limits_0^T M(t)dt \le ST + x_0 + \left(r_L - \gamma\right)\int\limits_0^T x_{\max}(t)dt$$

Отсюда и из неравенства Гельдера ($p = 1/\alpha, q = 1/(1-\alpha)$) следует ограниченность максимизируемого функционала

$$\int\limits_0^T M^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt \le \left(\int\limits_0^T M(t)dt\right)^\alpha \left(\int\limits_0^T e^{-(\Delta-\alpha\gamma)/(1-\alpha)t}dt\right)^{(1-\alpha)} .$$

Тогда существует точная верхняя грань значений функционала. Рассмотрим максимизирующую последовательность $\{M_i(t)\}_{i=1}^\infty$ допустимых управлений. По теореме Комлоша [48] из этих последовательностей можно извлечь подпоследовательности $\{M_{i_k}(t)\}_{k=1}^\infty$, для которых при почти всех x существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{M_{i_1}(t) + ... + M_{i_k}(t)}{k} = M_*(t)$$

Покажем, что полученное управление $M_*(t)$ также является допустимым. Траектория $x(t)$ меняется согласно уравнению

$$x(t) = \frac{S}{r_L - \gamma}\left(e^{(r_L-\gamma)t} - 1\right) + x_0 e^{(r_L-\gamma)t} - \left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)\int\limits_0^t e^{(r_L-\gamma)(t-\tau)}M(\tau)dt .$$

Тогда условие $x(T) \ge 0$ выглядит как

$$\left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)\int\limits_0^T e^{(r_L-\gamma)(T-\tau)}M(\tau)dt \le \frac{S}{r_L - \gamma}\left(e^{(r_L-\gamma)T} - 1\right) + x_0 e^{(r_L-\gamma)T}$$

В силу того, что управления $\{M_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ допустимые для них выполнено

$$\left(r_L+\frac{1}{\theta}\right)\int_0^T e^{(r_L-\gamma)(T-\tau)}\frac{M_{i_1}(t)+...+M_{i_k}(t)}{k}dt \le \frac{S}{r_L-\gamma}\left(e^{(r_L-\gamma)T}-1\right)+x_0e^{(r_L-\gamma)T}$$

Тогда по теореме Фату [49] для $M_*(t)$ также выполнено

$$\left(r_L+\frac{1}{\theta}\right)\int_0^T e^{(r_L-\gamma)(T-\tau)}M_*(\tau)dt \le \frac{S}{r_L-\gamma}\left(e^{(r_L-\gamma)T}-1\right)+x_0e^{(r_L-\gamma)T}.$$

Покажем, что $M_*(t)\ge x_*(t)$:

$$x_{i_k}(t)=\frac{S}{r_L-\gamma}\left(e^{(r_L-\gamma)t}-1\right)+x_0e^{(r_L-\gamma)t}-\left(r_L+\frac{1}{\theta}\right)\int_0^t e^{(r_L-\gamma)(t-\tau)}Mi_k(\tau)dt \le Mi_k(t)$$

Отсюда следует справедливость

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{S}{r_L-\gamma}\left(e^{(r_L-\gamma)t}-1\right)+x_0e^{(r_L-\gamma)t}-\left(r_L+\frac{1}{\theta}\right)\int_0^t e^{(r_L-\gamma)(t-\tau)}M_{i_j}(\tau)dt\right)\le\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}M_{i_k}(t).$$

Тогда по теореме Фату [49]

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{S}{r_L-\gamma}\left(e^{(r_L-\gamma)t}-1\right)+x_0e^{(r_L-\gamma)t}-\left(r_L+\frac{1}{\theta}\right)\int_0^t e^{(r_L-\gamma)(t-\tau)}M_{i_j}(\tau)dt\right)\le\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}M_{i_k}(t)$$

Таким образом, $M_*(t)\ge x_*(t)$. Следовательно, управление является допустимым.

В силу непрерывности максимизируемого функционала имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{M_{i_1}(t)+...+M_{i_k}(t)}{k}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}=M_*(t)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}.$$

Отсюда по теореме Лебега [49] имеем, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T\left(\frac{M_{i_1}(t)+...+M_{i_k}(t)}{k}\right)^{\alpha}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt=\int_0^T M_*(t)^{\alpha}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt.$$

Учитывая, что $\{M_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ является максимизирующей последовательностью, получаем, что $M_*(t)$ является решением задачи (2.2.2). ■

Для построения решения воспользуемся принципом максимума Понтрягина:

Теорема 2.3.2. *Для того, чтобы пара (M_*, x_*), допустимая для задачи* (2.3.2) *, была ее решением, необходимо, чтобы существовали абсолютно-*

непрерывная функция $\varphi(t)$ *и кусочно-непрерывная функция* $\mu(t) \ge 0$ *такие, что управление* M_* *доставляет максимум функции Гамильтона*

$$H(x,u,\varphi,t) = \left(M^{\alpha} + \varphi(S - (r_L + 1/\theta)M + (r_L - \gamma)x) + \mu(M - x)\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} \qquad (2.3.3)$$

при заданных x_*, φ_*, μ_*, *функция* $\varphi(t)$ *является решением сопряженной системы* $\dot{\varphi} = (\Delta - \alpha\gamma)\varphi - \partial H / \partial x$ *и удовлетворяет условию трансверсальности* $\varphi(T)x(T) = 0$, *а функция* $\mu(t)$ *- условию дополняющей нежесткости* $\mu(M - x) = 0$.

Схема доказательства: согласно принципу максимума Понтрягина для задач со смешанными ограничениями [53] функция $\varphi(t)$ является функцией ограниченной вариации, для которой почти всюду выполнено $\dot{\varphi} = (\Delta - \alpha\gamma)\varphi - \partial H / \partial x$, а функция $\mu(t)$ - функцией из $L_\infty[0,T]$. Для доказательства кусочно-непрерывности функции $\mu(t)$ необходимо показать, что $\dot{\varphi} = (\Delta - \alpha\gamma)\varphi - \partial H / \partial x$ почти всюду является функцией непрерывной. Для этого сделаем в задаче (2.3.2) замену $u = M - x_+$, $u \ge 0$. Тогда задача (2.3.2) представляется в виде:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\max(x,0) + u\right)^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \to \max_u, \\
&\frac{dx}{dt} = S + (r_L - \gamma)x - \left(r_L + \frac{1}{\theta}\right)(\max(x,0) + u), \\
&u \ge 0, x(T) \ge 0.
\end{aligned}$$

Для нее выполняются условия принципа максимума Понтрягина для задач с негладкой правой частью [54]. Согласно основному результату, приведенному в этой работе, для оптимальной пары $x_*(t), u_*(t)$ существует абсолютно непрерывная функция φ, для которой выполнено:

1. Условие максимума

$$(\varphi(t), S + (r_L - \gamma)x_*(t) - \left(r_L + 1/\theta\right)(\max(x_*(t),0) + u_*(t))) + \left(\max(x_*(t),0) + u_*(t)\right)^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} =$$
$$= \max_{u \ge 0}\left\{(\varphi(t), S + (r_L - \gamma)x_*(t) - \left(r_L + 1/\theta\right)(\max(x_*(t),0) + u_*)) + \left(\max(x_*(t),0) + u\right)^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}\right\}.$$

2. Сопряженное уравнение (почти всюду)

$$\dot{\varphi}(t) = -h(t)\varphi(t) + H(t),$$

где $h(t), H(t)$ - обобщенные градиенты функций

$S+(r_L-\gamma)x_*(t)-\left(r_L+1/\theta\right)(\max(x_*(t),0)+u_*(t)))$ и

$\left(\max(x_*(t),0)+u_*(t)\right)^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}$ соответственно.

Негладкость задачи заключена в точке $x=0$. Поэтому будем рассматривать три случая: $x<0$, $x>0$, $x=0$.

В случае $x<0$ максимум гамильтониана будет достигаться при $\varphi=\alpha u^{\alpha-1}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}/(r_L+1/\theta)$, уравнение на сопряженную переменную будет выглядеть как $\dot{\varphi}=-(r_L-\gamma)\varphi$.

В случае $x>0$ возможны два случая:

1. $\varphi<\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}/(r_L+1/\theta)$

   В этом случае максимум гамильтониана будет достигаться при $u=0$, уравнение на фазовую и сопряженную переменную будет выглядеть как

$$\begin{aligned}&\dot{x}=S-(\gamma+1/\theta)x,\\&\dot{\varphi}=-\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}+(\gamma+1/\theta)\varphi.\end{aligned}.$$

2. $\varphi\geq\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}/(r_L+1/\theta)$

   В этом случае максимум гамильтониана будет достигаться при $\varphi=\alpha(x+u)^{\alpha-1}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}/(r_L+1/\theta)$, уравнение на фазовую и сопряженную переменную будет выглядеть как

$$\begin{aligned}&\dot{x}=S-(r_L-\gamma)x-(r_L+1/\theta)(x+u),\\&\dot{\varphi}=-(r_L-\gamma)\varphi.\end{aligned}.$$

В случае $x=0$ уравнение на фазовую переменную примет вид $\dot{x}=S-(r_L+1/\theta)u.$ Для того, чтобы траектория находилась в этом режиме какой-то интервал времени, необходимо, чтобы $S-(r_L+1/\theta)u=0$, $\varphi=\alpha u^{\alpha-1}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}/(r_L+1/\theta)$. Отсюда следует, что $\dot{\varphi}=-(\Delta-\alpha\gamma)\varphi$.

Таким образом, сопряженная переменная почти всюду непрерывно-дифференцируемая. Следовательно, функция $\mu(t)$ также будет почти всюду непрерывна. ■

Условие максимума гамильтониана по управлению можно записать как $\partial H/\partial M = \alpha M^{\alpha-1} - \varphi(r_L + 1/\theta) + \mu = 0$. Заметим, что $\varphi > 0$, т.к. в противном случае максимум гамильтониана будет достигаться при $M = +\infty$. Следовательно, условие трансверсальности можно записать как $x(T) = 0$.

Рассмотрим поведение траекторий на фазовой плоскости. При $x > 0$, $\varphi \ge \alpha x^{\alpha-1}/(r_L + 1/\theta)$ максимум гамильтониана достигается при $M = x$. В этом случае траектория (x, φ) будет меняться согласно закону

$$\begin{aligned} \dot{x} &= S - (\gamma + 1/\theta)x, \\ \dot{\varphi} &= -\alpha x^{\alpha-1} + \varphi(\Delta + (1-\alpha)\gamma + 1/\theta). \end{aligned} \qquad (2.3.4)$$

Назовем данный режим режимом 1.

При $\varphi < \alpha x^{\alpha-1}/(r_L + 1/\theta)$ или $x \le 0$ траектория меняется согласно закону

$$\begin{aligned} \dot{x} &= S - (r_L + 1/\theta)\left[\varphi(r_L + 1/\theta)/\alpha\right]^{1/(\alpha-1)} + (r_L - \gamma)x, \\ \dot{\varphi} &= \varphi(\Delta + (1-\alpha)\gamma - r_L). \end{aligned} \qquad (2.3.5)$$

Максимум гамильтониана достигается при $M = \left[\varphi(r_L + 1/\theta)/\alpha\right]^{1/(\alpha-1)}$, $M > x$. Назовем данный случай режимом 2. Система (2.3.5) нелинейная. Оказывается, можно свести данную систему к линейной, если рассматривать ее не в терминах сопряженной переменной φ, а в терминах управления M. Тогда траектория меняется согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x} &= S - (r_L + 1/\theta)M + (r_L - \gamma)x, \\ \dot{M} &= -M((\Delta - r_L)/(1-\alpha) + \gamma). \end{aligned} \qquad (2.3.6)$$

Область $\varphi < \alpha x^{\alpha-1}/(r_L + 1/\theta)$ или $x < 0$ соответствует области $M > \max(x, 0)$.

Теорема 2.3.3. *Пусть* $r_L < \Delta - (1-\alpha)/\theta$, $\Delta - \alpha\gamma > 0$ *и* $r_L > \gamma$. *Тогда для любого начального состояния* $x_0 \ge 0$ *траектория решения* (2.3.2) *меняется согласно* (2.3.6), *где*

$$M(0) = \frac{(\Delta - \alpha r_L)\theta}{(1-\alpha)(1 + r_L\theta)}\left(x_0 + \frac{S}{r_L - \gamma}\left(1 - e^{-(r_L - \gamma)T}\right)\right) \Big/ \left(1 - e^{-\left(r_L + \frac{\Delta - r_L}{1-\alpha}\right)T}\right).$$

Доказательство. Производная вдоль кривой $\hat{\varphi}(x) = \alpha x^{\alpha-1}/(r_L + 1/\theta)$ согласно системе (2.3.4) равна

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi - \alpha x^{\alpha-1}/(r_L + 1/\theta)\right)\Big|_{\varphi = \hat{\varphi}(x)} = \frac{\alpha\theta x^{\alpha-2}}{(1-\alpha)(r_L\theta + 1)}\left(S + \left(\frac{\Delta - r_L}{1-\alpha} - \frac{1}{\theta}\right)x\right) > 0. \qquad (2.3.7)$$

Допустим, траектория в какой-то момент времени движется согласно (2.3.4). Тогда она будет всегда оставаться в области $x>0$, $\varphi \geq \hat{\varphi}(x)>0$. Однако в терминальный момент времени должно выполняться условие трансверсальности $x(T)=0$. Противоречие. Следовательно, траектория не может двигаться согласно (2.3.4). Это означает, что траектория будет всегда находиться в режиме 2. Для определения $M(0)$ достаточно решить систему (2.3.6) при условии, что $x(0)=x_0$, $x(T)=0$ (условие трансверсальности) ■

Введем обозначения $a=(1+r_L\theta)(1-\alpha)/(\theta(\Delta-\alpha r_L))$,

$$x_1=\frac{S\theta(\Delta-\alpha r_L)}{(r_L-\gamma)(1-\alpha+\theta(r_L-\Delta))},\ \tau_1(x)=\frac{\theta}{\gamma\theta+1}\ln\left(\left(x-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)/\left(x_1-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)\right).$$

Заметим, что $x_1>S\theta/(\gamma\theta+1)$ при $\Delta-(1-\alpha)/\theta<r_L<\Delta+(1-\alpha)\gamma$, $\Delta-\alpha\gamma>0$, $r_L>\gamma$. При этих предположениях $\tau_1(x)$ определена и неотрицательна при $x\geq x_1$. Кроме того, $\tau_1(x)\to 0$ при $x\to x_1+0$.

Теорема 2.3.4. *Пусть* $\Delta-(1-\alpha)/\theta<r_L<\Delta+(1-\alpha)\gamma$, $\Delta-\alpha\gamma>0$ *и* $r_L>\gamma$. *Тогда* $\forall\ x_0\geq 0$ *существует достаточно большой горизонт* T *и момент времени* t_1 *такие, что:*

1. *при* $x_0\leq x_1$ $t_1=0$, *при* $x_0>x_1$ $t_1=\tau_1(x_0)+O(1/T)$.

2. *если* $t_1>0$, *то решение* $x(t)$ *задачи* (2.3.2) *лежит в режиме 1 при* $t\in[0,t_1]$.

3. *решение* $x(t)$ *задачи* (2.3.2) *лежит в режиме 2 при* $t\in[t_1,T]$.

Доказательство. В терминальный момент времени должно выполняться условие трансверсальности $x(T)=0$. Допустим, в терминальный момент времени траектория находится в режиме 1. Тогда $M(T)=x(T)=0$, $\dot{x}(T)=S$. Это означает, что в окрестности $[T-\varepsilon,T]$ траектория находится в режиме 2, в момент времени $t=T$ траектория попадает на границу режимов. Следовательно, в некоторый временной интервал $[T-\varepsilon,T]$ траектория находится в режиме 2.

Рассмотрим поведение траекторий на кривой $\hat{\varphi}(x)$. При $x \le \tilde{x} = S/\left((r_L - \Delta)/(1-\alpha) + 1/\theta\right)$ траектория попадает в режим 1 (производная вдоль кривой $\hat{\varphi}(x)$ положительна), в противном случае - в режим 2. В режиме 1 переменная x не может стать больше $\tilde{x}$ ($\dot{x}|_{x=\tilde{x}} < 0$). Следовательно, если траектория попала из режима 2 в режим 1, то она не сможет выйти из этого режима. Значит или траектория всегда находится в режиме 2, или траектория начинается в режиме 1 и заканчивается во 2-м (возможно только при $x_0 > \tilde{x}$).

Пусть оптимальная траектория стартует из режима 1. Покажем, что t_1 равномерно ограничена сверху по T. Оптимальная траектория может находиться в режиме 1 только при $x > \tilde{x}$, так как в противном случае траектория не сможет попасть в режим 2. Тогда $t_1 < t_{max} = \theta \ln\left(\left(x_0 - S\theta/(\gamma\theta+1)\right)/\left(\tilde{x} - S\theta/(\gamma\theta+1)\right)\right)/(\gamma\theta+1)$. Таким образом, t_1 ограничена сверху, и при увеличении T траектория будет все дольше находиться в режиме 2.

Рассмотрим траекторию, которая в момент времени t_* ($t_* << T$, $t_* > t_{max}$) находится в точке x_*, M_*. Траектория в момент времени t_* находится в режиме 2, так как $t_* > t_{max}$. Тогда условие трансверсальности $x(T) = 0$ записывается как

$$\left(x_* + \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1-\alpha)(r_L\theta+1)M_*}{(\Delta - \alpha r_L)\theta}\right) e^{(r_L-\gamma)(T-t_*)} = \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1-\alpha)(r_L\theta+1)M_*}{(\Delta - \alpha r_L)\theta} e^{\left(\frac{r_L-\Delta}{1-\alpha}-\gamma\right)(T-t_*)}$$

Заметим, что $\dfrac{r_L - \Delta}{1-\alpha} - \gamma < 0 < r_L - \gamma$. Учитывая, что $t_* << T$, данное равенство можно записать как

$$x_* + \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1-\alpha)(r_L\theta+1)M_*}{(\Delta - \alpha r_L)\theta} = O(1/T). \qquad (2.3.8)$$

В режиме 2 выполнено $M_* \ge x_*$. Подставляя это в (2.3.8), получим $x_1 - x_* \ge O(1/T)$. Следовательно, траектория не может находиться всегда в режиме 2 при $x > x_1$ и достаточно больших T. При переходе из режима 1 в режим 2 выполнено $x(t_1) = M(t_1)$. Подставляя это в (2.3.8),, получим, $x(t_1) = x_1 + O(1/T)$. Решая это уравнение относительно t_1, получим, $t_1 = \tau_1(x_0) + O(1/T)$ ■

Введем обозначения: x_2 - решение уравнения

$$\frac{1+r_L\theta}{1+\gamma\theta}\int_0^1\left(px_2+(1-p)\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)^{\alpha-1}p^{\theta(\Delta-\alpha\gamma)/(1+\gamma\theta)}dp = x_2^{\alpha-1}, \tag{2.3.9}$$

а τ_2 - решение уравнения

$$\left(\frac{S}{r_L-\gamma}+x_2(1-a)\right)e^{(\gamma-r_L)\tau_2}+x_2ae^{((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_2}-\frac{S}{r_L-\gamma}=x. \tag{2.3.10}$$

Утверждение 2.3.2. *Если $r_L > \Delta + (1-\alpha)\gamma$, $\Delta > \alpha\gamma$ и $r_L > \gamma$, то уравнение (2.3.9) имеет решение $x_2 \in \mathbb{R}_+$: $x_2 < S\theta/(\gamma\theta+1)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1+r_L\theta}{1+\gamma\theta}\int_0^1\left(p+(1-p)\frac{S\theta}{x(\gamma\theta+1)}\right)^{\alpha-1}p^{\theta(\Delta-\alpha\gamma)/(1+\gamma\theta)}dp,$$

определенную на положительной полуоси $x > 0$. Сделаем замену $z = 1/x$ и рассмотрим $\bar{f}(z) = f(1/z)$. Производная этой функции отрицательна. Следовательно, $\bar{f}(z)$ убывает, а $\bar{f}(+\infty) = 0$, $\bar{f}((\gamma\theta+1)/S\theta) = (1+r_L\theta)/(1+(\Delta-\alpha\gamma)\theta)$. При $r_L - \Delta > (1-\alpha)\gamma$, получим $\bar{f}((\gamma\theta+1)/S\theta) > 1$. В силу непрерывности и строгой монотонности $\bar{f}(z)$ существует единственная точка пересечения $\breve{z} \in (S\theta/(\gamma\theta+1), +\infty)$, в которой $\bar{f}(\breve{z}) = f(1/\breve{z}) = 1$. Таким образом, уравнение (2.3.9) имеет единственное положительное решение $\breve{x} = 1/\breve{z}$, такое что $\breve{x} < S\theta/(\gamma\theta+1)$ ■

Утверждение 2.3.3. *Пусть $r_L > \Delta + (1-\alpha)\gamma$, $\Delta - \alpha\gamma > 0$ и $r_L > \gamma$. Тогда уравнение* (2.3.10) *имеет решение $\tau_2 \in \mathbb{R}_+$: $\tau_2 < +\infty$ при любом $x \in [0, x_2]$. Кроме того, $\tau_2(x) \to 0$ при $x \to x_2$.*

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -S-(r_L-\gamma)x+(r_L+1/\theta)y, \\ \dot{y} &= ((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)y, \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

с начальным условием $x(0)=y(0)=x_2>0$. Нетрудно заметить, что правая часть (2.3.10) является решением по переменной x уравнения (2.3.11). Система (2.3.11) имеет неподвижную точку $\left(-S/(r_L-\gamma),0\right)$, являющуюся при $r_L>\Delta+(1-\alpha)\gamma$ устойчивым узлом. Тогда любая траектория системы (2.3.11) будет сходиться к этой неподвижной точке. Следовательно, траектория, стартовавшая из (x_2,x_2) пересекает любую прямую $x=\hat{x}$ при $\hat{x}\in[0,x_2]$ ■

Утверждение 2.3.4.

Устойчивой сепаратрисой системы

$$\frac{dx}{dt}=S-\left(\gamma+\frac{1}{\theta}\right)x,$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=\left(\Delta+(1-\alpha)\gamma+\frac{1}{\theta}\right)\varphi-\alpha x^{\alpha-1},$$

является

$$\varphi_{us}(x_0)=\frac{\alpha\theta}{\gamma\theta+1}\int_0^1\left(px_0+(1-p)\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)^{\alpha-1}p^{\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{\gamma\theta+1}}dp\ .$$

Доказательство:

Решим систему

$$\begin{cases}\dot{x} & = & S-(\gamma+\frac{1}{\theta})x\\ \dot{\varphi} & = & (\Delta+\frac{1}{\theta}+(1-\alpha)\gamma)\varphi-\alpha x^{\alpha-1}\\ x(t_0) & = & x_0\\ \varphi(t_0) & = & \varphi_0\end{cases}$$

$$\varphi(t)=e^{\left(\Delta+\frac{1}{\theta}+(1-\alpha)\gamma\right)(t-t_0)}\left(\varphi_0-\alpha\int_{t_0}^{t}x(\xi)^{\alpha-1}e^{\left(\Delta+\frac{1}{\theta}+(1-\alpha)\gamma\right)(\xi-t_0)}d\xi\right)$$

Выразим t через $x(t)$:

$$\frac{x-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}{x_0-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}=e^{-\left(\gamma+\frac{1}{\theta}\right)(t-t_0)}$$

Подставим полученную формулу для t в $\varphi(t)$:

$$\varphi(x)=\left[\frac{x-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}{x_0-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}\right]^{-\frac{\Delta\theta+\gamma\theta(1-\alpha)+1}{\gamma\theta+1}}\left(\varphi_0+\alpha\frac{\theta}{\gamma\theta+1}\int_{x_0}^{x}z^{\alpha-1}\left[\frac{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}{x_0-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}\right]^{\frac{\Delta\theta+\gamma\theta(1-\alpha)+1}{\gamma\theta+1}}\frac{dz}{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}\right)$$

Для нахождения уравнения сепаратрисы, необходимо найти такую зависимость $\varphi_0(x_0)$, что $\varphi(x)\to\hat{\varphi}$ при $x\to\hat{x}$.

Покажем, что для

$$\varphi_0(x_0)=-\alpha\frac{\theta}{\gamma\theta+1}\int_{x_0}^{\hat{x}} z^{\alpha-1}\left[\frac{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}{x_0-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}\right]^{\frac{\Delta\theta+\gamma\theta(1-\alpha)+1}{\gamma\theta+1}}\frac{dz}{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}$$

будет выполнен предельный переход. В этом случае

$$\varphi(x)=-\left[\frac{x-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}{x_0-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}\right]^{-\frac{\Delta\theta+\gamma\theta(1-\alpha)+1}{\gamma\theta+1}}\alpha\frac{\theta}{\gamma\theta+1}\int_{x}^{\hat{x}} z^{\alpha-1}\left[\frac{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}{x_0-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}\right]^{\frac{\Delta\theta+\gamma\theta(1-\alpha)+1}{\gamma\theta+1}}\frac{dz}{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}=$$

$$=-\alpha\frac{\theta}{\gamma\theta+1}\int_{x}^{\hat{x}} z^{\alpha-1}\left[\frac{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}{x-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}\right]^{\frac{\Delta\theta+\gamma\theta(1-\alpha)+1}{\gamma\theta+1}}\frac{dz}{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}$$

Сделаем замену $p=\frac{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}{x-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}$. Тогда $\frac{dp}{p}=\frac{dz}{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}$.

$$\varphi(x)=-\alpha\frac{\theta}{\gamma\theta+1}\int_{1}^{0}\left(px+(1-p)\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)^{\alpha-1}p^{\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{\gamma\theta+1}}dp=$$

$$=\alpha\frac{\theta}{\gamma\theta+1}\int_{0}^{1}\left(px+(1-p)\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)^{\alpha-1}p^{\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{\gamma\theta+1}}dp.$$

При $x\to\hat{x}$ предельный переход будет выполнен:

$$\varphi(x)\to\alpha\frac{\theta}{\gamma\theta+1}\int_{0}^{1}\left(\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)^{\alpha-1}p^{\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{\gamma\theta+1}}dp=\alpha\frac{\theta}{\gamma\theta+1}\left(\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)^{\alpha-1}\frac{\gamma\theta+1}{\Delta\theta+\gamma\theta(1-\alpha)+1}=\hat{\varphi}$$

Сделаем замену $p=\frac{z-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}{x_0-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}}$. Тогда уравнение устойчивой сепаратрисы седла будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi_{us}(x_0)=\frac{\alpha\theta}{\gamma\theta+1}\int_{0}^{1}\left(px_0+(1-p)\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)^{\alpha-1}p^{\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{\gamma\theta+1}}dp$$

Теорема 2.3.5. *Пусть* $r_L>\Delta+(1-\alpha)\gamma$, $\Delta-\alpha\gamma>0$ *и* $r_L>\gamma$. *Тогда для любого* $x_0\ge 0$ *найдутся достаточно большой горизонт* T *и моменты времени* t_2,t_3 *такие, что:*

1. при $x_0\ge x_2$ $t_2=0$, *при* $x_0<x_2$ $t_2=\tau_2(x_0)+O(1/T)$.

2. если $t_2 > 0$*, то решение* $x(t)$ *задачи* (2.3.2) *лежит в режиме 2 при* $t \in [0, t_2]$.

3. решение $x(t)$ *задачи* (2.3.2) *лежит в режиме 1 при* $t \in [t_2, t_3]$.

4. разница $T - t_3$ *равномерно ограничена по* T.

Доказательство. При переходе траектории из режима 1 в режим 2 выполнено неравенство $x \ge \tilde{x}$ (при $x < \tilde{x}$ переход из режима 1 в режим 2 невозможен в силу положительности производной на границе $\hat{\varphi}(x)$). Учитывая, что в режиме 2 $\dot{M} > 0$, получим $M(t) \ge \tilde{x}$. Следовательно, траектория не сможет снова попасть в режим 1 (так как в момент перехода $M = x$, а $M(t) \ge \tilde{x}$). Таким образом, на оптимальной траектории невозможны переключения между режимами вида $1 \to 2 \to 1$.

Покажем, что траектория не может находиться всегда в режиме 2 при достаточно больших T. Рассмотрим траекторию, запущенную из (x_0, x_0). Если $\hat{t}$ - момент времени, в который $x(\hat{t}) = 0$, то $\hat{t}$ - решение уравнения

$$\frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1-\alpha)(r_L + 1/\theta)}{\Delta - \alpha r_L} x_0 + x_0 = \frac{S}{r_L - \gamma} e^{-(r_L - \gamma)t} - \frac{(1-\alpha)(r_L + 1/\theta)}{\Delta - \alpha r_L} x_0 e^{-\frac{\Delta - \alpha r_L}{1-\alpha} t}.$$

При $t = 0$ левая часть больше правой. Если $\Delta - \alpha r_L < 0$, то правая часть стремится к $+\infty$ при $t \to \infty$. Если $\Delta - \alpha r_L > 0$, левая часть меньше 0 (так как $x_0 \ge \tilde{x}$), а правая часть стремится к 0 при $t \to \infty$. В обоих случаях из непрерывности функции следует существование решения данного уравнения. Следовательно, при $x_0 \ge \tilde{x}$ траектория, запущенная из (x_0, x_0) пересекает $x = 0$. Пусть $x_0 > \tilde{x}$ и существует траектория (x_1, M_1) такая, что $M_1(t) > x_1(t)$, $x_1(0) = x_0, x_1(T_1) = 0$. Рассмотрим управление $M_2(t)$, которое изменяется согласно (2.3.6) и для которого $M_2(0) > M_1(0)$. В этом случае $M_2(t) > M_1(t)$, следовательно, $x_1(t) > x_2(t)$. Тогда $\exists T_2 :\ x_2(T_2) = 0$ и $T_2 < T_1$. Таким образом, случай, когда траектория всегда находится в режиме 2, возможен только при $T < T_{max}$, где T_{max} - время жизни траектории, стартующей из точки $(x, M) = (x_0, x_0)$. Пусть $x_0 < \tilde{x}$ и существует траектория (x_3, M_3) такая, что $M_3(t) > x_3(t)$, $x_3(0) = x_0, x_3(T_3) = 0$. Рассмотрим траекторию (x_4, M_4), стартующую из точки $(\tilde{x}, \tilde{x})$ и пересекающую $x = 0$ в момент времени $t = T_4$. В силу того, что $x_0 < \tilde{x}$ и фазовые траектории не пересекаются, $M_4(T_4) > M_3(T_3)$. Тогда траектория может находиться всегда в режиме 2 только при $T \le \ln(M_4(T_4)/x_0)/((r_L - \Delta)/(1-\alpha) - \gamma)$. Следовательно, при достаточно больших T возможны только траектории вида режимы $2 \to 1 \to$ 2 и режимы $1 \to 2$.

Пусть траектория начинается в режиме 2 и при $t = t_2$ переходит в режим 1. Докажем ограниченность t_2 по T. В 2-м режиме $M > x$. Тогда $M(0) > x_0$. В момент времени t_2 выполнены $M(t_2) = x(t_2)$, $x(t_2) \le \tilde{x}$ (при $x > \tilde{x}$ переход из режима 2 в режим 1 невозможен в силу отрицательности производной на границе $\hat{\varphi}(x)$). Таким образом, выполнены $M(0) \ge x_0, M(t_2) \le \min(x_0, \tilde{x}), \dot{M} = ((r_L - \Delta)/(1-\alpha) - \gamma)M$. Тогда время нахождения в режиме 2 ограничено сверху: $t_2 \le \ln(\tilde{x}/\min(x_0, \tilde{x}))/((r_L - \Delta)/(1-\alpha) - \gamma)$.

Из условия трансверсальности следует существование $t_3 > 0$ такого, что для всех $t \in [t_3, T]$ траектория находится в режиме 2. Докажем равномерную ограниченность $T - t_3$ по T. В режиме 1 выполнено $x(t) \le \max\left(x(t_2), S\theta/(\gamma\theta+1)\right) \le \max\left(\tilde{x}, S\theta/(\gamma\theta+1)\right) = x_{max}$. Выпустим траекторию из $(x, M) = (x_{max}, x_{max})$. В силу того, что $x_{max} \ge \tilde{x}$, траектория пересекает $x = 0$ в точке $(0, M_{max})$. Так как фазовые траектории не пересекаются, все траектории, начинающиеся в точке (x, x), где $\tilde{x} \le x \le x_{max}$ будут пересекать $x = 0$ в точке $(0, M)$, где $M \le M_{max}$. Кроме того, в силу возрастания $M(t)$ во 2-м режиме $M > \tilde{x}$. Следовательно, выполнена оценка $T - t_3 \le (1-\alpha)\ln(M_{max}/\tilde{x})/(r_L - \Delta - (1-\alpha)\gamma)$.

Таким образом, суммарное время нахождения траектории во 2-м режиме $t_2 + T - t_3$ равномерно ограничено сверху по T, и при увеличении T траектория будет все дольше находиться в режиме 1.

