

На правах рукописи

**ГИМАЛТДИНОВ ИЛЬГИЗ ФАДИСОВИЧ**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ  
В УСЛОВИЯХ НЕСОВЕРШЕННОГО РЫНКА КРЕДИТОВ И  
ДЕПОЗИТОВ**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ.

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор Шананин Александр Алексеевич, декан факультета управления и прикладной математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Официальные оппоненты - доктор технических наук Акопов Андраник Сумбатович, профессор кафедры бизнес-аналитики факультета бизнес-информатики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

кандидат физико-математических наук Автухович Эдуард Васильевич, ведущий консультант Общества с ограниченной ответственностью «Карана».

Ведущая организация: Негосударственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Европейский университет в Санкт-Петербурге»

Защита состоится \_\_\_\_\_ 2014 г. в “\_\_\_\_\_” на заседании диссертационного совета Д 002.017.04 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Вычислительный центр имени А.А. Дородницына Российской академии наук» по адресу 119991, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН  
Автореферат разослан \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Н.М. Новикова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В развитых странах существует три основных источника инвестиций: нераспределенная прибыль компаний, выпуск акций и сбережения домашних хозяйств, аккумулированные коммерческими банками. Последний источник важен для ускоренного финансирования прорывных проектов, поскольку способствует диверсификации экономики. Основным объемом сбережений домашних хозяйств в развитых странах приходится на средний слой. Наличие и большой удельный вес среднего класса в системе социальной стратификации является одним из существенных признаков развитого общества.

В России проблемы экономического и социального неравенства весьма актуальны. Процесс перехода от плановой к рыночной экономике в нашей стране затянулся и оказался гораздо более драматичным и противоречивым, чем ожидали многие экономисты. Одной из наиболее характерных черт этого процесса является изменение механизмов и характера распределения национального продукта и национального богатства. В начале экономических реформ 90-х гг. в России предполагалось, что они (реформы) приведут к рождению масштабного среднего класса - экономически самостоятельного социального субъекта, способного эффективно выполнять традиционные для него функции. Однако результат реформ оказался полностью противоположным: высокий уровень инфляции привел к обесцениванию сбережений населения, падению их доходов, подорвал доверие населения к банковскому сектору. В связи с этим в начале 2000-х годов правительство Российской Федерации объявило о том, что уменьшение количества бедного населения и формирование среднего слоя является одной из приоритетных задач. Несмотря на это расслоение домашних хозяйств в России на протяжении 2000-х годов не только не остановилось, но даже наоборот – увеличилось.

В последние 10-15 лет уровень жизни населения значительно вырос. Это не могло не сказаться и на кредитно-сберегательном поведении домашних хозяйств России. С одной стороны, рост доходов населения привел к существенному росту объема срочных депозитов. С другой стороны, банковский сектор увидел большой потенциал в кредитовании домашних хозяйств: оценка кредитоспособности юридических лиц часто для банков становится задачей достаточно сложной, в то время как для физических лиц эта задача проще решается и несет меньшие риски для банков. Последнее привело к буму потребительского кредитования (рис. 1).

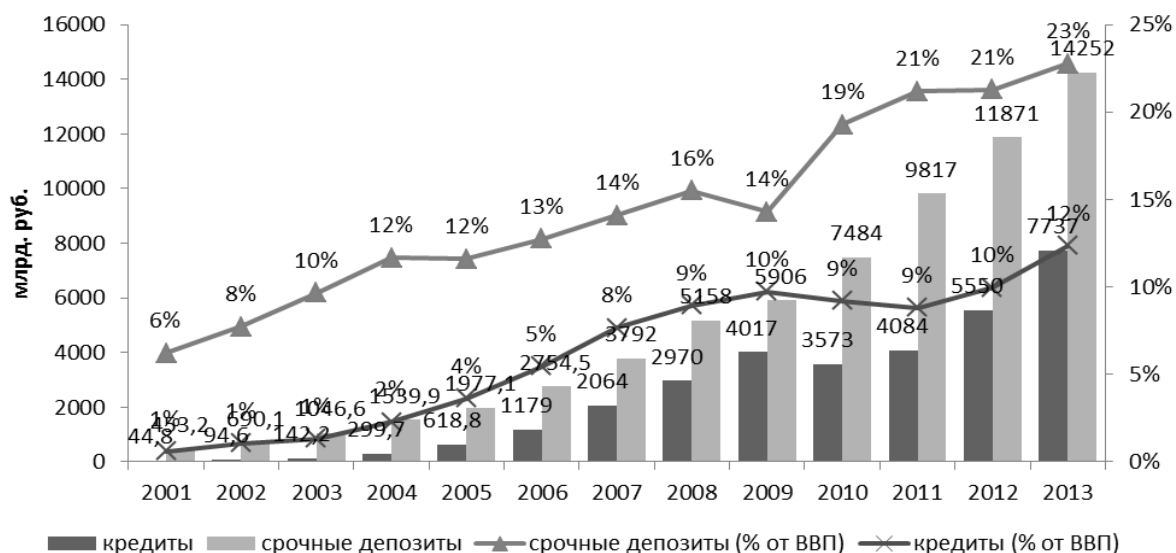


Рис. 1. Объемы кредитов и сбережений домашних хозяйств 2001-2013гг..

Ситуация в других странах постсоветского пространства аналогичная: растет доля сбережений домашних хозяйств, увеличиваются объемы потребительского кредитования. Это свидетельствует о том, что процессы изменения кредитно-сберегательного поведения в странах постсоветского пространства во многом идентичны.

Все вышесказанное свидетельствует о важности серьезного методичного анализа процессов накопления и потребления домашних хозяйств. Для всестороннего анализа и понимания происходящих процессов необходим переход от идеологических дискуссий, происходящих на концептуальном уровне, к систематическим исследованиям на языке математических моделей. Решение этого вопроса является достаточно сложной задачей, которая требует научно обоснованных концепций.

При этом для системного анализа вопросов накопления и потребления домашних хозяйств невозможно изучать только поведение домашних хозяйств, т.к. оно (поведение) безусловно связано как с общей экономической ситуацией в стране, так и с макроэкономической политикой государства. В связи с этим необходимо создание математического и программного инструментария, который, с одной стороны, позволял бы рассмотреть поведение домашних хозяйств как отдельного самостоятельного и независимого экономического агента, а, с другой стороны, мог бы применяться как часть более общих математических моделей системного анализа экономики, разрабатываемых школой академика А.А. Петрова. В моделях системного анализа экономики домашнее хозяйство описывается как экономический агент, принимающий решение каким образом ему распределять средства, получаемые в качестве дивидендов или в качестве вознаграждения за предоставление собственных трудовых ресурсов другим экономическим агентам (торговле, промышленности, транспорте). Это решение домашнего хозяйства определяется как решение экстремальной задачи, учитывающей структурные особенности экономики России. Важным моментом для применимости решения задачи в моделях системного анализа экономики является нахождения решения задачи в форме синтеза.

Основополагающей работой в математическом описании процессов сбережения домашних хозяйств является модель Рамсея. Ее недостатком является предположение о том, что экономический агент действует в условиях совершенного кредитно-депозитного рынка (другими словами, в этих моделях рассматривается случай, когда процентные ставки по кредитам и депозитам совпадают). В России эти рынки находятся на стадии становления, в связи с чем различия между процентными ставками существенны.

В середине 50-х годов 20-го века ученые-экономисты обратили внимание на особую роль денег в экономических процессах. Изучение этого вопроса привело к появлению теории монетаризма (см., например, работы М. Фридмана) и анализу роли денег в экономических процессах. При этом в классической модели Рамсея отсутствует какой-либо учет роли денег при описании кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств, что значительно сужает область ее применимости.

В связи с вышесказанным актуальной задачей остается создание набора достаточно полно и строго исследованных моделей, описывающих эволюцию формирования благосостояния домашних хозяйств и учитывающих отличительные черты экономического устройства стран постсоветского пространства, а именно

несовершенство рынка капитала и быстрый рост потребительского кредитования. При этом требуется учесть, что для применения моделей формирования благосостояния домашних хозяйств в моделях системного анализа экономики необходимо найти решение в аналитической форме. Также необходимо проанализировать применимость моделей для исследования поведения домашних хозяйств в целом. Здесь встает вопрос, прежде всего, существования репрезентативного домашнего хозяйства. Интерес к задачам агрегирования домашних хозяйств, обладающих различными значениями дохода, начального капитала и параметров межвременного предпочтения, в последние годы сильно возрос (Экланд, Лазрак, Каселли, Вентура). Связано это с необходимостью объяснения причин возникновения социального неравенства и анализа распределения национального богатства в условиях кризисных явлений в мировой экономике.