Система (2.3.4) имеет неподвижную точку $(\hat{x},\hat{\varphi}) = \left(S\theta/(\gamma\theta+1), \alpha\hat{x}^{\alpha-1}/(\Delta+(1-\alpha)\gamma+1/\theta)\right)$. При $r_L > \Delta+(1-\alpha)\gamma$ неподвижная точка находится в области $x > 0$, $\varphi \ge \alpha\theta x^{\alpha-1}/(r_L\theta+1)$. Локальная устойчивость решений (2.3.4) определяется с помощью характеристических чисел матрицы коэффициентов, получаемой при линеаризации системы в окрестности $(\hat{x},\hat{\varphi})$. В результате можно показать, что собственные числа равны $-(\gamma+1/\theta)$ и $\Delta+1/\theta+\gamma(1-\alpha)$, и эти собственные числа разного знака. Следовательно, неподвижная точка $(\hat{x},\hat{\varphi})$ является седлом. Неустойчивой сепаратрисой седла является $x=\hat{x}$. Устойчивую сепаратриса седла находится в утверждении 2.3.4.

Для того, чтобы траектория в момент времени t_3 перешла в режим 2 необходимо, чтобы траектория $(x(t),\varphi(t))$ находилась ниже $(x,\varphi_{us}(x))$. Однако сепаратриса $\varphi_{us}(x)$ пересекается с кривой $\hat{\varphi}(x)$ в точке x_2 (*Утверждение 2.3.2*). Значит траектория при $x_0 < x_2$ должна начинаться в режиме 2. Существование такой траектории следует из *Утверждение 2.3.3*. При $T \to +\infty$ траектория будет "прижиматься" к сепаратрисе. Значит при $T \to +\infty$ точка перехода из режима 2 в режим 1 будет стремиться к x_2. Отсюда следует, что $t_2 = \tau_2(x_0) + O(1/T)$ ■

Формулировка задачи (2.3.2) с бесконечным временным горизонтом вызывает трудности в связи с наличием у задачи с конечным горизонтом условия на правом конце $x(T) \ge 0$. Для корректной постановки задачи требуется ввести такие ограничения на $x(t)$, чтобы решение задачи с бесконечным горизонтом являлось пределом решений конечных задач. Оказывается, таким ограничением является $x(t) \ge -S/(r_L-\gamma)$ (доказательство сходимости решения приводится ниже). Тогда формулировка задачи с бесконечным горизонтом планирования выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&J = \int_0^{+\infty} M^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \to \max \\
&\dot{x} = S - (r_L + 1/\theta)M + (r_L - \gamma)x, \\
&M \ge 0, M \ge x, x(0) = X_0, x \ge -S/(r_L - \gamma).
\end{aligned} \tag{2.3.12}
$$

Множество $[-S/(r_L-\gamma), +\infty]$ является множеством ликвидных состояний.

Определение. *Ликвидным состоянием задачи* (2.3.12) *будем называть такие* x, *для которых существует допустимая траектория, попадающая в целевое множество* $\{x \ge 0\}$ *за конечное время.*

Теорема 2.3.6. *Решение задачи (2.3.12) существует тогда и только тогда, когда*

$$
\Delta > \alpha\gamma, r_L > \gamma. \tag{2.3.13}
$$

Доказательство: Сначала докажем достаточность. Согласно [55] для существования решения в задаче с бесконечным горизонтом необходимо потребовать равномерную по всем допустимым траекториям сходимость функционала, т.е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists T = T(\varepsilon) : \forall T'' > T' > T, \forall (x, C, L, M)$, где (x, C, L, M) - допустимая четверка,

$$
\int_{T'}^{T''} M^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt < \varepsilon. \tag{2.3.14}
$$

В силу $M \ge x$ выполнено неравенство: $\dot{x} \le S - (\gamma + 1/\theta)M$. Обозначим $\sigma = (\Delta - \alpha\gamma)/2$, $y = (x + S/(r_L - \gamma))e^{-((\Delta-\sigma)/\alpha - \gamma)t}$. Заметим, что $y \ge 0$, $\sigma > 0$ и $(\Delta - \sigma)/\alpha - \gamma > 0$, а также выполнено неравенство

$$
\dot{y} \le (\gamma - (\Delta - \sigma)/\alpha)y + Se^{-((\Delta-\sigma)/\alpha-\gamma)t} - (\gamma + 1/\theta)u,
$$

где $u = Me^{-((\Delta-\sigma)/\alpha-\gamma)t}$. Так как $y \ge 0$ и $\gamma - (\Delta - \sigma)/\alpha < 0$, то $\dot{y} \le Se^{-((\Delta-\sigma)/\alpha-\gamma)t} - (\gamma + 1/\theta)u$. Тогда

$$
y(T) - y(0) \le \frac{\alpha S}{\Delta - \sigma - \alpha\gamma} - (\gamma + 1/\theta)\int_0^T u dt.
$$

Учитывая, что $y(0) = X_0 + S/(r_L - \gamma)$, а $y(T) \ge 0$ и $u \ge 0$, получим

$$
0 \le \int_0^{+\infty} u dt \le \frac{\theta}{\gamma\theta + 1}\left(X_0 + \frac{S}{r_L - \gamma} + \frac{\alpha S}{\Delta - \sigma - \alpha\gamma} \right).
$$

Из полученного неравенства и неравенства Гельдера следует (2.3.14).

Докажем необходимость. Пусть $\Delta-\alpha\gamma<0$. Тогда рассмотрим управление $M=x, L=0$. В этом случае $\dot{x}=S-(\gamma+1/\theta)x$ и $x(t)\ge X_{\min}=\min\left(X_0, S\theta/(\gamma\theta+1)\right)$. Отсюда следует, что функционал расходится, и, следовательно, задача не имеет решения.

Пусть $r_L<\gamma$. Рассмотрим такую траекторию для задачи (2.3.1): пусть домашние хозяйства в момент времени $t=0$ берут кредит $L(0)=S/(r_L-\gamma)(1-\exp((r_L-\gamma)T))$ и дальше погашают его за счет заработной платы, то есть $H_L(t)=-S\exp(\gamma t)$. Будем считать, что $C(t)=M(t)/\theta$. Тогда количество наличных денег в этом случае меняется согласно закону $\dot{M}=-M/\theta$, и функционал расходится при $T\to\infty$.■

Для построения решения (2.3.12) будем искать функцию Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ) $W(x,t)$ в виде $W(x,t)=V(x)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}$. Тогда уравнение ГЯБ выглядит так:

$$(\Delta-\alpha\gamma)V(x)=\max_{M\ge\max(x,0)}\left\{M^{\alpha}+\frac{dV}{dx}\left(S+(r_L-\gamma)x-(r_L+1/\theta)M\right)\right\}. \qquad (2.3.15)$$

В качестве претендента на решение уравнения ГЯБ рассмотрим функцию цены, получаемую при подстановке в максимизируемый функционал (2.3.12) управления, соответствующего магистральной траектории задач с конечным временным горизонтом. Так, для случая $r_L<\Delta-(1-\alpha)/\theta$ магистралью является функция $\tilde{M}(x)=\left(x+\dfrac{S}{r_L-\gamma}\right)/a.$ Тогда

функция цены будет равна $\tilde{V}(x)=\dfrac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\left(\dfrac{S}{r_L-\gamma}+x\right)^{\alpha}(1/a)^{\alpha}$.

Теорема 2.3.7. *Пусть* $r_L<\Delta-(1-\alpha)/\theta$ *и выполнены условия* (2.3.13). *Тогда задача* (2.3.12) *имеет решение в виде синтеза* $M(x)=\tilde{M}(x)$. *Функция цены имеет вид* $V(x)=\tilde{V}(x)$.

Доказательство: проверим выполнение условий теоремы верификации из [56]. Подставим $V(x)$ в уравнение ГЯБ. Максимум достигается при $M=\tilde{M}$. Функция ГЯБ $V(x)$ при подстановке в уравнение ГЯБ обращается в равенство:

$$\max_{M\geq\max(x,0)}\left\{M^{\alpha}+\frac{dV}{dx}\left(S+(r_L-\gamma)x-(r_L+1/\theta)M\right)\right\}=(1-\alpha)\tilde{M}^{\alpha}+$$

$$+(S+(r_L-\gamma)x)\frac{\alpha\theta}{r_L\theta+1}\tilde{M}^{\alpha-1}=\tilde{M}^{\alpha-1}\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{r_L\theta+1}\left(x+\frac{S}{r_L-\gamma}\right)=(\Delta-\alpha\gamma)V$$

Таким образом, функция $V(x)$ удовлетворяет уравнению ГЯБ. Для завершения доказательства необходимо проверить, что траектория $x(t)$ при управлении $M=\tilde{M}$ удовлетворяет фазовому ограничению $x\geq S/(r_L-\gamma)$. Производная переменной x равна

$$\dot{x}=S+(r_L-\gamma)x-(r_L+1/\theta)\tilde{M}=\left(x+S/(r_L-\gamma)\right)(r_L-\Delta-(1-\alpha)\gamma)/(1-\alpha)$$

Так как $x_0>S/(r_L-\gamma)$, то $x(t)>S/(r_L-\gamma)$. ■

Теорема 2.3.8. *Пусть* $\Delta-(1-\alpha)/\theta<r_L<\Delta+(1-\alpha)\gamma$ *и выполнены условия* (2.3.13). *Тогда задача* (2.3.12) *имеет решение в виде синтеза:*

$$M(x)=\begin{cases}\left(x+\dfrac{S}{r_L-\gamma}\right)\dfrac{(\Delta-\alpha r_L)\theta}{(1-\alpha)(1+r_L\theta)}, & x\leq x_1,\\ x, & x>x_1,\end{cases}$$

Функция цены имеет вид

$$V(x)=\begin{cases}\tilde{V}(x), & x\leq x_1.\\ \displaystyle\int_0^{\tau_1(x)}\left[\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}(1-e^{-(\gamma+1/\theta)t})+xe^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt+\tilde{V}(x_1)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_1(x)}, & x>x_1.\end{cases}$$

Доказательство. При $x\leq x_1$ функция $V(x)=\tilde{V}(x)$. Доказательство факта, что $V(x)$ удовлетворяет уравнению ГЯБ при $x\leq x_1$, не отличается от доказательства теоремы 2.3.7. При $x>x_1$ производная функции ГЯБ равна

$$\frac{dV}{dx}=(x_1^{\alpha}-(\Delta-\alpha\gamma)\tilde{V}(x_1))e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_1(x)}\tau_1'(x)+\alpha\int_0^{\tau_1(x)}\overline{x}(t)^{\alpha-1}e^{-(\Delta+(1-\alpha)\gamma+1/\theta)t}dt, \qquad (2.3.16)$$

где $\overline{x}(t)=S\theta/(\gamma\theta+1)(1-\exp(-(\gamma+1/\theta)t))+x\exp(-(\gamma+1/\theta)t)$. Гладкость функции $V(x)$ следует из следующего равенства:

$$\frac{dV}{dx}(x_1+0)=(x_1^{\alpha}-(\Delta-\alpha\gamma)\tilde{V}(x_1))=\frac{d\tilde{V}(x_1)}{dx}(S-((\gamma+1/\theta))\tau_1'(x_1)=\frac{d\tilde{V}(x_1)}{dx}=\frac{dV}{dx}(x_1-0)$$

Преобразуем интеграл в выражении (2.3.16) с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{(\gamma+1/\theta)x-S}\left(\left(\frac{\alpha(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))}{(\Delta-\alpha r_L)}-1\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_1}x_1^\alpha+x^\alpha-(\Delta-\alpha\gamma)\int_0^{\tau_1}\overline{x}(t)^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt\right)$$

Пусть $dV/dx-\alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)=0$. Производная этого выражение по x равна:

$$\alpha x^{\alpha-1}+\frac{(\Delta-\alpha\gamma)^2}{x(\gamma+1/\theta)-S}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}x_1^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_1}-\alpha(\Delta-\alpha\gamma)\int_0^{\tau_1}\overline{x}(t)^{\alpha-1}e^{-(\Delta+\gamma(1-\alpha)+1/\theta)t}dt-$$

$$-\alpha^2\frac{\gamma+1/\theta}{r_L+1/\theta}x^{\alpha-1}-\alpha x^{\alpha-2}\frac{S(1-\alpha)}{r_L+1/\theta}$$

Выразим интеграл в этом выражении через равенство (2.3.16), в котором левая часть равна $\alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)$:

$$\alpha x^{\alpha-1}\left(1-\frac{\Delta-\alpha\gamma}{r_L+1/\theta}\right)+\frac{e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_1}}{x(\gamma+1/\theta)-S}x_1^\alpha-\alpha^2\frac{\gamma+1/\theta}{r_L+1/\theta}x^{\alpha-1}-\alpha x^{\alpha-2}\frac{S(1-\alpha)}{r_L+1/\theta}$$

При $x>x_1$ это выражение положительно ($x>x_1>S(1-\alpha)/(r_L+(1-\alpha)/\theta-\Delta)$ и $x>x_1>S\theta/(\gamma\theta+1)$ при $r_L<\Delta+(1-\alpha)\gamma$). Заметим, что $dV/dx=\alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)$ при $x=x_1$. Следовательно, при $x>x_1$ производная функции цены больше, чем $\alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)$. Это означает, что максимум будет достигаться при $M=x$.

При управлении $M=x$ уравнение ГЯБ записывается как

$$(\Delta-\alpha\gamma)V(x)=x^\alpha+\frac{dV}{dx}(S-(\gamma+1/\theta)x).$$

Подставим вместо dV/dx выражение (2.3.16) и проинтегрируем интеграл по частям. В результате получим $(\Delta-\alpha\gamma)V(x)=(\Delta-\alpha\gamma)\tilde{V}(x_1)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_1}+(\Delta-\alpha\gamma)\int_0^{\tau_1}\overline{x}^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt$. Данное выражение является тождеством. Таким образом, $V(x)$ удовлетворяет уравнению ГЯБ

■

Теорема 2.3.9. *Пусть* $r_L>\Delta+(1-\alpha)\gamma$ *и выполнены условия* (2.3.13). *Тогда задача* (2.3.12) *имеет решение в виде синтеза:*

$$M(x)=\begin{cases}x_2e^{((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_2(x)}, & x\le x_2,\\ x, & x>x_2\end{cases}$$

Функция цены имеет вид

$$V(x)=\int_{x_2}^{x}\psi(y)dy+\frac{1}{\Delta-\alpha\gamma}\left[(1-\alpha)x_2^{\alpha}+\frac{\alpha\theta x_2^{\alpha}(r_L-\gamma+S/x_2)}{1+r_L\theta}\right], \qquad (2.3.17)$$

где

$$\psi(y)=\begin{cases}\alpha\theta x_2^{\alpha-1}e^{-(\Delta-r_L+(1-\alpha)\gamma)\tau_2(y)}/(1+r_L\theta), & y\le x_2,\\ \alpha\int_0^{\infty}\left(\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}+\left(y-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right)^{\alpha-1}e^{-(\Delta+1/\theta+(1-\alpha)\gamma)t}dt, & y>x_2.\end{cases}$$

Доказательство. Гладкость функции $V(x)$ следует из определения функции $\psi(y)$ и точки x_2. Пусть $x<x_2$. Через точку $(x_2,\hat{\varphi}(x_2))$ проходит устойчивая сепаратриса системы (2.3.4), и траектория, двигающаяся по ней, стремится к точке $(\hat{x},\hat{\varphi})$, которая лежит в области $\varphi>\alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)$. Значит производная системы (2.3.6) вдоль кривой $\varphi-\hat{\varphi}(x)=0$ положительна при $x=x_2$, а следовательно, положительна при $x\le x_2$. Тогда производная системы (2.3.11) вдоль кривой $x-y=0$ отрицательна при $x\le x_2$. Учитывая, что $x(\tau_2)=y(\tau_2)$, получим, что $x(t)\le y(t)$ при $x\le x_2$. Следовательно, $x\le x_2\exp(((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_2(x))$, и максимум в функции ГЯБ будет достигаться при $M=x_2\exp(((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_2(x))$.

Рассмотрим функцию

$$y(t)=\left(\frac{S}{r_L-\gamma}+x_2-x_2\frac{(1+r_L\theta)(1-\alpha)}{\theta(\Delta-\alpha r_L)}\right)e^{(\gamma-r_L)t}+x_2\frac{(1+r_L\theta)(1-\alpha)}{\theta(\Delta-\alpha r_L)}e^{((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)t}-\frac{S}{r_L-\gamma}$$

Из доказательства *Утверждение 2.3.3* следует, что $y(t)$ строго возрастает. Тогда в интеграле из (17) можно перейти к интегрированию по переменной t с помощью замены $y=y(t)$.

Из *Утверждение 2.3.3* следует, что $y(\tau_2)=x$. Подставим в правую часть уравнения ГЯБ вместо x выражение $y(\tau_2)$ и приведем подобные члены. В результате получим, что левая часть уравнения ГЯБ равна правой.

Рассмотрим случай $x\ge x_2$. В этом случае производная dV/dx равна

$$\frac{dV}{dx}=\alpha\int_0^\infty\left(\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}+\left(y-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right)^{\alpha-1}e^{-(\Delta+1/\theta+(1-\alpha)\gamma)t}dt.$$

Сделаем в интеграле замену $p=\exp(-(\gamma+1/\theta)t)$:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\alpha\theta}{1+\gamma\theta}\int_0^1\left(px+(1-p)\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)^{\alpha-1}p^{\theta(\Delta-\alpha\gamma)/(1+\gamma\theta)}dp.$$

Из доказательства *Утверждение 2.3.3* следует, что при $x>x_2$ данное выражение больше, чем $\alpha\theta x^{\alpha-1}/(r_L\theta+1)$. Тогда максимум в функции ГЯБ будет достигаться при $M=x$.

Для того, чтобы показать, что $V(x)$ удовлетворяет уравнению ГЯБ необходимо проинтегрировать выражения слева и справа по частям. ■

Экономическая интерпретация решения

Полученные результаты допускают содержательную интерпретацию. Соотношение коэффициента дисконтирования домашних хозяйств и параметров экономической конъектуры разбивает население на три слоя. Экономические характеристики каждого из этих слоев описываются утверждениями:

Утверждение 2.3.5. *Пусть выполнены условия* (2.3.13). *Тогда благосостояние* x *на оптимальной траектории при* $r_L<\Delta+(1-\alpha)\gamma$ *уменьшается со временем, а при* $r_L>\Delta+(1-\alpha)\gamma$ *стремится к величине* $S\theta/(\gamma\theta+1)$.

Утверждение 2.3.6. *Пусть выполнены условия* (2.3.13). *Назовем величину* $P=C+r_LL$ *совокупными расходами домашнего хозяйства. Тогда при* $r_L<\Delta+(1-\alpha)\gamma$ *доля потребления* C *в совокупных расходах неограниченно убывает, а при* $r_L>\Delta+(1-\alpha)\gamma$*, начиная с некоторого момента времени, доля потребления равна 1.*

Доказательство состоит в подстановке синтеза управления в уравнение для x.

Домашние хозяйства в зависимости от коэффициента дисконтирования могут иметь три различных варианта поведения:

- При выполнении соотношения $\Delta>r_L+(1-\alpha)/\theta$ домашние хозяйства всегда кредитуются. Домашние хозяйства, коэффициент дисконтирования которых удовлетворяет этому соотношению, условно назовем бедными. У этого слоя населения недостаточно доходов, чтобы поддерживать потребление на приемлемом для них уровне, поэтому они вынуждены привлекать заемные средства для обеспечения своих расходов. В результате этого бедный слой населения попадает в долговую яму (благосостояние убывает, а все доходы тратятся на погашение кредита).

- При выполнении соотношения $r_L-(1-\alpha)\gamma<\Delta<r_L+(1-\alpha)/\theta$ домашние хозяйства могут как привлекать кредиты, так и жить на собственные средства. С течением времени они также попадают в долговую яму. Данный слой соответствует малообеспеченному слою населения, который в состоянии поддерживать необходимый уровень потребления в краткосрочном периоде времени, но в долгосрочной перспективе в отсутствии финансовой помощи становится бедным.

- При выполнении соотношения $\Delta<r_L-(1-\alpha)\gamma$ домашние хозяйства могут как брать кредиты, так и расходовать только собственные средства. При любых начальных условиях x_0 они расплачиваются с кредитными обязательствами за ограниченный промежуток времени, после чего уже не привлекают заемные средства. Такое поведение говорит о том, что этот слой населения является самодостаточными, и кредиты ему требуются только для того, чтобы быстрее вывести свой уровень потребления к некоторому оптимальному значению. Этот слой населения обладает устойчивым потребительским поведением, поэтому с точки зрения теории стратификации соответствует среднему классу.

Таким образом, коэффициент дисконтирования является параметром, отражающим принадлежность домашнего хозяйства к тому или иному классу населения. Кроме того, модель (2.3.1) позволяет оценить влияние инфляции на население: увеличение инфляции i приводит к смещению распределения эффективного коэффициента дисконтирования $\Delta=\delta+\alpha i$

вправо, что в рамках модели соответствует обеднению населения (другими словами, при увеличении инфляции будет увеличиваться доля бедного слоя населения).

2.4 Моделирование предложения сбережений в модели рамсеевского типа в отсутствии кредитования

Рассмотрим репрезентативное домашнее хозяйств, то есть домашнее хозяйство, которое ведет себя рационально и объясняет совокупное поведение домашних хозяйств. Домашнее хозяйство обладает активами двух типов - наличными деньгами $M(t)$ и сбережениями $D(t)$. Будем считать, что заработную плату $S(t)$ население получает исключительно наличными, в то время как дивиденды по депозитам $r_D D(t)$ начисляются на сберегательный счет. Величина r_D обозначает процентную ставку по депозитам населения.

Имеющиеся средства домашнее хозяйство направляет на текущее потребление. Кроме того, домашнее хозяйство может изменять объем наличных денег, вкладывая их в сбережения $H_D(t)$ (или снимая их, если $H_D(t)$ отрицательно). Тогда количество наличных денег, депозитов и кредитов домашнего хозяйства изменяется со временем следующим образом:

$$\dot{M} = S(t) - C(t) - H_D(t)$$
$$\dot{D} = r_D D(t) + H_D(t)$$

Будем считать, что для обеспечения непрерывности потребительских расходов $C(t)$ необходим запас денежных средств:

$$C(t) \le M(t)/\theta.$$

Таким образом, распределение средств домашних хозяйств будет описываться решением следующей задачи оптимального управления в непрерывном времени:

$$J = \int_0^T C(t)^{\alpha} e^{-\Delta t} dt \to \max_{C,M}$$

$$\dot{x} = S(t) - C(t) + r_D(x(t) - M(t)), \qquad (2.4.1)$$

$$x \geq M \geq \theta C \geq 0,$$

$$x(0) = X_0,$$

где $x = M + D$ благосостояние домашних хозяйств. Аналогично предыдущему разделу будем считать, что домашнее хозяйство прогнозирует экспоненциальный рост заработной платы $S(t)$ с темпом γ, т.е. $S(t) = Se^{\gamma t}$.

Теорема 2.4.1. *Решение задачи* (2.4.1) *существует.*

Доказательство:

Воспользуемся теоремой существования решения, приведенной в [55]:

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ x(t_0) = a \end{cases}$$

$$J = \int_{t_0}^{T} f^0(x,u,t)dt \to \inf_{u \in U}$$

Пусть выполнены следующие предположения:

1) *Функция* $f(x,u,t)$ *– непрерывна по паре* (x,t) *и линейна по* u.

2) U *– выпуклый компакт*

3) *Множество* $\mathrm{M}(t) = \{x(t) \mid \exists u(\cdot), \textit{которое переводит}\, x(t_0)\, \textit{в}\, x(t)\}$ *замкнуто для любого фиксированного t.*

4) *Функция* $f(x,u,t)$ *удовлетворяет условию Филиппова, то есть* $(x, f(x,u,t) \leq C(|x|^2 + 1)$

5) *Функция* $f^0(x,u,t)$ *непрерывна по* (x,u,t) *и выпукла по* u.

Пусть при сделанных предположениях существует хотя бы одна пара (x,u), такая что $J(x,u) < +\infty$. *Тогда существует* (x^0, u^0), *на которой функционал достигает своего минимального значения.*

Проверим выполнение этих условий для задачи

$$\begin{cases} -\int\limits_0^T \frac{(u(t)x(t))^\alpha}{\theta^\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \to \min, \\ \frac{dx}{dt} = (r_D - \gamma)x + S - (1 + r_D\theta)\frac{ux}{\theta}, \\ 0 \le u \le 1, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Здесь выполнена замена $M = ux$

Очевидно, что $f(x,u,t) = (r_D - \gamma)x + S - (1 + r_D\theta)\frac{ux}{\theta}$ непрерывна по x,t и линейна по u; $U = [-1,1]$ – выпуклый компакт. Функция $f^0(x,u,t) = -\frac{(u(t)x(t))^\alpha}{\theta^\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}$ непрерывна и выпукла по u при $\alpha \in (0,1)$. Условие Филиппова также выполняется:

$$(x, f(x,u,t) \le \left(|r_D - \gamma| + \frac{1 + r_D\theta}{\theta} \right) |x|^2 + S|x| < C(|x|^2 + 1)$$

$\mathrm{M}(t)$ замкнуто в силу линейности системы по x,u.

Допустимое управление в этой задаче существует: для этого достаточно взять управление u=1 на отрезке [0,T].

Таким образом, задача удовлетворяет всем условиям теоремы существования оптимального управления. Следовательно, в этой задаче существует решение.

Утверждение 2.4.1. *На оптимальной траектории* $M_*(t) = \theta C_*(t)$ $\forall t \in [0,T]$.

Доказательство. Пусть $M_*(t) > \theta C_*(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$. В этом случае можно взять в качестве управления на отрезке $t \in [t_1, t_2]$ функции $\tilde{M} = (r_D M_* + C_*)/(r_D + 1/\theta)$, $\tilde{C} = C_* + r_D(M_* - \tilde{M})$, вне отрезка $[t_1, t_2]$ управление остается тем же самым. Данное управление является допустимым. При управлении $\tilde{M}, \tilde{C}$ траектория $x(t)$ останется прежней. Однако $\tilde{C} \ge C_*$ и $\tilde{C} \ne C_*$. Получили противоречие с оптимальностью управления M_*, C_*.

Тогда проведем нормировку задачи:

$$
\begin{aligned}
&J = \int_0^T M^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \to \max_M \\
&\frac{dx}{dt} = S + (r_D - \gamma)x - \left(r_D + \frac{1}{\theta}\right)M, \\
&x \ge M \ge 0, \\
&M(0) + D(0) = X_0.
\end{aligned}
\tag{2.4.2}
$$

Для решения задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина. В связи с тем, что задача имеет смешанное ограничение $M \le x$, сделаем замену $M = ux$ $(u \in [0,1])$, применим к ней принцип максимума Понтрягина, выпишем уравнения для фазовой и сопряженной переменной и «вернемся» обратно к управлению M.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T (u(t)x(t))^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \to \max_{0\le u\le 1} \\
&\tfrac{dx}{dt} = (r_D - \gamma)x + S - (1/\theta + r_D)ux, \\
&x(0) = x_0.
\end{aligned}
\tag{2.4.3}
$$

Теорема 2.4.2. *Для того, чтобы пара (u_*, x_*), допустимая для задачи (2.4.3), была ее решением, необходимо, чтобы существовала дифференцируемая функция $\varphi(t)$ такая, что управление u_* доставляет максимум функции Гамильтона*

$$H(x,u,\varphi,t) = [(ux)^{\alpha} + \varphi(S - (r_D + 1/\theta)ux + (r-\gamma)x)]e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} \tag{2.4.4}$$

при заданных x_*, ψ_*, функция $\psi(t)$ является решением сопряженной системы $\dot{\varphi} = (\Delta - \alpha\gamma)\varphi - \partial H/\partial x$ и удовлетворяет условию трансверсальности $\varphi(T) = 0$.

Рассмотрим поведение траекторий на фазовой плоскости. При $\varphi \le \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$ максимум гамильтониана достигается при $u = 1$ (или, если говорить об исходной задаче (2.4.2), то $M = x$). В этом случае траектория (x,φ) будет меняться согласно закону

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = S - (\gamma + 1/\theta)x, \\
&\dot{\varphi} = -\alpha x^{\alpha-1} + \varphi(\Delta + (1-\alpha)\gamma + 1/\theta).
\end{aligned}
\tag{2.4.5}
$$

Назовем данный режим режимом 1.

При $\varphi \geq \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$ максимум гамильтониана достигается при $u = [\varphi(r_D + 1/\theta)/\alpha]^{1/(\alpha-1)}/x$, что соответствует для задачи (2.4.2) $M = [\varphi(r_D + 1/\theta)/\alpha]^{1/(\alpha-1)} \leq x$. Аналогично подходу, примененному в предыдущем разделе, мы можем перейти к уравнению динамики не в терминах сопряженной переменной, а в терминах управления M. Тогда траектория меняется согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x} &= S - (r_D + 1/\theta)M + (r_D - \gamma)x, \\ \dot{M} &= -M((\Delta - r_D)/(1-\alpha) + \gamma). \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Введем обозначения

$$w_\xi = \frac{S}{\xi - \gamma}, \tag{2.4.7}$$

$$\kappa(\xi) = \frac{(1+\xi\theta)(1-\alpha)}{\theta(\Delta - \alpha\xi)}, \tag{2.4.8}$$

$$M_\xi(x) = \left(x + w_\xi\right)/\kappa(\xi), \tag{2.4.9}$$

$$V_1(x,\xi) = \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha\xi} M_1^\alpha(x,\xi), \tag{2.4.10}$$

$$x_\xi = \frac{w_\xi(\Delta - \alpha\xi)\theta}{1 - \alpha + \theta(\xi - \Delta)}, \tag{2.4.11}$$

$$\hat{x} = \frac{S\theta}{\gamma\theta + 1}, \tag{2.4.12}$$

$$b(x,\xi) = \frac{1+\xi\theta}{1+\gamma\theta} \int_0^1 \left(px + (1-p)\hat{x}\right)^{\alpha-1} p^{\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{\gamma\theta+1}} dp, \tag{2.4.13}$$

$$\tau_\xi(x) = \frac{\theta}{\gamma\theta + 1} \ln\left(\frac{x - \hat{x}}{x_\xi - \hat{x}}\right), \tag{2.4.14}$$

$$V_2(x,\tau) = \int_0^\tau \left[\hat{x} + (x - \hat{x})e^{-(\gamma + 1/\theta)t}\right]^\alpha e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} dt, \tag{2.4.15}$$

$$V_3(x,\xi) = V_2(x, \tau_\xi(x)) + V_1(x_\xi, \xi)e^{-(\Delta - \alpha\gamma)\tau_\xi(x)}, \tag{2.4.16}$$

$$\rho = \frac{\Delta + \gamma(1-\alpha) + 1/\theta}{\gamma + 1/\theta}, \tag{2.4.17}$$

$$g(x,y,\xi)=\left[\frac{x-\hat{x}}{y-\hat{x}}\right]^{-\rho}\left(\frac{\gamma\theta+1}{\xi\theta+1}y^{\alpha-1}+\int_y^x z^{\alpha-1}\left[\frac{z-\hat{x}}{y-\hat{x}}\right]^{\rho}\frac{dz}{z-\hat{x}}\right), \tag{2.4.18}$$

$$h(x,\tau,\xi)=\left(w_\xi+x-x\kappa(\xi)\right)e^{(\gamma-\xi)\tau}+x\kappa(\xi)e^{\left(\frac{\Delta-\xi}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau}-w_\xi. \tag{2.4.19}$$

Теорема 2.4.3. *Пусть* $r_D<\Delta-(1-\alpha)/\theta$, $\Delta>\alpha\max(\gamma,r_D)$. *Тогда для любого начального состояния* $x_0\ge 0$ *синтез оптимального управления* $M(x)=x$.

Доказательство: при выполнении условий теоремы производная вдоль кривой $\varphi=\alpha x^{\alpha-1}/(r_D+1/\theta)$ отрицательна:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha x^{\alpha-1}-(r_D+\frac{1}{\theta})\varphi\right)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}(S-(\gamma+\frac{1}{\theta})x)-\frac{1+r_D\theta}{\theta}((\Delta+\frac{1}{\theta}+(1-\alpha)\gamma)\varphi-\alpha x^{\alpha-1})=$$
$$=\alpha x^{\alpha-2}\left((\alpha-1)S+x(r_D-\Delta+\tfrac{1-\alpha}{\theta})\right).$$

Это означает, что фазовые траектории не могут перейти из режима 2 в режим 1. В то же самое время из условия на правом конце на сопряженную переменную $\varphi(T)=0$ следует, что траектория в терминальный момент времени находится в режиме 1. Следовательно, траектория всегда должна находиться в режиме 1.■

Обозначим решение уравнения $b(x_4,r_D)=x_4^{\alpha-1}$ как x_4.

Утверждение 2.4.2. *Пусть* $\Delta>\alpha\max(\gamma,r_D)$ *и* $\Delta-(1-\alpha)/\theta<r_D<\Delta+\gamma(1-\alpha)$. *Тогда* $\forall x>x_4$, *существует решение* $\tau_4>0$ *уравнения* $h(x_4,\tau_4,r_D)=x$.

Доказательство: *см.* [47].

Теорема 2.4.4. *Пусть* $\Delta-(1-\alpha)/\theta\le r_D\le\Delta+(1-\alpha)\gamma$, $\Delta>\alpha\max(\gamma,r_D)$. *Тогда для любого* $x_0\ge 0$ *найдутся достаточно большой временной горизонт* T *и момент времени* t_1 *такие, что:*

1. при $x_0\le x_4$ $t_1=0$, *при* $x_0>x_4$ $t_1\le\tau_4(x_0)+O(1/T)$.

2. если $t_1>0$, *то решение* $x(t)$ *задачи* (2.4.2) *находится в режиме 2 при* $t\in[0,t_1]$.

3. решение $x(t)$ *задачи* (2.4.2) *находится в режиме 1 при* $t\in[t_1,T]$.

Доказательство: подробное доказательство теоремы приводится в работе [57], здесь приведем только схему доказательства.

Неподвижная точка системы (2.4.5) при выполнении условий теоремы является седлом и находится в области $\varphi \le \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$. Согласно условию трансверсальности $\varphi(T) = 0$. Устойчивая сепаратриса седла (см. утв. 2.3.4)

$$\varphi_{us}(x_0) = \frac{\alpha\theta}{\gamma\theta+1}\int_0^1 \left(px_0 + (1-p)\frac{S\theta}{\gamma\theta+1} \right)^{\alpha-1} p^{\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{\gamma\theta+1}} dp$$

Для достижения точки $\varphi(T) = 0$ траектория должна всегда находиться ниже устойчивой сепаратрисы седла. Устойчивая сепаратриса седла пересекает кривую $\varphi = \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$ в точке $x = x_4$ (следует из определения точки). Следовательно, при $x < x_4$ оптимальная траектория будет стартовать в области 1 (при этом она будет находиться ниже устойчивой сепаратрисы), при $x > x_4$ траектория будет начинаться в области 2 и будет устроена таким образом, чтобы перейти в область 1 ниже устойчивой сепаратрисы. При неограниченном увеличении горизонта планирования траектория будет «прижиматься» к устойчивой сепаратрисе. ■

Теорема 2.4.5. *Пусть* $r_D > \Delta + (1-\alpha)\gamma$, $\Delta > \alpha\max(\gamma, r_D)$. *Тогда для любого* $x_0 \ge 0$ *найдутся достаточно большой временной горизонт* T *и момент времени* t_2, t_3 *такие, что:*

1. при $x_0 > x_{r_D}$ $t_2 = 0$, *в противном случае* $t_2 \le \tau_{rD}(x_0) + O(1/T)$.

2. если $t_2 > 0$, *то решение* $x(t)$ *задачи* (2.4.2) *находится в режиме 1 при* $t \in [0, t_2]$.

3. решение $x(t)$ *задачи* (2.4.2) *находится в режиме 2 при* $t \in [t_2, t_3]$.

4. решение $x(t)$ *задачи* (2.4.2) *находится в режиме 1 при* $t \in [t_3, T]$.

5. разница $T - t_3$ *равномерно ограничена.*

Доказательство:

В терминальный момент времени траектория должна находиться в режиме 2 (следует из условия трансверсальности).

Неподвижная точка системы (2.4.5) при выполнении условий теоремы является седлом и находится вне области $\varphi \le \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$. Неустойчивая сепаратриса седла $x = S\theta/(\gamma\theta+1)$. Это означает, что если траектория будет бесконечно долго находиться в области 1, то координата x будет стремиться $x = S\theta/(\gamma\theta+1)$, а φ либо к $+\infty$, либо $-\infty$. В первом случае траектория выйдет из области 1, во втором – не возможно выполнение условия трансверсальности. Следовательно, траектория может находиться в области 1 только ограниченный промежуток времени.

Покажем, что невозможны переключения между режимами вида 2-1-2. Если траектория попала в режим 1 из режима 2, то производная вдоль кривой $\varphi(x) = \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$ в этой точке отрицательна. Координата x траектории будет либо возрастать (в случае, если точка перехода левее $S\theta/(\gamma\theta+1)$), либо убывать (в случае, если точка перехода правее $S\theta/(\gamma\theta+1)$). В первом случае производная вдоль кривой $\varphi(x) = \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$ отрицательна (т.к.

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha x^{\alpha-1} - (r_D + \frac{1}{\theta})\varphi\right) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}(S - (\gamma + \frac{1}{\theta})x) - \frac{1+r_D\theta}{\theta}((\Delta + \frac{1}{\theta} + (1-\alpha)\gamma)\varphi - \alpha x^{\alpha-1}) =$$
$$= \alpha x^{\alpha-2}\left((\alpha-1)S + x(r_D - \Delta + \tfrac{1-\alpha}{\theta})\right).$$

), поэтому траектория, находясь в режиме 2, не сможет попасть на границу режимов 1-2. Во втором случае траектория будет всегда находиться правее $S\theta/(\gamma\theta+1)$, а производная вдоль кривой $\varphi(x) = \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$ отрицательна на всем луче $[S\theta/(\gamma\theta+1), +\infty)$. Следовательно, траектория останется навсегда в режиме 1 и не попадет в режим 2. Следовательно, переключение между режимами вида 2-1-2 невозможно.

Исходя из вышесказанного, при неограниченном увеличении временного горизонта траектория будет все дольше находиться в режиме 2. Покажем, что такая траектория существует. Система (2.4.6) имеет неподвижную точку вида неустойчивый узел (следует из условия теоремы). Собственные векторы системы (2.4.6) равны $(0,1)$ и $(r_D + 1/\theta, (\Delta - \alpha r_D)/(1-\alpha))$. Тогда система (2.4.6) имеет траекторию в виде прямой:

$$M(x)=\frac{\Delta-\alpha r_D}{(1-\alpha)(r_D+1/\theta)}\left(x+\frac{S}{r_D-\gamma}\right).$$

Заметим, что эта траектория будет всегда находиться в области $M<x$ при $x>x_{r_D}$ (следует из того, что x возрастает). Здесь x_{rD} получается как подстановка в формулу (2.4.11) $\xi=r_D$. Полученная траектория при $x<x_{r_D}$ находится вне области 2. Следовательно, при $x<x_{r_D}$ траектория должна находиться в области 1 и в окрестности $x\le x_4$ перейти в область 1. Таким образом, теорема доказана. ■

Для задачи (2.4.2) постановка задачи на бесконечном временном интервале не вызывает трудности, так как условие неотрицательности фазовой переменной выполняется автоматически:

$$\begin{gathered} J=\int_0^{+\infty} M^{\alpha}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt\to\max \\ \dot{x}=S-(r_D+1/\theta)M+(r_D-\gamma)x, \\ x\ge M\ge 0, x(0)=x_0. \end{gathered} \tag{2.4.20}$$

Решение для задачи с бесконечным горизонтом планирования получено в работе [47]. Выпишем результаты, полученные в этой работе:

Теорема 2.4.6. *Решение задачи* (2.4.20) *существует тогда и только тогда, когда* $\Delta>\alpha max\,(r_D,\gamma)$.

Теорема 2.4.7. *Пусть* $r_D\le\Delta-(1-\alpha)/\theta$ *и* $\Delta>\alpha max\,(r_D,\gamma)$. *Тогда синтез оптимального управления задачи* (2.4.20) *равен* $M(x)=x$, *функция цены* -

$$V(x)=\int_0^1\frac{1}{(\Delta-\alpha\gamma)}\left[\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}+\left(x-\frac{S\theta}{\gamma\theta+1}\right)y^{((\gamma\theta+1))/((\Delta-\alpha\gamma))}\right]^{\alpha}dy.$$

Теорема 2.4.8. *Пусть* $\Delta-\frac{1-\alpha}{\theta}\le r_D\le\Delta+(1-\alpha)\gamma$ *и* $\Delta>\alpha max\,(r_D,\gamma)$. *Тогда синтез оптимального управления задачи* (2.4.20)

$$M(x)=\begin{cases} x,\ x<x_4, \\ x_4e^{((\Delta-r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_4},\ x\ge x_4. \end{cases}$$

Функция цены

$$V(x)=\begin{cases} V_2(x,+\infty), & x\le x_4,\\ x_4^{\alpha}\dfrac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}e^{\alpha((\Delta-r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_4(x)}+\left(V_2(x_4,+\infty)-x_4^{\alpha}\dfrac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_4(x)}, & x>x_4, \end{cases}$$

Теорема 2.4.9. *Пусть* $r_D>\Delta+(1-\alpha)\gamma$, $\Delta>\alpha\max(\gamma,r_D)$. *Тогда синтез оптимального управления задачи* (2.4.20)

$$M(x)=\begin{cases} x,\ x<x_{r_D},\\ M_1(x,r_D),\ x\ge x_{r_D}. \end{cases}$$

Функция цены

$$V(x)=\begin{cases} V_3(x,r_D),\ x<x_{r_D},\\ V_1(x,r_D),\ x\ge x_{r_D}. \end{cases}$$

Таким образом, в зависимости от коэффициента дисконтирования домашние хозяйства распадаются на три класса, обладающих разными типами поведения:

1. В случае $r_D+(1-\alpha)/\theta<\Delta$ домашние хозяйства не сберегают.

2. Домашние хозяйства, коэффициент дисконтирования которых удовлетворяет соотношению $r_D+(1-\alpha)/\theta>\Delta>r_D-\gamma(1-\alpha)$, при достаточно большом начальном капитале вкладывают некоторый излишек средств в депозиты с целью увеличения будущего потребления. Несмотря на это, они «проедают» свои сбережения, после чего больше не сберегают.

3. Домашние хозяйства, коэффициент дисконтирования которых удовлетворяет соотношению $\Delta<r_D-\gamma(1-\alpha)$, вкладывают свои средства в депозиты с целью увеличения будущих доходов. При маленьком начальном капитале этому типу домашних хозяйств требуется какое-то время на накопление капитала, после чего они начинают сберегать. С течением времени доля заработной платы в доходах домашних хозяйств этой группы стремится к нулю, и все большая часть в доходах домашних хозяйств соответствует процентным выплатам по депозитам.

Таким образом, в зависимости от коэффициента дисконтирования поведение домашних хозяйств может быть устроено тремя различными способами. Первый тип домашних хозяйств никогда не вкладывается в депозиты. Такое поведение соответствует бедному слою. Второй тип домашних хозяйств рассматривает депозиты как временный источник дополнительных доходов, которой приводит к увеличению будущего потребления. Такое поведение соответствует поведению среднего слоя. Последняя группа рассматривает депозиты как долгосрочное вложение в активы, приносящее доход (богатый слой). Эти домашние хозяйства являются рантье: основным источником дохода у них являются дивиденды. Вообще говоря, в таком случае домашние хозяйства должны максимизировать не столько полезность потока потребления, сколько доходность портфеля активов, которыми они обладают.

Необходимо также добавить, что деление на классы согласно модели (2.4.1) отличается от деления на классы согласно модели (2.3.1): бедный слой в модели (2.3.1) попадает в долговую яму, в то время как в модели (2.4.1) домашнее хозяйство не может привлекать заемные средства; в связи с отсутствием возможности сберегать модель (2.3.1) не позволяет разделить домашние хозяйства со средним достатком от богатых домашних хозяйств.

2.5 Моделирование поведения домашних хозяйств в условиях несовершенного рынка кредитов-депозитов

Домашнее хозяйство обладает активами двух типов - наличными деньгами $M(t)$ и сбережениями $D(t)$. Имеющиеся средства домашнее хозяйство направляет на текущее потребление $C(t)$, выплаты процентов $r_L L(t)$ по имеющимся кредитам $L(t)$. Доходы домашнего хозяйства складываются из заработной платы $S(t)$ и дивидендов по депозитам $r_D D(t)$. Величины r_D и r_L обозначают процентную ставку по депозитам и кредитам соответственно. Предположим, что домашнее хозяйство прогнозирует экспоненциальный рост заработной платы $S(t)$ с темпом γ, т.е. $S(t) = Se^{\gamma t}$. Тогда капитал домашнего хозяйства $x = M + D - L$ изменяется со временем следующим образом:

$$\dot{x} = Se^{\gamma t} - C + Dr_D - r_L L, \qquad (2.5.1)$$

Для обеспечения непрерывности потребительских расходов $C(t)$ необходим запас денежных средств $C(t) \le M(t)/\theta.$ Величину θ назовем коэффициентом ликвидности. Также будем считать, что домашние хозяйства кредитуются таким образом, чтобы домашние хозяйства были в состоянии расплатиться со своими кредитными обязательствами. Ранее было показано, что в задаче с бесконечным горизонтом планирование данное условие эквивалентно условию $x \ge -S/(r_L - \gamma)$.

Домашнее хозяйство максимизирует дисконтированную с коэффициентом Δ полезность будущего потребления.

Аналогично предыдущим задачам можно показать, что на оптимальной траектории ограничение ликвидности будет равенством $M_*(t) = \theta C_*(t)$. Тогда задача распределения доходов домашних хозяйств запишется так:

$$\begin{gathered} J = \int_0^{+\infty} M^{\alpha} e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} dt \to \max \\ \dot{x} = S - (r_L + 1/\theta)M + D(r_D - r_L) + (r_L - \gamma)x, \\ D, M \ge 0, M + D \ge x, x(0) = x_0, x \ge -S/(r_L - \gamma). \end{gathered} \qquad (2.5.2)$$

Здесь x - фазовая переменная, и M, D - управления. Решение данной задачи было рассмотрено [58].

Теорема 2.5.1. *Решение задачи* (2.5.2) *существует тогда и только тогда, когда*

$$\Delta > \alpha \max(r_D, \gamma), r_L > \gamma, r_L \ge r_D. \qquad (2.5.3)$$

Доказательство:

Сначала докажем достаточность. Согласно [55] для существования решения в задаче с бесконечным горизонтом необходимо потребовать равномерную по всем допустимым траекториям сходимость функционала, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists T = T(\varepsilon): \forall T'' > T' > T, \forall (x, D, M)$, где (x, D, M) - допустимая пара,

$$\int_{T'}^{T''} M^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma})tdt < \varepsilon. \qquad (2.5.4)$$

В силу $M+D \geq x$ и $r_L \geq r_D$ выполнено неравенство:

$$\dot{x} \leq (r_D-\gamma)x + S - (r_D+1/\theta)M.$$

Обозначим $\sigma = (\Delta - \alpha \max(r_D, \gamma))/2$, $y = xe^{-((\Delta-\sigma)/\alpha-\gamma)t}$. Заметим, что $\sigma > 0$ и $(\Delta-\sigma)/\alpha - \gamma > 0$ и выполнено неравенство

$$\dot{y} \leq (r_D - (\Delta-\sigma)/\alpha)y + Se^{-((\Delta-\sigma)/\alpha-\gamma)t} - (r_D+1/\theta)u,$$

где $u = Me^{-((\Delta-\sigma)/\alpha-\gamma)t}$. Так как $r_D - (\Delta-\sigma)/\alpha < 0$, то $\dot{y} \leq Se^{-((\Delta-\sigma)/\alpha-\gamma)t} - (r_D+1/\theta)u$. Проинтегрируем это неравенство от 0 до T:

$$y(T) - y(0) \leq \frac{\alpha S}{\Delta - \sigma - \alpha\gamma} - (r_D + 1/\theta)\int_0^T udt.$$

Учитывая, что $y(0) = X_0$, а $y(T) \geq 0$ и $u \geq 0$, получим

$$0 \leq \int_0^{+\infty} udt \leq \frac{\theta}{r_D\theta+1}\left(X_0 + \frac{\alpha S}{\Delta-\sigma-\alpha\gamma} \right).$$

Используя полученное неравенство, можно доказать (2.5.4):

$$\int_{T'}^{T''} M^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma})tdt = \int_{T'}^{T''} u^{\alpha} e^{-\sigma t}dt \leq \left(\int_{T'}^{T''} udt \right)^{\alpha} \left(\int_{T'}^{T''} e^{-\sigma/(1-\alpha)t}dt \right)^{1-\alpha} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} udt \right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\sigma} \right)^{1-\alpha} e^{-\sigma T} \leq \left(\frac{\theta}{r_D\theta+1}\left(X_0 + \frac{\alpha S}{\Delta-\sigma-\alpha\gamma} \right) \right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\sigma} \right)^{1-\alpha} e^{-\sigma T}$$

Из этого неравенства следует, что при достаточно больших T неравенство (2.5.4) будет выполняться для любых T', T''. Таким образом, достаточность (2.5.3) для существования решения доказана.

Для доказательства необходимости условий (2.5.3) приведем контрпримеры, показывающие, что задача не имеет решений при нарушении хотя бы одного из условий (2.5.3).

Пусть $\Delta - \alpha\gamma < 0$. Тогда рассмотрим управление $M = x, L = D = 0$. В этом случае $\dot{x} = S - (\gamma + 1/\theta)x$ и $x(t) \geq X_{\min} = \min\left(X_0, \frac{S\theta}{\gamma\theta+1} \right)$. Тогда

$\int\limits_0^T M^\alpha e^{-(-\Delta-\alpha\gamma)t} \geq X_{\min}^\alpha \int\limits_0^T e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt$. Интеграл справа расходится при $T \to \infty$, и следовательно, задача не имеет решения.

Пусть $r_D > r_L$. Рассмотрим такую траекторию для задачи (2.5.2): пусть домашние хозяйства всегда поддерживают уровень кредитования в размере $L(t) = N$ и вкладывают эти деньги в депозиты $D(t) = N$. Тогда $M(t) = x(t)$ и благосостояние меняется согласно закону $\dot{x} = S + N(r_D - r_L) - (\gamma + 1/\theta)x$. При этом благосостояние никогда не станет отрицательной величиной, следовательно, выбранное управление является допустимым. Неограниченно увеличивая N, мы добьемся неограниченного увеличения функционала.

Пусть $\Delta - \alpha r_D < 0$. Тогда рассмотрим управление для задачи (2.5.2): $M = px$, $D = (1-p)x$, где p - некоторая постоянная величина, $p \in (0,1)$. Тогда $\dot{x} = S + (r_D(1-p) - \gamma - p/\theta)x$. Следовательно, $x(t) \geq X_0 e^{(r_D(1-p)-\gamma-p/\theta)t}$. Тогда

$$\int\limits_0^T M^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} \geq (pX_0)^\alpha \int\limits_0^T e^{(\alpha(r_D(1-p)-\gamma-p/\theta)-\Delta+\alpha\gamma)t}$$

Очевидно, что при достаточно малых значениях p степень экспоненты $-\Delta + \alpha r_D - \alpha p(r_D + 1/\theta)$ будет положительна, а следовательно, функционал будет расходиться при $T \to +\infty$.

Контрпример для случая $r_L < \gamma$ был уже приведен ранее в разделе, посвященном модифицированной модели Рамсея с отсутствием рынка депозитов.

Таким образом, при нарушении хотя бы одного из условий (2.5.3), функционал становится неограниченным. Следовательно, задача имеет решение тогда, и только тогда, когда выполнены (2.5.3). ■

Для построения решения (2.5.2) будем искать функцию Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ) $W(x,t)$ в виде $W(x,t) = V(x)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}$. Тогда уравнение ГЯБ выглядит так:

$$\max_{\substack{M+D\ge x,\\ M\ge 0, D\ge 0}} \left\{ M^{\alpha} + \frac{dV}{dx}(S-(r_L+1/\theta)M+(r_D-r_L)D+(r_L-\gamma)x) \right\} \qquad (2.5.5)$$

Далее приводится решение задачи (2.5.3). Для формулировки решения используются обозначения (2.4.7)-(2.4.19), введенные ранее.

Теорема 2.5.2. *Пусть* $r_D < r_L < \Delta-(1-\alpha)/\theta$ *и выполнены условия* (2.5.3). *Тогда задача* (2.5.2) *имеет решение в виде синтеза* $M(x)=M_{r_L}(x)$. *Функция цены* $V(x)=V_1(x,r_L)$. *(см. (2.4.10)).*

Доказательство: проверим выполнение условий теоремы верификации [56]. Функция $V_1(x,r_L)$ непрерывно-дифференцируемая. Подставим $V(x)$ в уравнение ГЯБ. Производная

$$\frac{dV_1(x,r_L)}{dx} = \frac{\alpha}{r_L+1/\theta}\left(x+\frac{S}{r_L-\gamma}\right)^{\alpha-1}\left[\frac{\theta(\Delta-\alpha r_L)}{(1+r_L\theta)(1-\alpha)}\right]^{\alpha-1}$$

неотрицательна. Максимум по M достигается при $M_{r_L}(x)>x$. Следовательно, максимум будет достигаться при $D=0$. Функция ГЯБ $V(x)$ при подстановке в уравнение ГЯБ обращается в равенство:

$$\max_{\substack{M+D\ge x,\\ M\ge 0, D\ge 0}} \left\{ M^{\alpha} + \frac{dV_1(x,r_L)}{dx}(S-(r_L+1/\theta)M+(r_D-r_L)D+(r_L-\gamma)x) \right\} = (1-\alpha)M_{r_L}^{\alpha}(x)+$$

$$+(S+(r_L-\gamma)x)\frac{\alpha\theta}{r_L\theta+1}M_{r_L}^{\alpha-1}(x) = M_{r_L}^{\alpha-1}(x)\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{r_L\theta+1}\left(x+\frac{S}{r_L-\gamma}\right) = (\Delta-\alpha\gamma)V_1(x,r_L)$$

Таким образом, функция $V_1(x,r_L)$ удовлетворяет уравнению ГЯБ. Для завершения доказательства необходимо проверить, что траектория $x(t)$ при управлении $M_{r_L}(x)$ удовлетворяет фазовому ограничению $x \ge S/(r_L-\gamma)$. Производная переменной x равна

$$\dot{x} = S+(r_L-\gamma)x-(r_L+1/\theta)M_{r_L}(x) = \left(x+S/(r_L-\gamma)\right)(r_L-\Delta-(1-\alpha)\gamma)/(1-\alpha)$$

Так как $x_0 > S/(r_L-\gamma)$, то $x(t) > S/(r_L-\gamma)$. ■

Теорема 2.5.3. *Пусть* $r_D < \Delta-(1-\alpha)/\theta < r_L < \Delta+\gamma(1-\alpha)$ *и выполнены условия* (2.5.3). *Тогда задача* (2.5.2) *имеет решение в виде синтеза:*

$$M(x)=\begin{cases} M_{r_L}(x), & x\le x_{r_L},\\ x, & x> x_{r_L}, \end{cases}$$

Функция цены имеет вид

$$V(x)=\begin{cases} V_1(x,r_L), & x\le x_{r_L}.\\ V_3(x,r_L), & x> x_{r_L}. \end{cases}$$

Замечание. При выполнении условий теоремы $x_{r_L}>x$. *Следовательно,* $\tau_{r_L}(x)$ *определена и неотрицательна при* $x\ge x_{r_L}$. *Кроме того,* $\tau_{r_L}(x)\to 0$ *при* $x\to x_{r_L}+0$.

Доказательство: покажем, что производная функции $V(x)$ неотрицательна. Если $x<x_{r_L}$, то

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\alpha}{r_L+1/\theta}\left(x+\frac{S}{r_L-\gamma}\right)^{\alpha-1}\left[\frac{\theta(\Delta-\alpha r_L)}{(1+r_L\theta)(1-\alpha)}\right]^{\alpha-1}$$

неотрицательна. Если $x>x_{r_L}$, то

$$\frac{dV}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\tau_{rL}(x)}\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt+V_1(x_{rL},r_L)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}(x)}\right)=$$

$$=\alpha\int_0^{\tau_{rL}(x)}\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt+\tau_{rL}'x_{rL}^{\alpha}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}(x)}-$$

$$-\tau_{rL}'(\Delta-\alpha\gamma)V_1(x_{rL},r_L)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}(x)}=\alpha\int_0^{\tau_{rL}(x)}\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt+ \qquad (2.5.6)$$

$$\tau_{rL}'e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}(x)}x_{rL}^{\alpha}(1-(1-\alpha)(\Delta-\alpha\gamma)/(\Delta-\alpha r_L)).$$

Заметим, что

$$1-\frac{(1-\alpha)(\Delta-\alpha\gamma)}{\Delta-\alpha r_L}=\frac{\alpha}{\Delta-\alpha r_L}(\Delta-r_L-(1-\alpha)\gamma)>0,$$

$\tau_{rL}'=\dfrac{\theta}{(\gamma\theta+1)(x-\hat{x})}>0$ (т.к. $x\ge x_{rL}\ge\hat{x}$ при выполнении условий теоремы).

Тогда dV/dx положительна.

Преобразуем интеграл в выражении (2.5.6) с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^{\tau_{rL}} \overline{x}(t)^{\alpha-1} e^{-(\gamma+1/\theta)t} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt = -\frac{1}{\alpha((\gamma+1/\theta)x-S)} \int_0^{\tau_{rL}} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} d\overline{x}(t)^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha((\gamma+1/\theta)x-S)} \left(x^{\alpha} - x_{rL}^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}} - (\Delta-\alpha\gamma) \int_0^{\tau_{rL}} \overline{x}(t)^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \right),$$

где $\overline{x}(t) = S\theta/(\gamma\theta+1)(1-\exp(-(\gamma+1/\theta)t)) + x\exp(-(\gamma+1/\theta)t)$. Тогда

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{(\gamma+1/\theta)x-S} \left(\left(\frac{\alpha(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))}{(\Delta-\alpha r_L)} - 1 \right) e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}} x_{rL}^{\alpha} + x^{\alpha} - (\Delta-\alpha\gamma) \int_0^{\tau_{rL}} \overline{x}(t)^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \right)$$

Рассмотрим уравнение $[dV/dx - \alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)]((\gamma+1/\theta)x-S) = 0$:

$$\left(\frac{\alpha(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))}{(\Delta-\alpha r_L)} - 1 \right) e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}} x_{rL}^{\alpha} + x^{\alpha} - (\Delta-\alpha\gamma) \int_0^{\tau_{rL}} \overline{x}(t)^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt - \frac{\alpha((\gamma+1/\theta)x-S)}{r_L+1/\theta} x^{\alpha-1}$$

Производная этого выражения по x равна:

$$\alpha x^{\alpha-1} + \frac{(\Delta-\alpha\gamma)^2}{x(\gamma+1/\theta)-S} \frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L} x_{rL}^{\alpha} e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}} - \alpha(\Delta-\alpha\gamma) \int_0^{\tau_{rL}} \overline{x}(t)^{\alpha-1} e^{-(\Delta+\gamma(1-\alpha)+1/\theta)t} dt -$$

$$-\alpha^2 \frac{\gamma+1/\theta}{r_L+1/\theta} x^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-2} \frac{S(1-\alpha)}{r_L+1/\theta}$$

Выразим интеграл в этом выражении через равенство (2.5.6), в котором левая часть равна $\alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)$:

$$\alpha x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\Delta-\alpha\gamma}{r_L+1/\theta} \right) + \frac{e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}}}{x(\gamma+1/\theta)-S} x_{rL}^{\alpha} - \alpha^2 \frac{\gamma+1/\theta}{r_L+1/\theta} x^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-2} \frac{S(1-\alpha)}{r_L+1/\theta}$$

При $x > x_{rL}$ это выражение положительно ($x > x_{rL} > S(1-\alpha)/(r_L+(1-\alpha)/\theta-\Delta)$ и $x > x_{rL} > S\theta/(\gamma\theta+1)$ при $r_L < \Delta+(1-\alpha)\gamma$). Заметим, что $dV/dx = \alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)$ при $x = x_{rL}$. Следовательно, при $x > x_{rL}$ производная функции цены больше, чем $\alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)$.

Покажем, что $\alpha x^{\alpha-1}/(r_D+1/\theta) - dV/dx > 0$. Согласно доказательству утв. 2.3.2 выполнено

$$\frac{\alpha}{(1/\theta+r_D)}x^{\alpha-1} > \frac{\alpha}{(1/\theta+\gamma)}\int_0^1\left(px+(1-p)\hat{x}\right)^{\alpha-1}p^{\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{\gamma\theta+1}}dp =$$
$$=\alpha\int_0^\infty\left(e^{-(1/\theta+\gamma)t}x+(1-e^{-(1/\theta+\gamma)t})\hat{x}\right)^{\alpha-1}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}e^{-(1/\theta+\gamma)t}dt$$

Рассмотрим разницу $\alpha x^{\alpha-1}/(r_D+1/\theta)-dV/dx$:

$$\frac{\alpha}{(1/\theta+r_D)}x^{\alpha-1}-\frac{dV}{dx} > \alpha\int_{\tau_{rL}(x)}^{\infty}\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt-$$
$$-\frac{\theta}{(\gamma\theta+1)(x-\hat{x})}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}(x)}x_{rL}^{\alpha}\frac{\alpha}{\Delta-\alpha r_L}(\Delta-r_L-(1-\alpha)\gamma)$$

При увеличении x это выражение убывает. При этом в пределе при $x\to\infty$ выражение равно 0. Следовательно,

$$\frac{\alpha}{(1/\theta+r_D)}x^{\alpha-1}-\frac{dV}{dx}>0.$$

Для поиска максимума воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$F(D,M)=M^\alpha+\frac{dV}{dx}(D(r_D-r_L)-(r_L+1/\theta)M)+\lambda_1(M+D-x)+\lambda_2 D,$$

Условие максимума выглядит как

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F(D,M)}{\partial M}=\alpha M^{\alpha-1}-\frac{dV}{dx}(r_L+1/\theta)+\lambda_1=0,\\
&\frac{\partial F(D,M)}{\partial D}=\frac{dV}{dx}(r_D-r_L)+\lambda_1+\lambda_2=0,\\
&\lambda_1(D+M-x)=0,\lambda_2 D=0,\lambda_{1,2}\ge 0.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\alpha x^{\alpha-1}/(r_D+1/\theta)>\frac{dV}{dx}>\alpha x^{\alpha-1}/(r_L+1/\theta)$ максимум по M достигается при $M=x$. Максимум по D достигается при $D=0$.

Следовательно, максимум в уравнении ГЯБ будет достигаться при $D=0$. Дальнейшая проверка теоремы верификации совпадает с доказательством теоремы 2.3.7.

Утверждение 2.5.1. *Пусть выполнены условия* (2.5.3) *и* $\Delta-\frac{1-\alpha}{\theta}<r_D<r_L<\Delta+\gamma(1-\alpha)$. *Тогда уравнение* $g(x_2,x_{r_L},r_L)=\frac{\gamma\theta+1}{r_D\theta+1}x_2^{\alpha-1}$ *имеет* *положительное решение* $x_2 > x_{r_L}$. *Кроме того, для любого* x, *большего чем* x_2, *существует решение* $\tau_2 > 0$ *уравнения* $h(x_2, \tau_2, r_D) = x$.

Доказательство:

$\frac{\alpha}{\gamma\theta+1} g(x_2, x_{r_L}, r_L)$ является траекторией системы

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = S - \left(\gamma + \frac{1}{\theta}\right)x,\\
&\frac{d\varphi}{dt} = \left(\Delta + (1-\alpha)\gamma + \frac{1}{\theta}\right)\varphi - \alpha x^{\alpha-1},\\
&x(0) = x_{rL,}\varphi(0) = \frac{\alpha}{r_L + 1/\theta} x_{rL}^{\alpha-1}.
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Данная система имеет седловую точку. Устойчивая сепаратриса седла $\varphi_{us}(x)$ находится в утверждении 2.3.4. Для доказательства, что $g(x_2, x_{r_L}, r_L) = \frac{\gamma\theta+1}{r_D\theta+1} x_2^{\alpha-1}$ имеет решение, необходимо показать, что траектория пересекает кривую $\varphi(x) = \frac{\alpha}{r_D + 1/\theta} x^{\alpha-1}$.

Заметим, что $x_{rL} > \hat{x} = S/(\gamma + 1/\theta)$. Рассмотрим систему (2.5.7) в обратном времени. В этом случае траектория будет «прижиматься» к $\varphi_{us}(x)$ при $x \to \infty$. Сепаратриса $\varphi_{us}(x)$ пересекает кривую $\varphi(x) = \frac{\alpha}{r_D + 1/\theta} x^{\alpha-1}$ (утв. 2.3.2). Следовательно, траектория (2.5.7) также будет пересекать эту кривую. Первая часть утверждения доказана.