### **Цель работы:**

1. Построение в форме синтеза решения задачи оптимального управления в модифицированной модели Рамсея, учитывающей несовершенство рынка капитала.
2. Исследование концепции репрезентативного домашнего хозяйства на основе анализа условий агрегируемости оптимальных стратегий распределения доходов в модифицированной модели Рамсея.
3. Разработка численного метода и программного модуля для идентификации модели распределения доходов домашних хозяйств по статистическим данным стран постсоветского пространства.

**Методологической основой исследования** явилась теория оптимального управления для задач с ограничениями на фазовые переменные и смешанными ограничениями, метод динамического программирования, качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений, методы статистического анализа данных.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

1. Предложена модификация модели Рамсея, учитывающая потребительские кредиты, спрос на наличные деньги и несовершенство рынка кредитов-депозитов. Для этой модели построено решение задачи оптимального управления в форме синтеза.
2. Получены необходимые и достаточные условия агрегируемости оптимальных стратегий распределения доходов в репрезентативного потребителя в модифицированной модели Рамсея.
3. Разработан численный метод и программный модуль для идентификации модели распределения доходов домашних хозяйств на основе статистических данных.

**Теоретическая и практическая ценность работы.** Теоретическая значимость результатов исследования состоит в построении моделей, описывающих кредитно-сберегательное поведение домашних хозяйств, в построении синтеза

оптимального управления в моделях рамсеевского типа, в анализе условий агрегируемости оптимальных стратегий в модифицированной модели Рамсея.

Практическая значимость работы заключается в создании инструмента для анализа спроса на наличные деньги и предложения депозитов в условиях, характерных для стран постсоветского пространства. Созданный в рамках работы инструмент исследования поведения домашних хозяйств может применяться для качественного анализа проводимой кредитно-денежной и социальной политики в моделях системного анализа экономики и выработки рекомендаций, направленных на совершенствование кредитно-денежной политики.

**Апробация работы.** Научные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- Научная конференция «Тихоновские чтения», г. Москва, октябрь 2010 года. Тема доклада: «Синтез управления в модифицированной модели Рамсея».
- 53-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2010 года. Тема доклада: «Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности и потребительского кредитования».
- Научная конференция «Тихоновские чтения», г. Москва, июнь 2011 года. Тема доклада: «Промежуточная магистраль в обосновании синтеза оптимального управления в моделях экономического роста».
- 54-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2011 года. Тема доклада: «Идентификация модели рамсеевского типа по данным о сберегательном и потребительском поведении домашних хозяйств в России».
- VI-я международная школа-симпозиум «Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем» (АМУР-2012), Украина, Севастополь, сентябрь 2012 года. Тема доклада: «Достаточные условия существования репрезентативного потребителя в модели рамсеевского типа».
- 55-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2012 года. Тема доклада: «Необходимые и достаточные условия существования репрезентативного потребителя в модели рамсеевского типа».
- Второй Российский экономический конгресс, г. Суздаль, 18-23 февраля 2013 года. Тема доклада: «Модификация модели Рамсея для анализа сберегательного поведения в современной России».
- 56-я научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, ноябрь 2013 года. Тема доклада: «Применение модифицированной модели Рамсея для анализа кредитно-сберегательного поведения России и Казахстана».
- Научные семинары ВЦ РАН, ВМК МГУ, ЦЭМИ РАН, ЕУСПб.

Полученные результаты использовались в работах, проводимых в рамках проектов РГНФ (грант 12-02-00127), РФФИ (гранты 11-07-00162-а, 11-01-12084-офи-м-2011), программы ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (мероприятие 1.2.1 НК-15П).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 10 печатных работ, в том числе 2 работы из списка, рекомендованного ВАК, и свидетельство о регистрации в Реестре программ для ЭВМ.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из пяти глав (первая глава – введение), заключения и списка использованной литературы. Основная часть работы изложена на 146 страницах машинописного текста. Список использованной литературы включает 75 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**В первой главе (введении)** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируется цель и научная новизна полученных результатов, дается краткое содержание работы по главам.

**Во второй главе** рассматривается модель Рамсея и ее модификации.

В параграфе 2.1 рассматривается домашнее хозяйство - потребитель обладающий активами, которые приносят доход. Пусть  $C(t)$  - потребление домохозяйств, а  $D(t)$  - их сбережения (или, в зависимости от знака, кредиты) к моменту времени  $t$ . Будем считать, что домашнее хозяйство прогнозирует экспоненциальный рост заработной платы  $S(t)$  с темпом  $\gamma$ , то есть  $S(t) = Se^{\gamma t}$ . Тогда сбережения домашних хозяйств будут меняться по правилу:

$$\frac{dD}{dt} = Se^{\gamma t} + rD - C \quad (1)$$

где  $r$  - банковская депозитная ставка,  $D(0) = D_0$ .

Будем считать, что домашнее хозяйство максимизирует функционал

$$\int_0^T C(t)^\alpha e^{-\Delta t} dt \quad (2)$$

В терминальный момент времени домашнее хозяйство должно расплатиться с кредитными обязательствами, поэтому потребуем выполнения условия  $D(T) \geq 0$ .

Решение этой задачи исследовалось в работах Рамсея и др. авторов (см., например, В.З.Беленького). Оно имеет следующий вид:

$$D(t) = \frac{S}{r-\gamma} (e^{(r-\gamma)t} - 1) + D_0 e^{(r-\gamma)t} - \left( \frac{S}{r-\gamma} (e^{(r-\gamma)T} - 1) + D_0 e^{(r-\gamma)T} \right) \frac{e^{\left(\frac{r-\Delta}{1-\alpha}-\gamma\right)t} - e^{(r-\gamma)t}}{e^{\left(\frac{r-\Delta}{1-\alpha}-\gamma\right)T} - e^{(r-\gamma)T}}.$$

В работе исследуется асимптотика полученного решения при стремлении горизонта планирования в бесконечность. На основе исследования магистрального эффекта получено аналитическое выражение для синтеза оптимального управления:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C(D, T) = \frac{\Delta - \alpha r}{1 - \alpha} \left( D + \frac{S}{r - \gamma} \right).$$

Возникает вопрос, является ли полученная магистраль решением задачи с бесконечным горизонтом планирования? Ответ на этот вопрос достаточно нетривиален. Дело в том, что условие  $D(T) \geq 0$  критично при построении оптимального решения, т.к. оно исключает возможность финансовых пирамид. Следовательно, в задаче с бесконечным горизонтом планирования необходимо потребовать дополнительное условие, которое также отсекало бы такие траектории.

Классическая постановка модели Рамсея не учитывает спрос на наличные деньги. С середины 20-го века спрос на наличные деньги занимает одно из центральных мест в экономической литературе. Данное направление экономической мысли получило название монетаризма (см. работы М.Фридмана). Согласно этой

теории связь между суммой денег и скоростью их обращения отражается в следующем уравнении, получившем название закона Фишера:

$$MV = PQ,$$

где  $M$  — денежная масса,  $V$  — скорость оборота денег,  $P$  — цена товаров,  $Q$  — количество товаров. Справа в законе Фишера стоит совокупное потребление.

Спрос населения на наличные деньги изучается в параграфе 2.2. Следуя концепции монетаризма, будем считать, что спрос на наличные деньги возникает из-за необходимости обеспечения непрерывности потребительских расходов  $C(t)$ . Значит должно выполняться ограничение ликвидности  $M(t) \geq \theta C(t)$ . Величина  $\theta$  называется коэффициентом ликвидности. Отсюда следует, что коэффициент ограничения ликвидности  $\theta$  является обратной величиной к скорости обращения денег. В результате получим модификацию модели Рамсея, учитывающую спрос на наличные деньги:

$$\begin{aligned} \int_0^T C(t)^\alpha e^{-\Delta t} dt &\rightarrow \max_{C, M, D} \\ \frac{dx}{dt} &= S - C(t) + rD(t), \\ x(t) &= D(t) + M(t), \quad M(t) \geq \theta C(t), \\ x(T) &\geq 0, \quad x(0) = x_0, \\ C, M, D &\geq 0. \end{aligned}$$

Доказывается, что полученная задача оптимального управления имеет решение.

Ограничение ликвидности на оптимальной траектории выполняется строго, поэтому фактическим управлением задачи является  $M(t)$ . Аналогично классической постановке модели Рамсея был найден аналитическое выражение для синтеза оптимального управления на основе исследования магистрального эффекта:

$$M(x) = \frac{\theta(\Delta - \alpha r)}{(r\theta + 1)(1 - \alpha)} \left( x + \frac{S}{r - \gamma} \right)$$

Таким образом, при  $x < \frac{S}{r - \gamma} \frac{\theta(\Delta - \alpha r)}{1 - \alpha + (r - \Delta)\theta}$  домашние хозяйства будут брать кредит в размере  $(M(x) - x)_+$ , в противном случае - будут вкладывать денежные средства в депозиты в размере  $(x - M(x))_+$ . Потребление будет равно

$$C(x) = \frac{(\Delta - \alpha r)}{(r\theta + 1)(1 - \alpha)} \left( x + \frac{S}{r - \gamma} \right).$$

Данная модель разбивает домашние хозяйства на две группы. Первую группу, для которой выполнено  $r < \Delta + \gamma(1 - \alpha)$ , условно можно назвать "бедным слоем". Потребление этой группы будет убывать с течением времени и в пределе при  $t, T \rightarrow \infty$  отношение потребительских расходов к заработной плате будет бесконечно мало. Это связано с тем, что бедный слой в рамках данной модели для поддержания относительно высокого уровня потребления берет кредиты в начале жизненного цикла и в итоге все большая и большая часть доходов домашних хозяйств уходит на обслуживание долгов. Для богатого слоя населения, коэффициент дисконтирования которого удовлетворяет соотношению  $\Delta < r - \gamma(1 - \alpha)$ , ситуация выглядит абсолютно противоположно: потребление с течением времени возрастает и в пределе отношение потребительских расходов к заработной плате будет бесконечно большой величиной.

Рассмотренные выше постановки предполагают совершенство рынка капитала. В связи с этим предполагается равенство процентных ставок по кредитам и депозитам. Данное предположение не выполняется в условиях современной России. Поэтому необходимо учитывать тот факт, что разница между процентными ставками кредитов  $r_L$  и депозитов  $r_D$  существенно отличается. Для этого необходимо разделить кредиты и депозиты в классической постановке Рамсея и рассматривать их отдельно. Модели, учитывающие несовершенство рынка капитала, рассматриваются в параграфах 2.3-2.7.

В параграфе 2.3 рассматривается модель, когда домашние хозяйства могут привлекать заемные средства, но у них отсутствует возможность получения дополнительного дохода за счет сбережений. Это позволяет исследовать спрос на потребительские кредиты в условиях отсутствия рынка депозитов:

$$J = \int_0^T C(t)^\alpha e^{-\Delta t} dt \rightarrow \max$$

$$\dot{L} = r_L L + H_L, \dot{M} = S e^{\gamma t} - C + H_L, \quad (3)$$

$$M \geq \theta C, L(T) = 0, L \geq 0, M \geq 0, M(0) - L(0) = X_0,$$

где  $M, L$  - фазовые переменные,  $H_L$  и  $C \geq 0$  - управления.

Существование решения задачи (3) доказывается проверкой условий теорем существования решения в задаче оптимального управления.

**Утверждение 1.** На оптимальной траектории  $M_*(t) = \theta C_*(t) \quad \forall t \in [0, T]$ .

Таким образом, (3) сводится к задаче

$$J = \int_0^T M^\alpha e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} dt \rightarrow \max$$

$$\dot{x} = S - (r_L + 1/\theta)M + (r_L - \gamma)x,$$

$$x(0) = X_0, x(T) \geq 0, M \geq \max(0, x), \quad (4)$$

Для поиска оптимального управления полученной задачи применялся принцип максимума Понтрягина:

**Теорема 1.** Для того, чтобы пара  $(M_*, x_*)$ , допустимая для задачи (4), была ее решением, необходимо, чтобы существовали кусочно-дифференцируемая функция  $\varphi(t)$  и кусочно-непрерывная функция  $\mu(t) \geq 0$  такие, что управление  $M_*$  доставляет максимум функции Гамильтона

$$H(x, u, \varphi, t) = (M^\alpha + \varphi(S - (r_L + 1/\theta)M + (r_L - \gamma)x) + \mu(M - x)) e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} \quad (5)$$

при заданных  $x_*, \varphi_*, \mu_*$ , функция  $\varphi(t)$  является решением сопряженной системы  $\dot{\varphi} = (\Delta - \alpha\gamma)\varphi - \partial H / \partial x$  и удовлетворяет условию трансверсальности  $\varphi(T)x(T) = 0$ , а функция  $\mu(t)$  - условию дополняющей нежесткости  $\mu(M - x) = 0$ .

Необходимо отметить, что для задачи (4) удастся доказать что мера  $\mu(t)$  будет кусочно-непрерывной. Это существенно облегчает дальнейший анализ задачи.

Рассмотрим поведение траекторий на фазовой плоскости. При  $x > 0$ ,  $\varphi \geq \alpha x^{\alpha-1} / (r_L + 1/\theta)$  максимум гамильтониана достигается при  $M = x$ . В этом случае траектория  $(x, \varphi)$  будет меняться согласно закону

$$\dot{x} = S - (\gamma + 1/\theta)x,$$

$$\dot{\varphi} = -\alpha x^{\alpha-1} + \varphi(\Delta + (1 - \alpha)\gamma + 1/\theta). \quad (6)$$

Назовем данный режим режимом 1.

При  $\varphi < \alpha x^{\alpha-1}/(r_L + 1/\theta)$  или  $x \leq 0$  траектория меняется согласно закону

$$\begin{aligned}\dot{x} &= S - (r_L + 1/\theta)[\varphi(r_L + 1/\theta)/\alpha]^{1/(\alpha-1)} + (r_L - \gamma)x, \\ \dot{\varphi} &= \varphi(\Delta + (1-\alpha)\gamma - r_L).\end{aligned}\quad (7)$$

Максимум гамильтониана достигается при  $M = [\varphi(r_L + 1/\theta)/\alpha]^{1/(\alpha-1)}$ ,  $M > x$ . Назовем данный случай режимом 2. Система (7) нелинейная. В работе показывается, что можно свести данную систему к линейной, если рассматривать ее не в терминах сопряженной переменной  $\varphi$ , а в терминах управления  $M$ . Тогда траектория меняется согласно уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{x} &= S - (r_L + 1/\theta)M + (r_L - \gamma)x, \\ \dot{M} &= -M((\Delta - r_L)/(1-\alpha) + \gamma).\end{aligned}\quad (8)$$

Область  $\varphi < \alpha x^{\alpha-1}/(r_L + 1/\theta)$  или  $x < 0$  соответствует области  $M > \max(x, 0)$ .

В параграфе 2.4 анализируются траектории фазовой и сопряженной переменной задачи (4). В результате этого анализа найден синтез оптимального управления. Для нахождения аналитического выражения для синтеза оптимального управления исследуется магистральный эффект в задаче (4). Оказывается, что найденная магистраль является решением задачи с бесконечным горизонтом планирования:

$$\begin{aligned}J &= \int_0^{+\infty} M^\alpha e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t} dt \rightarrow \max \\ \dot{x} &= S - (r_L + 1/\theta)M + (r_L - \gamma)x, \\ M &\geq 0, M \geq x, x(0) = X_0, x \geq -S/(r_L - \gamma).\end{aligned}\quad (9)$$

Заметим, что условие на правом конце  $x(T) \geq 0$  в задаче с конечным горизонтом переходит в ограничение на фазовую переменную  $x(t) \geq -S/(r_L - \gamma)$ . Множество  $[-S/(r_L - \gamma), +\infty]$  является множеством ликвидных состояний.

**Определение.** Ликвидным состоянием задачи (9) будем называть такие  $x$ , для которых существует допустимая траектория, попадающая в целевое множество  $\{x \geq 0\}$  за конечное время.