Для доказательства второй части обратим внимание, что

$$h(x_2, \tau_2, r_D) = \left(w_{r_D} + x - x\kappa(r_D)\right)e^{(\gamma - r_D)\tau_2} + x\kappa(r_D)e^{\left(\frac{\Delta - r_D}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_2} - w_{r_D}$$

неограниченно возрастает. Действительно

$$h(x_2, \tau_2, r_D) = \left[\left(w_{r_D} + x - x\kappa(r_D)\right)e^{-\frac{\Delta - \alpha r_D}{1-\alpha}\tau_2} + x\kappa(r_D)\right]e^{\left(\frac{\Delta - r_D}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_2} - w_{r_D},\ x\kappa(r_D) > 0\ ,\ \Delta - \alpha r_D > 0.$$

Следовательно, решение $h(x_2, \tau_2, r_D) = x$ будет существовать.

Теорема 2.5.4. *Пусть* $\Delta - (1-\alpha)/\theta < r_D < r_L < \Delta + \gamma(1-\alpha)$ *и выполнены условия* (2.5.3). *Тогда задача* (2.5.2) *имеет решение в виде синтеза:*

$$M(x)=\begin{cases} M_{r_L}(x), & x<x_{r_L}, \\ x, & x\in[x_{r_L},x_2], \\ x_2 e^{\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_2}, & x>x_2, \end{cases}$$

$$V(x)=\begin{cases} V_1(x,r_L), & x<x_{r_L}, \\ V_3(x,r_L), & x\in[x_{r_L},x_2], \\ x_2^{\alpha}\dfrac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}e^{\alpha((\Delta-r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_2(x)}+\left(V_3(x_2,r_L)-x_2^{\alpha}\dfrac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_2(x)}, & x>x_2, \end{cases}$$

Замечание. Объем кредитов положителен при $x<x_{r_L}$, *объем депозитов положителен при* $x>x_2$.

Доказательство: для $x<x_2$ справедливо доказательство теоремы 2.5.3. Рассмотрим случай $x>x_2$. В этом случае

$$\frac{dV}{dx}=\left(\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)x_2^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_2}-(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_3(x_2,r_L)-x_2^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_2}\right)\tau_2'. \quad (2.5.8)$$

В силу того, что $\tau_2(x)$ решение $h(x_2,\tau_2,r_D)=x$, то будет выполнено

$$\tau_2'(x)=\frac{1}{\partial h/\partial\tau_2},$$

рассмотрим

$$\frac{\partial h}{\partial\tau_2}=-\left(S+(r_D-\gamma)x_2\frac{\Delta-r_D-\dfrac{1-\alpha}{\theta}}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{(\gamma-r_D)\tau_2}+(r_D+\frac{1}{\theta})\frac{\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha)}{\Delta-\alpha r_D}x_2e^{\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_2}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_2}\frac{\alpha x_2^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_2}-\frac{dV}{dx}/\tau_2'=-\left(S+(r_D-\gamma)x_2\frac{\Delta-r_D-\dfrac{1-\alpha}{\theta}}{\Delta-\alpha r_D}\right)\frac{\alpha x_2^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_2}+$$

$$+(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_3(x_2,r_L)-x_2^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_2}.$$

Учитывая, что для $V_3(x_2,r_L)$ выполнено уравнение ГЯБ при $x\le x_2$ справедливо

$$(\Delta-\alpha\gamma)V_3(x_2,r_L)=x_2^{\alpha}+\frac{\alpha x_2^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}\left(S-(\gamma+1/\theta)x_2\right).$$

Получаем, что $\frac{\partial h}{\partial \tau_2}\frac{\alpha x_2^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_2}-\frac{dV}{dx}/\tau_2'=0$. Отсюда следует, что

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\alpha x_2^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_2}.$$

Покажем, что функция цены непрерывно-дифференцируемая в точке x_2. Учитывая, что для x_2 по определению выполнено тождество

$$\frac{\alpha}{r_D+1/\theta}x_2^{\alpha-1}=\left[\frac{x_2-\hat{x}}{x_{rL}-\hat{x}}\right]^{-\rho}\left(\frac{\alpha}{r_L+1/\theta}x_{rL}^{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\gamma+1/\theta}\int_{x_{rL}}^{x_2}z^{\alpha-1}\left[\frac{z-\hat{x}}{x_{rL}-\hat{x}}\right]^{\rho}\frac{dz}{z-\hat{x}}\right),$$

которое при замене $z=\hat{x}+(x_2-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}$ трансформируется в

$$\frac{\alpha}{r_D+1/\theta}x_2^{\alpha-1}=\frac{\alpha}{r_L+1/\theta}x_{rL}^{\alpha-1}\left[\frac{x_2-\hat{x}}{x_{rL}-\hat{x}}\right]^{-\rho}+\alpha\int_0^{\tau_{rL}}\overline{x}(t)^{\alpha-1}e^{-(\Delta+\gamma(1-\alpha)+1/\theta)t}dt,$$

выразим значение dV/dx (см. (2.5.6)) как

$$\frac{\alpha}{r_D+1/\theta}x_2^{\alpha-1}-\frac{\alpha}{r_L+1/\theta}x_{rL}^{\alpha-1}\left[\frac{x_2-\hat{x}}{x_{rL}-\hat{x}}\right]^{-\rho}+\tau_{rL}'(x_2)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}(x)}x_{rL}^{\alpha}(1-(1-\alpha)(\Delta-\alpha\gamma)/(\Delta-\alpha r_L))$$

.

Для $dV/dx(x_{rL})$ выполнено

$$\tau_{rL}'(x_{rL})x_{rL}^{\alpha}(1-(1-\alpha)(\Delta-\alpha\gamma)/(\Delta-\alpha r_L))=\frac{\alpha}{r_L+1/\theta}x_{rL}^{\alpha-1}.$$

Тогда

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\alpha}{r_D+1/\theta}x_2^{\alpha-1}-\frac{\alpha}{r_L+1/\theta}x_{rL}^{\alpha-1}e^{-(\Delta+(1-\alpha)\gamma+1/\theta)\tau_{rL}(x)}+e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rL}(x)}\frac{x_{rL}-\hat{x}}{x_2-\hat{x}}\frac{\alpha}{r_L+1/\theta}x_{rL}^{\alpha-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{dV}{dx}(x_2-0)=\frac{\alpha}{r_D+1/\theta}x_2^{\alpha-1}=\frac{dV}{dx}(x_2+0)\,.$$

Для поиска максимума воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$F(u,M)=M^{\alpha}+\frac{\alpha x_2^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_2}(u(r_D-r_L)-(r_D+1/\theta)M)+\lambda(u-x),$$

где $u=M+D\geq x.$ Условие максимума выглядит как

$$\frac{\partial F(u,M)}{\partial M}=\alpha M^{\alpha-1}-\alpha x_2^{\alpha-1}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_2}M=0,$$
$$\frac{\partial F(u,M)}{\partial u}=\frac{\alpha x_2^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_2}(r_D-r_L)+\lambda=0.$$

Отсюда следует, что максимум будет достигаться при

$$M_*=x_2e^{((\Delta-r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_2}>x,\ u=x.$$

Для завершения доказательства осталось показать, что выполнено

$$M_*^{\alpha}+\frac{dV}{dx}(S-(r_D+1/\theta)M_*+(r_D-\gamma)x)=(\Delta-\alpha\gamma)V\,.$$

Подставляя $\frac{\partial h}{\partial\tau_2}=-(S-(r_D+1/\theta)M_*+(r_D-\gamma)x)$ (т.к. $h(x_2,\tau_2,r_D)=x$ - решение уравнения $\dot{x}=S-(r_D+1/\theta)M_*+(r_D-\gamma)x, x(0)=x, x(\tau_2)=x_2$) в выражение (2.5.8), а затем в уравнения ГЯБ, получим

$$(\Delta-\alpha\gamma)\left(x_2^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}e^{\alpha((\Delta-r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_2(x)}+\left(V_3(x_2,r_L)-x_2^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_2(x)}\right)=$$
$$=x_2^{\alpha}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_2}-\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)x_2^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_2}+(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_3(x_2,r_L)-x_2^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_2}$$

Данное выражение является тождеством. Следовательно, теорема доказана.

Утверждение 2.5.2. *Пусть выполнены условия* (2.5.3) *и* $\xi>\Delta-(1-\alpha)/\theta$. *Тогда уравнение* $b(x,\xi)=x^{\alpha-1}$ *имеет решение. Кроме того, если* x_{ξ_1} *- решение при* $\xi=\xi_1$, x_{ξ_2} *- решение при* $\xi=\xi_2$ *и* $\xi_1<\xi_2$, *то* $x_{\xi_1}>x_{\xi_2}$.

Доказательство: см. утв. 2.3.2.

Обозначим решение уравнения $b(x_3, r_L) = x_3^{\alpha-1}$ как x_3 , а решение уравнения $b(x_4, r_D) = x_4^{\alpha-1}$ как x_4. Заметим, что $x_3 < x_4$.

Утверждение 2.5.3. *Пусть выполнены условия* (2.5.3) *и* $\Delta + \gamma(1-\alpha) < r_L$. *Тогда* $\forall\, x < x_3$, *существует решение* $\tau_3 > 0$ *уравнения* $h(x_3, \tau_3, r_L) = x$.

Доказательство*: см. утв. 2.3.3*

Утверждение 2.5.4. *Пусть выполнены условия* (2.5.3) *и* $\Delta - (1-\alpha)/\theta < r_D < \Delta + \gamma(1-\alpha)$. *Тогда* $\forall\, x > x_4$, *существует решение* $\tau_4 > 0$ *уравнения* $h(x_4, \tau_4, r_D) = x$.

Доказательство: *см.* [47].

Теорема 2.5.5. *Пусть* $\Delta - (1-\alpha)/\theta < r_D < \Delta + \gamma(1-\alpha) < r_L$ *и выполнены условия* (2.5.3). *Тогда задача* (2.5.2) *имеет решение в виде синтеза:*

$$M(x) = \begin{cases} x_3 e^{\left(\frac{\Delta - r_L}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_3}, & x < x_3, \\ x, & x \in [x_3, x_4], \\ x_4 e^{\left(\frac{\Delta - r_D}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_4}, & x > x_4, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} x_3^{\alpha} \dfrac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_L} e^{\alpha((\Delta - r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_3(x)} + \left(V_2(x_3, +\infty) - x_3^{\alpha} \dfrac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_L} \right) e^{-(\Delta - \alpha\gamma)\tau_3(x)}, & x < x_3, \\ V_2(x, +\infty), & x \in [x_3, x_4], \\ x_4^{\alpha} \dfrac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_D} e^{\alpha((\Delta - r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_4(x)} + \left(V_2(x_4, +\infty) - x_4^{\alpha} \dfrac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_D} \right) e^{-(\Delta - \alpha\gamma)\tau_4(x)}, & x > x_4, \end{cases}$$

Доказательство: непрерывно-дифференцируемость следует из теорем 2.3.8 и 2.4.6.

Рассмотрим $x \in [x_3, x_4]$. В этом случае

$$\frac{dV}{dx} = \int_0^{\infty} \left[\hat{x} + (x - \hat{x}) e^{-(\gamma + 1/\theta)t} \right]^{\alpha - 1} e^{-(\gamma+1/\theta)t} e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} dt \,.$$

Для поиска максимума воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$F(D, M) = M^{\alpha} + \frac{dV}{dx}(D(r_D - r_L) - (r_L + 1/\theta)M) + \lambda_1 (M + D - x) + \lambda_2 D,$$

Условие максимума выглядит как

$$\frac{\partial F(D,M)}{\partial M}=\alpha M^{\alpha-1}-\int_0^\infty\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt(r_L+1/\theta)+\lambda_1=0,$$

$$\frac{\partial F(D,M)}{\partial D}=\int_0^\infty\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt(r_D-r_L)+\lambda_1+\lambda_2=0,$$

$$\lambda_1(D+M-x)=0,\lambda_3 D=0,\lambda_{1,2}\geq 0.$$

Учитывая, что

$$\alpha x^{\alpha-1}-\int_0^\infty\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt(r_L+1/\theta)<0$$

при $x\in[x_3,x_4]$ (утв. 2.5.2), максимум достигается при $M=x$ и $\lambda_1>0$. Тогда

$$\frac{\partial F(D,M)}{\partial D}=-\alpha x^{\alpha-1}+\int_0^\infty\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt(r_D+1/\theta)+\lambda_2=0$$

Учитывая, что

$$\alpha x^{\alpha-1}-\int_0^\infty\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt(r_D+1/\theta)>0$$

при $x\in[x_3,x_4]$ (утв.2.5.2), максимум достигается при $D=0$ и $\lambda_2>0$.

Удовлетворение $V(x)$ уравнению ГЯБ при $x\in[x_3,x_4]$ следует из теорем 2.3.8 и 2.4.6.

Рассмотрим случай $x<x_3$. В этом случае

$$\frac{dV}{dx}=\left(\alpha\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)x_3^\alpha\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_3}-(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_2(x_3,\infty)-x_3^\alpha\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_3}\right)\tau_3'. \qquad (2.5.9)$$

В силу того, что $\tau_3(x)$ решение $h(x_3,\tau_3,r_L)=x$, то будет выполнено

$$\tau_3'(x)=\frac{1}{\partial h/\partial\tau_3},$$

рассмотрим

$$\frac{\partial h}{\partial\tau_3}=-\left(S+(r_L-\gamma)x_3\frac{\Delta-r_L-\dfrac{1-\alpha}{\theta}}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{(\gamma-r_L)\tau_3}+(r_L+\frac{1}{\theta})\frac{\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha)}{\Delta-\alpha r_L}x_3e^{\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_3}.$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_3}\frac{\alpha x_3^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_3}-\frac{dV}{dx}/\tau_3'=-\left(S+(r_L-\gamma)x_3\frac{\Delta-r_L-\dfrac{1-\alpha}{\theta}}{\Delta-\alpha r_L}\right)\frac{\alpha x_3^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_3}+$$

$$+(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_2(x_3,\infty)-x_3^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_3}.$$

Учитывая, что для $V_3(x_3,\infty)$ выполнено уравнение ГЯБ при $x\in[x_3,x_4]$ справедливо

$$(\Delta-\alpha\gamma)V_2(x_3,\infty)=x_3^{\alpha}+\frac{\alpha x_3^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}\left(S-(\gamma+1/\theta)x_3\right)$$

получим, что $\frac{\partial h}{\partial \tau_2}\frac{\alpha x_3^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_3}-\frac{dV}{dx}/\tau_3'=0$. Отсюда следует, что

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\alpha x_3^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_3}.$$

Для поиска максимума воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$F(D,M)=M^{\alpha}+\frac{\alpha x_3^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_3}(D(r_D-r_L)-(r_L+1/\theta)M)+\lambda_1(D+M-x)+\lambda_2 D,$$

где $u=M+D\geq x.$ Условие максимума выглядит как

$$\frac{\partial F(D,M)}{\partial M}=\alpha M^{\alpha-1}-\alpha x_3^{\alpha-1}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_3}M+\lambda_1=0,$$
$$\frac{\partial F(D,M)}{\partial M}=\frac{\alpha x_3^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_3}(r_D-r_L)+\lambda_1+\lambda_2=0.$$

Отсюда следует, что максимум будет достигаться при

$$M_*=x_3e^{((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_3}>x,\ D=0.$$

Для завершения доказательства для $x<x_3$ осталось показать, что выполнено

$$M_*^{\alpha}+\frac{dV}{dx}(S-(r_L+1/\theta)M_*+(r_L-\gamma)x)=(\Delta-\alpha\gamma)V\ .$$

Учитывая, что $\frac{\partial h}{\partial \tau_3}=-(S-(r_L+1/\theta)M_*+(r_L-\gamma)x)$ (т.к. $h(x_3,\tau_3,r_L)=x$ - решение уравнения $\dot{x}=S-(r_L+1/\theta)M_*+(r_L-\gamma)x, x(0)=x, x(\tau_3)=x_3$), из выражения (2.5.9)

$$(\Delta-\alpha\gamma)\left(x_3^\alpha\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}e^{\alpha((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_3(x)}+\left(V_2(x_3,\infty)-x_3^\alpha\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_3(x)}\right)=$$

$$=x_3^\alpha e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_3}-\alpha\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)x_3^\alpha\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_3}+(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_2(x_3,\infty)-x_3^\alpha\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_3}$$

Данное выражение является тождеством.

Рассмотрим случай $x>x_4$. В этом случае

$$\frac{dV}{dx}=\left(\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)x_4^\alpha\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_4}-(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_2(x_4,\infty)-x_4^\alpha\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_4}\right)\tau_4'. \quad (2.5.10)$$

В силу того, что $\tau_4(x)$ решение $h(x_4,\tau_4,r_D)=x$, то будет выполнено

$$\tau_4'(x)=\frac{1}{\partial h/\partial\tau_4},$$

рассмотрим

$$\frac{\partial h}{\partial\tau_4}=-\left(S+(r_D-\gamma)x_4\frac{\Delta-r_D-\frac{1-\alpha}{\theta}}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{(\gamma-r_D)\tau_4}+(r_D+\frac{1}{\theta})\frac{\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha)}{\Delta-\alpha r_D}x_4e^{\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_4}.$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial h}{\partial\tau_4}\frac{\alpha x_4^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_4}-\frac{dV}{dx}/\tau_4'=-\left(S+(r_D-\gamma)x_4\frac{\Delta-r_D-\frac{1-\alpha}{\theta}}{\Delta-\alpha r_D}\right)\frac{\alpha x_4^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_4}+$$

$$+(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_2(x_4,\infty)-x_4^\alpha\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_4}.$$

Учитывая, что для $V_3(x_3,\infty)$ выполнено уравнение ГЯБ при $x\in[x_3,x_4]$ справедливо

$$(\Delta-\alpha\gamma)V_2(x_3,\infty)=x_3^\alpha+\frac{\alpha x_3^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}\left(S-(\gamma+1/\theta)x_3\right)$$

получим, что $\frac{\partial h}{\partial\tau_3}\frac{\alpha x_4^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_4}-\frac{dV}{dx}/\tau_4'=0$. Отсюда следует, что

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\alpha x_4^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_4}.$$

Для поиска максимума воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$F(u,M)=M^{\alpha}+\frac{\alpha x_4^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_3}(u(r_D-r_L)-(r_D+1/\theta)M)+\lambda_1(u-x), \text{ где}$$

$u=M+D\geq x.$ Условие максимума выглядит как

$$\frac{\partial F(u,M)}{\partial M}=\alpha M^{\alpha-1}-\alpha x_4^{\alpha-1}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_4}M+\lambda=0,$$
$$\frac{\partial F(u,M)}{\partial u}=\frac{\alpha x_4^{\alpha-1}}{r_D+1/\theta}e^{-(\Delta-r_D+\gamma(1-\alpha))\tau_4}(r_D-r_L)+\lambda=0.$$

Отсюда следует, что максимум будет достигаться при

$$M_*=x_4e^{((\Delta-r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_4}>x, u=x.$$

Для завершения доказательства для $x>x_4$ осталось показать, что выполнено

$$M_*^{\ \alpha}+\frac{dV}{dx}(S-(r_D+1/\theta)M_*+(r_D-\gamma)x)=(\Delta-\alpha\gamma)V\ .$$

Учитывая, что $\frac{\partial h}{\partial\tau_4}=-(S-(r_D+1/\theta)M_*+(r_D-\gamma)x)$ (т.к. $h(x_4,\tau_4,r_D)=x$ - решение уравнения $\dot{x}=S-(r_D+1/\theta)M_*+(r_D-\gamma)x, x(0)=x, x(\tau_4)=x_4$), из выражения (2.5.10)

$$(\Delta-\alpha\gamma)\left(x_4^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}e^{\alpha((\Delta-r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_4(x)}+\left(V_2(x_4,\infty)-x_4^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_4(x)}\right)=$$
$$=x_4^{\alpha}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_4}-\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)x_4^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_D}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_4}+(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_2(x_4,\infty)-x_4^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_4}$$

Данное выражение является тождеством.

Следовательно, теорема доказана.

Утверждение 2.5.5. *Пусть выполнены условия* (2.5.3) *и* $\Delta+\gamma(1-\alpha)<r_D<r_L$. *Тогда уравнение* $g(x_6,x_{r_D},r_D)=\frac{\gamma\theta+1}{r_L\theta+1}x_6^{\alpha-1}$ *имеет положительное решение* $x_6<x_{r_D}$. *Кроме того, для любого* x, *меньшего чем* x_6, *существует решение* $\tau_5>0$ *уравнения* $h(x_6,\tau_5,r_L)=x$.

Доказательство:

$\dfrac{\alpha}{\gamma\theta+1}g(x_6, x_{r_D}, r_D)$ является траекторией системы (2.5.7).

Данная система имеет седловую точку. Устойчивая сепаратриса седла $\varphi_{us}(x)$ находится в утверждении 2.3.4. Для доказательства условия утверждения необходимо показать, что траектория пересекает кривую $\varphi(x)=\dfrac{\alpha}{r_L+1/\theta}x^{\alpha-1}$.

Заметим, что $x_{rD} < \hat{x} = S/(\gamma+1/\theta)$. Рассмотрим систему (2.5.7) в обратном времени. В этом случае траектория будет «прижиматься» к $\varphi_{us}(x)$ при $x\to 0$. Сепаратриса $\varphi_{us}(x)$ пересекает кривую $\varphi(x)=\dfrac{\alpha}{r_L+1/\theta}x^{\alpha-1}$ (утв. 2.3.2). Следовательно, траектория (2.5.7) также будет пересекать эту кривую. Первая часть утверждения доказана.

Для доказательства второй части обратим внимание, что

$$h(x_6,\tau_5,r_L)=\left(w_{r_L}+x-x\kappa(r_L)\right)e^{(\gamma-r_L)\tau_5}+x\kappa(r_L)e^{\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_5}-w_{r_L}$$

убывает до $S/(r_L-\gamma)$. Действительно

$$h(x_6,\tau_5,r_L)=\left[\left(w_{r_L}+x-x\kappa(r_L)\right)e^{-\frac{\Delta-\alpha r_L}{1-\alpha}\tau_5}+x\kappa(r_L)\right]e^{\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_5}-w_{r_L},\ x\kappa(r_D)>0\ ,\ \Delta-\alpha r_D>0.$$

Следовательно, решение $h(x_6,\tau_5,r_L)=x$ будет существовать при $x\geq S/(r_L-\gamma)$.

Теорема 2.5.6. *Пусть* $\Delta+(1-\alpha)\gamma<r_D<r_L$ *и выполнены условия* (2.5.5). *Тогда задача* (2.5.2) *имеет решение в виде синтеза:*

$$M(x)=\begin{cases} x_6 e^{\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_5}, & x<x_6,\\ x, & x\in[x_6,x_{r_D}],\\ M_1(x,r_D), & x>x_{r_D}, \end{cases}$$

$$V(x)=\begin{cases} x_6^{\alpha}\dfrac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D}e^{\alpha((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_5(x)}+\left(V_3(x_6,r_D)-x_6^{\alpha}\dfrac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_5(x)}, & x<x_6,\\ V_3(x,r_D), & x\in[x_6,x_{r_D}],\\ V_1(x,r_D), & x>x_{r_D}, \end{cases}$$

Доказательство:

Функция $V_1(x,r_D)$ непрерывно-дифференцируемая. Подставим $V(x)$ в уравнение ГЯБ. Производная

$$\frac{dV_1(x,r_D)}{dx}=\frac{\alpha}{r_D+1/\theta}\left(x+\frac{S}{r_D-\gamma}\right)^{\alpha-1}\left[\frac{\theta(\Delta-\alpha r_D)}{(1+r_D\theta)(1-\alpha)}\right]^{\alpha-1}$$

неотрицательна. Следовательно, максимум будет достигаться при $D=0$. Максимум по M достигается при $M_{r_D}(x)$. Функция ГЯБ $V(x)$ при подстановке в уравнение ГЯБ обращается в равенство:

$$\max_{\substack{M+D\ge x,\\ M\ge 0,D\ge 0}}\left\{M^{\alpha}+\frac{dV_1(x,r_D)}{dx}(S-(r_D+1/\theta)M+(r_D-r_L)D+(r_D-\gamma)x)\right\}=(1-\alpha)M_{rD}^{\alpha}(x)+$$

$$+(S+(r_D-\gamma)x)\frac{\alpha\theta}{r_D\theta+1}M_{r_D}^{\alpha-1}(x)=M_{r_D}^{\alpha-1}(x)\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{r_D\theta+1}\left(x+\frac{S}{r_D-\gamma}\right)=(\Delta-\alpha\gamma)V_1(x,r_D)$$

Таким образом, функция $V_1(x,r_D)$ удовлетворяет уравнению ГЯБ при $x\ge x_{r_D}$.

Если $x\in[x_6,x_{r_D}]$, то

$$\frac{dV}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\tau_{rD}(x)}\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt+V_1(x_{rD},r_D)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rD}(x)}\right)=$$

$$=\alpha\int_0^{\tau_{rD}(x)}\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt+\tau_{rD}'x_{rD}^{\alpha}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rD}(x)}- \tag{2.5.11}$$

$$-\tau_{rD}'(\Delta-\alpha\gamma)V_1(x_{rD},r_D)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rD}(x)}=\alpha\int_0^{\tau_{rD}(x)}\left[\hat{x}+(x-\hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}\right]^{\alpha-1}e^{-(\gamma+1/\theta)t}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t}dt+$$

$$\tau_{rD}'e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_{rD}(x)}x_{rD}^{\alpha}(1-(1-\alpha)(\Delta-\alpha\gamma)/(\Delta-\alpha r_D)).$$

Заметим, что

$$1-\frac{(1-\alpha)(\Delta-\alpha\gamma)}{\Delta-\alpha r_D}=\frac{\alpha}{\Delta-\alpha r_D}(\Delta-r_D-(1-\alpha)\gamma)>0,$$

$\tau_{rD}' = \dfrac{1}{x-\hat{x}} > 0$ (т.к. $x \ge x_{rD} \ge \hat{x}$ при выполнении условий теоремы).

Следовательно производная V положительна. Т.к. V удовлетворяет уравнению ГЯБ для задачи (2.4.20), то $dV/dx < \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$ при $x \in [x_6, x_{r_D}]$.

Для поиска максимума воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$F(u,M) = M^{\alpha} + \frac{dV}{dx}(u(r_D - r_L) - (r_D + 1/\theta)M) + \lambda_1(u - x), \text{где } u = M + D \ge x.$$

Условие максимума выглядит как

$$\frac{\partial F(u,M)}{\partial M} = \alpha M^{\alpha-1} - \frac{dV}{dx}(r_D + 1/\theta)M + \lambda_1 = 0,$$
$$\frac{\partial F(u,M)}{\partial u} = \frac{dV}{dx}(r_D - r_L) + \lambda_1 = 0.$$

Отсюда следует, что максимум в уравнении ГЯБ будет достигаться при $D = 0, M = x.$. Дальнейшая проверка теоремы верификации совпадает с доказательством теоремы 2.4.7.

Рассмотрим случай $x < x_6$. В этом случае

$$\frac{dV}{dx} = \left(\alpha \left(\frac{\Delta - r_L}{1-\alpha} + \gamma \right) x_6^{\alpha} \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_L} e^{\alpha\left(\frac{\Delta - r_L}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_5} - (\Delta - \alpha\gamma)\left(V_3(x_6, r_D) - x_6^{\alpha} \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_L} \right) e^{-(\Delta - \alpha\gamma)\tau_5} \right) \tau_5'. \quad (2.5.12)$$

В силу того, что $\tau_5(x)$ решение $h(x_6, \tau_5, r_L) = x$, то будет выполнено

$$\tau_5'(x) = \frac{1}{\partial h / \partial \tau_5},$$

рассмотрим

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_5} = -\left(S + (r_L - \gamma)x_6 \frac{\Delta - r_L - \dfrac{1-\alpha}{\theta}}{\Delta - \alpha r_L} \right) e^{(\gamma - r_L)\tau_5} + (r_L + \frac{1}{\theta}) \frac{\Delta - r_L + \gamma(1-\alpha)}{\Delta - \alpha r_L} x_6 e^{\left(\frac{\Delta - r_L}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_5}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_5}\frac{\alpha x_6^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_5}-\frac{dV}{dx}/\tau_5'=-\left(S+(r_L-\gamma)x_6\frac{\Delta-r_L-\dfrac{1-\alpha}{\theta}}{\Delta-\alpha r_L}\right)\frac{\alpha x_6^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_5}+$$

$$+(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_3(x_6,r_D)-x_6^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_5}.$$

Учитывая, что для $V_3(x_6,r_D)$ выполнено уравнение ГЯБ при $x=x_6$ справедливо

$$(\Delta-\alpha\gamma)V_3(x_6,r_D)=x_6^{\alpha}+\frac{\alpha x_6^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}\big(S-(\gamma+1/\theta)x_6\big)$$

получим, что $\frac{\partial h}{\partial \tau_5}\frac{\alpha x_6^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_5}-\frac{dV}{dx}/\tau_5'=0$. Отсюда следует, что

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\alpha x_6^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_5}.$$

Для поиска максимума воспользуемся методом множителей Лагранжа:

$$F(D,M)=M^{\alpha}+\frac{\alpha x_6^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_5}(D(r_D-r_L)-(r_L+1/\theta)M)+\lambda_1(D+M-x)+\lambda_2 D,$$

Условие максимума выглядит как

$$\frac{\partial F(D,M)}{\partial M}=\alpha M^{\alpha-1}-\alpha x_6^{\alpha-1}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_5}M+\lambda_1=0,$$
$$\frac{\partial F(D,M)}{\partial D}=\frac{\alpha x_6^{\alpha-1}}{r_L+1/\theta}e^{-(\Delta-r_L+\gamma(1-\alpha))\tau_5}(r_D-r_L)+\lambda_1+\lambda_2=0.$$

Отсюда следует, что максимум будет достигаться при

$$M_*=x_6e^{((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_5}>x,\ D=0.$$

Для завершения доказательства осталось показать, что выполнено

$$M_*^{\alpha}+\frac{dV}{dx}(S-(r_L+1/\theta)M_*+(r_L-\gamma)x)=(\Delta-\alpha\gamma)V.$$

Учитывая, что $\frac{\partial h}{\partial \tau_5}=-(S-(r_L+1/\theta)M_*+(r_L-\gamma)x)$ (т.к. $h(x_6,\tau_5,r_L)=x$ - решение уравнения $\dot{x}=S-(r_L+1/\theta)M_*+(r_L-\gamma)x, x(0)=x, x(\tau_5)=x_6$), из выражения (2.5.11)

$$(\Delta-\alpha\gamma)\left(x_6^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}e^{\alpha((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_5(x)}+\left(V_3(x_6,r_D)-x_6^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_5(x)}\right)=$$

$$=x_6^{\alpha}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_5}-\alpha\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)x_6^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}e^{\alpha\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_5}+(\Delta-\alpha\gamma)\left(V_3(x_6,r_D)-x_6^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_5}$$

Данное выражение является тождеством. Следовательно, теорема доказана.

Теорема 2.5.7. *Пусть* $r_D<\Delta-\frac{1-\alpha}{\theta}<\Delta+(1-\alpha)\gamma<r_L$ *и выполнены условия* (2.5.3). *Тогда задача* (2.5.2) *имеет решение в виде синтеза:*

$$M(x)=\begin{cases}x_3e^{\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_3}, & x<x_3,\\ x, & x\geq x_3,\end{cases}$$

$$V(x)=\begin{cases}x_3^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}e^{\alpha((\Delta-r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_3(x)}+\left(V_2(x_3,+\infty)-x_3^{\alpha}\frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L}\right)e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_3(x)}, & x<x_3,\\ V_2(x,+\infty), & x\geq x_3,\end{cases}$$

Доказательство: следует из доказательства теоремы 2.5.5. с $x_4=\infty$.

Интерпретация решения

Соотношение коэффициента дисконтирования домашних хозяйств и параметров экономической конъектуры разбивают население на шесть слоев. Однако представляется разумным не рассматривать каждый из этих слоев в отдельности, а объединить некоторые режимы по принципу сходства асимптотики решения.

Назовем величину $I=Se^{\gamma t}+r_DD$ совокупными доходами домашнего хозяйства, а величину $P=C+r_LL$ - совокупными расходами.

Утверждение 2.5.6. *Пусть выполнены условия* (2.5.5).

- *При* $r_L<\Delta+(1-\alpha)\gamma$ *доля потребления в совокупных расходах домашних хозяйств стремится к нулю, а доля заработной платы в совокупных доходах, начиная с некоторого момента времени, равна 1.*

• При $r_D < \Delta + (1-\alpha)\gamma < r_L$, начиная с некоторого момента времени, доходы домашних хозяйств состоят только из заработной платы, а расходуются денежные средства только на потребление.