**Утверждение 2.** Решение задачи (9) существует тогда и только тогда, когда

$$\Delta > \alpha\gamma, r_L > \gamma. \quad (10)$$

Для проверки того факта, что магистральная траектория задачи (4) является решением задачи (9), использовалась теорема верификации. Для этого было записано уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для случая с подынтегральным функционалом с дисконтирующим множителем (функция Гамильтона-Якоби-Беллмана  $W(x, t)$  искалась в виде  $W(x, t) = V(x)e^{-(\Delta - \alpha\gamma)t}$ ):

$$(\Delta - \alpha\gamma)V(x) = \max_{M \geq \max(x, 0)} \left\{ M^\alpha + \frac{dV}{dx} (S + (r_L - \gamma)x - (r_L + 1/\theta)M) \right\}. \quad (11)$$

Введем обозначения:

$$x_1 = \frac{S\theta(\Delta - \alpha r_L)}{(r_L - \gamma)(1 - \alpha + \theta(r_L - \Delta))}, \tau_1(x) = \frac{\theta}{\gamma\theta + 1} \ln \left( \left( x - \frac{S\theta}{\gamma\theta + 1} \right) / \left( x_1 - \frac{S\theta}{\gamma\theta + 1} \right) \right), x_2 - \text{решение}$$

уравнения

$$\frac{1 + r_L\theta}{1 + \gamma\theta} \int_0^1 \left( p x_2 + (1 - p) \frac{S\theta}{\gamma\theta + 1} \right)^{\alpha-1} p^{\theta(\Delta - \alpha\gamma)/(1 + \gamma\theta)} dp = x_2^{\alpha-1}, \quad (12)$$

а  $\tau_2$  - решение уравнения

$$\left( \frac{S}{r_L - \gamma} + x_2(1-a) \right) e^{(\gamma-r_L)\tau_2} + x_2 a e^{((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_2} - \frac{S}{r_L - \gamma} = x. \quad (13)$$

**Утверждение 3.** Если  $r_L > \Delta + (1-\alpha)\gamma$ ,  $\Delta > \alpha\gamma$  и  $r_L > \gamma$ , то уравнение (12) имеет решение  $x_2 \in \mathbb{R}_+$ :  $x_2 < S\theta/(\gamma\theta+1)$ .

**Утверждение 4.** Пусть  $r_L > \Delta + (1-\alpha)\gamma$ ,  $\Delta - \alpha\gamma > 0$  и  $r_L > \gamma$ . Тогда уравнение (13) имеет решение  $\tau_2 \in \mathbb{R}_+$ :  $\tau_2 < +\infty$  при любом  $x \in [0, x_2]$ . Кроме того,  $\tau_2(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_2$ .

Обозначим  $\tilde{V}(x) = \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_L} \left( \frac{S}{r_L - \gamma} + x \right)^\alpha (1/a)^\alpha$ ,  $\tilde{M}(x) = \left( x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right) / a$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (10).

1. Если  $r_L < \Delta - (1-\alpha)/\theta$ , то задача (9) имеет решение в виде синтеза  $M(x) = \tilde{M}(x)$ . Функция цены имеет вид  $V(x) = \tilde{V}(x)$ .
2. Если  $\Delta - (1-\alpha)/\theta < r_L < \Delta + (1-\alpha)\gamma$ , то задача (9) имеет решение в виде синтеза:

$$M(x) = \begin{cases} \left( x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right) \frac{(\Delta - \alpha r_L)\theta}{(1-\alpha)(1+r_L\theta)}, & x \leq x_1, \\ x, & x > x_1, \end{cases}$$

Функция цены имеет вид

$$V(x) = \begin{cases} \tilde{V}(x), & x \leq x_1, \\ \int_0^{\tau_1(x)} \left[ \frac{S\theta}{\gamma\theta+1} (1 - e^{-(\gamma+1/\theta)t}) + x e^{-(\gamma+1/\theta)t} \right]^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt + \tilde{V}(x_1) e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_1(x)}, & x > x_1. \end{cases}$$

3. Если  $r_L > \Delta + (1-\alpha)\gamma$ , то задача (9) имеет решение в виде синтеза:

$$M(x) = \begin{cases} x_2 e^{((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_2(x)}, & x \leq x_2, \\ x, & x > x_2 \end{cases}$$

Функция цены имеет вид

$$V(x) = \int_{x_2}^x \psi(y) dy + \frac{1}{\Delta - \alpha\gamma} \left[ (1-\alpha)x_2^\alpha + \frac{\alpha\theta x_2^\alpha (r_L - \gamma + S/x_2)}{1+r_L\theta} \right],$$

где

$$\psi(y) = \begin{cases} \alpha\theta x_2^{\alpha-1} e^{-(\Delta-r_L+(1-\alpha)\gamma)\tau_2(y)} / (1+r_L\theta), & y \leq x_2, \\ \alpha \int_0^\infty \left( \frac{S\theta}{\gamma\theta+1} + \left( y - \frac{S\theta}{\gamma\theta+1} \right) e^{-(\gamma+1/\theta)t} \right)^{\alpha-1} e^{-(\Delta+1/\theta+(1-\alpha)\gamma)t} dt, & y > x_2. \end{cases}$$

В параграфе 2.4 для полноты изложения рассматривается модель, предложенная А.А. Шананиным и А.В. Рудевой, в которой отсутствует рынок потребительского кредитования. Изучено поведение фазовых траекторий для задачи на конечном временном горизонте планирования и найдена магистраль.

В параграфе 2.5 рассматривается случай, когда домашние хозяйства могут как кредитоваться, так и сберегать. Аналогично предыдущим главам сначала исследовалась постановка на конечном временном интервале. Для нее была найдена

магистраль оптимального управления при неограниченном увеличении горизонта планирования. Затем сформулирована задача распределения доходов домашних хозяйств на бесконечном временном интервале:

$$J = \int_0^{+\infty} M^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \rightarrow \max$$

$$\dot{x} = S - (r_L + 1/\theta)M + D(r_D - r_L) + (r_L - \gamma)x,$$

$$D, M \geq 0, M + D \geq x, x(0) = x_0, x \geq -S / (r_L - \gamma).$$
(14)

Здесь  $x$  - фазовая переменная, и  $M$ ,  $D$  - управления. Доказываются условия, при которых задача имеет решение:

**Утверждение 5.** *Решение задачи (14) существует тогда и только тогда, когда*

$$\Delta > \alpha \max(r_D, \gamma), r_L > \gamma, r_L \geq r_D. \quad (15)$$

Для задачи (14) найдена функция Гамильтона-Якоби-Беллмана и получено решение в форме синтеза по схеме, описанной выше.

Для формулировки результата введем следующие обозначения:  $w_\xi = \frac{S}{\xi - \gamma}$ ,

$$\kappa(\xi) = \frac{(1 + \xi\theta)(1 - \alpha)}{\theta(\Delta - \alpha\xi)}, \quad M_\xi(x) = (x + w_\xi) / \kappa(\xi), \quad V_1(x, \xi) = \frac{1 - \alpha}{\Delta - \alpha\xi} M_1^\alpha(x, \xi), \quad x_\xi = \frac{w_\xi(\Delta - \alpha\xi)\theta}{1 - \alpha + \theta(\xi - \Delta)},$$

$$\hat{x} = \frac{S\theta}{\gamma\theta + 1}, \quad b(x, \xi) = \frac{1 + \xi\theta}{1 + \gamma\theta} \int_0^1 (px + (1 - p)\hat{x})^{\alpha-1} p^{\frac{\theta(\Delta - \alpha\gamma)}{\gamma\theta + 1}} dp, \quad \tau_\xi(x) = \frac{\theta}{\gamma\theta + 1} \ln \left( \frac{x - \hat{x}}{x_\xi - \hat{x}} \right),$$

$$V_2(x, \tau) = \int_0^\tau [\hat{x} + (x - \hat{x})e^{-(\gamma+1/\theta)t}]^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt, \quad V_3(x, \xi) = V_2(x, \tau_\xi(x)) + V_1(x_\xi, \xi) e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_\xi(x)},$$

$$\rho = \frac{\Delta + \gamma(1 - \alpha) + 1/\theta}{\gamma + 1/\theta}, \quad g(x, y, \xi) = \left[ \frac{x - \hat{x}}{y - \hat{x}} \right]^{-\rho} \left( \frac{\gamma\theta + 1}{\xi\theta + 1} y^{\alpha-1} + \int_y^x z^{\alpha-1} \left[ \frac{z - \hat{x}}{y - \hat{x}} \right]^\rho \frac{dz}{z - \hat{x}} \right),$$

$$h(x, \tau, \xi) = (w_\xi + x - x\kappa(\xi))e^{(\gamma-\xi)\tau} + x\kappa(\xi)e^{\left(\frac{\Delta-\xi}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau} - w_\xi. \quad \text{Обозначим решения уравнений}$$

$$g(x_2, x_{r_L}, r_L) = \frac{\gamma\theta + 1}{r_D\theta + 1} x_2^{\alpha-1}, \quad b(x_3, r_L) = x_3^{\alpha-1}, \quad b(x_4, r_D) = x_4^{\alpha-1}, \quad h(x_2, \tau_2, r_L) = x_2, \quad h(x_3, \tau_3, r_D) = x_3,$$

$$g(x_6, x_{r_D}, r_D) = \frac{\gamma\theta + 1}{r_L\theta + 1} x_6^{\alpha-1}, \quad h(x_6, \tau_5, r_L) = x \quad \text{как } x_2, x_3, x_4, \tau_2, \tau_3, x_6, \tau_5 \text{ соответственно.}$$

Существование решения этих уравнений доказывается в полном тексте диссертации.

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия (15).*

1. Если  $r_D < r_L < \Delta - (1 - \alpha)/\theta$ , то задача (14) имеет решение в виде синтеза  $M(x) = M_{r_L}(x)$ . Функция цены  $V(x) = V_1(x, r_L)$ .
2. Если  $r_D < \Delta - (1 - \alpha)/\theta < r_L < \Delta + \gamma(1 - \alpha)$ , то задача (14) имеет решение в виде синтеза:

$$M(x) = \begin{cases} M_{r_L}(x), & x \leq x_{r_L}, \\ x, & x > x_{r_L}, \end{cases}$$

Функция цены имеет вид

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x, r_L), & x \leq x_{r_L}. \\ V_3(x, r_L), & x > x_{r_L}. \end{cases}$$

3. Если  $\Delta - (1-\alpha)/\theta < r_D < r_L < \Delta + \gamma(1-\alpha)$ , то задача (14) имеет решение в виде синтеза:

$$M(x) = \begin{cases} M_{r_L}(x), & x < x_{r_L}, \\ x, & x \in [x_{r_L}, x_2], \\ x_2 e^{\left(\frac{\Delta - r_D}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_2}, & x > x_2, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x, r_L), & x < x_{r_L}, \\ V_3(x, r_L), & x \in [x_{r_L}, x_2], \\ x_2^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_D} e^{\alpha((\Delta - r_D)/(1-\alpha) + \gamma)\tau_2(x)} + \left( V_3(x_2, r_L) - x_2^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_D} \right) e^{-(\Delta - \alpha\gamma)\tau_2(x)}, & x > x_2, \end{cases}$$

4. Если  $\Delta - (1-\alpha)/\theta < r_D < \Delta + \gamma(1-\alpha) < r_L$ , то задача (14) имеет решение в виде синтеза:

$$M(x) = \begin{cases} x_3 e^{\left(\frac{\Delta - r_L}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_3}, & x < x_3, \\ x, & x \in [x_3, x_4], \\ x_4 e^{\left(\frac{\Delta - r_D}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_4}, & x > x_4, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} x_3^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_L} e^{\alpha((\Delta - r_D)/(1-\alpha) + \gamma)\tau_3(x)} + \left( V_2(x_3, +\infty) - x_3^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_L} \right) e^{-(\Delta - \alpha\gamma)\tau_3(x)}, & x < x_3, \\ V_2(x, +\infty), & x \in [x_3, x_4], \\ x_4^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_D} e^{\alpha((\Delta - r_D)/(1-\alpha) + \gamma)\tau_4(x)} + \left( V_2(x_4, +\infty) - x_4^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta - \alpha r_D} \right) e^{-(\Delta - \alpha\gamma)\tau_4(x)}, & x > x_4, \end{cases}$$

5. Если  $\Delta + (1-\alpha)\gamma < r_D < r_L$ , то задача (14) имеет решение в виде синтеза:

$$M(x) = \begin{cases} x_6 e^{\left(\frac{\Delta - r_L}{1-\alpha} + \gamma\right)\tau_4}, & x < x_6, \\ x, & x \in [x_6, x_{r_D}], \\ M_1(x, r_D), & x > x_{r_D}, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} x_6^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_D} e^{\alpha((\Delta-r_L)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_5(x)} + \left( V_3(x_6, r_D) - x_6^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L} \right) e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_5(x)}, & x < x_6, \\ V_3(x, r_D), & x \in [x_6, x_{r_D}], \\ V_1(x, r_D), & x > x_{r_D}, \end{cases}$$

6. Если  $r_D < \Delta - \frac{1-\alpha}{\theta} < \Delta + (1-\alpha)\gamma < r_L$ , то задача (14) имеет решение в виде синтеза:

$$M(x) = \begin{cases} x_3 e^{\left(\frac{\Delta-r_L}{1-\alpha}+\gamma\right)\tau_3}, & x < x_3, \\ x, & x \geq x_3, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} x_3^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L} e^{\alpha((\Delta-r_D)/(1-\alpha)+\gamma)\tau_3(x)} + \left( V_2(x_3, +\infty) - x_3^\alpha \frac{1-\alpha}{\Delta-\alpha r_L} \right) e^{-(\Delta-\alpha\gamma)\tau_3(x)}, & x < x_3, \\ V_2(x, +\infty), & x \geq x_3. \end{cases}$$

Таким образом, в зависимости от коэффициента дисконтирования домашнее хозяйство может иметь три различных потребительских поведения:

- При выполнении условий 1-3 теоремы 3 ( $r_D < r_L < \Delta + \gamma(1-\alpha)$ ) траектории устроены следующим образом: независимо от того, берут ли домашние хозяйства кредиты, вкладываются ли в депозиты или хранят все средства в форме наличных денег в начальный момент времени, домашние хозяйства с некоторого момента времени будут кредитоваться. Благосостояние домашних хозяйств для этих режимов уменьшается с течением времени и стремится к отрицательной величине  $-S/(r_L - \gamma)$ , домашние хозяйства оказываются обремененными большим объемом кредитов и в итоге вынуждены большую часть своих доходов тратить на выплаты по кредитам. Такое поведение присуще бедному слою населения с большим коэффициентом дисконтирования.

- При выполнении условий 4 или 6 теоремы 3 ( $r_D < \Delta + \gamma(1-\alpha) < r_L$ ) оптимальные траектории, начиная с некоторого момента времени, будут находиться в области, в которой отсутствуют кредиты и депозиты. Такое поведение говорит о том, что домашние хозяйства являются самодостаточными, и кредиты или депозиты им требуются (заметьте, что кредиты и депозиты присутствуют только на начальном участке траектории) только для того, чтобы быстрее вывести свой уровень потребления на некоторый оптимальный уровень потребления. Благосостояние домашних хозяйств стремится к величине  $\hat{x}$ , а отношение совокупных расходов к доходам - к константе  $1/(1+\gamma\theta)$ . Отсюда также можно найти оптимальный объем потребления:  $C_* = S/(1+\gamma\theta)$ . В силу некоторой стабильности поведения данного типа домашних хозяйств назовем их средним слоем.

- При выполнении условия  $\Delta + \gamma(1-\alpha) < r_D < r_L$  (условие 5 теоремы 3) оптимальная траектория, начиная с некоторого момента времени, будет находиться в области с депозитами. Благосостояние домашних хозяйств в этом случае

неограниченно возрастает. Поэтому будем называть этот слой богатым слоем. Эти домашние хозяйства являются рантье: основным источником дохода у них являются дивиденды, а отношение потребительских расходов к заработной плате стремится к нулю. Вообще говоря, в таком случае домашние хозяйства должны максимизировать не столько полезность потока потребления, сколько максимизировать доходность инвестирования в различные виды активов, которыми они обладают.

Таким образом, коэффициент дисконтирования является параметром, отражающим принадлежность домашнего хозяйства к тому или иному классу населения. Кроме того, модель позволяет оценить влияние инфляции на население: увеличение инфляции  $i$  приводит к увеличению коэффициента дисконтирования, что в рамках модели соответствует обеднению населения (другими словами, при увеличении инфляции будет увеличиваться доля бедного слоя населения).

Принципиальное отличие рассмотренной в этом параграфе модели от классической постановки модели Рамсея – в появлении среднего слоя. Эти домашние хозяйства рассматривают заемные средства и/или сбережения как некоторое временное решение, которое позволит оптимизировать распределение их потребления по времени. Поэтому средний слой является целевой аудиторией коммерческих банков: у среднего слоя есть спрос на кредиты и депозиты, и при этом он в состоянии расплатиться со своими обязательствами.

При сопоставлении рассмотренной в этом параграфе модели с модификациями модели Рамсея при отсутствии рынка кредитования или рынка сбережений необходимо заметить, что решение является «расширением» решений задач, рассмотренных в параграфах 2.3, 2.4: асимптотика «среднего слоя» присутствует и в случае отсутствия возможности сберегать, и в случае отсутствия возможности привлекать заемные средства.