• При $\Delta + (1-\alpha)\gamma < r_D$ доля дивидендов в совокупных доходах домашних хозяйств стремится к 1, доля потребления в совокупных расходах, начиная с некоторого момента времени, равна 1. Отношение совокупных расходов к доходам

$$\lim_{t\to+\infty}\left(P(t)/I(t)\right) = \frac{(\Delta - \alpha r_D)}{r_D(1-\alpha+(r_D-\Delta)\theta)}$$

Утверждение 2.5.7. *Пусть выполнены условия* (2.5.3). *Тогда благосостояние x на оптимальной траектории при $r_L < \Delta + (1-\alpha)\gamma$ уменьшается со временем и стремится к отрицательной величине $-S/(r_L-\gamma)$, при $r_D < \Delta + (1-\alpha)\gamma < r_L$ стремится к величине $\hat{x}$, а при $r_D > \Delta + (1-\alpha)\gamma$ неограниченно возрастает.*

Доказательство утверждений следует из подстановки полученного синтеза управления в уравнение для x из (2.5.2).

Из приведенных утверждений следует, что в зависимости от коэффициента дисконтирования домашнее хозяйство может иметь три различных потребительских поведения:

• При выполнении условий одной из теорем 2.5.2-2.5.4 траектории устроены следующим образом: независимо от того, берут ли домашние хозяйства кредиты, вкладываются ли в депозиты или хранят все средства в форме наличных денег в начальный момент времени, оптимальная траектория с некоторого момента времени будет находиться в области 1 (область $L > 0$). Благосостояние домашних хозяйств для этих режимов уменьшается с течением времени и стремится к отрицательной величине $-S/(r_L-\gamma)$, домашние хозяйства оказываются обремененными большим объемом кредитов и в итоге вынуждены большую часть своих доходов тратить на выплаты по кредитам. Такое поведение присуще бедному слою населения. Коэффициент дисконтирования этого слоя удовлетворяет условию $r_D < r_L < \Delta + \gamma(1-\alpha)$.

- При выполнении условий одной из теорем 2.5.5 или 2.5.7 оптимальные траектории, начиная с некоторого момента времени, будут находиться в области 2 (область $L = D = 0$). Такое поведение говорит о том, что домашние хозяйства, коэффициент дисконтирования которых удовлетворяет условию $r_D < \Delta + \gamma(1-\alpha) < r_L$, являются самодостаточными, и кредиты или депозиты им требуются (заметим, что они требуются только в начале жизни траектории) только для того, чтобы быстрее вывести свой уровень потребления к некоторому оптимальному значению. Благосостояние домашних хозяйств стремится к величине $\hat{x}$, а отношение совокупных расходов к доходам - к константе $1/(1+\gamma\theta)$. Отсюда также можно найти оптимальный объем потребления: $C_* = S/(1+\gamma\theta)$. В силу некоторой стабильности поведения данного типа домашних хозяйств назовем их средним слоем.

- При выполнении условия $\Delta + \gamma(1-\alpha) < r_D < r_L$ (теорема 2.5.6) оптимальная траектория, начиная с некоторого момента времени, будет находиться в области 3 (область $D > 0$). Благосостояние домашних хозяйств в этом случае неограниченно возрастает, а основной доход они получают с выплат по депозитам. Поэтому будем называть этот слой богатым слоем. Для него характерно хранить свои средства в форме депозитов с целью увеличения будущих доходов.

Принципиальное отличие рассмотренной в этом параграфе модели от классической постановки модели Рамсея – в появлении среднего слоя. Эти домашние хозяйства рассматривают заемные средства и/или сбережения как некоторое временное решение, которое позволит оптимизировать распределение их потребления по времени. При сопоставлении рассмотренной в этом параграфе модели с модификациями модели Рамсея при отсутствии рынка кредитования или рынка сбережений нетрудно заметить, что решение является «расширением» решений задач (2.3.12), (2.4.20) частично «средний слой» присутствует и в случае отсутствия возможности сберегать, и в случае отсутствия возможности привлекать заемные средства.

2.6 Модель рамсеевского типа с ликвидным рынком товаров длительного пользования

Как уже было сказано ранее, домашние хозяйства стараются поддерживать равномерный поток потребления, и потребление товаров и услуг приносит домашнему хозяйству полезность. Некоторые товары обеспечивают потребительские услуги только в момент их непосредственного использования, например, еда, газеты, отдых в конце недели. Другие товары, наоборот, служат домашнему хозяйству в течение длительного периода. Например, автомобили, телевизоры, холодильники используются в течение нескольких лет. Поэтому экономисты различают товары повседневного спроса, которые предоставляют услуги в течение короткого времени, и товары длительного пользования, которые служат много лет.

До сих пор мы рассматривали потребление в совокупности, не производя деления на товары повседневного спроса и товары длительного пользования. Вообще говоря, такой подход является достаточно грубым описанием действительности. Дело в том, что от товаров длительного пользования домашнее хозяйство получает пользу в течение длительного периода времени. Попробуем это формализовать. Будем считать, что домашнее хозяйство делит свое потребление между покупкой товаров длительного пользования на сумму C_1 и товарами повседневного спроса C_2. Домашнее хозяйство обладает некоторым объемом товаров длительного пользования Z, который выбывает с темпом μ. Коэффициент μ является коэффициентом амортизации товаров длительного пользования. Домашнее хозяйство может продавать и покупать товары длительного пользования. Для упрощения модели будем считать, что при перепродаже цена товара не меняется. Также будем считать, что домашнее хозяйство может сберегать свои средства для увеличения будущего потребления.

Ограничение ликвидности будет выглядеть следующим образом: $M \geq \theta C_2$. В ограничение ликвидности не входит потребление товаров длительного пользования ввиду того, что покупка товаров длительного пользования планируется заранее и для ее совершения домашние хозяйства предварительно готовят наличные средства на покупку.

В качестве функции полезности рассмотрим функцию $\min\{KZ, C_2\}$, где K характеризует структуру потребления домашнего хозяйства. Тогда поведение домашнего хозяйства описывается как решение следующей задачи оптимального управления:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \min\{KZ, C_2\}^{\alpha} e^{-\Delta t} dt \to \max_{C_1, C_2, M} \\
&\frac{dX}{dt} = Se^{\gamma t} + r_D(X - M) - C_1 - C_2, \\
&\frac{dZ}{dt} = C_1 - \mu Z, \\
&X \geq M \geq \theta C_2 \geq 0, \\
&Z \geq 0, C_1 \in R, \\
&X(0) + Z(0) = X_0,
\end{aligned}
\qquad (2.6.1)
$$

где $X = D + M$.

Утверждение 2.6.1. *Если решение задачи* (2.6.1) *существует, то на оптимальной траектории* $M_*(t) = \theta C_{2*}(t) \;\; \forall t \in [0, T]$.

Доказательство. Пусть $M_*(t) > \theta C_{2*}(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$. В этом случае можно взять в качестве управления на отрезке $t \in [t_1, t_2]$ функции $\tilde{M} = (r_D M_* + C_{2*}) / (r_D + 1/\theta)$, $\tilde{C}_2 = C_{2*} + r_D(M_* - \tilde{M})$, вне отрезка $[t_1, t_2]$ управление остается тем же самым. Данное управление является допустимым. При управлении $\tilde{M}, \tilde{C}_2$ траектория $X(t)$ останется прежней. Однако $\tilde{C}_2 \geq C_{2*}$ и $\tilde{C}_2 \neq C_{2*}$. Построили оптимальное управление, на котором значение функционала как минимум не меньше, чем при M_*, C_{2*}. Получили противоречие с оптимальностью управления M_*, C_{2*}.

Утверждение 2.6.2. *Если решение задачи* (2.6.1) *существует, то на оптимальной траектории* $C_{2*} \le KZ_*$.

Доказательство: допустим, что на оптимальной траектории выполнено $C_{2*} > KZ_*$ при $t \in [t_1, t_2]$. Рассмотрим управление $\tilde{C}_2 = C_{2*} - \varepsilon$ на отрезке $[t_1, t_2]$, где величина ε - малая, вне этого отрезка управление $\tilde{C}_2$ совпадает с C_{2*}. Пусть управление $\tilde{C}_1 = C_{1*} + \varepsilon$ на отрезке $[t_1, t_2]$ и совпадает с управлением C_{1*} вне этого отрезка. В этом случае $\tilde{Z}(t) \ge Z_*(t)$. Следовательно, значение функционала увеличится (т.к. на отрезке $[t_1, t_2]$ выполнено $C_{2*} > \tilde{C}_2 > K\tilde{Z} > KZ_*$). Противоречие с оптимальностью.

Сделаем замену переменных $x = Xe^{-\gamma t}$, $z = Ze^{-\gamma t}$, $p = C_1 e^{-\gamma t}$, $c = C_2 e^{-\gamma t}$, $k = K\theta$. Тогда задача будет выглядеть так:

$$\int_0^T M^{\alpha} e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} dt \to \max_{M \ge 0,\, p \in R}$$
$$\frac{dx}{dt} = S + (r_D - \gamma)x - p - (r_D + 1/\theta)M,$$
$$\frac{dz}{dt} = p - (\mu + \gamma)z,$$
$$M \le \min(kz, x),$$
$$z \ge 0, x(0) + z(0) = X_0.$$

Утверждение 2.6.3. *Если решение задачи* (2.6.1) *существует, то на оптимальной траектории* $M_* = kz_*$.

Доказательство: допустим, что на оптимальной траектории выполнено $M_* < kz_*$ при $t \in [t_1, t_2]$. Возможны два случая: $M_* < x_*$, $M_* = x_*$ при $t \in [t_1, t_2]$ (если ни одно из этих утверждений не выполнено, мы всегда можем выбрать отрезок $[t_3, t_4]$, являющийся подмножеством $[t_1, t_2]$, для которого будет выполнено одно из утверждений).

Рассмотрим случай $M_* < x_*$. В этом случае можно взять в качестве управления на отрезке $t \in [t_1, t_1 + \delta]$ функции $\tilde{M} = M_* + \varepsilon$, $\tilde{p} = p_* + \varepsilon(r_D + 1/\theta)$, на отрезке $t \in [t_2, t_2 - \delta]$ функции $\tilde{M} = M_*$, $\tilde{p} = p_* + \varepsilon(r_D + 1/\theta)e^{-(\mu+\gamma)(t_2 - t_1)}$, вне отрезка $[t_1, t_2]$ управление остается тем же самым. Величины ε, δ малые. В этом случае $\tilde{x}(t) \geq x_*(t)$, $\tilde{z}(t) \geq z_*(t)$, $\tilde{z}(t) \neq z_*(t)$. Следовательно, значение функционала будет больше. Противоречие с оптимальностью.

Пусть $M_*(t) = x_*(t)$. В этом случае выполнено

$$\frac{d(x+z)}{dt} = S - (\gamma + 1/\theta)x - (\mu + \gamma)z,\ x < kz.$$

Рассмотрим траекторию $\tilde{x}(t) = x_*(t) + \varepsilon$, $\tilde{z}(t) = z_*(t) - \varepsilon(\mu + \gamma)/(1/\theta + \gamma)$ на отрезке $[t_1, t_2]$, вне отрезка траектория останется прежней. Так как $p \in R$ такая траектория будет реализуема при определенном управлении. При этом значение функционала на ней больше. Получили противоречие с оптимальностью. ■

Таким образом, задачу можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = (r_D - \gamma)x + S - p - \left(r_D + \frac{1}{\theta}\right)kz,\\
&\frac{dz}{dt} = p - (\mu + \gamma)z,\\
&x \geq kz \geq 0,\ x(0) + z(0) = X_0,\\
&\int_0^T z^\alpha e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} dt \to \max_{p,M}
\end{aligned}$$

Пусть $y = x + z$, $v = (k+1)z$. Учитывая, что $x \geq kz$, получим, что $v \leq y$. Тогда задачу можно записать так:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} = (r_D - \gamma)y + S - \left[\left(r_D + \frac{1}{\theta}\right)k + \mu + r_D\right]\frac{v}{k+1},\\
&y \geq z \geq 0, y(0) = X_0,\\
&\int_0^T z^\alpha e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} dt \to \max_{p,M}
\end{aligned}$$

Обозначим $\dfrac{1}{\theta'} = \dfrac{\mu + \dfrac{k}{\theta}}{k+1} = \dfrac{\mu + K}{K\theta + 1}$ и получим задачу, эквивалентную (2.4.2). Решение этой задачи существует, следовательно утверждения 2.6.1-2.6.3 верны. Следовательно, в случае ликвидного рынка товаров длительного пользования, деление потребления на товары длительного пользования и на товары повседневного спроса приводит к некоторой переоценке скорости обращения денег.

2.7 Моделирование спроса на потребительские кредиты в условиях опережающего роста заработной платы

В задаче (2.3.1) для корректного перехода к задаче на бесконечном горизонте времени требовалось выполнение условия $r_L > \gamma$. Как было показано выше, в противном случае домашнее хозяйство может в начальный момент времени взять кредит любой суммы и выплатить его в условиях неограниченности временного интервала.

Тем не менее случай $r_L < \gamma$ также нуждается в рассмотрении. Связано это прежде всего с тем, что в условиях российской экономики в течение 2002-2008гг. темп роста заработной платы превосходил процентную ставку по кредитам.

При решении задачи (2.3.2) в случае, когда $r_L > \gamma$, мы дополнительно требовали выполнения условия $\Delta - \alpha\gamma > 0$. Фактически это означало, что в задаче с «нормированной» заработной платой коэффициент дисконтирования должен быть неотрицателен. Потребуем выполнения этого условия и для случая $r_L > \gamma$.

Теорема 2.7.1. *Рассмотрим задачу* (2.3.1). *Пусть выполнены условия* $\Delta - \alpha\gamma > 0$, $r_L > \gamma$. *Тогда для любого начального значения* x_0 *существует достаточно большой временной горизонт* T, *такой что задача имеет решение (2.3.1) следующего вида:*

$$M(t) = \frac{\Delta - \alpha r_L}{(1-\alpha)(r_L + 1/\theta)} \frac{\left(x_0 + \dfrac{S}{r_L - \gamma}\right)e^{(r_L-\gamma)T} - \dfrac{S}{r_L-\gamma}}{e^{(r_L-\gamma)T} - e^{((r_L-\Delta)/(1-\alpha)-\gamma)T}} e^{((r_L-\Delta)/(1-\alpha)-\gamma)t}$$

Доказательство: прежде всего заметим, что выполнены следующие неравенства: $\Delta - \alpha r_L > \Delta - \alpha\gamma > 0$ и $\Delta - r_L + (1-\alpha)\gamma = \Delta - \alpha\gamma + \gamma - r_L > 0$.

Следовательно неподвижная точка системы (2.3.6) при выполнении условий теоремы является устойчивым узлом. Для поиска решения воспользуемся принципом максимума Понтрягина (Теорема 2.3.1). Напомним, что согласно принципу максимума Понтрягина, возможны два случая: режим 1, в котором динамика будет описываться системой (2.3.4), и режим 2, в котором динамика будет описываться системой (2.3.5) или (2.3.6).

Рассмотрим случай $r_L < \Delta - (1-\alpha)/\theta$.

Производная вдоль кривой $\hat{\varphi}(x) = \alpha x^{\alpha-1}/(r_L + 1/\theta)$ согласно системе (2.3.4) равна

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi - \alpha x^{\alpha-1}/(r_L + 1/\theta)\right)|_{\varphi=\hat{\varphi}(x)} = \frac{\alpha\theta x^{\alpha-2}}{(1-\alpha)(r_L\theta+1)}\left(S + \left(\frac{\Delta - r_L}{1-\alpha} - \frac{1}{\theta}\right)x\right) > 0. \qquad (2.7.1)$$

Допустим, траектория в какой-то момент времени движется согласно (2.3.4). Тогда она будет всегда оставаться в области $x > 0$, $\varphi \geq \hat{\varphi}(x) > 0$. Однако в терминальный момент времени должно выполняться условие трансверсальности $x(T) = 0$. Противоречие. Следовательно, траектория не может двигаться согласно (2.3.4). Это означает, что траектория будет всегда находиться в режиме 2. Для определения $M(0)$ достаточно решить систему (2.3.6) при условии, что $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$ (условие трансверсальности)

Рассмотрим случай $r_L > \Delta - (1-\alpha)/\theta$.

В терминальный момент времени должно выполняться условие трансверсальности $x(T) = 0$. Допустим, в терминальный момент времени траектория находится в режиме 1. Тогда $M(T) = x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = S$. Это означает, что в окрестности $[T-\varepsilon, T]$ траектория находится в режиме 2, в момент времени $t = T$ траектория попадает на границу режимов. Следовательно, в некоторый временной интервал $[T-\varepsilon, T]$ траектория находится в режиме 2.

Рассмотрим поведение траекторий на кривой $\hat{\varphi}(x)$. При $x \leq \tilde{x} = S/\left((r_L - \Delta)/(1-\alpha) + 1/\theta\right)$ траектория попадает в режим 1 (производная вдоль кривой $\hat{\varphi}(x)$ положительна), в противном случае - в режим 2. В режиме 1 переменная x не может стать больше $\tilde{x}$ ($\dot{x}|_{x=\tilde{x}} < 0$). Следовательно, если траектория попала из режима 2 в режим 1, то она не сможет выйти из этого режима. Значит или траектория всегда находится в режиме 2, или траектория начинается в режиме 1 и заканчивается во 2-м (возможно только при $x_0 > \tilde{x}$).

Пусть оптимальная траектория стартует из режима 1. Покажем, что t_1 равномерно ограничена сверху по T. Оптимальная траектория может находиться в режиме 1 только при $x > \tilde{x}$, так как в противном случае траектория не сможет попасть в режим 2. Тогда $t_1 < t_{max} = \theta \ln\left(\left(x_0 - S\theta/(\gamma\theta+1)\right)/\left(\tilde{x} - S\theta/(\gamma\theta+1)\right)\right)/(\gamma\theta+1)$. Таким образом, t_1 ограничена сверху, и при увеличении T траектория будет все дольше находиться в режиме 2.

Рассмотрим траекторию, которая в момент времени t_* ($t_* << T$, $t_* < t_{\max}$) переключается из режима 1 в режим 2 в точке $(x, M) = (x_*, x_*)$. Тогда условие трансверсальности $x(T) = 0$ записывается как

$$\left(x_* + \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1-\alpha)(r_L\theta+1)x_*}{(\Delta - \alpha r_L)\theta}\right) e^{(r_L-\gamma)(T-t_*)} = \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1-\alpha)(r_L\theta+1)x_*}{(\Delta - \alpha r_L)\theta} e^{\left(\frac{r_L - \Delta}{1-\alpha} - \gamma\right)(T-t_*)}$$

При неограниченном увеличении T выражение слева стремится к 0, а выражение справа возрастает к $S/(r_L - \gamma)$. Отсюда следует, что решение $x(T) = 0$ будет существовать только для $T \le T_{\max}$. Значит если $T > T_{\max}$ принципу максимума будет удовлетворять только траектория, постоянно находящаяся в режиме 2. Следовательно, теорема доказана. ■

3 Агрегирование оптимальных стратегий поведения домашних хозяйств на основе модифицированной модели Рамсея

3.1 Постановка проблемы об агрегированном описании поведения домашних хозяйств

В моделях рамсеевского типа, описанных в предыдущей главе, исследуется поведение репрезентативного домашнего хозяйства, а также зависимость этого поведения от различных экономических факторов. Однако поведение домашних хозяйств по отдельности не отвечает требованию рациональности, и потому описывать каждое домашнее хозяйство как отдельного экономического агента не представляется разумным. Причиной этого является наличие у каждого домашнего хозяйства множества факторов, являющихся случайными и имеющих не только экономический характер (в качестве примеров таких факторов могут выступать увеличение заработной платы, задержки и дискретность выдачи заработной платы, непредвиденные обстоятельства такие, как болезни, поломки бытовой техники). Нивелировать влияние случайных факторов можно на макроэкономическом уровне, когда в качестве экономического агента рассматривается группа домашних хозяйств. В связи с этим становится актуальной задача агрегирования поведения домашних хозяйств, а также задача нахождения условий существования репрезентативного потребителя. Под репрезентативным потребителем здесь понимается такое домашнее хозяйство, которое обладает потребительским поведением, эквивалентным сумме потребительских поведений всех домашних хозяйств.

Эволюция распределения богатства среди разнородных домашних хозяйств в моделях Рамсея, Солоу изучалась в [59], [60]. Однако в этих работах неоднородность домашних хозяйств заключалась только в различии заработной платы и величины начального капитала, в то время как предпочтения домашних хозяйств предполагались одинаковыми для всех домашних хозяйств. Попытка учесть данный фактор была предпринята в работе [61]. Индивидуальные предпочтения в ней задавались различным отношением домашних хозяйств к благам, предоставляемым обществом (например, к социальным выплатам). Величина коэффициента дисконтирования для всех домашних хозяйств была одинаковой. Такое предположение достаточно сильно сужает область применимости результатов [61] в силу того, что горизонт временного планирования, а следовательно, и коэффициент дисконтирования, фактически и является той характеристикой, которая отражает принадлежность домашнего хозяйства к той или иной социальной страте. Попытка учесть неоднородность домашних хозяйств по коэффициенту дисконтирования рассматривается в работах [20], [62]. В этих работах поведение потребителей описывается задачей оптимизации с дискретным временем, изучается зависимость стационарных равновесий от коэффициента дисконтирования и других параметров.

В данном разделе исследуется вопрос агрегирования оптимальных стратегий распределения доходов в модифицированной модели Рамсея [63], [64]. Предполагается, что домашние хозяйства обладают различными начальными состояниями, коэффициентами дисконтирования и заработными платами. Вопрос агрегируемости оптимальных стратегий в модифицированной модели Рамсея сводится к исследованию существования репрезентативного потребителя с постоянным коэффициентом дисконтирования, обладающего суммарным состоянием домашних хозяйств и суммарной заработной платой и кредитно-сберегательное поведение которого совпадает с суммарным кредитно-сберегательным поведением домашних хозяйств на некотором временном интервале.

Предварительно докажем вспомогательное утверждение. Для этого рассмотрим модифицированную модель Рамсея (2.4.2).

***Утверждение 3.1.1.*.** *Синтез оптимального управления* $M(\Delta, x)$ *задачи* (2.4.2) *возрастает относительно переменных* x *и* Δ *при* $x > x_4$ *и* $r_D + (1-\alpha)/\theta > \Delta > r_D - \gamma(1-\alpha)$.

Доказательство. Рассмотрим, как устроены траектории в случае наличия у домашнего хозяйства сбережений. Этот случай соответствует области $M < x$. Условие максимума гамильтониана по управлению можно записать как $\partial H/\partial M = \alpha M^{\alpha-1} - \phi(r_D + 1/\theta) + \mu = 0$. Тогда $M < x$ при $\phi > \alpha x^{\alpha-1}/(r_D + 1/\theta)$ и $\mu = 0$. Максимум гамильтониана достигается при $M = \left[\phi(r_D + 1/\theta)/\alpha\right]^{1/(\alpha-1)}$, и оптимальная траектория меняется согласно закону

$$\begin{aligned} &\dot{x} = S - (r_D + 1/\theta)\left[\phi(r_D + 1/\theta)/\alpha\right]^{1/(\alpha-1)} + (r_D - \gamma)x, \\ &\dot{\phi} = \phi(\Delta + (1-\alpha)\gamma - r_D). \end{aligned}$$

Полученную нелинейную систему можно свести к линейной, если рассматривать ее не в терминах сопряженной переменной ϕ, а в терминах управления M. Для этого сделаем замену переменных $M = \left[\phi(r_D + 1/\theta)/\alpha\right]^{1/(\alpha-1)}$

$$\begin{cases} \dot{x} &= S + (r_D - \gamma)x - (r_D + 1/\theta)M, \\ \dot{M} &= ((r_D - \Delta)/(1-\alpha) - \gamma)M. \end{cases} \qquad (3.1.1)$$

Отсюда следует, что решением $M(\Delta, x)$ является при $x > x_4$ траекторией системы (3.1.1), проходящей через точку (x_4, x_4) в момент времени $t = \tau_4(\Delta, x)$ (более подробно это доказательство приводится в предыдущей главе).

Покажем, что $x(t)$ на отрезке $[0, \tau_4(\Delta, x)]$ убывает. Допустим противное: $x(t)$ не убывает в некоторой точке $t = \hat{t} < \tau(x(0))$. Это означает неотрицательность выражения $S + (r_D - \gamma)x(\hat{t}) - (r_D + 1/\theta)M(\hat{t})$. Тогда в силу убывания $M(t)$ ($r_D < \Delta + (1-\alpha)\gamma$) $dx/dt \geq S + (r_D - \gamma)x(\hat{t}) - (r_D + 1/\theta)M(\hat{t})$ при $t \geq \hat{t}$. Значит $x(t)$ возрастает при всех $t \geq \hat{t}$. Однако $x(\hat{t}) > x_1$, а $x(\tau(x(0)) = x_1$. Получили противоречие. Следовательно, $x(t)$ монотонно убывает на отрезке $[0, \tau_4(\Delta, x)]$.

Покажем монотонность $x_4(\Delta)$. Для доказательства этого рассмотрим функцию

$$f(x_4,\Delta)=\frac{1+r_D\theta}{1+\gamma\theta}\int_0^1\left(p+\frac{1-p}{x_4}\frac{S\theta}{1+\gamma\theta}\right)^{\alpha-1}p^{\theta(\Delta-\alpha\gamma)/(1+\gamma\theta)}dp-1$$

Производная $\partial f/\partial x_4$ положительна, $\partial f/\partial\Delta$ отрицательна. Тогда из теоремы о неявной функции $\partial x_4/\partial\Delta>0$.

Покажем монотонное возрастание $M(\Delta,x)$ по x. При $x<x_4$ объем наличных денег равен x. При $x>x_4$ рассмотрим производную $M(\Delta,x)$ по x:

$$\frac{dM}{dx}=\frac{((r_D-\Delta)/(1-\alpha)-\gamma)M}{S+(r_D-\gamma)x-(r_D+1/\theta)M}.$$

Из приведенного выше анализа следует, что $M(t)$ и $x(t)$ убывают, следовательно, производная положительна, и $M(\Delta,x)$ возрастает по x.

Покажем монотонное возрастание $M(\Delta,x)$ по Δ. Пусть $\Delta_1>\Delta_2$. Допустим, что $M(\Delta_2,x)>M(\Delta_1,x)$. Из монотонности x_4 следует, что $x_4(\Delta_1)>x_4(\Delta_2)$. Тогда решение задачи для обоих коэффициентов дисконтирования описывается системой (3.1.1). Выше было показано, что в этом случае траектории проходят через точку (x_4,x_4). Следовательно, верно неравенство $M(\Delta_1,x_4(\Delta_1))=x_4(\Delta_1)>x_4(\Delta_2)=M(\Delta_2,x_4(\Delta_2))$. Тогда, в силу непрерывности траекторий системы (3.1.1), траектории $M(\Delta,x)$, соответствующие разным значениям Δ, пересекаются. Рассмотрим самую левую точку пересечения $(\hat{x},\hat{M})$. Мы можем сравнить касательные траекторий $M(\Delta,x)$, соответствующих различным Δ:

$$\left.\frac{dM}{dx}\right|_{\Delta_1}=\frac{((r_D-\Delta_1)/(1-\alpha)-\gamma)\hat{M}}{S+(r_D-\gamma)\hat{x}-(r_D+1/\theta)\hat{M}}>\frac{((r_D-\Delta_2)/(1-\alpha)-\gamma)\hat{M}}{S+(r_D-\gamma)\hat{x}-(r_D+1/\theta)\hat{M}}=\left.\frac{dM}{dx}\right|_{\Delta_2}>0.$$

Однако, если траектории пересекаются, то неравенство меняется на противоположное. Получили противоречие. Следовательно, при $x>x_4(\Delta_1)$ объем наличных денег при Δ_1 выше, чем при Δ_2.

Замечание. Функция $M(\Delta, x)$ *монотонна на всей области определения* $x > 0$ *и* $\Delta > \alpha \max(r_D, \gamma)$. *Доказательство этого факта аналогично приведенному выше утверждению.*

Экономическая интерпретация доказанного утверждения такова: потребительские расходы домашних хозяйств увеличиваются с увеличением коэффициента дисконтирования. В моделях с эндогенными коэффициентами дисконтирования часто предполагается, что с ростом относительного благосостояния потребитель становится более терпеливым, т.е. уменьшается его коэффициент дисконтирования [65]. Принимая во внимание это предположение, получим, что в задаче (2.4.2) более богатые домашние хозяйства обладают большей нормой сбережения.

При анализе поведения домашних хозяйств будем предполагать, что при решении вопроса, каким образом распределить имеющиеся средства, потребители используют метод скользящего планирования. Скользящее планирование предполагает, что в каждый момент времени экономический агент принимает решение о перераспределении своих средств, ориентируясь на текущую экономическую конъюнктуру. Когда информационные переменные, отражающие состояние рынка, меняются, экономический агент корректирует свое поведение, заново решая задачу (2.4.2). В этом случае поведение домашнего хозяйства описывается начальным значением фазовой переменной, уровнем заработной платы, темпом ее роста, параметрами индивидуальных предпочтений (коэффициент отвращения к риску, коэффициент дисконтирования) и процентной ставкой по депозитам.

Рассмотрим n домашних хозяйств с параметрами X_i, S_i, Δ_i (величина начального капитала, заработной платы и коэффициента дисконтирования соответственно), где $i = 1,...,n$. Остальные параметры модели отвечают за экономическую конъюнктуру, поэтому мы будем считать их одинаковыми для всех домашних хозяйств. Тогда распределение средств M_i, D_i каждого домашнего хозяйства описывается задачей (2.4.2). Задача агрегирования домашних хозяйств сводится к нахождению такого Δ (если оно существует), при котором домашнему хозяйству с параметрами $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$, Δ соответствует $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ наличных денег.

Решение задачи (2.4.2) линейно относительно S. Обозначим решение задачи (2.4.2) с единичной заработной платой как $m(\Delta, x)$. Тогда решением задачи агрегирования является такое $\hat{\Delta}$, что $m(\hat{\Delta}, \sum_{i=1}^{n} x_i S_i / \sum_{i=1}^{n} S_i) = \sum_{i=1}^{n} m(\Delta_i, x_i) S_i / \sum_{i=1}^{n} S_i$, где $x_i = X_i / S_i$.

3.2 Проблема существования репрезентативного потребителя

Задачу агрегирования можно обобщить на произвольное количество домашних хозяйств [66]. Рассмотрим функцию распределения заработной платы домашних хозяйств в начальный момент времени по коэффициенту дисконтирования и начальному благосостоянию $S_0(x, \Delta)$, определенную на некотором множестве $\Omega = [\Omega_X \times \Omega_\Delta]$. Будем считать, что коэффициент дисконтирования домашнего хозяйства не меняется со временем. Функция распределения заработной платы $S(x, \Delta, t)$ меняется с течением времени из-за изменения у домашних хозяйств уровня благосостояния x. Из условия неразрывности потока для $S(x(t), \Delta, t)$ следует, что $\int_\Omega S(x, \Delta, t) dx d\Delta$ является константой. Не ограничивая общности, можно считать эту константу равной 1. Тогда задачу о репрезентативном потребителе можно сформулировать так: существует ли такое $\hat{\Delta}$, что $m(\int_\Omega S(x, \Delta, t) x dx d\Delta, \hat{\Delta}) = \int_\Omega S(x, \Delta, t) m(x, \Delta) dx d\Delta$. Обозначим $\int_\Omega S(x, \Delta, t) x dx d\Delta$ как $X(t)$, а $\int_\Omega S(x, \Delta, t) m(x, \Delta) dx d\Delta$ как $M(t)$.

Функция $S(x,\Delta,t)$ однозначно определяется по начальному распределению $S_0(x,\Delta)$. Зависимость функции распределения заработной платы $S(x,\Delta,t)$ от времени связана с изменением у домашних хозяйств благосостояния $x(t)$. Скорость изменения благосостояния равна $f(x,\Delta)=1+(r_D-\gamma)x-(r_D+1/\theta)m(x,\Delta)$. Тогда должно выполняться уравнение неразрывности потока заработной платы:

$$\partial S(x,\Delta)/\partial t+\partial(S(x,\Delta)\,f(x,\Delta))/\partial x=0. \qquad (3.2.1)$$

Утверждение 3.2.1. *Рассмотрим* n, $n>0$, *домашних хозяйств с одинаковыми параметрами* x, Δ, S. *Тогда решением задачи агрегирования будет домашнее хозяйство с коэффициентом дисконтирования, равным* Δ.

Доказательство: Имеем $m(\Delta,\sum_{i=1}^{n}xS/\sum_{i=1}^{n}S)=m(\Delta,x)=\sum_{i=1}^{n}m(\Delta,x)S/\sum_{i=1}^{n}S$.

Утверждение 3.2.2. *Рассмотрим произвольную функцию начального распределения заработной платы домашних хозяйств* $S_0(x,\Delta)$. *Тогда* $m(\int_\Omega S(x,\Delta)xdxd\Delta,\Delta)$ *сходится при* $\Delta\to\Delta_{\min}+0$, *где* $\Delta_{\min}=\alpha\max(r_D,\gamma)$.