В параграфе 2.6 рассматривается модифицированная модель Рамсея с товарами длительного пользования. Предполагается, что домашнее хозяйство делит свое потребление между покупкой товаров длительного пользования на сумму  $C_1$  и товарами повседневного спроса  $C_2$ . Домашнее хозяйство обладает некоторым объемом товаров длительного пользования  $Z$ , которое выбывает с темпом  $\mu$ . При этом домашнее хозяйство может продавать и покупать товары длительного пользования. Для упрощения модели считается, что при перепродаже цена товара не меняется. Далее в параграфе 2.6 формулируется задача оптимального управления:

$$\begin{aligned}\frac{dD}{dt} &= r_D D + H, \\ \frac{dM}{dt} &= Se^{\gamma t} - H - C_1 - C_2, \\ \frac{dZ}{dt} &= C_1 - \mu Z, \\ M &\geq \theta C_2 \geq 0, C_2 \geq 0, C_1 \in R, \\ M, Z, D &\geq 0, D(0) + Z(0) + M(0) = X_0, \\ \int_0^T \min\{KZ, C_2\}^\alpha e^{-\Delta t} dt &\rightarrow \max_{C_1, C_2}\end{aligned}$$

С помощью замены полученная задача сводится к задаче, рассмотренной в параграфе 2.3. Тем самым показывается, что в условиях совершенного рынка товаров длительного пользования (т.е. в ситуации, при которой перепродажа товаров

домашнее хозяйство не несет транзакционных издержек) кредитно-сберегательное поведение домашних хозяйств не меняется.

В третьей главе исследуются вопрос агрегирования оптимальных стратегий в модифицированной модели Рамсея.

В моделях рамсеевского типа, описанных в предыдущей главе, исследуется поведение репрезентативного домашнего хозяйства, а также зависимость этого поведения от различных экономических факторов. Однако поведение домашних хозяйств по отдельности не отвечает требованию рациональности, и потому описывать каждое домашнее хозяйство как отдельного экономического агента не представляется разумным. Причиной этого является наличие у каждого домашнего хозяйства множества факторов, являющихся случайными и имеющих не только экономический характер (в качестве примеров таких факторов могут быть увеличение заработной платы, задержки и дискретность выдачи заработной платы, непредвиденные обстоятельства: болезни, поломки бытовой техники). Нивелировать влияние случайных факторов можно на макроэкономическом уровне, когда в качестве экономического агента рассматривается группа домашних хозяйств. В связи с этим становится актуальной задача агрегирования поведения домашних хозяйств, а также задача нахождения условий существования репрезентативного потребителя. Под репрезентативным потребителем здесь понимается такое домашнее хозяйство, которое обладает потребительским поведением, эквивалентным сумме потребительских поведений всех домашних хозяйств.

Рассмотрим функцию распределения заработной платы домашних хозяйств в начальный момент времени по коэффициенту дисконтирования и начальному благосостоянию  $S_0(x, \Delta)$ , определенную на некотором множестве  $\Omega = [\Omega_x \times \Omega_\Delta]$ . Будем считать, что коэффициент дисконтирования домашнего хозяйства не меняется со временем. Функция распределения заработной платы  $S(x, \Delta, t)$  меняется с течением времени из-за изменения у домашних хозяйств уровня благосостояния  $x$ . Из условия неразрывности потока для  $S(x(t), \Delta, t)$  следует, что  $\int_{\Omega} S(x, \Delta, t) dx d\Delta$  является константой.

Не ограничивая общности, можно считать эту константу равной 1. Тогда задачу существования репрезентативного потребителя можно сформулировать так: существует ли такое  $\hat{\Delta}$ , что  $m(\hat{\Delta}, \int_{\Omega} S(x, \Delta, t) dx d\Delta) = \int_{\Omega} S(x, \Delta, t) m(x, \Delta) dx d\Delta$ , где  $m(\Delta, x)$  - синтез оптимального управления в модифицированной модели Рамсея с единичной заработной платой. Обозначим  $\int_{\Omega} S(x, \Delta, t) dx d\Delta$  как  $X(t)$ , а  $\int_{\Omega} S(x, \Delta, t) m(x, \Delta) dx d\Delta$  как  $M(t)$ .

Функция  $S(x, \Delta, t)$  однозначно задается по начальному распределению  $S_0(x, \Delta)$ . Зависимость функции распределения заработной платы  $S(x, \Delta, t)$  от времени связана с изменением у домашних хозяйств благосостояния  $x(t)$ . Скорость изменения благосостояния равна  $f(x, \Delta) = 1 + (r_D - \gamma)x - (r_D + 1/\theta)m(x, \Delta)$ . Тогда должно выполняться уравнение неразрывности потока заработной платы:

$$\partial S(x, \Delta) / \partial t + \partial (S(x, \Delta) f(x, \Delta)) / \partial x = 0. \quad (16)$$

В третьей главе удастся получить необходимые и достаточные условия существования репрезентативного потребителя:

**Теорема 4.** Пусть выполнено соотношение

$$\int_{\Omega} S(x, \Delta, t) m(x, \Delta) dx d\Delta > m \left( \int_{\Omega} S(x, \Delta, t) x dx d\Delta, \hat{\Delta} \right),$$

коэффициент дисконтирования домашних хозяйств принадлежит интервалу  $r_D - (1-\alpha)\gamma < \Delta < r_D + (1-\alpha)/\theta$ , и все домашние хозяйства имеют сбережения. Также потребуем, чтобы  $\text{supp}(S_0(x, \Delta)) \subset B \subset \Omega$ , где  $B$  - некоторое подмножество  $\Omega = \{r_D - \gamma(1-\alpha) \leq \Delta \leq r_D + (1-\alpha)/\theta, x_4(\Delta) \leq x\}$  (определение  $x_4(\Delta)$  приводится выше).  $S_0(x, \Delta)$  была гладкой функцией на  $\Omega$  и равной нулю на границе области  $\partial\Omega_x$ , а зависимость коэффициента отращения к риску от коэффициента дисконтирования  $\alpha(\Delta)$  была непрерывна. Тогда репрезентативное домашнее хозяйство с постоянным коэффициентом дисконтирования в некоторой окрестности  $t=0$  существует тогда и только тогда, когда коэффициенты дисконтирования и отращения к риску домашних хозяйств удовлетворяют соотношению  $(r_D - \Delta)/(1-\alpha(\Delta)) = \beta$ , где  $\beta$  - константа из интервала  $[1/\theta; \gamma]$ .

В четвертой главе изучается вопрос идентификации параметров моделей. Для исследования динамики временных рядов наличных денег, депозитов, кредитов и потребления домашние хозяйства были разделены на две группы: сберегающую и кредитующуюся. При определении параметров модели для каждой из групп было необходимо разобраться с основными экономическими факторами, влияющими на параметры модели и на основе этого анализа предложить способ определения параметров. Прежде всего это касается коэффициента ограничения ликвидности и коэффициента дисконтирования.

Модели, описывающие зависимость скорости обращения денег от различных параметров, изучаются в теории транзакционного спроса на наличные деньги. Была рассмотрена модель Баумоля-Тобина, в которой спрос на наличные деньги формируется из-за издержек при снятии денег с депозитного счета. Также в результате исследования тренда коэффициента ликвидности было найдена связь коэффициента ограничения ликвидности с долей рублевых депозитов домашних хозяйств в общей сумме депозитов (валютных и рублевых):

$$\theta = 2.57 \frac{D_{RUR}}{D_{ALL}}.$$

Полученная зависимость говорит о том, что при принятии решения о количестве наличных денег, которые надо хранить для обеспечения потребления, население ориентируется на макроэкономическую ситуацию в стране и, прежде всего, на курс национальной валюты. Например, в случае девальвации национальной валюты реальная ставка процента валютных депозитов возрастает (за счет роста цены валюты), что приводит к перераспределению не только депозитов между рублевыми и валютными, но и к изменению коэффициента ограничения ликвидности. Эту картину мы наблюдали в 2008-2009 гг.

Для описания изменений коэффициента ограничения ликвидности была предложена модель распределения сбережений домашних хозяйств между валютными и рублевыми депозитами. Домашние хозяйства хранят сбережения в валюте  $D_{UE}$  и в рублях  $D_{RUR}$ . Реальная ставка процента по валютным депозитам равна  $r_{UE} + d\rho/dt$ , где  $r_{UE}$  - средневзвешенная процентная ставка по валютным депозитам, а  $d\rho/dt$  - скорость изменения курса рубля. Ставка по рублевым депозитам равна  $r_{RUR}$ . В модели предполагается, что в зависимости от разницы процентных ставок между двумя видами депозитов домашнее хозяйство перераспределяет свои депозиты между

ними. В результате получена формула, описывающая изменение коэффициента ограничения ликвидности:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left( r_{RUR} - r_{UE} - \frac{d\rho}{dt} \right) \lambda p + \left( r_{RUR} - r_{UE} - \frac{d\rho}{dt} \right) \left( \theta - \frac{\theta^2}{p} \right),$$

где  $p = 3,671$  и  $\lambda = 1$  - некоторые константы, которые подбирались для лучшего совпадения расчетных значений коэффициента ограничения ликвидности с историческим трендом.

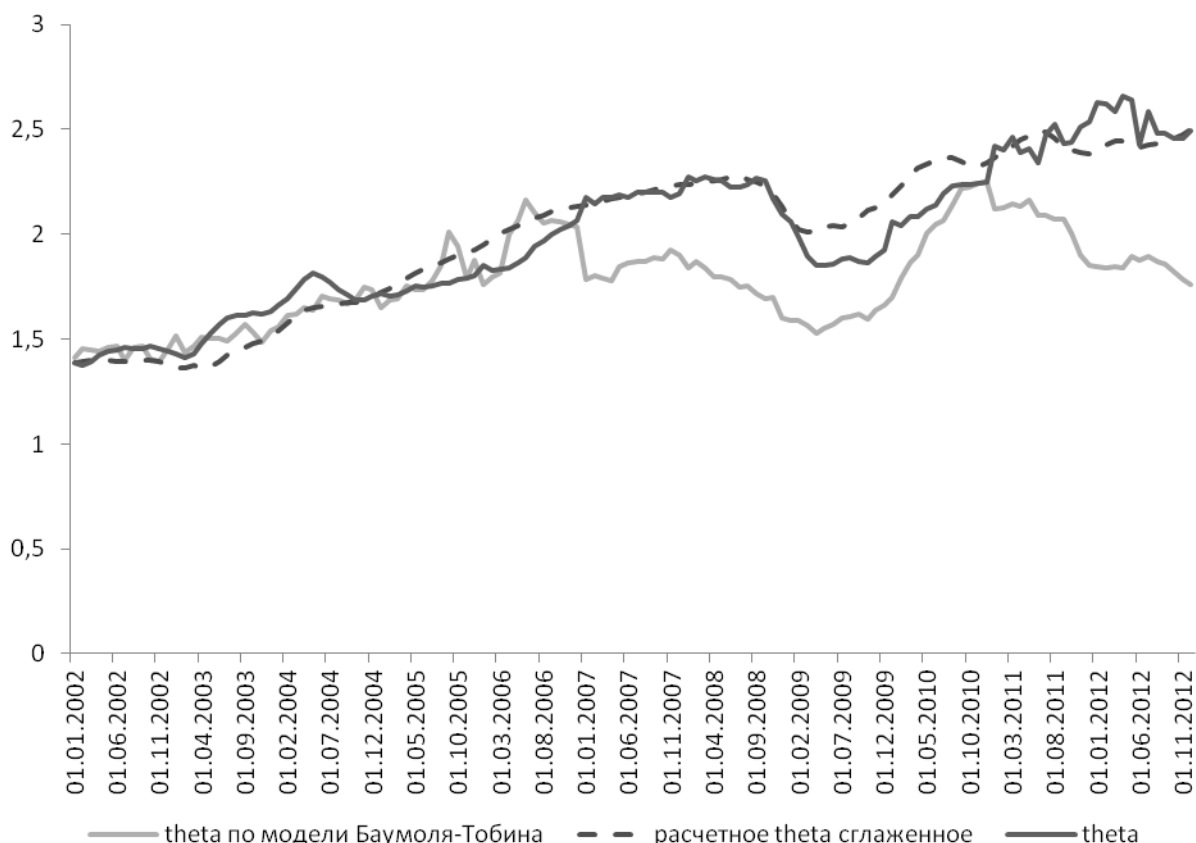


Рис. 2. Идентификация коэффициента ограничения ликвидности

Рост коэффициента ограничения ликвидности можно объяснить тем, что после дефолта 1998 г. начал зарождаться средний слой домашних хозяйств и домашние хозяйства стали покупать товары длительного пользования, для чего им понадобилось хранить больший объем наличных средств. В период экономического кризиса 2008-2009 гг. домашние хозяйства стали меньше откладывать денег на товары длительного пользования, в связи с чем коэффициент ограничения ликвидности снизился. При этом необходимо отметить, что описанная выше модель в отличие от модели Баумоля-Тобина отлавливает снижение коэффициента ограничения ликвидности.

Для описания кредитно-сберегательного поведения населения домашние хозяйства были разбиты на две группы: сберегающие и кредитующиеся домашние хозяйства. Коэффициент дисконтирования подбирался таким образом, чтобы домашнее хозяйство находилось на границе среднего и богатого слоя для сберегающего типа домашних хозяйств ( $\Delta(t) = r_D(t) - (1 - \alpha)\gamma(t)$ ), и на границе бедного и среднего слоя для кредитующегося типа домашних хозяйств ( $\Delta(t) = r_L(t) - (1 - \alpha)\gamma(t)$ ).

Результаты расчетов для Российской Федерации приведены на Рис. 3.

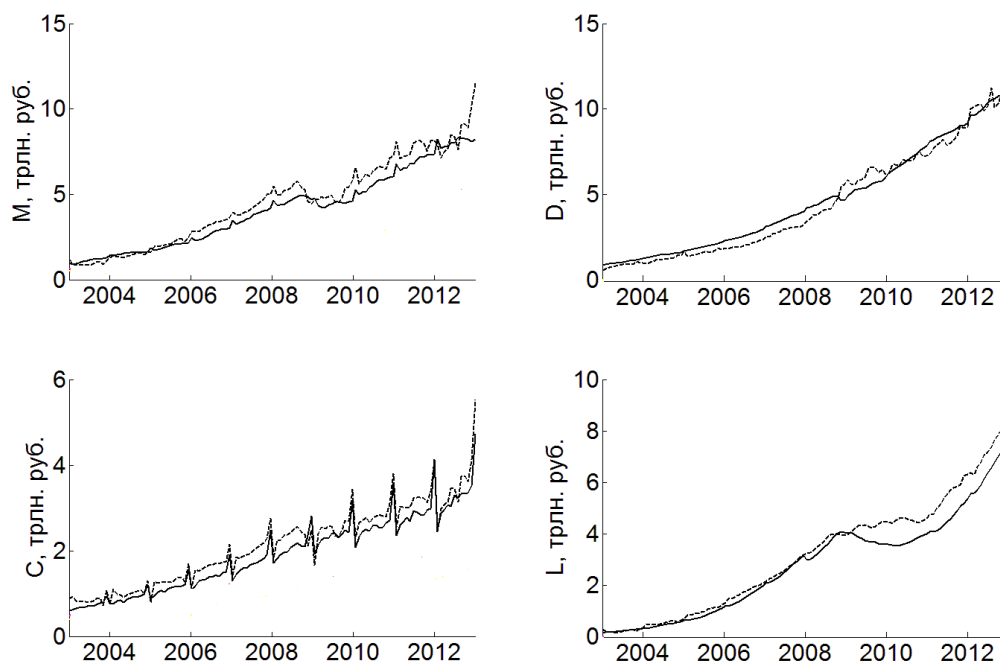


Рис. 3. Результаты расчетов программы для Российской Федерации. Черной линией показаны исторические данные, пунктирной линией – результаты расчетов.

Полученные по результатам расчеты достаточно хорошо отражают резкое снижение объема наличных денег, произошедший в конце 2008-начале 2009 гг. в связи с финансовым кризисом. Анализ спроса на наличные деньги является непростой задачей и полученный результат говорит о том, что модифицированная модель Рамсея может использоваться для качественного анализа поведения домашних хозяйств. Также модель отражает падение спроса на потребительские кредиты в период кризиса. При этом в реальности падение оказалось ниже рассчитанных значений. Объяснить это можно тем, что в ожидании кризиса домашние хозяйства пытались максимально быстро погасить все кредитные обязательства.

На рисунке 4 показан результат применения программы для расчетов кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств Казахстана. Модель не отражает резкое изменение объема кредитов, который наблюдается по статистическим данным в начале 2009 г. Это изменение связано с тем, что в Казахстане большую долю кредитов занимают валютные кредиты, объем которых при пересчете в национальную валюту резко увеличился из-за девальвации тенге в начале 2009г. В модели кредиты не делятся на кредиты в иностранной валюте и кредиты в национальной валюте, поэтому при девальвации пересчета объема кредитов не происходит.