Кроме того, если выполнено условие

$$\int_\Omega S(x,\Delta,t)m(x,\Delta)dxd\Delta>m(\int_\Omega S(x,\Delta,t)xdxd\Delta,\Delta_{\min}) \qquad (3.2.2)$$

то задача агрегирования имеет решение.

Доказательство. При $\Delta\to+\infty$ объем наличных денег $m(X,\Delta)$ становится равным X. Из неотрицательности и монотонности функции $m(X,\Delta)$ по Δ следует существование предела при $\Delta\to\alpha\max(r_D,\gamma)+0$. Обозначим его как $\hat{M}$. Тогда область значений $m(X,\cdot)$: $(\hat{M},X]$. Это означает, что при выполнении условия (3.2.2) будет существовать решение задачи агрегирования.

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнено соотношение* (3.2.2), *коэффициент дисконтирования домашних хозяйств принадлежит интервалу*

$r_D-(1-\alpha)\gamma<\Delta<r_D+(1-\alpha)/\theta$, *и все домашние хозяйства имеют сбережения. Также потребуем, чтобы* $\mathrm{supp}(S_0(x,\Delta))\subset B\subset\Omega$, где B - некоторое подмножество $\Omega=\{r_D-\gamma(1-\alpha)\le\Delta\le r_D+(1-\alpha)/\theta,\ x_4(\Delta)\le x\}$ (определение $x_4(\Delta)$ приводится в разделе 2.4). $S_0(x,\Delta)$ *была гладкой функцией на* Ω *и равной нулю на границе области* $\partial\Omega_X$, *а зависимость коэффициента отвращения к риску от коэффициента дисконтирования* $\alpha(\Delta)$ *была непрерывна. Тогда репрезентативное домашнее хозяйство с постоянным коэффициентом дисконтирования в некоторой окрестности* $t=0$ *существует тогда и только тогда, когда коэффициенты дисконтирования и отвращения к риску домашних хозяйств удовлетворяют соотношению* $(r_D-\Delta)/(1-\alpha(\Delta))=\beta$, *где* β *- константа из интервала* $[1/\theta;\gamma]$.

Доказательство. Используя уравнение неразрывности потока (3.2.1), выпишем, как будет меняться со временем суммарное благосостояние и суммарный объем наличных денег:

$$\frac{dX}{dt}=\int_\Omega x\frac{\partial S}{\partial t}dxd\Delta=-\int_\Omega x\frac{\partial(Sf)}{\partial x}dxd\Delta=\int_{\Omega_\Delta}\left(-xSf\,|_{\partial\Omega_X}+\int_{\Omega_X}Sfdx\right)d\Delta,$$

$$\frac{dM}{dt}=\int_\Omega m\frac{\partial S}{\partial t}dxd\Delta=-\int_\Omega m\frac{\partial(Sf)}{\partial x}dxd\Delta=\int_{\Omega_\Delta}\left(-mSf\,|_{\partial\Omega}+\int_{\Omega x}Sf\frac{\partial m}{\partial x}dx\right)d\Delta.$$

Выше было показано (*Утверждение 3.1.1*), что когда домашние хозяйства имеют сбережения, для них выполнено

$$\frac{\partial m}{\partial x}=\frac{((r_D-\Delta)/(1-\alpha)-\gamma)m}{1+(r_D-\gamma)x-(r_D+1/\theta)m}. \qquad (3.2.3)$$

Также по условию на границе $\partial\Omega_X$ функция $S(x,\Delta,t)$ равна нулю. Тогда суммарное благосостояние и суммарный объем наличных денег равны

$$\frac{dX}{dt}=\int_{\Omega_\Delta}\int_{\Omega_X}Sfdxd\Delta=1+(r_D-\gamma)X-(r_D+1/\theta)M, \qquad (3.2.4)$$

$$\frac{dM}{dt} = \int\limits_{\Omega_\Delta}\int\limits_{\Omega_X} Sf\,\frac{((r_D-\Delta)/(1-\alpha)-\gamma)mdxd\Delta}{1+(r_D-\gamma)x-(r_D+1/\theta)m} = \int\limits_{\Omega_\Delta}\int\limits_{\Omega_X} S\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha}-\gamma\right)mdxd\Delta. \qquad (3.2.5)$$

Выпишем задачу агрегирования: $m(\hat{\Delta}, X(t)) = M(t)$. Коэффициент дисконтирования $\hat{\Delta}$ не зависит от времени тогда и только тогда, когда $\dot{M} = \dot{X}\partial m(\hat{\Delta}, X(t))/\partial x$. Используя (3.2.3)-(3.2.5), получим, что необходимым и достаточным условием стационарности коэффициента дисконтирования для агрегированного домашнего хозяйства является условие

$$\int\limits_{\Omega} S(x,\Delta,t)\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha(\Delta)}-\gamma\right)m(\Delta,x)dxd\Delta = \left(\frac{r_D-\hat{\Delta}}{1-\alpha(\hat{\Delta})}-\gamma\right)M(t). \qquad (3.2.6)$$

Достаточность условия $(r_D-\Delta)/(1-\alpha(\Delta)) = \beta$ для выполнения (3.2.6) очевидна. Для доказательства необходимости рассмотрим функцию

$$g(t) = \int\limits_{\Omega} S(x,\Delta,t)\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha(\Delta)}-\frac{r_D-\hat{\Delta}}{1-\alpha(\hat{\Delta})}\right)m(\Delta,x)dxd\Delta.$$

При выполнении (3.2.6) эта функция тождественно равна нулю. Продифференцируем $g(t)$ используя схему, применявшуюся при дифференцировании $M(t)$. Получим

$$\frac{dg}{dt} = \int\limits_{\Omega} S(x,\Delta,t)\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha(\Delta)}-\frac{r_D-\hat{\Delta}}{1-\alpha(\hat{\Delta})}\right)\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha(\Delta)}-\gamma\right)m(\Delta,x)dxd\Delta.$$

Повторяя процедуру, получим, что

$$g^{(n)}(t) = \int\limits_{\Omega} S(x,\Delta,t)\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha(\Delta)}-\frac{r_D-\hat{\Delta}}{1-\alpha(\hat{\Delta})}\right)\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha(\Delta)}-\gamma\right)^n m(\Delta,x)dxd\Delta.$$

Сведем интеграл $g^{(n)}(t)$ к повторным:

$$g^{(n)}(t) = \int\limits_{\Omega_\Delta} F(\Delta,t)\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha(\Delta)}-\frac{r_D-\hat{\Delta}}{1-\alpha(\hat{\Delta})}\right)\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha(\Delta)}-\gamma\right)^n d\Delta,$$

где $F(\Delta,t) = \int\limits_{\Omega_X} S(x,\Delta,t)m(x,\Delta)dx$. Для справедливости (3.2.6) необходимо потребовать, чтобы все функции $g^{(n)}(t) = 0$. Это условие эквивалентно

$$\int_{\Omega_\Delta} F(\Delta,t)\left(\frac{r_D-\Delta}{1-\alpha(\Delta)}-\gamma\right)^n \Big/ \left(\frac{r_D-\hat{\Delta}}{1-\alpha(\hat{\Delta})}-\gamma\right)^n d\Delta = A, n\in\mathbb{N}, \qquad (3.2.7)$$

где $A=\int_{\Omega_\Delta} F(\Delta,t)d\Delta$. Рассмотрим непрерывную функцию $z(\Delta)=((r_D-\Delta)/(1-\alpha(\Delta))-\gamma)/((r_D-\hat{\Delta})/(1-\alpha(\hat{\Delta}))-\gamma)$. Из определения z следует ее положительность. Если $z(\Delta)$ постоянна на Ω_Δ, то (3.2.7) справедливо. Если $z(\Delta)$ строго монотонна на Ω_Δ, то определена $\Delta^{-1}(z)$. Если $\partial z/\partial\Delta=0$ на некотором отрезке $[\Delta_1,\Delta_2]$, то вместо Ω_Δ в интеграле (3.2.6) можно рассмотреть $\Omega_\Delta\backslash[\Delta_1,\Delta_2]$. Тогда условие выполнения (3.2.6) эквивалентно условию

$$\int_Z G(z,t)z^n dz = A.$$

Здесь $G(y,t)=\sum_{\{\Delta:z(\Delta)=y\}} F(\Delta,t)/(\partial z/\partial\Delta)$, $Z=\{y:\exists\Delta\in\Omega_\Delta, z(\Delta)=y, \partial z/\partial\Delta\neq 0\}$. Из интегрируемости (3.2.6) по Риману следует интегрируемость по Лебегу, следовательно, мы можем суммировать интеграл (3.2.6) по разбиениям области значений на интервалы. Это влечет за собой сходимость сумм в определенной выше функции $G(z,t)$. Таким образом, определение функции $G(z,t)$ корректно. Рассмотрим преобразование Лапласа функции $G(z,t)$ при фиксированном времени. Для корректности определения преобразования Лапласа доопределим функцию $G(z,\hat{t})$ вне множества Z нулем. Тогда преобразование Лапласа равно

$$L(p)=\int_0^\infty G(z,\hat{t})\exp(-pz)dz.$$

Производные преобразования Лапласа в нуле равны

$$L^{(n)}(0)=\int_0^\infty G(z,\hat{t})(-1)^n z^n dz=(-1)^n\int_Z G(z,t)z^n dz=(-1)^n A.$$

Тогда в окрестности нуля преобразование Лапласа

$$L(p)=\sum_{i=0}^\infty A\frac{(-p)^i}{i!}=Ae^{-p}.$$

Применяя теорему единственности для преобразования Лапласа, получим, что $G(z,\hat{t}) = A\delta(z-1)$. Это означает, что (3.2.6) справедливо только тогда, когда $z(\Delta)=1$ при всех коэффициентах дисконтирования. Нетрудно заметить, что данное условие эквивалентно условию из формулировки теоремы. Следовательно, необходимость доказана.

Таким образом, найдены необходимые и достаточные условия агрегируемости домашних хозяйств и существования репрезентативного потребителя с постоянным по времени коэффициентом дисконтирования. Выполнение условия $r_D - \Delta = (1-\alpha(\Delta))\beta$ говорит о наличии связи между коэффициентом межвременного предпочтения Δ и коэффициентом отвращения к риску α.

4 Численный метод и инструментальные средства для анализа спроса на потребительские кредиты, наличные деньги и предложение депозитов

4.1 Моделирование скорости обращения денег и идентификация модели

Для расчетов по модели использовались данные, публикуемые официальными статистическими органами стран постсоветского пространства (например, Центральным Банком РФ и Госкомстатом).

Поскольку деньги есть совокупность активов, используемых при совершении сделок, то количество денег есть количество этих активов. Как измеряется количество денег в России? В силу того, что в различных операциях применяется не один вид активов, а несколько, ответ на этот вопрос отнюдь не однозначен. При совершении сделок люди могут пользоваться различными видами активов, хотя при этом некоторые из них более удобные, нежели другие. Соответственно, существует и множество различных способов измерения количества денег.

Первый вид активов, который, очевидно, должен быть включен в общее количество денег, это наличные деньги – сумма выпущенных бумажных и металлических денег. В большинстве повседневных операций в качестве средства обращения используются наличные деньги. Центральные банки рассчитывают различные показателями структуры денежной массы, называемых денежными агрегатами. Денежные агрегаты – это виды денег и денежных средств, отличающиеся друг от друга степенью ликвидности (возможностью быстрого превращения в наличные деньги). Объем наличных денег, находящихся в обращении, характеризуется денежным агрегатом M0.

Вторым видом активов, применяемых для совершения разного рода сделок, являются вклады до востребования, то есть средства, которые люди держат на текущих счета. Поэтому при подсчете количества наличных денег, находящихся у домашних хозяйств, средства, находящиеся на счетах до востребования, прибавлялись к денежному агрегату М0.

Наличные деньги нужны людям для совершения сделок. Чем больше нужно денег для совершения сделок, тем больше денег находится в ограничении. В странах постсоветского пространства на протяжении последнего десятилетия происходили значительные изменения в потребительском поведении домашних хозяйств: из-за роста благосостояния домашних хозяйств в странах постсоветского пространства начал зарождаться средний слой, который стал покупать товары длительного пользования. Для этого им понадобилось хранить больший объем наличных денег, из-за чего скорость обращения денег стала снижаться. В связи с этим для идентификации модифицированной модели Рамсея для анализа поведения домашних хозяйств необходимо описать изменение скорости обращения денег.

Для проведения идентификации параметров собранная статистика нуждается в предварительном анализе. Необходимость этого обуславливается наличием в экономических характеристиках сезонных факторов, а также случайных колебаний. В данной работе предполагается, что поведение домашних хозяйств обладает инерцией, и поэтому малые краткосрочные и прогнозируемые домашними хозяйствами флуктуации экономических параметров (например, увеличение заработной платы за счет выплаты премий и бонусов) не оказывают существенного долгосрочного влияния на поведение домашних хозяйств. Поэтому модифицированная модель Рамсея применяется для воспроизведения тренда экономических величин. Затем на полученный тренд накладываются сезонные колебания, которые рассчитываются эконометрическими методами. В связи с вышесказанным, для воспроизведения тренда идентификацию параметров домашних хозяйств необходимо проводить по данным, в которых исключены сезонные и случайные факторы.

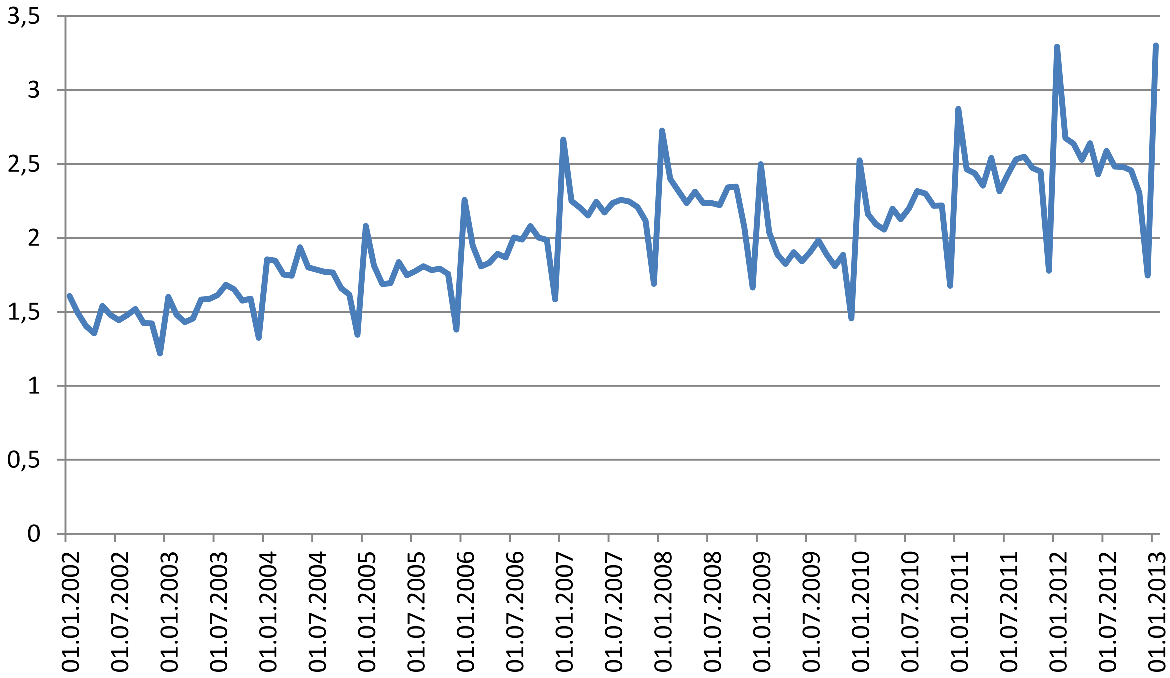

Рис. 3. Величина коэффициента ограничения ликвидности по историческим данным РФ за 2002-2013гг..

Природа возникновения сезонности в месячном распределении экономических индексов домашних хозяйств может быть различна. Например, доходы домашних хозяйств имеют ярко выраженный пик в декабре, что обусловлено годовыми премиями. Меньшие пики наблюдаются и в месяцы, последующие за завершением квартала. Кроме того, начиная с 2005 года наблюдаются пики в январе, связанные с «новогодними каникулами». На расходы домашних хозяйств накладывается как сезонность величины доходов, так и увеличение расходов в период «горячего сезона» отпусков.

Для избавления от сезонных факторов и сглаживания входных временных рядов использовался метод скользящего среднего.

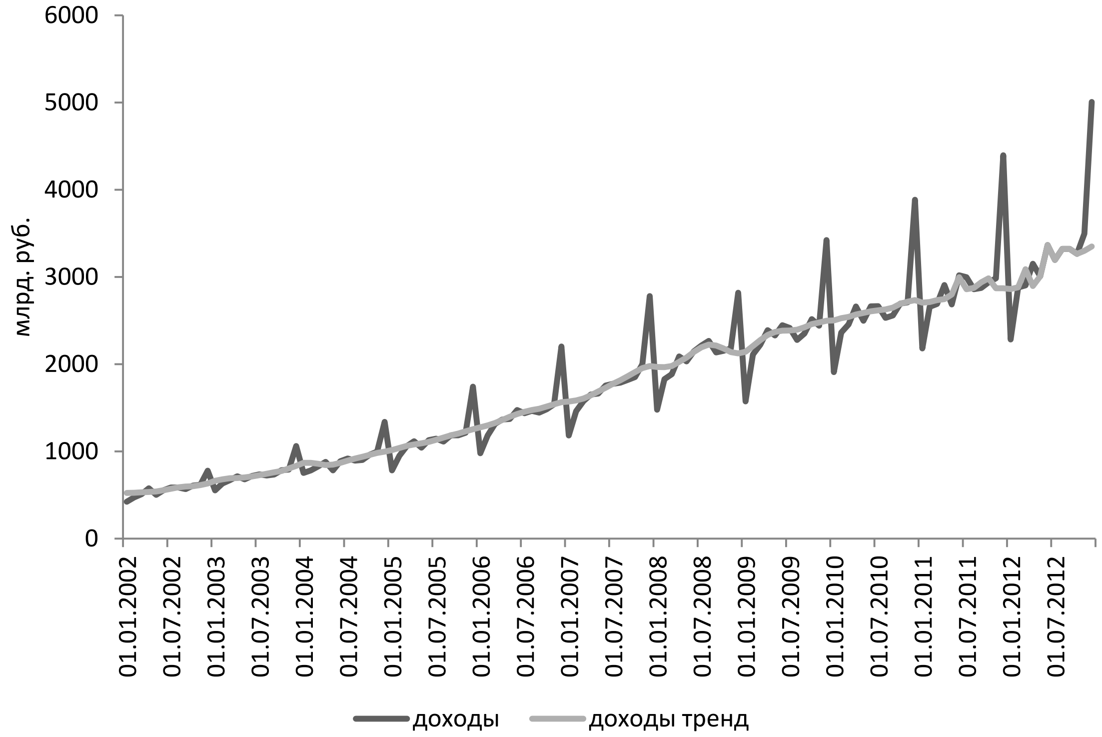

Рис. 4. Ежемесячные доходы домашних хозяйств за 2002-2013гг..

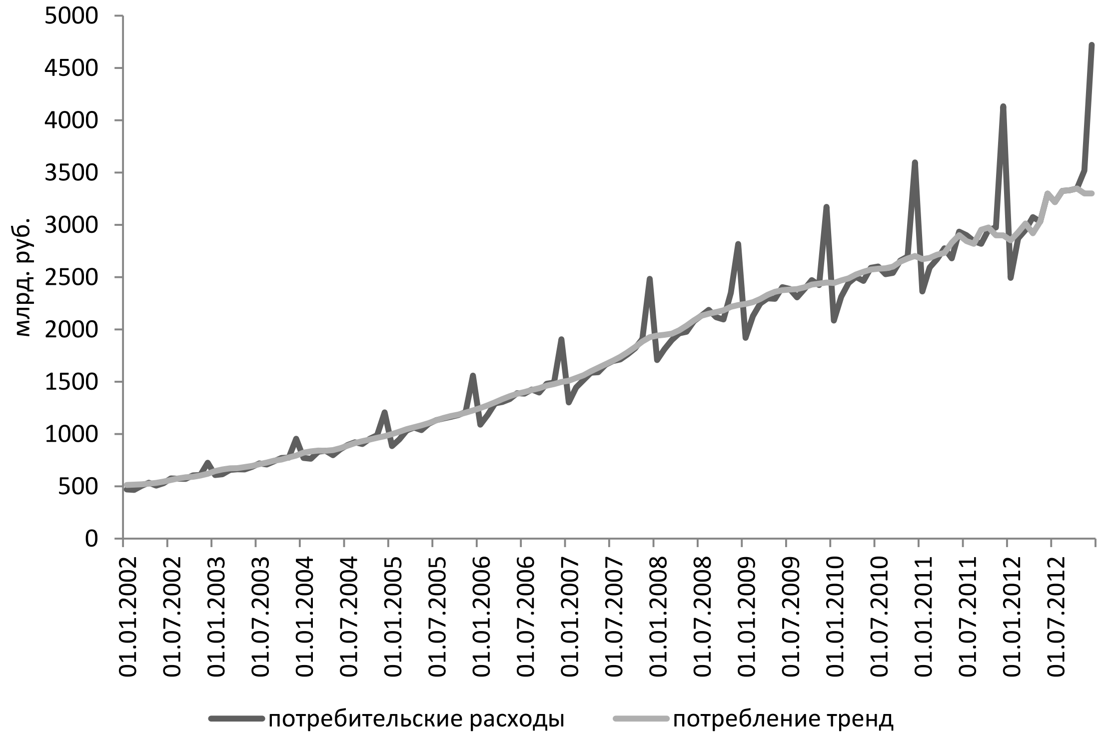

Рис. 5. Ежемесячные расходы домашних хозяйств за 2002-2013гг..

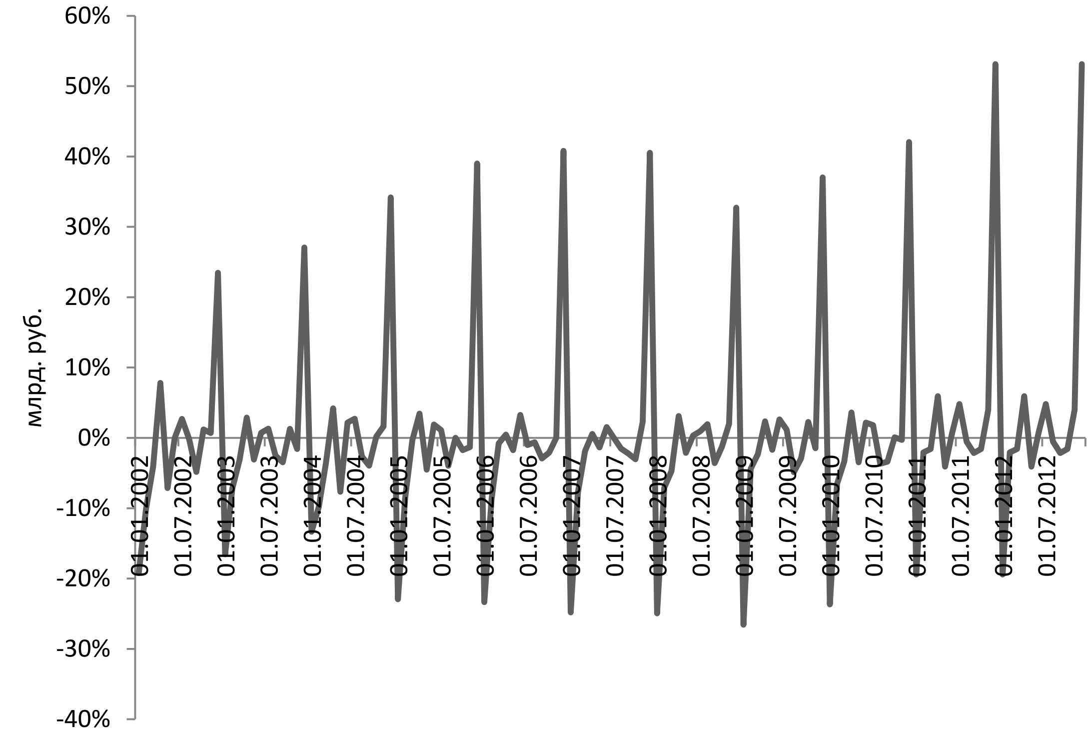

Рис. 6. Среднестатистическое отклонение заработной платы от тренда.

Рассмотрим среднестатистическое отклонение заработной платы от тренда. Нетрудно заметить, что отклонение устроено специфическим образом:

- в январе мы наблюдаем падение доходов относительно тренда приблизительно на 20%;
- в феврале-апреле наблюдается постепенный рост доходов относительно тренда. В апреле значение среднестатистического отклонения от тренда обычно около 2%;
- в мае, августе, сентябре, октябре, ноябре - небольшое падение в 1-2% относительно тренда;
- июнь, июль – превышение относительно тренда в 1-2%;
- декабрь – превышение относительно тренда в среднем на 30%;

Исходя из приведенного анализа среднестатистического отклонения доходов домашних хозяйств следует, что на доходы оказывает влияние не только количество рабочих дней в месяце, но и сезонность внутри года.

В результате сезонной декомпозиции объема наличных денег и потребления мы получаем тренд исторических значений коэффициента ликвидности:

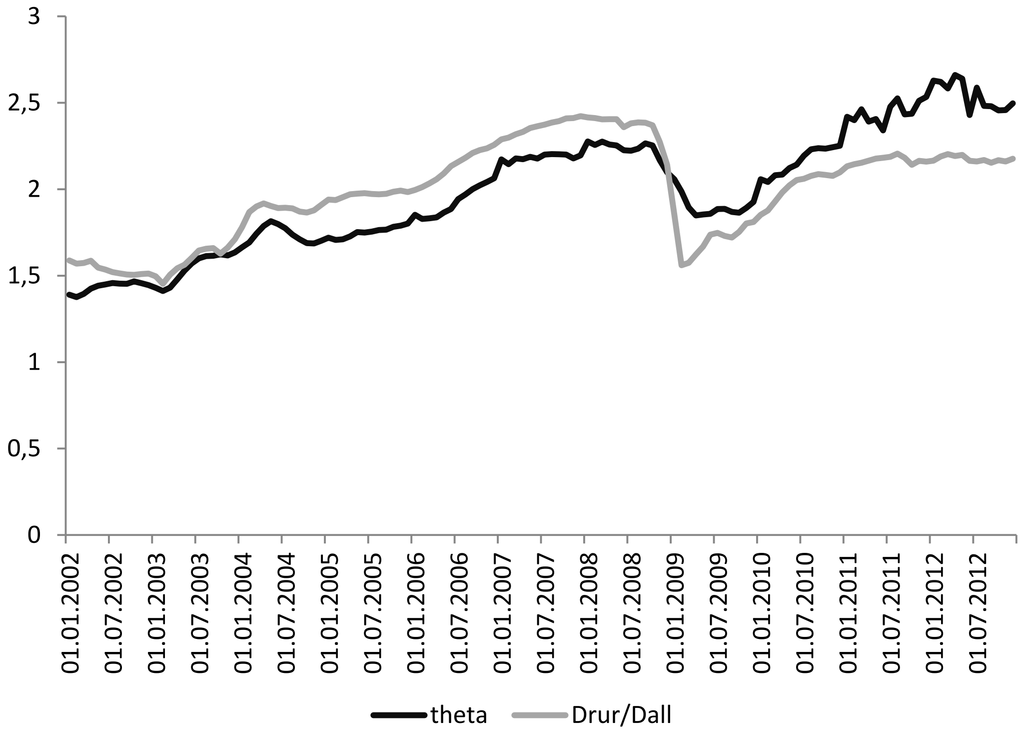

Рис. 7. Тренд коэффициента ограничения ликвидности

Для описания коэффициента ограничения ликвидности необходимо понять причину появления спроса на наличные деньги. Для этого обратимся к теории транзакционного спроса на деньги. Согласно этой теории деньги – подчиненный актив и, в отличие от остальных видов активов, накапливаются лишь с целью совершения покупок. Эта теория объясняет, почему население не вкладывает все деньги в сбережения, а все-таки держит часть средств на руках или на текущих счетах.

Наиболее популярная теория спроса на деньги, рассматривающая его с точки зрения оптимизации денежных запасов, основана на выводах, к которым пришли независимо друг от друга Уильям Баумоль и Джеймс

Тобин в середине 50-х годов 20-го века. Сегодня эта теория широко известна как модель Баумоля-Тобина. И Баумоль, и Тобин указывали, что индивидуумы поддерживают денежные запасы так же, как фирмы поддерживают товарные запасы. В любой момент времени домашнее хозяйство держит часть своего богатства в форме денег для покупок в будущем. Если оно хранит значительную часть богатства в денежной форме, то всегда располагает деньгами для совершения сделок. Если же оно хранит небольшую часть своего богатства в форме денег, ему придется конвертировать другое богатство в деньги всякий раз, когда нужно сделать покупку.

Таким образом, перед домашним хозяйством возникает дилемма. Храня значительную часть богатства в денежной форме, домашнее хозяйство лишается процента, который оно бы получало, если бы вместо денег имело приносящие процент активы. Но в то же время домашнее хозяйство снижает транзакционные издержки частой конвертации других активов в деньги.

Баумоль и Тобин формализовали эту идею и получили оптимальный объем наличных денег, который нужно держать на руках для обеспечения непрерывности потребления:

$$M = \sqrt{\frac{CF}{2r_D}},$$

где F - расходы на перевод средств из активов в наличные деньги. Отсюда можно найти коэффициент ограничения ликвидности:

$$\theta = \sqrt{\frac{F}{2r_D C}}.$$

Полученная зависимость коэффициента ограничения ликвидности не отражает изменения, наблюдаемые на исторических данных (рис. 8).

Для выделения факторов, которые оказывают влияние на скорость обращения денег, исследовалась зависимость коэффициента ограничения ликвидности от различных макроэкономических параметров. Оказалось, что полученный тренд коэффициента ликвидности коррелирует с долей рублевых депозитов домашних хозяйств в общей сумме депозитов (рис. 7) [67]. Таким образом, коэффициент ограничения ликвидности можно описать формулой

$$\theta = p\frac{D_{RUR}}{D_{ALL}} + k \ .$$

Значение параметров p, k были найдены с помощью построения регрессионной модели. Были получены значения $p = 3.671, k = -0.765$. Коэффициент детерминации для построенной модели $R^2 = 0.646$.

Найденная зависимость говорит о том, что при принятии решения о количестве наличных денег, которые надо хранить для обеспечения потребления, население ориентируется на макроэкономическую ситуацию в стране и, прежде всего, на курс национальной валюты. Например, в случае девальвации национальной валюты реальная ставка процента валютных депозитов возрастает (за счет роста цены валюты), что приводит к перераспределению не только депозитов между рублевыми и валютными, но и к изменению коэффициента ограничения ликвидности. Эту картину мы наблюдали в 2008-2009гг (рис. 7).

Возникает вопрос: каким образом мы можем описать отношение рублевых и валютных депозитов? Для этого рассмотрим модель распределения сбережений домашних хозяйств между валютными и рублевыми депозитами. Домашние хозяйства хранят сбережения в валюте D_{UE} и в рублях D_{RUR}. Реальная ставка процента по валютным депозитам равна $r_{UE} + d\rho / dt$, где r_{UE} - средневзвешенная процентная ставка по валютным депозитам, а $d\rho / dt$ - скорость изменения курса рубля. Ставка по рублевым депозитам равна r_{RUR}. Будем считать, что в зависимости от разницы процентных ставок между двумя видами депозитов домашнее хозяйство перераспределяет свои депозиты, т.е.

$$\frac{dD_{RUR}}{dt} = r_{RUR}D_{RUR} - (r_{UE} + d\rho / dt - r_{RUR})\lambda(D_{UE} + D_{RUR}) \ ,$$

$$\frac{dD_{UE}}{dt}=(r_{UE}+d\rho/dt)D_{UE}+(r_{UE}+d\rho/dt-r_{RUR})\lambda(D_{UE}+D_{RUR})\,,$$

где λ - некоторая постоянная величина.

Рассмотрим, как будет меняться отношение валютных депозитов к рублевым с течением времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{D_{UE}}{D_{RUR}}\right)=(r_{UE}+\frac{d\rho}{dt}-r_{RUR})\frac{D_{UE}}{D_{RUR}}+(r_{UE}+d\rho/dt-r_{RUR})\lambda(D_{UE}+D_{RUR})\left(\frac{1}{D_{RUR}}+\frac{D_{UE}}{D_{RUR}^2}\right).$$

После преобразования получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{D_{UE}}{D_{RUR}}\right)=(r_{UE}+\frac{d\rho}{dt}-r_{RUR})\frac{D_{UE}}{D_{RUR}}+(r_{UE}+d\rho/dt-r_{RUR})\lambda\left(\frac{D_{UE}}{D_{RUR}}+1\right)^2.$$

Согласно найденной выше закономерности для коэффициента ограничения ликвидности выполнено

$$\theta=p\frac{1}{D_{UE}/D_{RUR}+1}+k\,.$$

Обозначим D_{UE}/D_{RUR} как w и запишем дифференциальное уравнение на коэффициент ограничения ликвидности:

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{p}{(1+w)^2}\frac{dw}{dt}=-p\left(\frac{r_{UE}+\frac{d\rho}{dt}-r_{RUR}}{(1+w)^2}w+\left(r_{UE}+\frac{d\rho}{dt}-r_{RUR}\right)\lambda\right)=$$

$$=\left(r_{RUR}-r_{UE}-\frac{d\rho}{dt}\right)\lambda p+\left(r_{RUR}-r_{UE}-\frac{d\rho}{dt}\right)\left(\theta-\frac{\theta^2}{p}\right).$$

На рисунке 7 показан график, полученный по расчетам согласно формуле при $p=3,671$ и $\lambda=1$. При этом значения разницы процентной ставки искусственно ставились в рамки [-3%;2%] (то есть при достижении верхней или нижней границы население перестает реагировать на дальнейшее изменение процентной ставки в том же направлении).

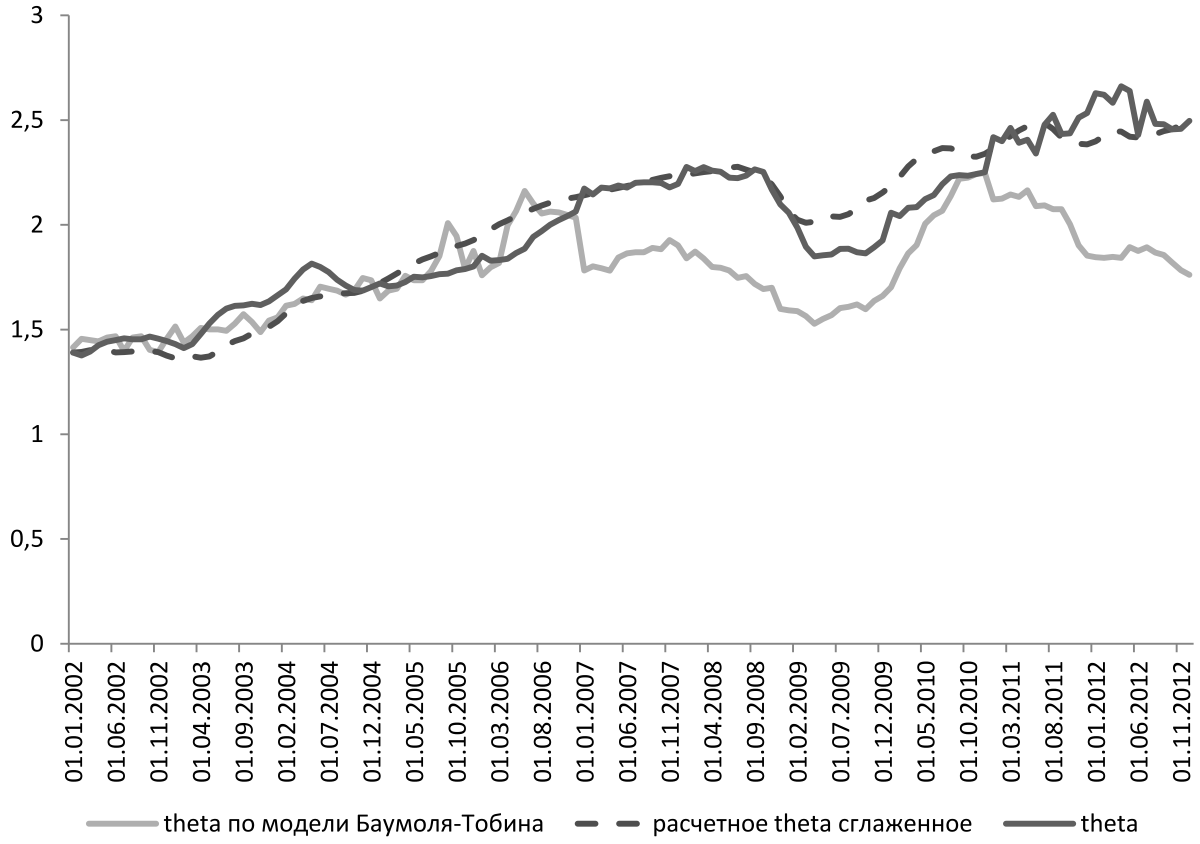

Рис. 8. Идентификация коэффициента ограничения ликвидности

Из графика видно, что до января 2005 года модель Баумоля-Тобина описывает коэффициент ограничения ликвидности лучше, чем описанная ранее модель распределения сбережений между валютными и рублевыми депозитами. Возможным объяснением этого является то, что после дефолта 98г. домашние хозяйства привыкли к постепенному обесцениванию национальной валюты, но со стабилизацией экономической ситуации в стране домохозяйства начали сильнее реагировать на изменение курса рубля.

Другой проблемой при моделировании кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств является несовершенство статистических данных стран постсоветского пространства. Дело в том, что в связи со значительной долей «теневой» экономики большая доля населения получает зарплату «в конвертах» и эти доходы домашних хозяйств государственные органы статистики не учитывают. Кроме того, после экономических потрясений 90-х годов многие предпочитают хранить свои средства в валюте (в основном, в долларах и евро). Хранимая в валюте населением наличность не учитывается в статистике объема денежной массы, предоставляемой центральными банками. В связи с этим при моделировании кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств встает вопрос учета перечисленных выше факторов.

В случае замкнутой экономики (т.е. когда у домашнего хозяйства есть три вида активов и пассивов – сбережения, наличные средства и кредиты, и два источника доходов – процентные выплаты по депозитам и заработная плата) прогнозируемое благосостояние $x_F^j(t)$ домашних хозяйств должно меняться согласно закону:

$$x_F^j(t_{i+1}) = x_F^j(t_i) + S(t_i) - C(t_i) + r_D(t_i)D(t_i) - r_L(t_i)L(t_i),\ i \geq j\ .$$

Начальное значение задается равным историческому значению благосостояния домашних хозяйств $x_F^j(t_j) = D(t_j) - L(t_j) + M(t_j)$ в момент времени $t = t_j$, $S(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $L(t)$ - исторические значения доходов, потребительских расходов, объема депозитов и кредитов домашних хозяйств. Перечисленные выше особенности приводят к тому, что баланс благосостояния домашних хозяйств с течением времени не сохраняется (см. рис. 9).

Назовем разницу между прогнозируемым благосостоянием домашних хозяйств $x_F^j(t_i)$ и историческим значением благосостояния $x(t_i)$ невязкой. Учитывать фактор наличия невязки необходимо, так как в программе моделирования поведения домашних хозяйств значения $x_F^j(t_i)$ подаются как входные значения для расчетов на следующем шаге (в следующий период времени), а, следовательно, наличие невязки будет приводит к накоплению ошибки на каждом следующем шаге расчетов.

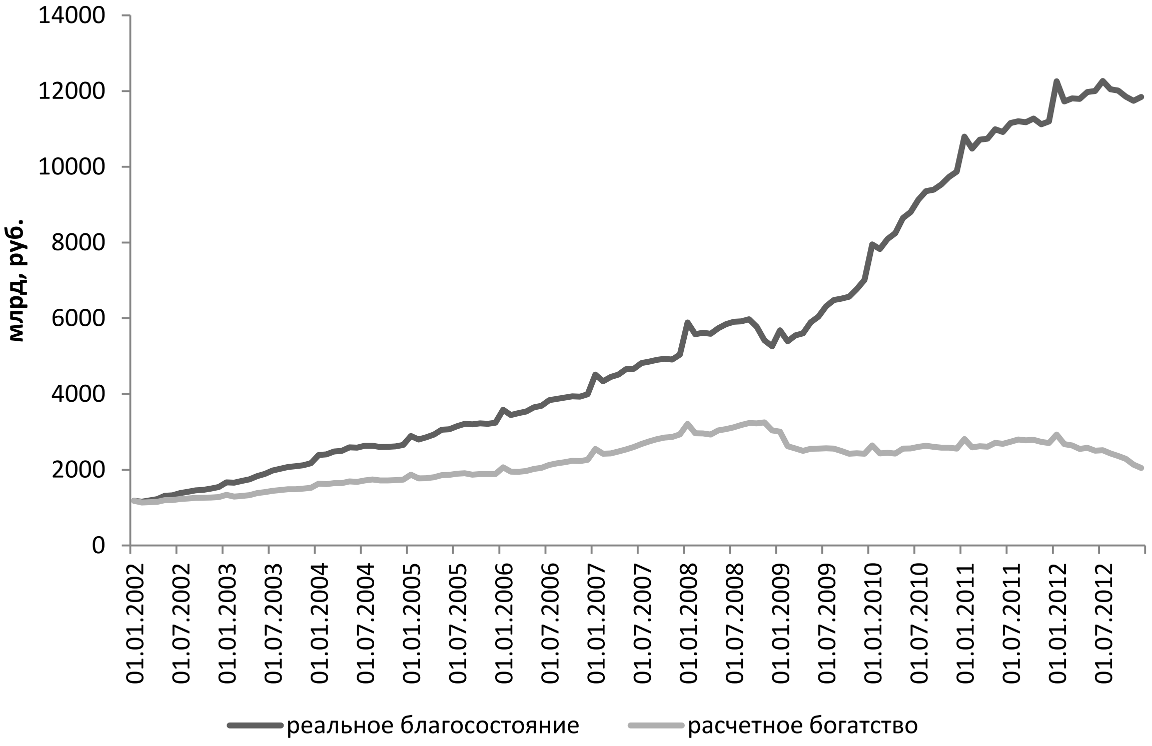

Рис. 9. Реально располагаемое состояние домашних хозяйств $x(t)$ и прогнозируемое $x_F^0(t)$.

Прежде чем моделировать невязку домашних хозяйств, необходимо отметить, что поведение домашних хозяйств проблематично описать как одно агрегированное домашнее хозяйство. Дело в том, что домашнее хозяйство выбирает один из трех сценариев: сберегать, кредитоваться или не иметь ни кредитов, ни депозитов (исключения из этих трех вариантов, безусловно, бывают, но в основном картина именно такая). Агрегированное же домашнее хозяйство должно иметь как кредиты, так и депозиты, что с математической точки зрения не является оптимальной стратегией. Поэтому я буду считать, что домашние хозяйства делятся на две группы: сберегающие и кредитующиеся.

Будем считать, что объем наличных денег, заработной платы и потребления распределяется среди перечисленных выше групп домашних хозяйств пропорционально. Такое деление обеспечивает нам то, что домохозяйства сберегающие и кредитующиеся имеют одинаковый коэффициент ограничения ликвидности. Тогда благосостояние кредитующихся домашних хозяйств в начальный момент времени равно $(1-\beta)M(0)-L(0)$, где β - доля сберегающих домашних хозяйств. Благосостояние сберегающих домашних хозяйств в начальный момент времени равно $\beta M(0)+D(0)$.

В связи с делением домашних хозяйств на две группы, возникает вопрос: каким образом между ними делится невязка, речь о которой шла ранее. Для моделирования невязки на каждом шаге была рассмотрена разница между $x_F^i(t_{i+1})$ и $x(t_{i+1})$. Далее эта разница была выражена как зависимость от благосостояния домашних хозяйств и объема наличных денег. Подробно об этом рассказывается в следующем параграфе.

В качестве входных параметров программы подаются процентные ставки по кредитам и депозитам, заработная плата и темп ее роста, стоимость валютной корзины, начальное значение благосостояния домашних хозяйств. Также указывается значение параметра β и алгоритм определения невязки. По этим данным программа рассчитывают динамику тренда спроса на наличные деньги, спроса на потребительские кредиты, предложения депозитов и потребительские расходы домашних хозяйств. Далее на полученный тренд накладываются эконометрическими методами сезонные колебания.

4.2 Численные эксперименты по моделированию спроса на потребительские кредиты, наличные деньги и предложение депозитов в странах постсоветского пространства

4.2.1. Российская Федерация

При разделении домашних хозяйств на две группы (сберегающие и кредитующиеся домашние хозяйства) подбирался коэффициент β таким образом, чтобы программа наиболее точно воспроизводила статистические данные (см. [68]). Так был подобран коэффициент $\beta = 0.52$.

Для моделирования невязки сберегающих домашних хозяйств использовалась формула

$$\chi_1 = \begin{cases} 0.023x_S(t),\ t \le \textit{октябрь}\,2008\textit{г}, \\ 0.012x_S(t), t > \textit{октябрь}\,2008\textit{г}, \end{cases}$$

где $x_S(t)$ - расчетные значения благосостояния сберегающих домашних хозяйств.

Для моделирования невязки кредитующихся домашних хозяйств использовалась формула

$$\chi_2 = \begin{cases} -0.05M_L(t),\ \textit{май}\,2009\textit{г} \le t \le \textit{январь}\,2011\textit{г}, \\ 0.005M_L(t),\ \textit{иначе}, \end{cases}$$

где $M_L(t)$ - расчетные значения объема наличных денег для кредитующихся домашних хозяйств.

В случае с кредитующимися домашними хозяйствами для расчета невязки используется только объем наличных денег этой группы домашних хозяйств. Это связано с тем, что благосостояние кредитующихся домашних хозяйств может менять знак.

Полученные формулы требуют содержательной интерпретации. У кредитующихся домашних хозяйств поменялась поведение только во время кризиса. Это обусловлено, прежде всего, тем, что банки сменили стратегии развития на период кризиса: стали предъявлять к заемщикам гораздо более строгие требования. Однако вместе со стабилизацией экономики после кризиса банки вернулись к докризисному подходу по выдаче кредитов и в результате кредитный бум, который мы наблюдали в докризисные годы, вернулся и приобрел даже больший масштаб.

У сберегающих домашних хозяйств величина невязки снизилась практически в два раза, по сравнению с докризисными годами. Главной причиной этого является то, что доходы домашних хозяйств после кризиса 2008-2009г. увеличиваются с темпом меньшим, чем в докризисные годы.

Для моделирования поведения домашних хозяйств подбирался коэффициент отвращения к риску α, который предполагался неизменным и одинаковым для кредитующихся и сберегающих домашних хозяйств. Подбор осуществлялся таким образом, чтобы программа наиболее точно воспроизводила статистические данные. Таким значением коэффициента отвращения к риску стало $\alpha = 0.2$.

Для моделирования поведения сберегающих домохозяйств использовалась модифицированная модель Рамсея (2.4.5). В качестве коэффициента дисконтирования использовалась следующая формула: $\Delta = \min(r_D - (1-\alpha)\gamma, \alpha \max(\gamma, r_D))$. Первое условие означает, что сберегающее домашнее хозяйство находится на границе среднего и богатого слоя (см. интерпретацию модели (2.5.2)). Второе условие возникает из условия существования решения.

Для моделирования поведения кредитующихся домохозяйств использовалась модифицированная модель Рамсея (2.3.1). В качестве коэффициента дисконтирования использовалась следующая формула: $\Delta = \min(r_L - (1-\alpha)\gamma, \alpha\gamma)$. Согласно принятому в данной работе делению домашних хозяйств на социальные страты, кредитующиеся домашние хозяйства относятся к среднему слою, однако они находятся на нижней границе этого слоя.

Результаты расчетов приведены на Рис. 10. Черной линией нарисован исторический тренд, прерывистой линией – результаты расчетов. Коэффициент детерминации $R^2 = 0,915$.

Полученные по результатам расчеты достаточно хорошо воспроизводят скачок в объеме наличных денег, произошедший в конце 2008-начале 2009 гг. в связи с финансовым кризисом. Анализ спроса на наличные деньги является непростой задачей и полученный результат говорит о том, что модифицированная модель Рамсея может использоваться для качественного анализа поведения домашних хозяйств. Также модель отражает падение спроса на потребительские кредиты в период кризиса. При этом в реальности падение оказалось ниже рассчитанных значений. Объяснить это можно тем, что в ожидании кризиса домашние хозяйства пытались максимально быстро погасить все кредитные обязательства.

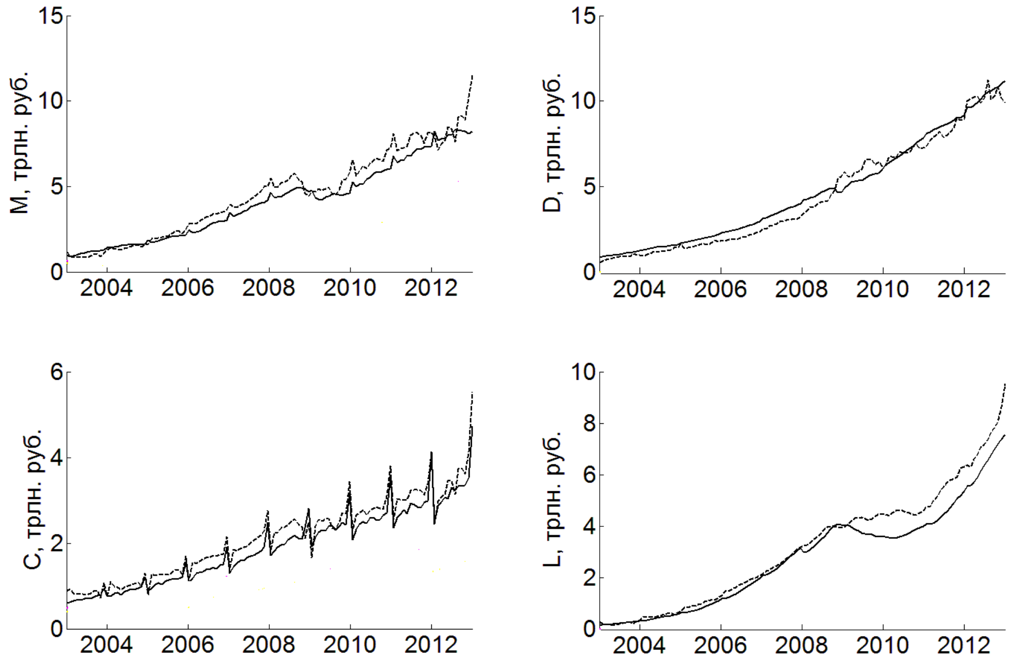

Рис. 10. Результаты расчетов программы по данным Российской Федерации. Сплошной линией показаны статистические данные, пунктирной – расчеты программы.

4.2.2. Казахстан

При разделении домашних хозяйств на две группы (сберегающие и кредитующиеся домашние хозяйства) подбирался коэффициент β таким образом, чтобы программа наиболее точно воспроизводила статистические данные. Так был подобран коэффициент $\beta = 0.9$.

Коэффициент ограничения ликвидности задавался постоянной величиной $\theta = 1.8$ (см. рис.11).

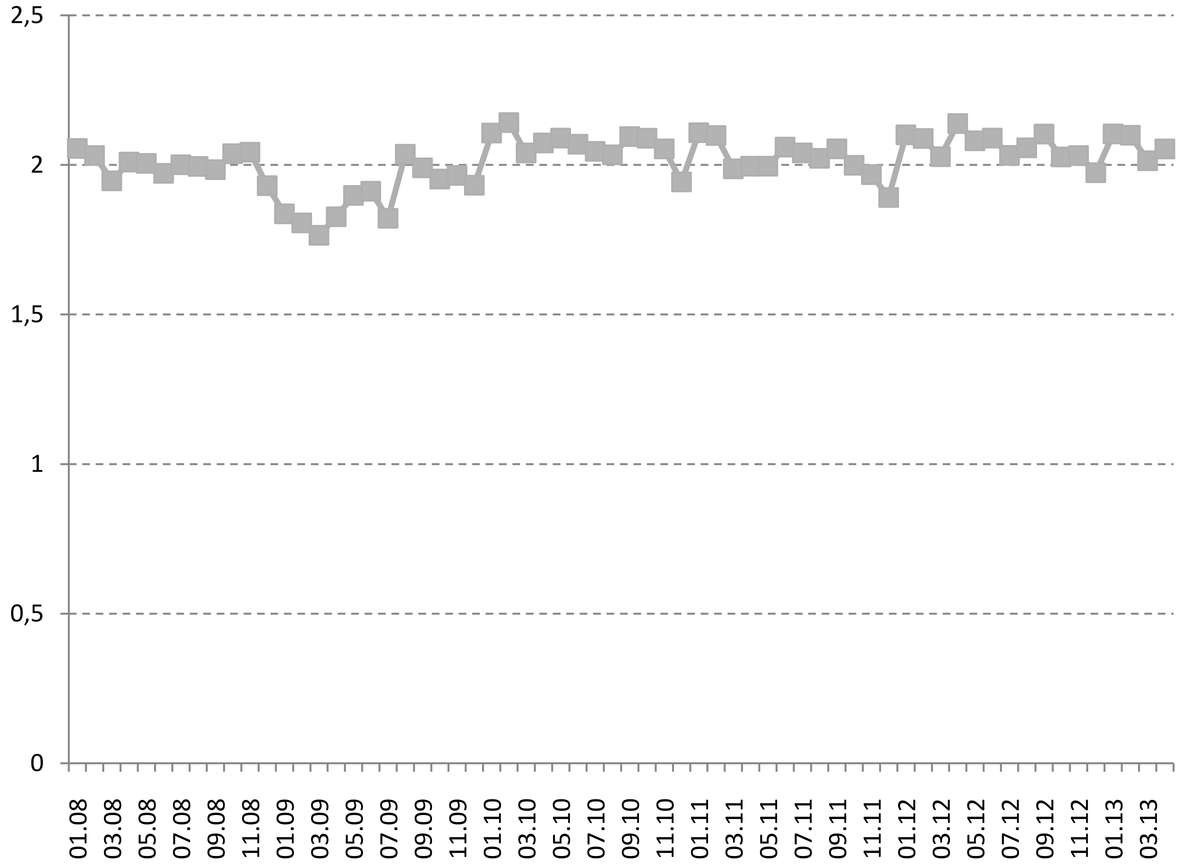

Рис. 11. Исторические значения коэффициента ограничения ликвидности республики Казахстан.

Для моделирования невязки сберегающих домашних хозяйств использовалась формула $\chi_1 = 0.0085 x_S(t)$, где $x_S(t)$ - расчетные значения благосостояния сберегающих домашних хозяйств.

Для моделирования невязки кредитующихся домашних хозяйств использовалась формула $\chi_2(t) = 0.12 M_L(t)$, где $M_L(t)$ - расчетные значения объема наличных денег для кредитующихся домашних хозяйств.

Для моделирования поведения домашних хозяйств подбирался коэффициент отвращения к риску α, который предполагался неизменным и одинаковым для кредитующихся и сберегающих домашних хозяйств. Подбор осуществлялся таким образом, чтобы программа наиболее точно воспроизводила статистические данные. Таким значением коэффициента отвращения к риску стало $\alpha = 0.2$.

Для моделирования поведения сберегающих домохозяйств использовалась модифицированная модель Рамсея (2.4.5). В качестве коэффициента дисконтирования использовалась следующая формула: $\Delta = \min(r_D - (1-\alpha)\gamma, \alpha \max(\gamma, r_D))$. Первое условие означает, что сберегающее домашнее хозяйство находится на границе среднего и богатого слоя (см. интерпретацию модели (2.5.2)). Второе условие возникает из условия существования решения.

Для моделирования поведения кредитующихся домохозяйств использовалась модифицированная модель Рамсея (2.3.1). В качестве коэффициента дисконтирования использовалась следующая формула: $\Delta = \min(r_L - (1-\alpha)\gamma, \alpha\gamma)$. Согласно принятому в данной работе делению домашних хозяйств на социальные страты, кредитующиеся домашние хозяйства относятся к среднему слою, однако они находятся на нижней границе этого слоя.

На рисунке 12 показан результат применения программы для расчетов кредитно-сбегательного поведения домашних хозяйств Казахстана. Модель не отражает резкий скачек в объеме кредитов, который наблюдается по статистическим данным в начале 2009г. Тем не менее достаточно быстро разница между расчетными показателями и статистикой нивелируется. Этот скачек объясняется девальвацией национальной валюты. В модели кредиты не делятся на кредиты в иностранной валюте и кредиты в национальной валюте, поэтому при девальвации модель не отражает скачек в объеме кредитов. Коэффициент детерминации $R^2 = 0,922$.

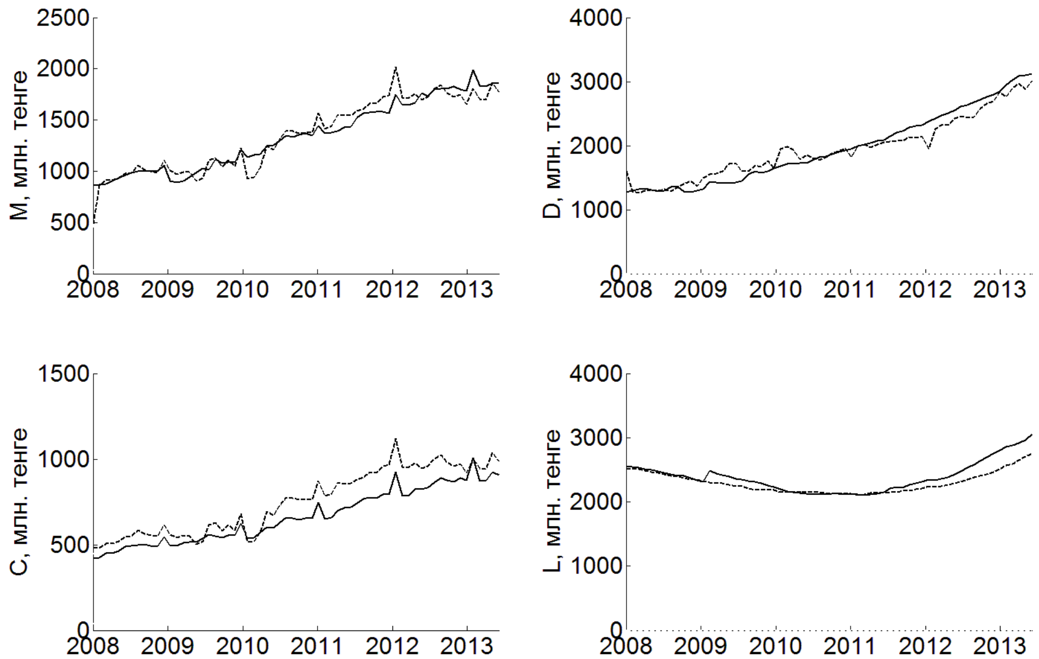

Рис. 12. Результаты расчетов программы по данным республика Казахстан. Сплошной линией показаны статистические данные, пунктирной – расчеты программы.

4.2.3. Украина

При разделении домашних хозяйств на две группы (сберегающие и кредитующиеся домашние хозяйства) подбирался коэффициент β таким образом, чтобы программа наиболее точно воспроизводила статистические данные. Так был подобран коэффициент $\beta = 0.82$.

Коэффициент ограничения ликвидности задавался постоянной величиной $\theta = 2.1$ (см. рис.13).

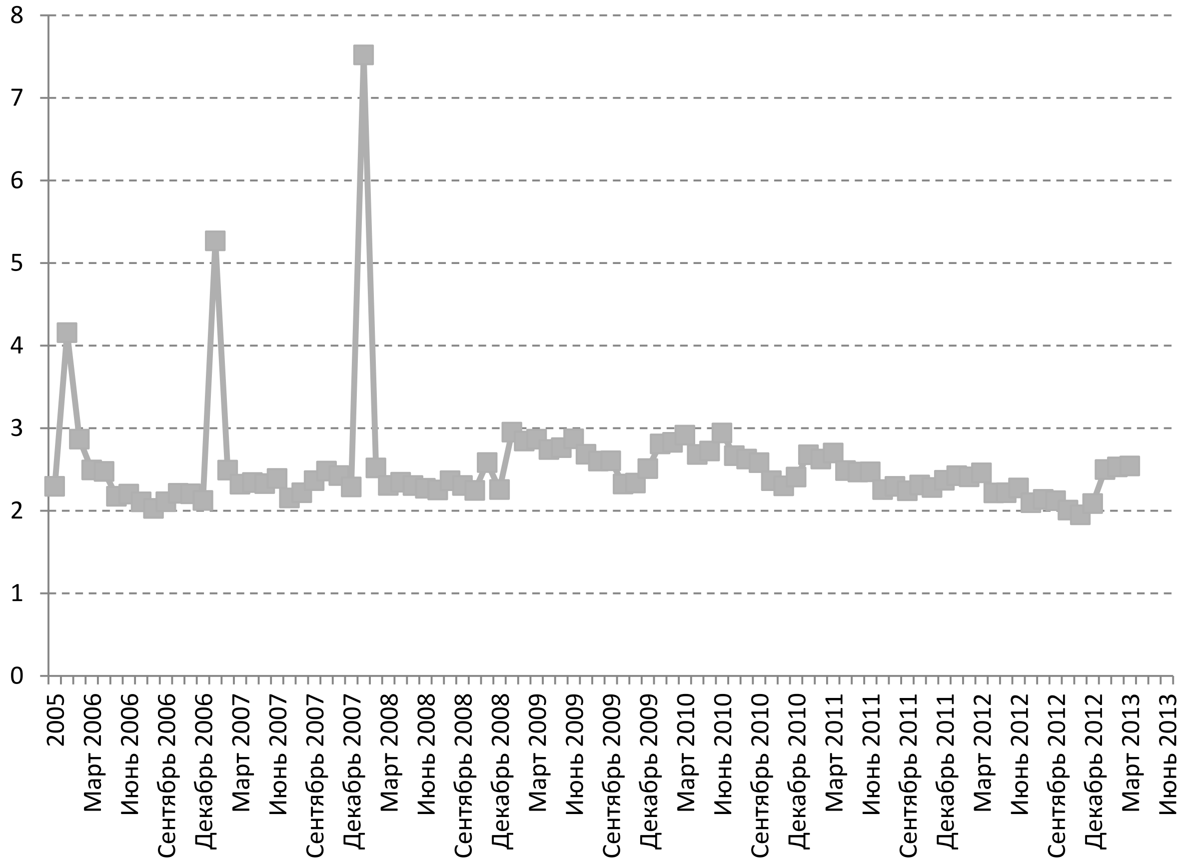

Рис. 13. Исторические значения коэффициента ограничения ликвидности Украины.

Для моделирования невязки сберегающих домашних хозяйств использовалась формула

$$\chi_1 = \begin{cases} 0.02 x_S(t),\ t \le \textit{октябрь}\ 2008\textit{г}, \\ 0.005 x_S(t), t > \textit{октябрь}\ 2008\textit{г}, \end{cases}$$

где $x_S(t)$ - расчетные значения благосостояния сберегающих домашних хозяйств.

Для моделирования невязки кредитующихся домашних хозяйств использовалась формула

$$\chi_2 = \begin{cases} -0.21 M_L(t),\ t \le \textit{октябрь}\ 2008\textit{г}, \\ 0.16 M_L(t),\ \textit{иначе}, \end{cases}$$

где $M_L(t)$ - расчетные значения объема наличных денег для кредитующихся домашних хозяйств.

Для моделирования поведения домашних хозяйств подбирался коэффициент отвращения к риску α, который предполагался неизменным и одинаковым для кредитующихся и сберегающих домашних хозяйств. Подбор осуществлялся таким образом, чтобы программа наиболее точно воспроизводила статистические данные. Таким значением коэффициента отвращения к риску стало $\alpha = 0.2$.

Для моделирования поведения сберегающих домохозяйств использовалась модифицированная модель Рамсея (2.4.5). В качестве коэффициента дисконтирования использовалась следующая формула: $\Delta = \min(r_D - (1-\alpha)\gamma, \alpha \max(\gamma, r_D))$. Первое условие означает, что сберегающее домашнее хозяйство находится на границе среднего и богатого слоя (см. интерпретацию модели (2.5.2)). Второе условие возникает из условия существования решения.

Для моделирования поведения кредитующихся домохозяйств использовалась модифицированная модель Рамсея (2.3.1). В качестве коэффициента дисконтирования использовалась следующая формула: $\Delta = \min(r_L - (1-\alpha)\gamma, \alpha\gamma)$. Согласно принятому в данной работе делению домашних хозяйств на социальные страты, кредитующиеся домашние хозяйства относятся к среднему слою, однако они находятся на нижней границе этого слоя.

На рисунке 14 показан результат применения программы для расчетов кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств Украины. Коэффициент детерминации $R^2 = 0,986$.