Также в четвертой главе описывается идентификация программы для расчетов кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств Украины.

В **пятой главе** описывается программная реализация и ее применение для анализа потребительского поведения России, Украины и Казахстана.

Параграф 5.1 посвящен обсуждению требований, налагаемых на программную реализацию программного модуля. Программный комплекс прежде всего должен

обладать понятной легко расширяемой структурой и иметь возможность использоваться в моделях системного анализа экономики, разрабатываемых школой академика РАН А.А. Петрова. Также важным требованием к программному модулю является наличие блока по предварительной подготовке данных. Дело в том, что большинство экономических характеристик домашних хозяйств обладает сезонностью. При этом сезонность будет искажать работу блока идентификации параметров. Поэтому для правильной идентификации параметров необходимо учесть сезонные факторы из статистики. Для этого программный комплекс должен включать в себя методы сглаживания, исключения сезонных факторов и другие методы корректировки статистики.

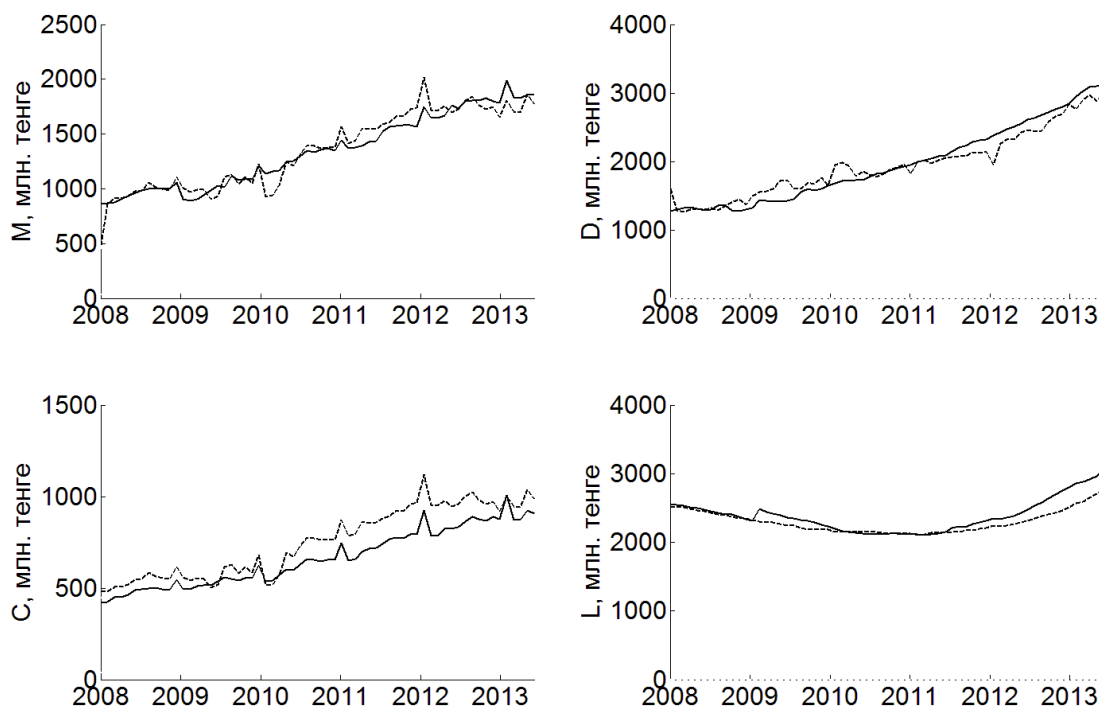


Рис. 4. Результаты расчетов программы для Казахстана. Черной линией показаны исторические данные, пунктирной линией – результаты расчетов.

В параграфе 5.2 описываются основные блоки, из которых состоит программный модуль:

- Блок загрузки данных.
- Блок визуализации расчетов
- Блок моделирования сберегательного поведения
- Блок моделирования кредитного поведения
- Блок сохранения результатов

В качестве платформы, на которой разрабатывался программный комплекс, была взята платформа Matlab. Matlab – это пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноименный язык. Язык Matlab является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности. Большим преимуществом Matlab является большое количество функций,

реализующих численные алгоритмы, операции над многочленами, поиск корней многочленов, интерполяция и экстраполяция кривых. Эта возможность позволила существенно сократить объем программы, сделать программу более понятной с точки зрения читаемости кода и снизить требования к требуемым вычислительным мощностям.

Параграф 5.3 содержит описание функциональности программы и численных методов, использовавшихся при ее реализации. Для вычисления синтеза оптимального управления, получаемого в модифицированной модели Рамсея, использовались численные методы по вычислению значений интегралов, поиска решения уравнений, заданных неявными функциями. Для исключения сезонности программа предлагает средства работы с входными данными. Сглаживание данных достигается с помощью алгоритма скользящего среднего. Также в этом параграфе описываются требования к входным данным для расчетов и описываются форматы сохранения расчетов.

В заключении сформулированы основные результаты работы, полученные в диссертации.

### **РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ.**

1. Предложена модификация модели Рамсея, которая учитывает спрос на наличные деньги и несовершенство рынка капитала. Построено решение задачи оптимального управления в модифицированной модели Рамсея в форме синтеза.
2. Получено аналитическое выражение для синтеза оптимального управления в модифицированной модели Рамсея на основе исследования магистрального эффекта.
3. Предложена постановка модифицированной модели Рамсея на бесконечном временном интервале. Условие на правом конце в задаче с конечным временным горизонтом заменяется в задаче с бесконечным временным горизонтом на фазовое ограничение.
4. Доказаны необходимые и достаточные условия существования репрезентативного домашнего хозяйства в модифицированной модели Рамсея. Необходимым и достаточным условием агрегируемости поведения домашних хозяйств в репрезентативного потребителя является требование согласованности краткосрочных рисков, характеризующихся коэффициентом отвращения к риску, и долгосрочных рисков, определяемых коэффициентом дисконтирования.
5. Разработан численный метод и программный модуль для идентификации модели распределения доходов домашних хозяйств на основе статистических данных. Программный модуль применен для анализа кредитно-сберегательного поведения России, Казахстана и Украины.

Автор приносит искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Алексеевичу Шананину за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы

### **СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:**

1. Гималтдинов И.Ф. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности и потребительского кредитования. Труды 53-й научной конференции МФТИ, Управление и прикладная математика, Т. 1, 2010, стр. 91-92.
2. Гималтдинов И.Ф. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея. Научная конференция «Тихоновские чтения», Москва, 2010, стр. 20-21.

3. Гималтдинов И.Ф. Идентификация модели рамсеевского типа по данным о сберегательном и потребительском поведении домашних хозяйств в России. Труды 54-й научной конференции МФТИ, Управление и прикладная математика, Т. 1, 2011, стр. 63-64.
4. Гималтдинов И.Ф. Промежуточная магистраль в обосновании синтеза оптимального управления в моделях экономического роста. Научная конференция «Тихоновские чтения», Москва, 2011, стр. 25-26.
5. **Гималтдинов И.Ф. Исследование спроса на потребительские кредиты и наличные деньги // Математическое моделирование, 2012, т. 24, №2, стр. 84-98.**
6. Гималтдинов И.Ф. Необходимые и достаточные условия существования репрезентативного потребителя в модели рамсеевского типа. Труды 55-й научной конференции МФТИ, Управление и прикладная математика, Т. 1, 2012, стр. 43-44.
7. Гималтдинов И.Ф. Достаточные условия существования репрезентативного потребителя в модели рамсеевского типа, 6 Международная школа-симпозиум «Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем (АМУР-2012)», Севастополь, стр. 114-117.
8. **Гималтдинов И.Ф. Необходимые и достаточные условия существования репрезентативного потребителя в одной модели рамсеевского типа. // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2013, №2, стр. 25-32.**
9. Гималтдинов И.Ф. Применение модифицированной модели Рамсея для анализа кредитно-сберегательного поведения России и Казахстана. Труды 56-й научной конференции МФТИ, Управление и прикладная математика, Т. 1, 2013, стр. 42-43.
10. **Гималтдинов И.Ф. Программа моделирования кредитно-сберегательного поведения домашних хозяйств Российской Федерации. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013618391. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 6 сентября 2013 г. Москва, реестр программ для ЭВМ, 2013.**