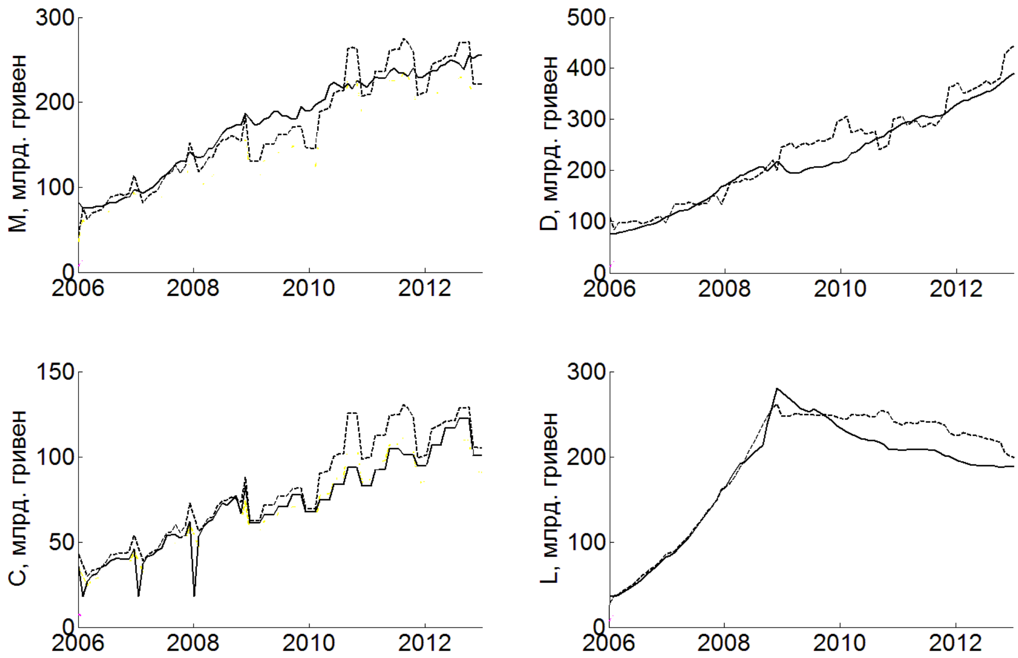

Рис. 14. Результаты расчетов программы по данным Украины. Сплошной линией показаны статистические данные, пунктирной – расчеты программы.

5 Программный комплекс моделирования кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств

5.1 Требования к программному комплексу

В отделе математического моделирования экономических систем Вычислительного центра РАН в рамках школы акад. РАН А.А. Петрова коллективом ученых под руководством А.А. Шананина проводились эксперименты по применению моделей экономического равновесия и оптимизации к анализу экономики России [69], [32], [70], [71]. В этих исследовательских работах был накоплен опыт по построению моделей, описывающих экономические процессы России и по идентификации параметров этих моделей.

Для проведения систематических расчетов было необходимо создание современного программного комплекса, предусматривающего возможность его использования для анализа кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств России, проверке гипотез по формированию среднего слоя. Программный комплекс должен стать полезным инструментом для анализа экономических показателей деятельности домашних хозяйств как в рамках непосредственно моделирования домашних хозяйств (когда часть экономических параметров являются входными параметрами и считаются известными величинами), так и в более общих моделях системного анализа экономики (в которых все экономические параметры рассчитываются). В связи с этим на программный комплекс наложены определенные требования, обусловленные условиями использования и области эксплуатации.

Программный комплекс прежде всего должен обладать понятной легко расширяемой структурой. Программный комплекс может использоваться в более общих моделях экономики России. Внесение изменений в код программы, добавление новой функциональности, встраивание программы в качестве модуля расчетов потребительского поведения в другие программные разработки должны происходить с наименьшими затратами времени.

Программный комплекс должен быть разбит на независящие друг от друга компактные модули, чтобы при необходимости модернизации какой-либо функции (например, модуля вывода результатов) можно было заменить один или несколько модулей, не затрагивая другие части программы. Также при внесении новой функциональности должна быть возможность добавить новый модуль, не меняя программы.

Перед применением собранная статистика нуждается в корректировке. Дело в том, что большинство экономических характеристик домашних хозяйств обладает сезонностью от времени года, месяца. При этом сезонность будет искажать работу блока идентификации параметров. Поэтому для правильной идентификации параметров и расчета тренда экономических показателей необходимо выделить сезонные факторы из статистики. Для этого программный комплекс должен включать в себя методы сглаживания, исключения сезонных факторов и другие методы корректировки статистики.

5.2 Средства разработки и структура программы.

В процессе разработки программного комплекса были учтены требования, изложенные в предыдущем параграфе, и использованы современные средства разработки программного обеспечения.

В качестве платформы, на которой разрабатывался программный комплекс, была взята платформа Matlab. Matlab – это пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноименный язык. Язык Matlab является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Большим преимуществом Matlab является большое количество функций, реализующих численные алгоритмы, операции над многочленами, поиск корней многочленов, интерполяцию и экстраполяцию кривых. Эта возможность позволила существенно сократить объем программы, сделать программу более понятной с точки зрения читаемости кода.

Программный комплекс состоит из следующих частей:

- Блок загрузки данных.
- Блок визуализации расчетов
- Блок моделирования сберегательного поведения
- Блок моделирования кредитного поведения
- Блок сохранения результатов

Процесс обработки данных начинается с их загрузки. Программный комплекс обрабатывает входные данные в формате Microsoft Excel.

Блок работы с данными корректирует входные данные и выводит на экран полученные ряды. Далее пользователь имеет возможность подобрать в ручном режиме необходимое разделение домашних хозяйств на сберегающий и кредитующийся классы. Также имеется возможность подобрать разбиение в автоматическом режиме.

После идентификации параметров программу можно использовать для расчетов. Для этого используются сохраненные значения разбиения параметров.

Блок визуализации расчетов выводит результаты программного моделирования на экран в виде графиков, а также позволяет сохранять их в различных форматах (Jpg,png и др.). Также имеется возможность сохранить результаты расчетов в формате Microsoft Excel.

5.3 Функциональность комплекса

Функциональность программы отражает требования, которые были озвучены в начале этой главы.

Главное окно программы состоит из четырех панелей (рис. 15):

1. Панель загрузки данных.
2. Панель предварительной обработки данных.
3. Панель расчетов
4. Панель сохранения результатов вычисления.

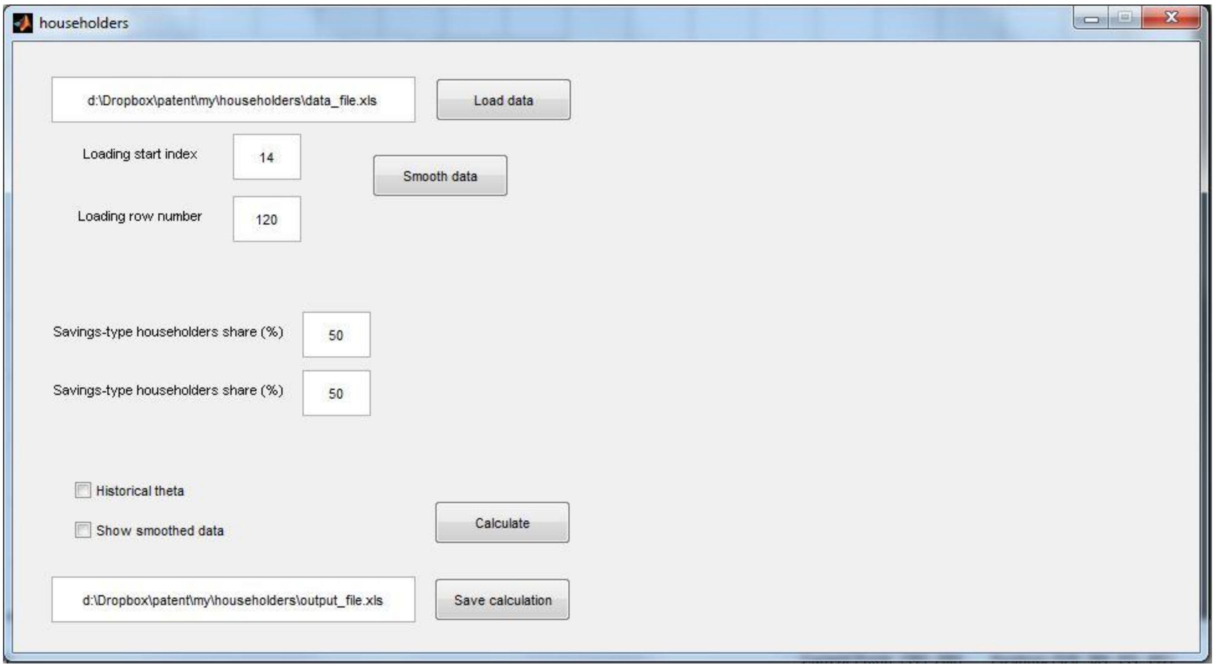

Рис. 15. Сглаживание входных параметров

Панель загрузки данных позволяет указать путь до файла с данными и загрузить их в формат программы. При этом входной файл должен иметь следующий формат (перечисление идет по порядковому номеру столбца):

1. Месяц
2. Объем кредитов
3. Процентная ставка по кредитам
4. Объем наличных денег

5. Инфляция
6. Депозиты
7. Процентная ставка по депозитам
8. Доходы
9. Потребление
10. Темп роста доходов

Единица измерения времени в программе – месяц. Поэтому все объемные показатели должны быть приведены за соответствующий период. Все процентные ставки и показатели, отвечающие за темп инфляции или темп роста доходов, должны быть в годовому проценту.

Также программа поддерживает загрузку дополнительных данных:

11. Курс доллара
12. Курс евро
13. Историческое значение скорости обращения денег

При загрузке данных имеется возможность указать диапазон данных, который необходимо загрузить (текстовые поля «Loading start index» и «Loading row number»).

Как уже было отмечено ранее, загруженные данные обычно содержат сезонные факторы и поэтому неприменимы в чистом виде для расчетов. Для того, чтобы «очистить» данные программа имеет функционал «удаления» сезонных факторов.

Алгоритм сезонной декомпозиции и сглаживания входных данных применяется ко всем абсолютным показателям (Объем кредитов, Объем наличных денег, Инфляция, Депозиты, Доходы, Потребление). Для сглаживания данных использовался алгоритм скользящего среднего.

Метод скользящего среднего сглаживает данные заменой каждой точки данных средним значением, подсчитанным среди точек окрестности этой точки:

$$y_s(i)=\frac{1}{2N+1}\left(y(i+N)+y(i+N-1)+\ldots+y(i-N)\right)$$

где $y_s(i)$ – сглаженное значение i-й точки, N – размер окрестности, используемой для сглаживание данных.

Для того, чтобы запустить сглаживание входных данных, необходимо после загрузки данных нажать на кнопку «Smooth data». Результаты выполнения этого блока программы приведены на рис. 16.

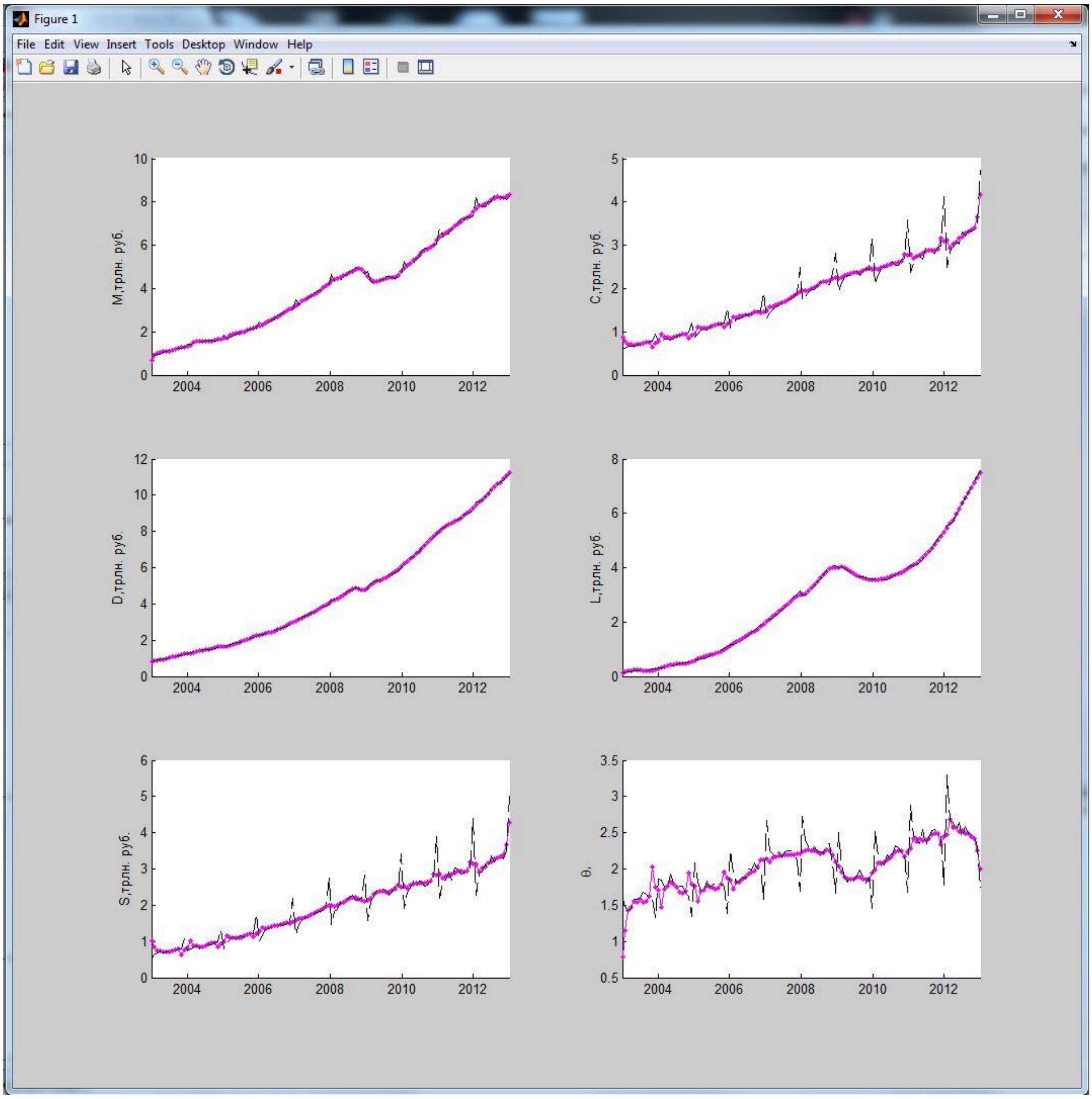

Рис. 16. Сглаживание входных параметров

После выделения из статистических данных тренда, его можно использовать для идентификации параметров модели.

Для проведения расчетов написаны два класса потребителей – HHLoans, HHSavings. Первый отвечает за моделирование кредитного поведения домашних хозяйств в каждый момент времени, второй – за моделирование сберегательного поведения домашних хозяйств в каждый момент времени. Вместе кредитно-сберегательное поведение рассчитывается в классе HouseholderTimeSeries. Также этот класс рассчитывает динамику кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств.

При расчетах кредитного и сберегательного поведения домашних хозяйств используется синтез оптимального управления, полученный в Главе 2. При этом для определения решения, необходимо разрешить несколько неявных функций, подсчитать интегралы. Для этого в программе использовались различные численные методы.

Для вычисления интеграла использовался метод Симпсона [72], основанный на приближении подынтегральной функции параболами:

$$\sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} g_n(x)dx = \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k}) + f(b)\right)$$

где n — число отрезков, f(x) — интегрируемая функция, $g_n(x)$— аппроксимирующая функция (составленная из кусочков парабол), a, b — концы исходного отрезка. Вычисления интеграла с помощью метода Симпсона дают точность третьего порядка, чего вполне хватает для наших задач.

Для получения синтеза оптимального управления необходимо разрешить несколько уравнений, представленных неявными функциями. Для этого использовался алгоритм Trust-region dogleg [73], [74]. Этот подход основан на итерационном поиске направления решения d_k. Так, например, как это делает метод Ньютона:

$$J(x_k)d_k = -F(x_k)$$
$$x_{k+1} = x_k + d_k,$$

где $J(x_k)$ - якобиан

$$J(x_k) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(x_k)^T \\ \nabla F_2(x_k)^T \\ \vdots \\ \nabla F_n(x_k)^T \end{bmatrix}.$$

Однако метод Ньютона не всегда применим. $J(x_k)$ может быть вырожденным, из-за чего ньютоновский шаг d_k может быть даже не определен. Кроме того, вычисление точного шага d_k может иметь большую вычислительную сложность. В добавление к вышесказанному, метод Ньютона может не сходиться к решению, если начальная точка находится достаточно далеко от решения.

Использование техники доверительного интервала (trust-region) повышает устойчивость решения в случае, если начальная точка находится далеко от решения, и в случае вырожденности якобиана. Для использования стратегии доверительного интервала, необходимо определить функцию, которая позволяет оценить, является ли x_{k+1} лучше или хуже, чем x_k. В случае метода доверительного интервала такой функцией выступает

$$\min_d \left[\frac{1}{2} F(x_k)^T F(x_k) + d^T J(x_k)^T F(x_k) + \frac{1}{2} d^T J(x_k)^T J(x_k) d \right],$$

к которой применяется специальная процедура резкого искривления [75].

Использование данного алгоритма эффективно с точки зрения вычислительной сложности, т.к. он требует только решения одного линейного уравнения за итерацию. При этом полученное решение более устойчиво, чем использование стандартного метода Гаусса-Ньютона.

При проведении расчетов у пользователя есть возможность задать распределение доходов и начального богатства между сберегающими и кредитующимися домашними хозяйствами (savings-type householders share и savings-type householders income share). Также у пользователя есть возможность задать распределение доходов и начального богатства в автоматическом режиме. В этом случае программе подаются на вход статистические данные. В каждый момент времени по историческим данным вычисляется благосостояние домашнего хозяйства (как $D_R(t_i)+M_R(t_i)-L_R(t_i)$, где $D_R(t_i), M_R(t_i), L_R(t_i)$ - значения депозитов, наличных денег, кредитов в момент времени t_i) и рассчитываются значения предложения депозитов, спроса на наличные деньги и кредиты $D_C(t_i,\beta), M_C(t_i,\beta), L_C(t_i,\beta)$ в зависимости от доли сберегающих домашних хозяйств β. Далее программа определяет, при каком значении β достигается минимум выражения

$$\sum_i \left[\left(D_C(t_i) - D_R(t_i) \right)^2 + \left(L_C(t_i) - L_R(t_i) \right)^2 \right]$$

Полученное значение β далее используется для построения тренда исторических данных.

После проведения расчетов результаты расчетов визуализируются. При этом у пользователя имеется возможность сохранить результаты расчетов программы в различных форматах (jpg, png, eps). Также пользователь может сохранить результаты расчетов в формате Microsoft Excel. В этом случае данные представлены в следующем формате:

сберегающие домохозяйства			кредитующиеся домохозяйства		
наличные деньги	Депозиты	потребление	наличные деньги	депозиты	Потребление

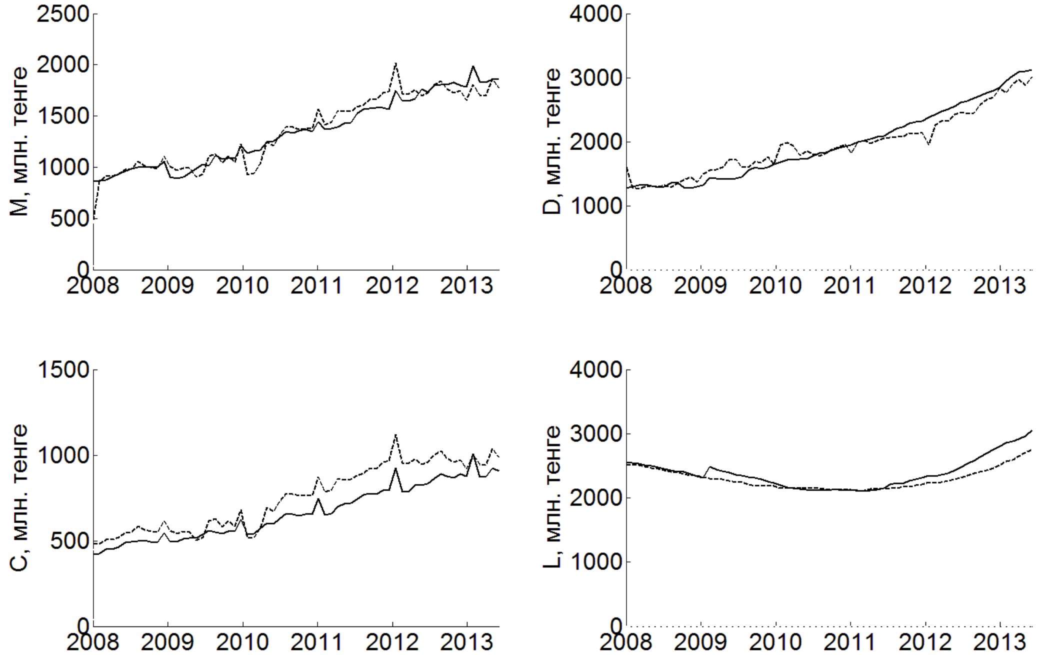

Рис. 17. Результаты расчетов программы

6 Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты, характеризующиеся научной новизной:

1. Предложена модификация модели Рамсея, которая учитывает спрос на наличные деньги и несовершенство рынка капитала. Построено решение задачи оптимального управления в модифицированной модели Рамсея в форме синтеза.

2. Получено аналитическое выражение для синтеза оптимального управления в модифицированной модели Рамсея на основе исследования магистрального эффекта.

3. Предложена постановка модифицированной модели Рамсея на бесконечном временном интервале. Условие на правом конце в задаче с конечным временным горизонтом заменяется в задаче с бесконечным временным горизонтом на фазовое ограничение.

4. Доказаны необходимые и достаточные условия существования репрезентативного домашнего хозяйства в модифицированной модели Рамсея. Необходимым и достаточным условием агрегируемости поведения домашних хозяйств в репрезентативного потребителя является требование согласованности краткосрочных рисков, характеризующихся коэффициентом отвращения к риску, и долгосрочных рисков, определяемых коэффициентом дисконтирования.

5. Разработан численный метод и программный модуль для идентификации модели распределения доходов домашних хозяйств на основе статистических данных. Программный модуль применен для анализа кредитно-сберегательного поведения России, Казахстана и Украины.

7 Список литературы

1. Solow R. Growth theory: An exposion. Oxford: Clarendon Press, 1970. 1-109 pp.
2. Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth. Princeton, 2008. 851 pp.
3. Ramsey F.P. A mathematical theory of savings // The Economic Journal. 1928. Vol. 152. No. 38. pp. 543-559.
4. Cass D. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation // The Review of Economic Studies. 1965. Vol. 91. No. 32. pp. 233-240.
5. Koopmans T.C. On the concept of optimal economic growth // Ex Aedibus Academicis in Civitate Vaticana. 1965. Vol. 28. No. 28. pp. 225-300.
6. Fisher I. The Purchasing Power of Money, its Determination and Relation to Credit, Interest and Crises. New York: Macmillan, 1922.
7. Modigliani F., Ando.A. Tests of the Life Cycle Hypothesis of Savings: Comments and suggestions // Bulletin of the Oxford University Institiute of Statistics. 1957. No. 19. pp. 99-124.
8. Modigliani F., R.Brumberg. Utility analysis and the consumption function: an intepretation of cross-section data. Kurihara, Kenneth K. ed. New Brunswick: Rutgers Univercity Press, 1954. 388-436 pp.
9. Modigliani F., Ando.A. The life cycle hypothesis of Saving: Aggregation Implications and Tests // American Economic Review. 1963. Vol. 53. No. 1. pp. 55-84.
10. Sen A. The Standard of Living. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 1-49 pp.
11. Becker G.S. Human Capital: A theoretical and empirical analysis, with special reference to education, 2nd edition. New York: NBER, 1975.
12. Ben-Porath Y. The production of human capital and the life cycle of earnings // Journal of Political Economy. 1976. Vol. 75. No. 4. pp. 352-365.
13. Blinder A., Weiss Y. Human capital and labor supply: a synthesis // Journal of Political Economy. 1976. Vol. 83. No. 3. pp. 449-472.
14. Grossman M. On the concept of health capital and the demand for health // Journal of Political Economy. 1972. Vol. 80. No. 2. pp. 223-255.
15. Mincer J. Schooling, experience and earnings. New York: NBER, 1974.
16. Rosen S. A theory of life earnings // Journal of Political Economy. 1976. Vol. 84. No. 4. pp. 345-568.
17. Weiss Y. The determination of life cycle earnings: a survey // In: Handbook of Labour Economics. New York: Elsevier Science Publishers BV, 1986. pp. 603-640.
18. Hansen W.L. Total and private rates of return to investment in schooling // Journal of Political Economy. 1963. Vol. 71. No. 2. pp. 128-140.
19. Uzawa H. Time preference, the consumption function, and optimal asset. Chicago: Aldine, 1968.
20. Becker R. On the long-run steady state in a simple dynamic model of equilibium with heterogeneous householders // Quarterely Journal of Economics. 1980. Vol. 95. No. 2. pp. 375-382.
21. Becker R. and Boyd III R. Capital Theory, Equilibrium Analysis and Recursive Utility. Blackball Publishers, 1997.
22. Becker R., Boyd III R. and Foias C. The existence of Ramsey equilibrium // Econometrica. 1991. Vol. 59. No. 2. pp. 441-460.

23. Becker R. and Foias C. A characterization of Ramsey equilibrium // Journal of Economic theory. 1987. Vol. 41. No. 1. pp. 173-184.
24. Bewley T. An integration of equilibrium theory and turnpike theory // Journal of Mathematical Economics. 1982. Vol. 10. pp. 233-267.
25. Michel P., Pestieau P. Fiscal policy in a growth model with both altruistic and non-altruistic agents // Southern Economic Journal. 1998. Vol. 64. No. 3. pp. 682-697.
26. Michel P., Pestieau P. Fiscal policy when individuals differ // Journal of Publics Economic Theory. 1999. Vol. 1. No. 2. pp. 187-203.
27. Mankiw G. The savers-spenders theory of fiscal policy // American Economic Review. 2000. Vol. 90. No. 2. pp. 120-125.
28. Smetters K. Ricardian equivalence: long-run Leviathan // Journal of Publics Economics. 1999. Vol. 73. No. 3. pp. 395-421.
29. Борисов К.Ю. Природные ресурсы в обобщенной динамической модели специфических факторов с неоднородными потребителями // Экономико-математические исследования: Математические модели и информационные технологии. 2005. № 4. С. 4-39.
30. Борисов К.Ю. Агрегированные модели экономического роста и распределения. СПб: Спб ЭМИ РАН, 2005.
31. Ekeland I., Lazrak A. The golden rule when preferences are time-inconsistent // Mathematics and Financial Economics. 2010. Vol. 4. pp. 29-55.
32. Гасников А.В., Обросова Н.К., Рудева А.В., Флерова А.Ю., Шананин А.А. Моделирование влияния государственной энергетической политики на производственную систему России. Москва: ВЦ РАН, 2006.
33. Cagan, Phillip. The Monetary Dynamics of Hyperinflation // In: Studies in the Quantity Theory of Money. Chicago: University of Chicago Press, 1956.
34. Sidrausky M. Rational Choice and Patterns of Growth in a monetary economy // American Economic Review. 1967. Vol. 57. No. 2. pp. 533-544.
35. Г. Мэнкью. Макроэкономика. Москва: МГУ, 1994.
36. Keynes J.M. A treatise on Money. New York: Macmillan, 1930.
37. Tobin J. Liquidity Preference as behaviour towards Risk // Review of Economic Studies. 1958. Vol. 67. pp. 65-86.
38. Fisher S. Capital accumulation on the Transition Path in a Monetary Optimizing Model // Econometrica. 1979. Vol. 47. No. 6. pp. 1433-1439.
39. Asaki K. The utility function and the Superneutrality of Money on the Transition Path // Econometrica. 1983. Vol. 51. No. 5. pp. 1593-1596.
40. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42. No. 2. pp. 267-272.
41. Ph. Michel. On the transversality condition in infinite horizon optimal problems // Econometrica. 1982. Vol. 50. No. 4. pp. 975-986.
42. С.М. Асеев, А.В. Кряжимский. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. Труды МИАН. Т. 257. Москва: Наука, 2007. 3-271 с.
43. S.M. Aseev, V.M. Veliov. Needle variations in infinite-horizon optimal control, Research report. Vienna: ORCOS, 2012.
44. Беленький В.З. Оптимизационные модели экономической динамики: понятийный аппарат, одномерные модели. Москва: Наука, 2007.
45. Фридмен М. Количественная теория денег. Москва: Дело, 1996. 3-76 с.

46. Гуриев С.М. Модель формирования сбережеий и спроса на деньги: I // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 7. С. 25-40.
47. Рудева А.В., Шананин А.А. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 12. С. 1799-1803.
48. Komlos J. A generalization of a problem of Steinhaus // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1967. Т. 18. С. 217-229.
49. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1989. 624 с.
50. Гималтдинов И.Ф. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея // В кн.: Научная конференция "Тихоновские чтения". Москва: МАКС Пресс, 2010. С. 20-21.
51. Гималтдинов И.Ф. Исследование спроса на потребительские кредиты и наличные деньги // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 2. С. 84-98.
52. Гималтдинов И.Ф. Промежуточная магистраль в обосновании синтеза оптимального управления в моделях экономического роста // Промежуточная магистраль в обосновании синтеза оптимального управления в моделях экономического роста. Москва. 2011. С. 25-26.
53. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. Москва: МГУ, 2004. 123-129 с.
54. Плотников В.И., Сумин М.И. Необходимые условия в негладкой задаче оптимального управления // Математические заметки. 1982. Т. 32. № 2. С. 187-197.
55. Дмитрук А.В., Кузькина Н.В. Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени // Математические заметки. 2005. Т. 78. № 4. С. 503-518.
56. Fleming Wendell H., Mete Soner H. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer, 2006.
57. Гималтдинов И.Ф. Дипломная работа "Исследование влияния инфляции на сберегательное поведение населения в современных российских условиях". Москва: МГУ, 2009.
58. Гималтдинов И.Ф. Труды 55-й научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика // Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности и потребительского кредитования. Москва. 2011. Т. 1. С. 91-92.
59. Stiglitz J. Distribution of income and wealth among individuals // Econometrica. 1969. Vol. 37. No. 3. pp. 382-397.
60. Chaterjee S. Transitional dynamics and the distribution of wealth in a neoclassical growth model // Journal of Public Economics. 1994. Vol. 54. pp. 97-119.
61. Caselli F., Ventura J. A representative consumer theory of distribution // The American Economic Review. 2000. Vol. 90. No. 4. pp. 909-926.
62. Борисов К.Ю. Об эндогенном темпе экономического роста в модели с неоднородными потребителями // Экономико-математические исследования: Математические модели и информационные технологии. 2003. № 3. С. 5-17.
63. Гималтдинов И.Ф. 6-я международная школа-симпозиум "Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем (АМУР-2012)" // Достаточные условия существования репрезентативного потребителя в модели рамсеевского типа. Севастополь. 2012. С. 114-117.

64. Гималтдинов И.Ф. Необходимые и достаточные условия существования репрезентативного потребителя в одной модели рамсеевского типа // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2013. № 2. С. 25-32.
65. Epstein I. A simple dynamic general equilibrium model // Journal of Economic Theory. 1987. Vol. 41. pp. 68-85.
66. Гималтдинов И.Ф. Труды 55-й научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика // Необходимые и достаточные условия существования репрезентативного потребителя в модели рамсеевского типа. Москва. 2012. Т. 1. С. 43-44.
67. Гималтдинов И.Ф. Труды 54-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". Управление и прикладная математика // Идентификация модели рамсеевского типа по данным о сберегательном и потребительском поведении домашних хозяйств в России. Москва. 2011. Т. 1. С. 63-64.
68. Гималтдинов И.Ф. Труды 56-й научной коференции МФТИ. Управление и прикладная математика // Применение модифицированной модели Рамсея для анализа кредитно-сберегательного поведения России и Казахстана. Москва. 2013. Т. 1. С. 42-43.
69. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. Москва: Энергоатомиздат, 1996.
70. Обросова Н.К., Рудева А.В., Флерова А.Ю., Шананин А.А. Оценка влияния государственной энергетической политики на переходные процессы в экономике России. Москва: ВЦ РАН, 2007.
71. Ващенко М.П., Шананин А.А. Моделирование инвестиционной деятельности вертикально интегрированной нефтяной компании. Москва: ВЦ РАН, 2008.
72. Костомаров. Фаворский А.П., Вводные лекции по численным методам. Москва: Логос, 2004.
73. Conn N.R., Gould N.I.M., Ph.L. Toint. Trust-region methods. MPS/SIAM Series on Optimization. 2000.
74. Nocedal J. W.S.J. Numerical Optimization, 2nd edition.. Springer Verlag, 2006.
75. Powell. A Fortran soubrutine for solving systems of nonlinear algebraic equations // In: Numberical methods for nonlinear algebraic equations (P.Rabinowits ed.). 1970.